

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Silvana Marini Rodrigues Lopes

Complexidade em geometria
euclidiana plana

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação
em Matemática Aplicada

Rio de Janeiro
Agosto de 2002.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Silvana Marini Rodrigues Lopes

Complexidade em geometria euclidiana plana

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da PUC-Rio como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Humberto José Bortolossi

Co-orientador: Prof. Carlos Tomei

Rio de Janeiro
Agosto de 2002.



Silvana Marini Rodrigues Lopes

Complexidade em geometria
euclidiana plana

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da PUC-Rio como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Humberto Bortolossi
Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Carlos Tomei
Co-orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho
IMPA

Prof. João Bosco Pitombeira
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 30 de agosto de 2002.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Silvana Marini Rodrigues Lopes

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na PUC-Rio (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro). Participou de congressos na área de Educação Matemática. É professora agregada do Departamento de Matemática na PUC-Rio.

Ficha Catalográfica

Lopes, Silvana Marini Rodrigues.

Complexidade em geometria euclidiana plana / Silvana Marini Rodrigues Lopes; orientador: Humberto José Bortolossi; co-orientador: Carlos Tomei. – Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Matemática, 2002.

[8], 98f. : il. ; 30cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Geometria Euclidiana. 3. Teorema de Napoleão. 4. Polígonos regulares. 5. Automatização em geometria. 6. Inversões. I. Bortolossi, Humberto José. II. Tomei, Carlos. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Aos meus avós Walter e Regina,
pelo exemplo de trabalho e dedicação.

Agradecimentos

Obrigada aos meus orientadores, Humberto Bortolossi e Carlos Tomei pela dedicação e por todos os ensinamentos.

Aos meus pais Maria Vitória e Gilberto, às minhas irmãs queridas Rachel e Ursula e ao meu namorado André, pela presença e ausência, ambas no momento certo.

Obrigada ao meu tio Luís pelo incentivo transmitido através do interesse e admiração pelo meu trabalho.

Aos meus colegas da PUC, companheiros de Hipódromo e/ou Lumiar – Vlad, Serginho, Juju, Sérgio, Bianca, Magno, Andrea, Jaime, Tania, Bernardo, Débora, Thomas, Rachel, Eliana, Cris e Júlia – pela ajuda e amizade.

À Suzi, bibliotecária da PUC-Rio, a todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática – em particular, Creuza, Aninha, Otávio, Orlando e Marcos Alexandrino – sempre tão atenciosos.

Ao CNPq, CAPES e PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Lopes, Silvana Marini Rodrigues; Bortolossi, Humberto José; Tomei, Carlos. **Complexidade em geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro, 2002. 106p. Dissertação de mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Consideramos duas formas de complexidade em geometria euclidiana plana. Na primeira, problemas são descritos algebricamente, e a complexidade é cotada essencialmente pelo grau de um polinômio. Como consequência, mostramos que vários resultados gerais e familiares em geometria podem ser demonstrados a partir da simples verificação de dois ou três casos particulares. A segunda forma faz uso da descrição sintática dos teoremas, que permite uma quantificação da complexidade em termos lógicos (número de quantificadores e átomos de uma fórmula). Inspirados por esta última abordagem, são descritos alguns procedimentos de demonstração automática. Alguns grupos habituais de operações em geometria são apresentados com a intenção de simplificar as duas abordagens. Através do estudo de técnicas mais avançadas em matemática trazemos novos pontos de vista a assuntos estudados no ensino médio.

Palavras-chave

Matemática; geometria euclidiana; números complexos; complexidade algébrica; automatização em geometria; polígonos regulares; inversões.

Abstract

Lopes, Silvana Marini Rodrigues; Bortolossi, Humberto José; Tomei, Carlos.
Complexidade em geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro, 2002.
106p. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade
Católica do Rio de Janeiro.

Two forms of complexity in Euclidean plane geometry are considered. In the first one, problems are described algebraically, and the complexity level is measured essentially by the degree of a polynomial. As a consequence, many familiar and general results in geometry can be proved by inspecting two or three special cases. The second form uses the syntactic description of a theorem allowing for a quantification of the complexity in logic terms (number of quantifiers and atoms in the formula). Inspired by this approach, some procedures in mechanized proofs are described. We also present some traditional groups of operations in geometry which simplify the two approaches. The study of more advanced techniques in mathematics sheds new light on standard high school topics.

Keywords

Mathematics; euclidean geometry; complex numbers; algebraic complexity; geometry automatization; regular polygons; inversion.

Índice

1	Introdução	9
2	O teorema de Napoleão	13
2.1	Três demonstrações clássicas	16
2.2	A construção por rotações	21
2.3	A generalização de Barlotti	29
2.4	Outras propriedades do triângulo de Napoleão	36
3	Além de triângulos equiláteros e quadrados	44
3.1	A geometria do eneágono e o problema 1	46
3.2	A geometria do octadecágono e o problema 2	48
3.3	Apêndice: a tabela trigonométrica de 3° em 3°	53
4	Automatização em geometria	58
4.1	Euclides e a demonstração sintética	60
4.2	Descartes e a demonstração analítica	63
4.3	Hilbert e o método universal	65
4.4	Tarski e a eliminação de quantificadores	71
4.5	O método de Wu	77
5	Inversões e o porismo de Steiner	79
5.1	Inversões	80
5.2	A demonstração do porismo	86
5.3	Apêndice: O porismo de Poncelet	89
	Bibliografia	94

Lista de Figuras

2.1	O triângulo externo de Napoleão.	13
2.2	O triângulo interno de Napoleão.	14
2.3	Uma demonstração trigonométrica.	17
2.4	Uma demonstração sintética.	19
2.5	Uma generalização do teorema de Napoleão.	20
2.6	O argumento extremal.	21
2.7	A construção do triângulo de Napoleão por rotações.	23
2.8	A demonstração por rotações em \mathbb{R}^2	24
2.9	Rotações em notação complexa.	26
2.10	Duas configurações para as quais o teorema é trivial.	28
2.11	A construção clássica do triângulo externo de Napoleão não admite uma extensão contínua.	30
2.12	A construção clássica do triângulo interno de Napoleão não admite uma extensão contínua.	31
2.13	O teorema de Napoleão não vale para quadriláteros.	32
2.14	O teorema de Thébault para paralelogramos.	33
2.15	A generalização de Barlotti do teorema de Napoleão.	35
2.17	Três segmentos especiais.	38
2.16	Quatro configurações onde a propriedade 2 é verdadeira.	39
2.18	Os pontos P , Q e R têm coordenadas afins.	40
2.19	A propriedade 3 se verifica para um triângulo isósceles.	42
2.20	Quatro valores de y para os quais o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles.	43
3.1	O problema 1.	44
3.2	Problema 2.	45
3.3	Uma relação métrica entre o lado e as diagonais do eneágono regular.	47
3.4	O triângulo $\triangle ABC$ inscrito em um eneágono regular.	48

3.5	Algumas diagonais do octadecágono regular.	49
3.6	O triângulo $\triangle ABC$ inscrito no octadecágono.	50
3.7	A solução de Tripp do problema 2.	51
3.8	O problema adventício.	53
3.9	Dois problemas propostos.	54
3.10	O pentágono regular e o ângulo de 18°	55
4.1	A construção de um triângulo equilátero.	60
4.2	Todo triângulo é isósceles (um teorema falso).	61
4.3	As diagonais de um paralelogramo se interceptam em seus pontos médios.	62
4.4	O teorema de Gauss-Bodenmiller.	64
4.5	Uma forma especial do teorema de Desargues.	68
4.6	Um caso degenerado onde o teorema de Desargues é verdadeiro.	70
4.7	Um caso degenerado onde o teorema de Desargues é falso.	70
4.8	O problema da elipse de Kahan.	76
5.1	Duas cadeias de Steiner.	80
5.2	P' é a inversão de P com relação ao círculo C	81
5.3	A inversão algébrica é o conjugado de uma inversão.	82
5.4	A inversão de uma reta ℓ que não passa por O	83
5.5	A inversão de um círculo que não passa por O	84
5.6	A inversão de algébrica, $1/z$	85
5.7	A inversão geométrica, $1/\bar{z}$	85
5.8	Dois problemas de geometria sobre tangência de círculos	86
5.9	Tornando dois círculos concêntricos usando inversões.	87
5.10	Os círculos c e C em um sistema de coordenadas.	89
5.11	Trajetórias entre duas elipses.	90
5.12	Uma transformação projetiva.	91
5.13	Uma trajetória do bilhar elíptico e sua lei de conservação.	92

Capítulo 1

Introdução

Ao longo de seus estudos de matemática, o aluno é apresentado a estruturas cada vez mais sofisticadas e não é uma prática comum do processo educativo matemático habitual explorar como estas novas estruturas interagem com as anteriores. Em geometria, por exemplo, problemas e teoremas costumam ser descritos inicialmente com técnicas de geometria sintética. Mais tarde, depois que lhe ensinam trigonometria, o aluno não vê situações em que a nova ferramenta pode ser empregada no estudo de situações em que trigonometria não apareça explicitamente em sua descrição. Neste sistema educativo, temos uma valorização excessiva dos produtos em detrimento dos processos envolvidos, o que implica na perda de significado e coerência das ações e práticas tanto por parte dos docentes quanto dos estudantes. O uso de técnicas novas estimula o aluno a reavaliar a importância de um ferramental teórico sofisticado. Além disso, a extensão temporal do estudo da geometria e sua interação com outros aspectos da matemática é uma oportunidade rara de acompanhamento de um desenvolvimento intelectual integrado.

Um primeiro exemplo, explorado no primeiro capítulo, está associado ao emprego de números complexos em geometria analítica. A idéia não só simplifica as contas como oferece um ponto de vista conceitual inesperado. Consideraremos o chamado *teorema de Napoleão* que, sob um enunciado simples e despretensioso, esconde uma grande quantidade de propriedades, variações e generalizações. Apresentaremos alguns destes resultados com o objetivo de direcionar a atenção do leitor para o novo ponto de vista conceitual, que nos permitirá provar o teorema geral a partir de pouquíssimos casos particulares. Esta técnica obtém um

polinômio que é identicamente nulo se, e somente se, o teorema é verdadeiro, de tal maneira que cada raiz do polinômio corresponde a um caso particular para o qual se sabe que o teorema é correto. Assim, o grau do polinômio pode ser tomado como uma medida da *complexidade algébrica* do teorema, estimando além disso o número de casos particulares necessários para a sua demonstração. Ao teorema de Napoleão, por exemplo, conseguimos associar um polinômio de grau 1 e, então, com apenas dois exemplos (banais), provamos o caso geral!

A abordagem habitual entre alunos, aliás, procede justamente na direção de obter exemplos da situação mais geral desejada. O que a técnica acima mostra é que cabe ao professor escolher entre duas alternativas: ou induzir o aluno a buscar um argumento geral (que é o que se faz habitualmente), ou pedir para que ele considere o problema de contar quantos exemplos são necessários para que o resultado geral seja uma consequência deles!

Geometria analítica é habitualmente apresentada como uma panacéia universal: problemas em geometria convertem-se em contas, ainda que enfadonhas. A afirmação entretanto é passível de crítica. Para começar, as contas, como descritas nos cursos em geral, não são as mais adequadas possíveis (evidência de que ninguém realmente resolve problemas dessa maneira). Mais, a maioria das contas pode ser literalmente *evitada*, como mostra o argumento que cota a complexidade algébrica de um problema. De fato, como veremos no capítulo 1, o polinômio de grau 1 cuja trivialidade corresponde ao teorema de Napoleão não tem que ser calculado: observações triviais obtêm o valor do grau, a partir do qual a demonstração segue. Outras propriedades relacionadas ao teorema são apresentadas como exemplos de complexidade algébrica 2 e 3.

Uma parte substancial da geometria ensinada no colégio é uma versão sintética de fatos algébricos muito simples. Assim, por exemplo, as raízes quadradas de 2 e 3 estão sempre relacionadas a propriedades do quadrado e do triângulo (hexágono) equilátero. Em cursos mais sofisticados, a razão áurea é relacionada a comprimentos de diagonais do pentágono regular. Da mesma forma, polígonos regulares com mais lados fazem considerar novos números algébricos (novas raízes da unidade), cujas propriedades podem ser descritas por equações polinomiais ou por propriedades sintéticas (isto é, que admitem representação e demonstração às vezes de caráter geométrico). É claro, aliás, que deve-se esperar um aumento da complexidade algébrica quando polígonos regulares com mais lados começam

a aparecer. No capítulo 2, apresentaremos dois problemas sobre triângulos considerados difíceis por professores de ensino médio. Estes problemas envolvem, respectivamente, os ângulos de 100° e 20° . Em princípio, abordagens algébricas recaem em equações cúbicas, como por exemplo a que relaciona $\cos 20^\circ$ a $\cos 60^\circ$. Esses ângulos estão presentes no estudo do eneágono e do octadecágono regulares e podemos obter soluções sintéticas elementares dos problemas originais usando propriedades pouco familiares destes polígonos. No apêndice do capítulo mostramos que com o estudo das relações entre lado e diagonal do pentágono regular podemos obter o cosseno de 18° e, a partir dele, construir uma tabela trigonométrica exata para ângulos múltiplos de 3° .

O capítulo 3 considera uma outra interpretação de complexidade em geometria, mais próxima da hierarquização que um lógico faria de certas teorias. O capítulo elabora uma retrospectiva histórica dos estilos de demonstração em geometria, começando com o estilo sintético de Euclides, o ponto de partida para o método axiomático. Seguimos então com Descartes e a geometria analítica que representou o primeiro passo para a algebrização da geometria. No fim do século XIX, Hilbert saneou algumas incorreções da axiomática euclidiana (questões envolvendo a completude dos reais e relações de ordem de pontos em retas) e apresentou um procedimento mecânico de demonstração para uma classe substancial de teoremas. O método de decisão de Tarski foi o grande passo conceitual seguinte: com ele, fica automatizada a demonstração de uma classe muito mais ampla de teoremas — todos os descritos por uma *linguagem de primeira ordem* (essencialmente, todos os teoremas de geometria que não contenham um quantificador agindo sobre um número inteiro). Infelizmente, seu desempenho computacional não é satisfatório: um programa de computador que realmente seguisse o projeto de Tarski para demonstrar teoremas não teria relevância prática. Finalmente, apresentamos sem muitos detalhes o método de Wu que, com um desempenho computacional melhor que o de Tarski, demonstra teoremas cuja hipótese e tese podem ser convertidas em equações polinomiais (ou suas negações) que tenham coeficientes racionais.

O ponto técnico fundamental no argumento de Tarski é a *eliminação de quantificadores* que, em princípio, simplifica uma fórmula lógica ao obter outra equivalente com um quantificador a menos. Veremos através de um exemplo que o preço dessa simplificação pode ser enorme, sob o ponto de vista da extensão das

fórmulas empregadas. O método de Wu, por sua vez, tem uma virtude adicional: ao segui-lo cuidadosamente, verifica-se freqüentemente a necessidade de *hipóteses de não-degenerescência* (genericamente satisfeitas) que são automaticamente explicitadas e indispensáveis para o andamento de qualquer demonstração.

No capítulo 4, finalmente, apresentamos dois exemplos de teoremas de geometria que não são passíveis de demonstração pelas técnicas anteriores: os porismos de Steiner e Poncelet. Em um certo sentido, os teoremas tem complexidade algébrica infinita. Isso é um pouco enganador: no caso do porismo de Steiner, veremos em detalhe que o emprego de *inversões geométricas* trivializa o problema geral. Para o porismo de Poncelet, a situação é bem mais difícil: este, por sua vez, pode ser trivializado por uma justaposição de duas transformações, uma *projetiva* e outra *simplética*. Apresentaremos apenas uma descrição superficial do procedimento no apêndice ao capítulo.

Aproveitando a oportunidade de reconsiderar aspectos didáticos de geometria, achamos que podíamos enriquecer os recursos gráficos fazendo uso de software apropriado. Assim, quase todas as figuras dessa dissertação são passíveis de manipulação (escolha de pontos, animação) a partir de arquivos disponíveis no CD-ROM incorporado ao texto. O material é completamente auto-contido, fazendo uso apenas de um navegador (*browser*) para seu estudo.

Capítulo 2

O teorema de Napoleão

O teorema de Napoleão é um excelente exemplo de situação que admite vários níveis interpretativos. Começamos com os enunciados clássicos.

Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, construa triângulos equiláteros apoiados externamente sobre cada um de seus lados. O *triângulo externo de Napoleão* é obtido unindo-se os baricentros X , Y e Z destes triângulos (figura 2.1).

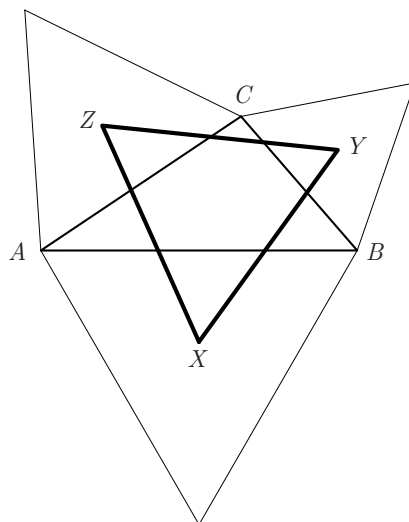


Figura 2.1: O triângulo externo de Napoleão.

Teorema 2.1 O triângulo externo de Napoleão de *qualquer* triângulo é equilátero.

Quando os triângulos equiláteros são construídos internamente a $\triangle ABC$, seus baricentros X' , Y' e Z' formam o *triângulo interno de Napoleão* (figura 2.2).

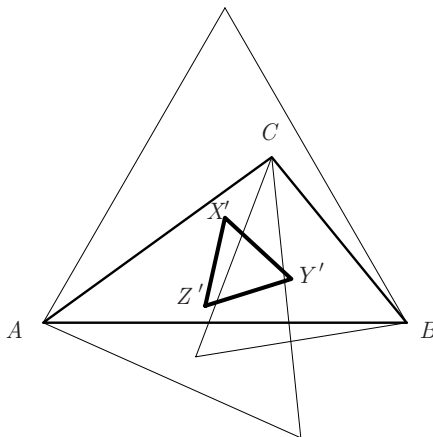


Figura 2.2: O triângulo interno de Napoleão.

Teorema 2.2 O triângulo interno de Napoleão também é equilátero.

O teorema 2.1 é atribuído a Napoleão Bonaparte (1769 – 1821), embora não haja evidências de que seja ele o autor do mesmo [115]. A referência mais antiga que relaciona Napoleão com este teorema é o livro de Faifofer [45] de 1911 (“*teorema proposto per la dimostrazione da Napoleone a Lagrange*”). Contudo, existem referências mais antigas do teorema onde o nome de Napoleão não aparece: Turner [124] de 1843 e Laisant [75] de 1877.

O teorema de Napoleão combina um enunciado simples com uma certa dificuldade de demonstração: não se espera que um aluno do ensino médio seja capaz de obtê-la. Diversos autores estudaram também as várias propriedades adicionais presentes em sua configuração geométrica, algumas das quais consideraremos neste texto. O teorema e suas extensões foram tratados com técnicas de geometria sintética [38, 69], variáveis complexas [44, 93, 94, 86, 92, 61], álgebra linear [137, 25, 80], trigonometria [21], análise harmônica [97], geometria discreta [109, 110] e geometria mecanizada [28, 30, 58].

Neste capítulo, apresentaremos algumas demonstrações do teorema, contrapondo dois tipos de construções do triângulo de Napoleão: a clássica que segue a construção como enunciada acima e uma construção por rotações que descreveremos abaixo. Na construção clássica, o triângulo de Napoleão não está definido

quando os vértices A , B e C são colineares; veremos que, para a construção por rotações, o teorema pode ser enunciado para quaisquer pontos A , B e C : isso tem a vantagem de representar em um único caso a construção dos triângulos externo e interno de Napoleão. A idéia original de usar rotações para construir o triângulo de Napoleão é de Yaglom [137], que usou rotações como transformações afins do plano cartesiano \mathbb{R}^2 (demonstração 4, página 22, seção 2.2).

A demonstração de Yaglom invoca vários resultados a respeito de composições de rotações que devem ser demonstrados independentemente. Não é freqüente (e Yaglom segue a linha habitual) empregar números complexos para representar rotações, mas isso se torna especialmente vantajoso para nosso ponto de vista. Uma rotação de um ponto em torno da origem no sentido anti-horário por um ângulo θ é, simplesmente, o mesmo que multiplicar este ponto pela constante $e^{i\theta}$. Esta notação é empregada na demonstração 5 (página 26, seção 2.2), onde as coordenadas de todos os pontos envolvidos na construção do triângulo de Napoleão são dadas explicitamente, em preparação para a demonstração 6, bem mais conceitual.

As contas feitas na demonstração 6 da página 27, seção 2.2 (ou melhor, as contas que foram evitadas nessa demonstração!) deixam claro um fato muito interessante: para mostrar o teorema de Napoleão, basta verificar que uma certa expressão afim em z (isto é, uma expressão da forma $az + b$, com a e b constantes complexas) é igual a zero para *qualquer valor* de z ! A escolha de z está relacionada com a disposição dos vértices do triângulo $\triangle ABC$. Uma expressão afim é identicamente nula exatamente quando tem (pelo menos) duas raízes. Em termos geométricos, isto é o mesmo que encontrar duas configurações particulares para as quais o teorema de Napoleão é verdadeiro. Em resumo, dois exemplos (dois casos particulares!) para o teorema de Napoleão são suficientes para estabelecer o teorema geral.

O teorema de Napoleão, então, tem uma complexidade algébrica muito baixa. De forma semelhante, certas propriedades da configuração de Napoleão são algebricamente muito simples (isto é, são equivalentes à trivialidade de expressões polinomiais de grau baixo) e, portanto, podem ser demonstradas a partir de poucos casos particulares. Este é o caso da propriedade 1 — os centros dos triângulos externo e interno de Napoleão coincidem com o centro do triângulo inicial — na seção 2.4 e da *generalização de Barlotti* (uma extensão do teorema de

Napoleão para n -ágonos) na seção 2.3, ambos associados a expressões de grau 1. Na seção 2.4, consideraremos um exemplo de complexidade quadrática — a diferença entre as áreas dos triângulos externo e interno de Napoleão é igual a área do triângulo inicial (propriedade 2), e um de complexidade cúbica — a concorrência dos segmentos \overline{AQ} , \overline{BR} e \overline{CP} (parte da propriedade 3).

2.1 Três demonstrações clássicas

Apresentaremos, a seguir, três demonstrações clássicas do teorema de Napoleão. Dado o triângulo inicial $\triangle ABC$, estabeleceremos as seguintes notações: P , Q e R são os vértices dos triângulos equiláteros $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ e $\triangle CAR$, construídos externamente sobre os lados de $\triangle ABC$; X , Y e Z são os respectivos baricentros destes triângulos equiláteros, em particular, $\triangle XYZ$ é o triângulo externo de Napoleão; os comprimentos dos lados opostos aos vértices A , B e C do triângulo $\triangle ABC$ são denotados por a , b e c , respectivamente, e os ângulos relativos aos vértices A , B e C por \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} . Usaremos uma notação análoga para denotar os ângulos e os comprimentos dos lados do triângulo $\triangle XYZ$. Finalmente, o comprimento de um segmento \overline{MN} será denotado por MN .

Demonstração 1 (trigonométrica, Brodie e Lambrou [21]).

Considere t , u e v os comprimentos dos segmentos \overline{AX} , \overline{AZ} e \overline{CY} , respectivamente, como na figura 2.3.

Como $\angle XAB = \angle CAZ = 30^\circ$, podemos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle AXZ$:

$$y^2 = u^2 + t^2 - 2ut \cos(\widehat{A} + 60^\circ). \quad (2.1)$$

De forma análoga, temos que

$$x^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos(\widehat{C} + 60^\circ). \quad (2.2)$$

Como a distância do baricentro a um dos vértices de um triângulo vale $2/3$ do comprimento da respectiva mediana e, como o baricentro coincide com o orto-

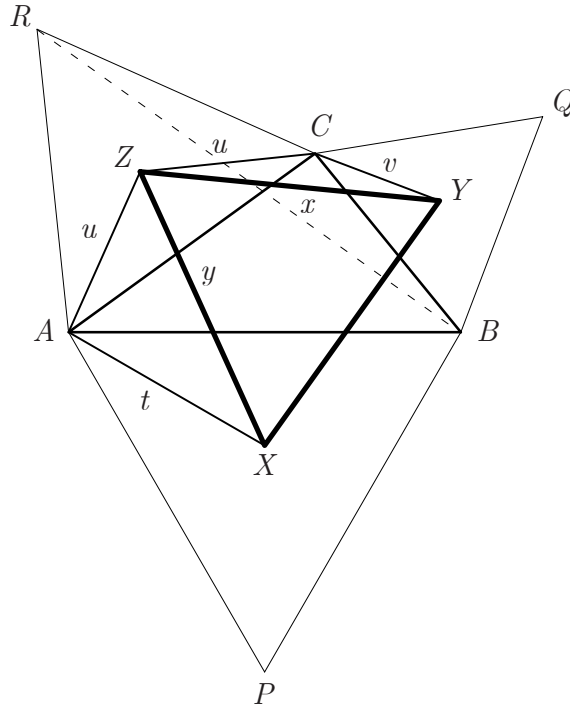


Figura 2.3: Uma demonstração trigonométrica.

centro em um triângulo equilátero, podemos escrever:

$$t = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} c = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad u = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Substituindo os valores de t e u em (2.1) e (2.2) temos, respectivamente, que

$$3y^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A} + 60^\circ) \quad \text{e} \quad (2.3)$$

$$3x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C} + 60^\circ). \quad (2.4)$$

Agora, aplicando a lei dos cossenos aos triângulos $\triangle ABR$ e $\triangle BCR$, podemos expressar o quadrado do comprimento do lado \overline{BR} de dois modos diferentes:

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A} + 60^\circ) = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C} + 60^\circ).$$

Por (2.3) e (2.4), a expressão do lado esquerdo da equação acima é igual a $3y^2$ e a expressão da direita é igual a $3x^2$, donde concluímos que $y = x$ ou $XZ = YZ$. Considerando os triângulos $\triangle ACQ$ e $\triangle ABQ$, ao invés, obtemos $YZ = XZ$, o

que conclui a prova. ■

Demonstração 2 (sintética, Honsberger [69]).

Considere a figura 2.4, onde O é o ponto de interseção dos círculos ABP e BCQ . Observe que

$$\angle AOB = 180^\circ - \widehat{P} \quad \text{e} \quad \angle BOC = 180^\circ - \widehat{Q}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \angle AOC &= 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{P}) - (180^\circ - \widehat{Q}) \\ &= \widehat{P} + \widehat{Q}. \end{aligned}$$

Mas $\widehat{P} + \widehat{Q} = 180^\circ - \widehat{R}$ e, portanto, $\angle AOC$ e \widehat{R} são suplementares. Logo, o quadrilátero $AOCR$ está inscrito no círculo de centro em Z e que é concorrente aos círculos ABP e BCQ , no ponto O .

Além disso, a reta que passa pelos centros de dois círculos que se interceptam é perpendicular a corda em comum. Logo, \overline{XZ} e \overline{XY} são perpendiculares a \overline{OA} e \overline{OB} , respectivamente. Deste modo, temos que $\angle AOB$ e \widehat{X} são suplementares ($\angle AOB + \widehat{X} = 180^\circ$). Por outro lado, já tínhamos visto que $\angle AOB + \widehat{P} = 180^\circ$, donde podemos concluir que $\widehat{P} = \widehat{X}$. Analogamente, temos $\widehat{Q} = \widehat{Y}$ e $\widehat{R} = \widehat{Z}$. Como $\widehat{P} = \widehat{Q} = \widehat{R} = 60^\circ$, o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero. ■

Observação: A demonstração acima apresenta o teorema de Napoleão como um caso particular de um teorema mais geral, cuja demonstração é obtida fazendo adaptações menores no texto. Dado um triângulo $\triangle ABC$, construa externamente três triângulos $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ e $\triangle CAR$, de forma que $\widehat{P} + \widehat{Q} + \widehat{R} = 180^\circ$. Se $\triangle XYZ$ é o triângulo formado pelos circuncentros X , Y e Z dos triângulos $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ e $\triangle CAR$, respectivamente, então $\widehat{X} = \widehat{P}$, $\widehat{Y} = \widehat{Q}$ e $\widehat{Z} = \widehat{R}$ (figura 2.5).

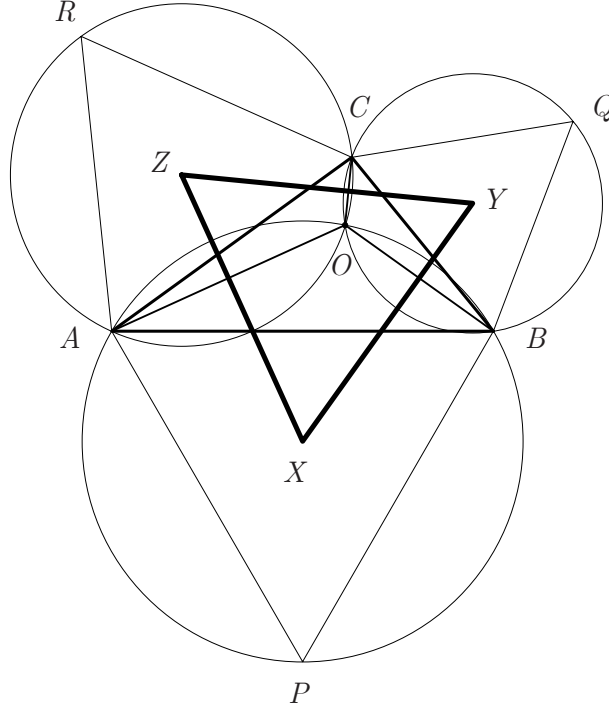


Figura 2.4: Uma demonstração sintética.

Demonstração 3 (um argumento extremal, Honsberger [69]).

Sejam \widehat{AB} , \widehat{BC} e \widehat{CA} , os arcos relativos aos círculos de centros X , Y e Z , que circunscrevem os triângulos equiláteros, $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ e $\triangle CAR$, como mostra a figura 2.6 (a). Seja D um ponto no arco \widehat{AB} e E no arco \widehat{AC} , de tal forma que o segmento \overline{DE} passe pelo ponto A . Então, \overline{DB} e \overline{EC} fazem 60° com \overline{DE} , em D e em E , respectivamente.

Conseqüentemente, as retas que contêm os segmentos \overline{DB} e \overline{EC} se encontram em um ponto F , formando um ângulo de 60° . Desta maneira, temos que o ponto F deve pertencer obrigatoriamente a \widehat{BC} , já que este é o arco capaz de 60° sobre o segmento \overline{BC} . Logo, para todo ponto D no arco \widehat{AB} , existe um triângulo equilátero $\triangle DEF$ que circunscreve o triângulo inicial $\triangle ABC$ e tem um vértice em cada arco (figura 2.6 (b)).

Construindo as perpendiculares a \overline{DF} pelos centros X e Y , obtemos os pontos médios M e N das cordas \overline{DB} e \overline{BF} . Seja T o quarto vértice do retângulo $XMNT$. Claramente, $DF = 2MN = 2XT$. No entanto, \overline{XT} é um dos catetos do triângulo retângulo $\triangle XYT$ e, portanto, não é maior que a hipotenusa \overline{XY} .

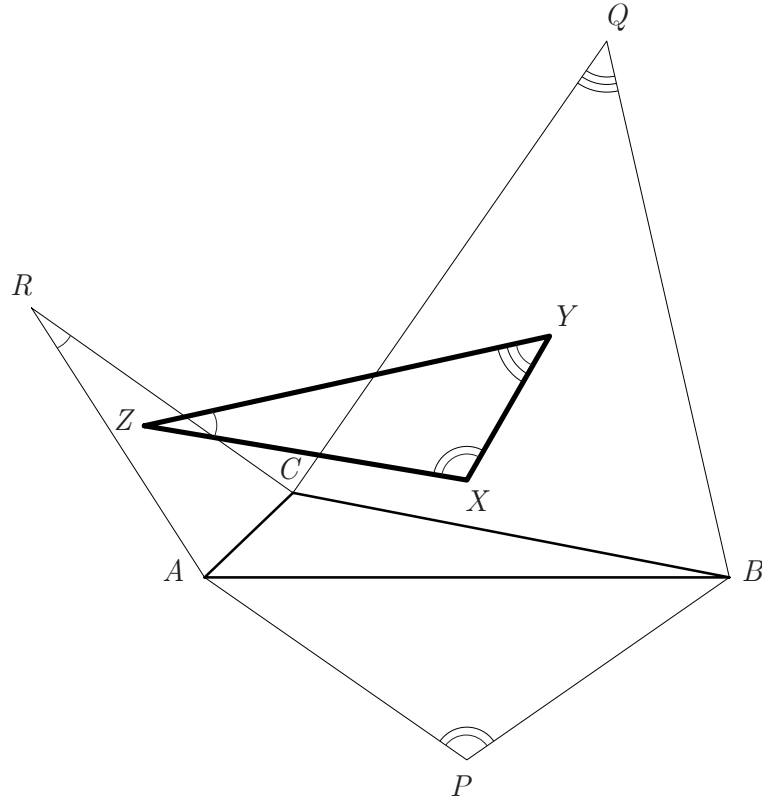


Figura 2.5: Uma generalização do teorema de Napoleão.

Como \overline{XT} é paralelo a \overline{DF} , é fácil notar que se D está muito próximo de A , o triângulo retângulo $\triangle XYT$ é externo ao triângulo de Napoleão $\triangle XYZ$. Por outro lado, se D está muito próximo a B , o triângulo retângulo $\triangle XYT$ é interno ao triângulo $\triangle XYZ$. Assim, podemos concluir que existe um ponto D no arco \widehat{AB} para o qual o lado \overline{XT} do triângulo $\triangle XYT$ coincide com a hipotenusa \overline{XY} , atingindo assim o seu comprimento máximo: $XT = XY$. Mas sabemos que $DF = 2XT$ e, portanto, o comprimento máximo que \overline{DF} assume é $2XY$ (quando \overline{DF} é paralelo a \overline{XY}). Analogamente, o comprimento máximo que \overline{FE} e \overline{ED} assumem é $2YZ$ e $2XZ$, respectivamente.

Como o triângulo $\triangle DEF$ é sempre equilátero, seus lados assumem o (mesmo) comprimento máximo ao mesmo tempo. Isto significa que $2XY = 2YZ = 2XZ$ e, portanto, o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero. ■

Todas as demonstrações apresentadas acima podem ser adaptadas para o caso em que o triângulo de Napoleão é o interno. Na demonstração 2, por exemplo, Honsberger [69] usa o fato de que o triângulo externo de Napoleão é equilátero

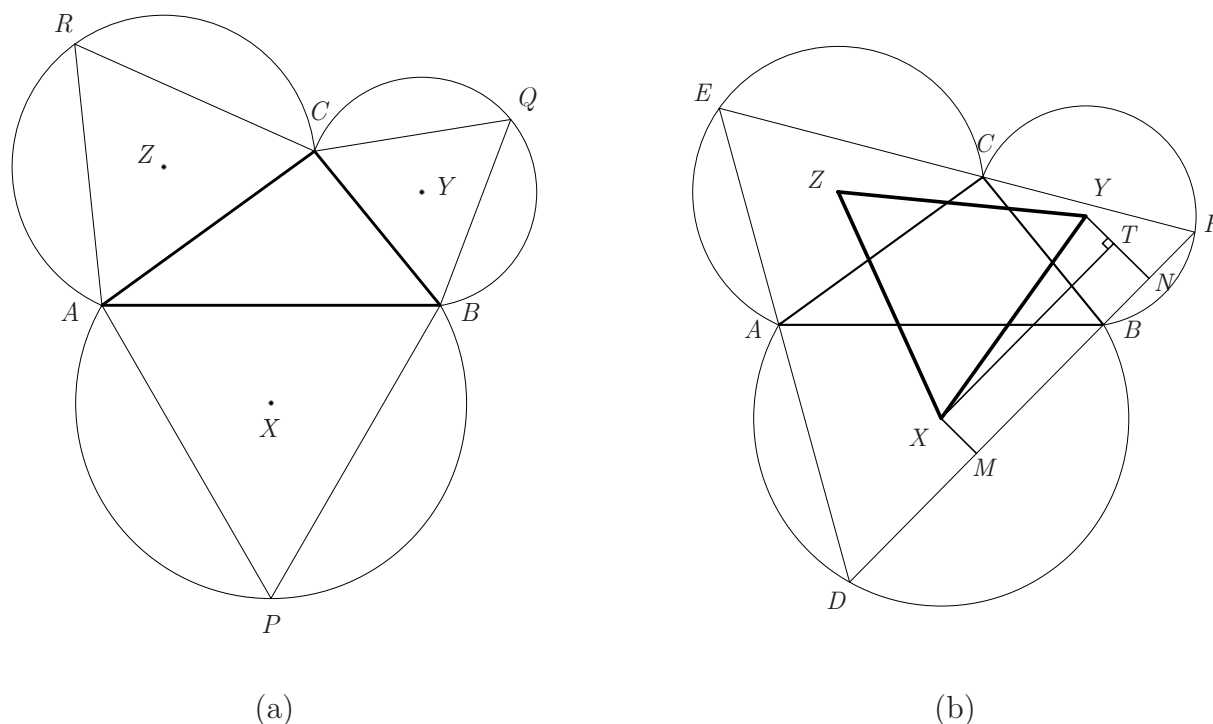


Figura 2.6: O argumento extremal.

para provar por trigonometria o caso interno. Na maioria das vezes, quando o teorema do triângulo interno de Napoleão é enunciado, a sua demonstração é indicada como análoga ao caso externo.

2.2 A construção por rotações

Quando A , B e C são colineares, a construção dos triângulos de Napoleão não faz sentido. Faremos, agora, uma construção semelhante que permite que o teorema seja enunciado para quaisquer vértices A , B e C e faz com que os casos externo e interno do triângulo de Napoleão possam ser tratados como um único caso.

Sejam dados três pontos, A , B e C , no plano. Construa triângulos equiláteros sobre os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} , da seguinte forma: faça uma rotação de 60° no sentido anti-horário, dos vértices A , B e C em torno dos vértices B , C e A , obtendo os pontos P , Q e R , vértices dos triângulos equiláteros $\triangle ABP$,

$\triangle BCQ$ e $\triangle ACR$, respectivamente. Chamaremos o *triângulo de Napoleão obtido por rotações* ou mais simplesmente, o *triângulo de Napoleão*, aquele obtido pela união dos respectivos baricentros X , Y e Z , dos triângulos equiláteros $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ e $\triangle ACR$.

Com esta construção, o triângulo de Napoleão fica bem definido para quaisquer pontos A , B e C , inclusive quando eles são colineares ou coincidentes.

Sejam A , B e C pontos não colineares e dispostos no sentido anti-horário (resp. horário). Note, pela figura 2.7 (a) (resp. figura 2.7 (c)), que os triângulos equiláteros obtidos por rotações correspondem aos triângulos equiláteros externos (resp. internos) da versão clássica. Assim, o triângulo de Napoleão é o mesmo que o triângulo externo (resp. interno) de Napoleão. Desta maneira, a construção por rotações nos permite enunciar o teorema clássico, nos casos em que o triângulo de Napoleão é externo ou interno.

Teorema 2.3 O triângulo de Napoleão é equilátero.

Demonstração 4 (rotações como transformações no plano, Yaglom [137]).

Considere a configuração da figura 2.8, onde X , Y e Z são os baricentros dos triângulos equiláteros, construídos por rotações, sobre os lados de um triângulo $\triangle ABC$.

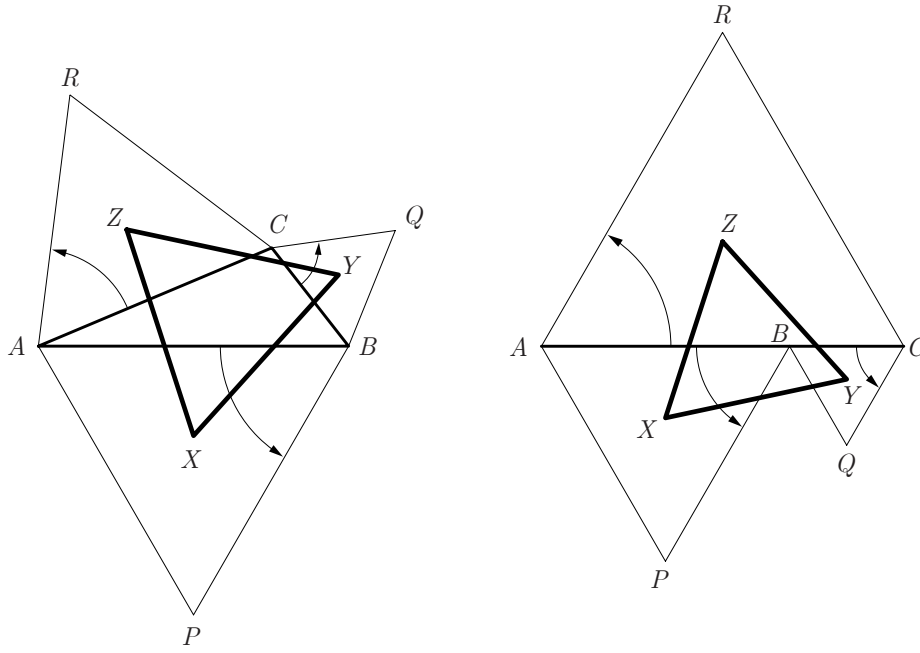
Denotaremos por $R_P(M)$ a rotação de 120° no sentido horário de um ponto M em torno de P , ou seja,

$$\begin{aligned} R_P: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ M &\mapsto R_P(M) = P + R(M - P) \end{aligned} ,$$

onde $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma rotação de 120° no sentido horário em torno da origem.

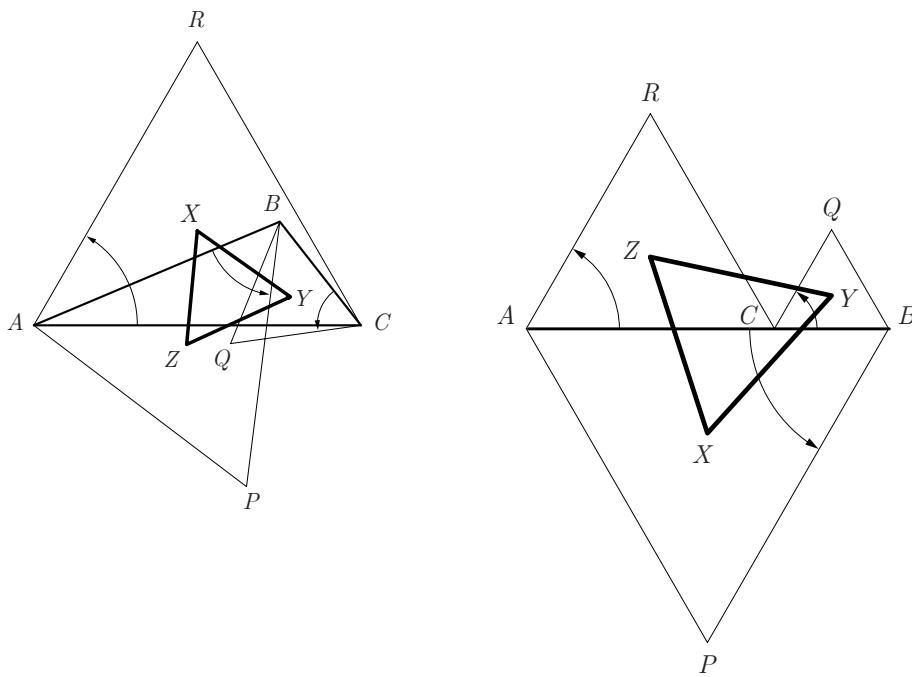
Seja a seqüência de três rotações, cada uma de 120° em torno dos pontos X , Y e Z :

$$\begin{aligned} R_X(P) &= X + R(P - X) = (I - R)(X) + R(P), \\ R_Y(P) &= Y + R(P - Y) = (I - R)(Y) + R(P), \\ R_Z(P) &= Z + R(P - Z) = (I - R)(Z) + R(P), \end{aligned}$$



(a) A , B e C não-colineares

(b) A , B e C colineares



(c) A , C e B não-colineares

(d) A , C e B colineares

Figura 2.7: A construção do triângulo de Napoleão por rotações.

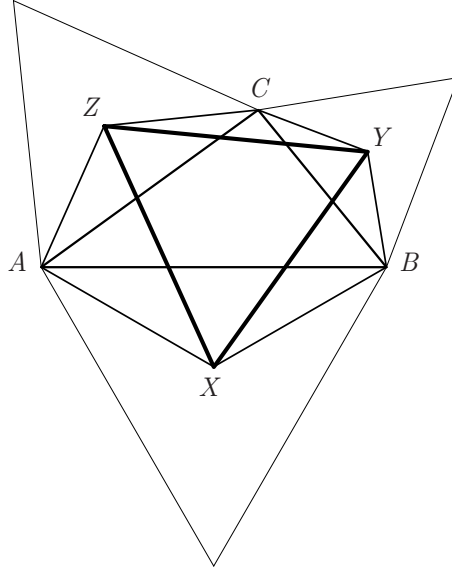


Figura 2.8: A demonstração por rotações em \mathbb{R}^2 .

onde I representa a aplicação identidade em \mathbb{R}^2 . A primeira rotação leva A em B , a segunda leva B em C e a terceira leva C em A :

$$R_X(A) = B, \quad R_Y(B) = C \quad \text{e} \quad R_Z(C) = A.$$

Conseqüentemente, o ponto A é um ponto fixo da composição dessas três rotações:

$$R_Z(R_Y(R_X(A))) = A.$$

Mas a composição de três rotações de 120° em torno de pontos quaisquer é uma translação, pois

$$\begin{aligned} R_Z(R_Y(R_X(P))) &= (I - R)(Z) + R((I - R)(Y) + R(P)) \\ &= (I - R)(Z) + R((I - R)(Y) + R((I - R)(X) + R(P))) \\ &= (I - R)(Z) + R((I - R)(Y)) + R^2((I - R)(X)) + R^3(P) \\ &= (I - R)(Z) + R((I - R)(Y)) + R^2((I - R)(X)) + P, \end{aligned}$$

de modo que a composição dessas três rotações deve ser, portanto, a transformação identidade.

2.2. A CONSTRUÇÃO POR ROTAÇÕES

25

A composição das duas primeiras rotações é uma rotação de 240° em torno do ponto

$$O = (I + R)^{-1}(Y + R(X)),$$

pois se $T_O: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a rotação de 240° no sentido horário em torno do ponto O , então

$$\begin{aligned} R_Y(R_X(P)) = T_O(P) &\Leftrightarrow (I - R)(Y) + R((I - R)(X) + R(P)) = (I - R^2)(O) + R^2(P) \\ &\Leftrightarrow (I - R^2)(I + R)^{-1}(Y + R(X)) + R^2(P) = (I - R^2)(O) + R^2(P) \\ &\Leftrightarrow O = (I + R)^{-1}(Y + R(X)). \end{aligned}$$

Mais ainda: O é a rotação de 60° no sentido horário do ponto X em torno de Y . De fato, se $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a rotação de 60° no sentido horário em torno da origem, de modo que

$$O = (I + R)^{-1}(Y + R(X)) = (I + S^2)^{-1}(Y + S^2(X)),$$

então basta mostrarmos que $(I + S^2)^{-1}(Y + S^2(X)) = Y + S(X - Y)$, isto é, que $Y + S^2(X) = (I + S^2)(Y + S(X - Y))$, ou ainda, que

$$(S^3 - S + I)(X - Y) = 0,$$

o que é verdade, pois $S^3 - S - I = 0$.

Analogamente, podemos mostrar que O é a rotação de 60° no sentido horário do ponto Y em torno de X . Desta maneira o triângulo $\triangle XYO$ é equilátero. Como composição das rotações R_Z e $T_O = R_Y \circ R_X$ é a transformação identidade:

$$(R_Z \circ T_O)(P) = (I - R)(Z) + (R - R^3)(O) + P = (I - R)(Z - O) + P = P,$$

concluimos que $(I - R)(Z - O) = 0$, isto é, $Z = O$. Logo, o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero, como queríamos demonstrar. ■

Vamos agora representar as rotações da construção do triângulo de Napoleão com notação complexa.

Demonstração 5 (notação complexa).

Seja o triângulo $\triangle ABC$ no plano complexo, de forma que o vértice A esteja na origem e B em 1. Defina z como o número complexo associado ao vértice C (figura 2.9).

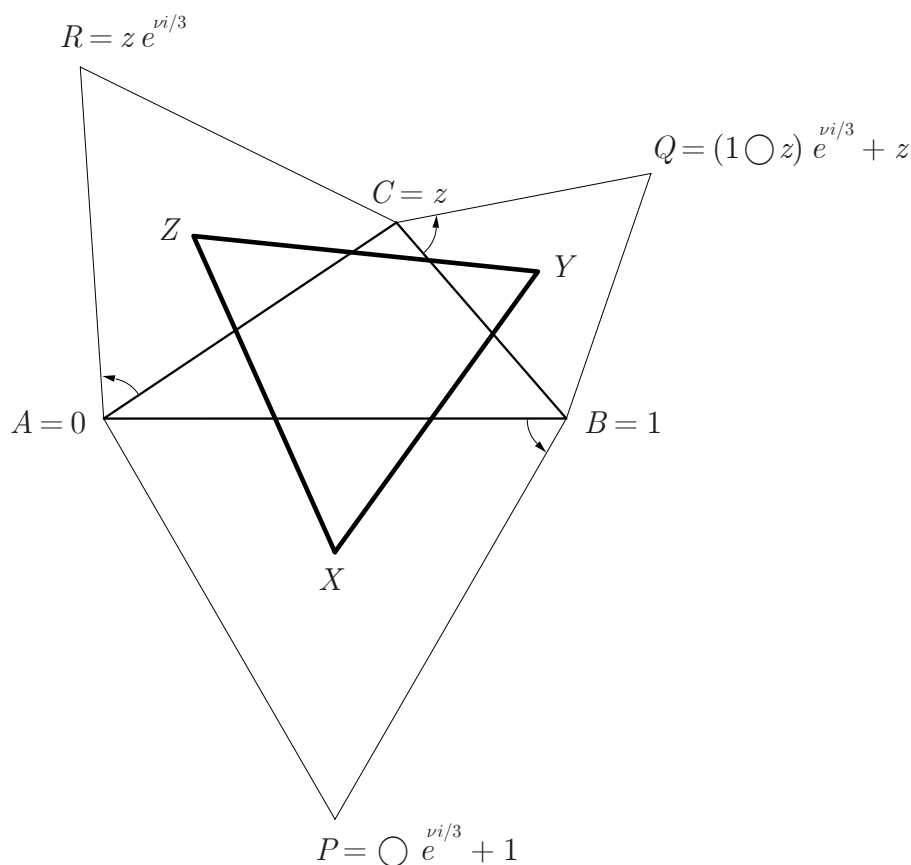


Figura 2.9: Rotações em notação complexa.

Como P é obtido a partir da rotação de $\pi/3$ no sentido anti-horário do vértice A em torno de B , podemos escrever

$$P = (A - B)e^{\frac{\pi}{3}i} + B = 1 - e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Analogamente, temos que

$$Q = (B - C)e^{\frac{\pi}{3}i} + C = (1 - z)e^{\frac{\pi}{3}i} + z \quad \text{e} \quad R = (C - A)e^{\frac{\pi}{3}i} + A = ze^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Desta maneira, concluímos que as coordenadas de X , Y e Z são dadas por

$$\begin{aligned} X &= \frac{A+B+P}{3} = \frac{2-e^{\frac{\pi}{3}i}}{3}, \\ Y &= \frac{B+C+Q}{3} = \frac{(2-e^{\frac{\pi}{3}i})z+1+e^{\frac{\pi}{3}i}}{3} \quad \text{e} \\ Z &= \frac{C+A+R}{3} = \frac{(1+e^{\frac{\pi}{3}i})z}{3}. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que o triângulo de Napoleão $\triangle XYZ$ é equilátero. Para isso, basta verificarmos que Y é a rotação de $\pi/3$ de X em torno de Z :

$$Y = (X - Z)e^{i\frac{\pi}{3}} + Z.$$

Em termos da variável z , devemos então verificar que

$$\frac{1+z+(1-z)e^{\frac{\pi}{3}i}+z}{3} = \left(\frac{2-e^{\frac{\pi}{3}i}}{3} - \frac{z+ze^{\frac{\pi}{3}i}}{3} \right) e^{\frac{\pi}{3}i} + \frac{z+ze^{\frac{\pi}{3}i}}{3}$$

ou ainda, que

$$(1 - e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{2\pi}{3}i})z + (1 - e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{2\pi}{3}i}) = 0.$$

Mas isto segue imediatamente da identidade $1 - e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{2\pi}{3}i} = 0$. ■

Esta demonstração mostra explicitamente que todos os pontos envolvidos no teorema de Napoleão podem ser escritos como *funções afins* de z , isto é, que os números complexos associados a estes pontos são da forma $az + b$, com a e b constantes complexas. Esta observação sugere ainda outra demonstração que apresentaremos a seguir.

Demonstração 6 (limitando a complexidade algébrica).

Considere novamente a configuração geométrica da figura 2.9, onde o triângulo inicial $\triangle ABC$ está no plano complexo com os vértices A e B fixos em 0 e 1, respectivamente, e $C = z$ (qualquer).

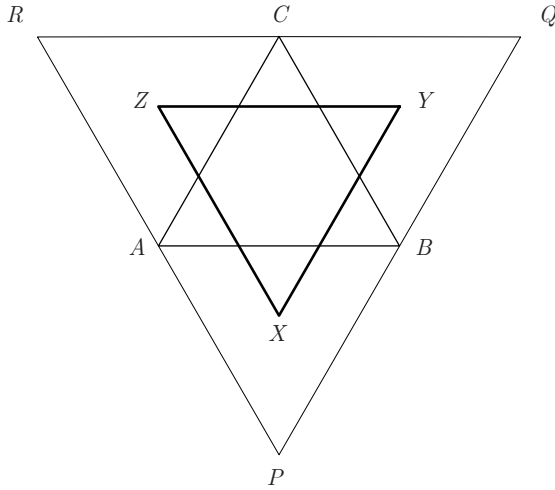
Sabemos que, no plano complexo, fazer uma rotação de um número em torno da origem é o mesmo que multiplicar este número por uma constante complexa de módulo 1.

Desta forma, os números complexos associados aos vértices P , Q e R são expressões afins em z , pois são rotações dos números complexos 0 , 1 e z em torno de 1 , z e 0 , respectivamente. Os vértices X , Y e Z também são expressões afins em z , pois são médias aritméticas de expressões afins.

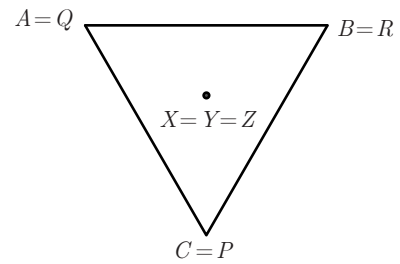
Queremos mostrar que o triângulo de Napoleão, $\triangle XYZ$, é equilátero. Faremos isto, verificando, por exemplo, que Y pode ser obtido através da rotação no sentido anti-horário de $\pi/3$ do vértice X em torno de Z , ou seja, que $Y = (X - Z)e^{i\frac{\pi}{3}} + Z$, ou ainda, que

$$Y - (X - Z)e^{i\frac{\pi}{3}} - Z = 0$$

Como X , Y e Z são expressões afins em z , devemos então mostrar que uma certa expressão afim em z é zero para *qualquer valor* de z . Para isto basta encontrarmos dois valores de z que são raízes desta expressão afim. Por exemplo, $z = e^{+\frac{\pi}{3}i}$ e $z = e^{-\frac{\pi}{3}i}$, cujas configurações geométricas correspondentes são mostradas na figura 2.10. ■



(a) $z = e^{+\frac{\pi}{3}i}$



(b) $z = e^{-\frac{\pi}{3}i}$

Figura 2.10: Duas configurações para as quais o teorema é trivial.

Em notação complexa, fica claro que, com o uso de rotações, todos os pontos envolvidos na construção do triângulo de Napoleão dependem continuamente

de z , pois suas posições podem ser representadas através de funções afins em z . Com a construção clássica, o triângulo de Napoleão com vértices $A = 0$ e $B = 1$ só está definido para valores de $C = z$ fora do eixo real e não é possível fazer uma extensão contínua desta construção para todo o plano complexo. A figura 2.11 ilustra este fato para o caso do triângulo externo e a figura 2.12 para o caso do triângulo interno de Napoleão. Note o “salto” dos pontos X , Y e Z quando $C = z$ passa do semi-plano superior ($\text{Im}(z) > 0$) para o semi-plano inferior ($\text{Im}(z) < 0$).

Observação: A partir de agora assumiremos que a configuração de Napoleão será sempre aquela referente à construção *por rotações* do triângulo de Napoleão.

2.3 A generalização de Barlotti

Uma pergunta natural é se a construção e as conclusões sugeridas pelo teorema de Napoleão podem ser generalizadas para outros polígonos além do triângulo. Mais precisamente, queremos saber se os baricentros dos n -ágonos regulares construídos (externamente ou internamente) sobre cada um dos lados de um dado n -ágono formam, por sua vez, um outro n -ágono regular. A resposta é não, já para $n = 4$, como mostra a figura 2.13.

Contudo, ainda com relação ao caso $n = 4$, Thébault [122] demonstrou que para um *paralelogramo*, os baricentros dos quadrados construídos (externamente ou internamente) sobre cada um de seus lados formam *sempre* um outro quadrado (figura 2.14).

Tanto o triângulo quanto o paralelogramo são exemplos de polígonos *regulares afins*, isto é, polígonos que podem ser escritos como a imagem por uma transformação afim de um n -ágono regular. A. Barlotti mostrou que a propriedade de regularidade afim é suficiente para se obter uma generalização dos teoremas de Napoleão e de Thébault para outros tipos de polígonos.

Teorema 2.4 (BARLOTTI) Sejam \mathcal{P}_n um n -ágono qualquer e \mathcal{Q}_n o n -ágono cujos vértices são os baricentros dos n -ágonos regulares construídos (todos externamente ou todos internamente) sobre cada um dos n lados de \mathcal{P}_n . Se \mathcal{P}_n é *regular afim*, isto é, se \mathcal{P}_n é a imagem por uma transformação afim de um n -ágono regular, então \mathcal{Q}_n é regular.

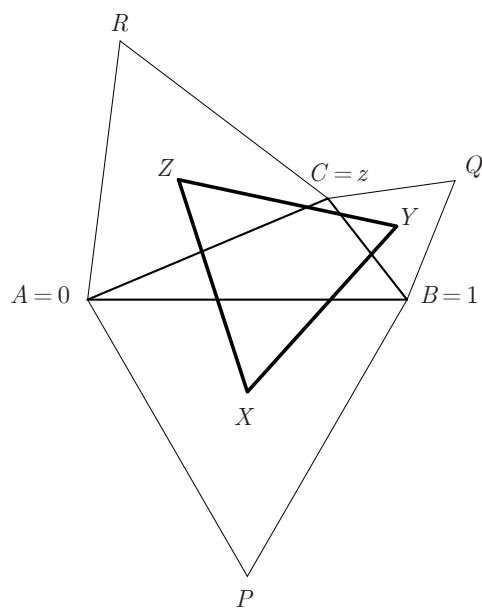
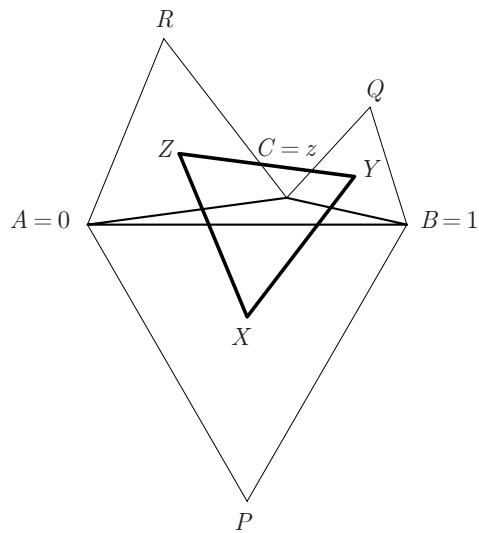
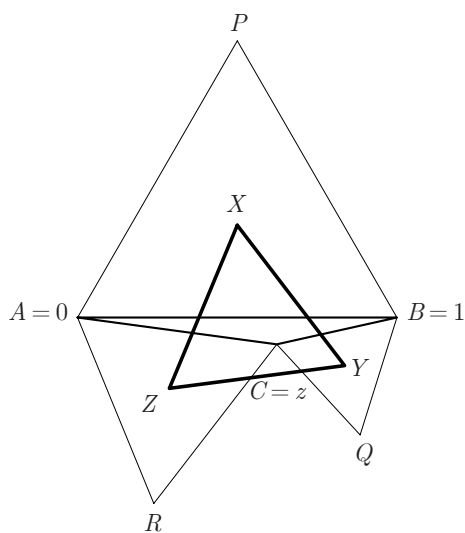
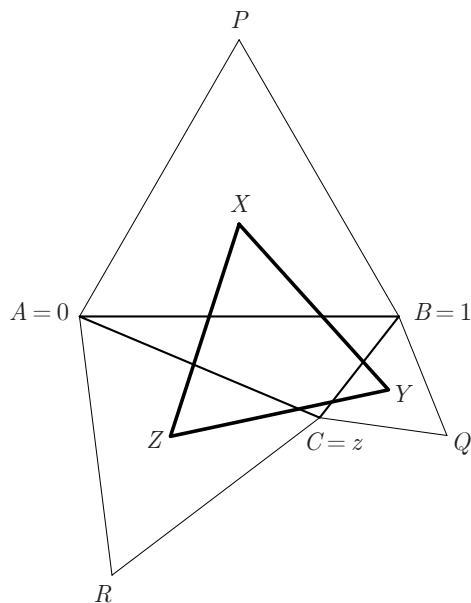
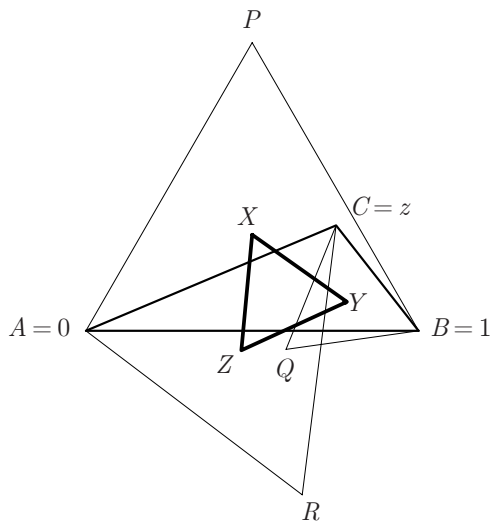
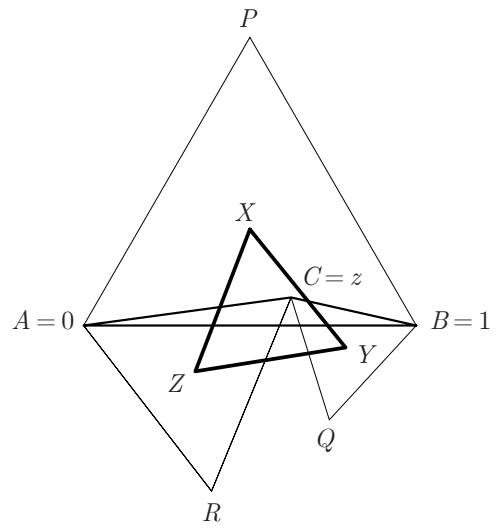
(a) $\text{Im}(z) > 0$ (b) $\text{Im}(z) > 0$ (c) $\text{Im}(z) < 0$ (d) $\text{Im}(z) < 0$

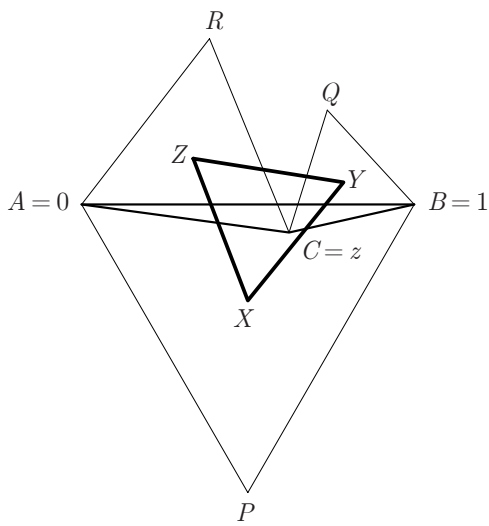
Figura 2.11: A construção clássica do triângulo externo de Napoleão não admite uma extensão contínua.



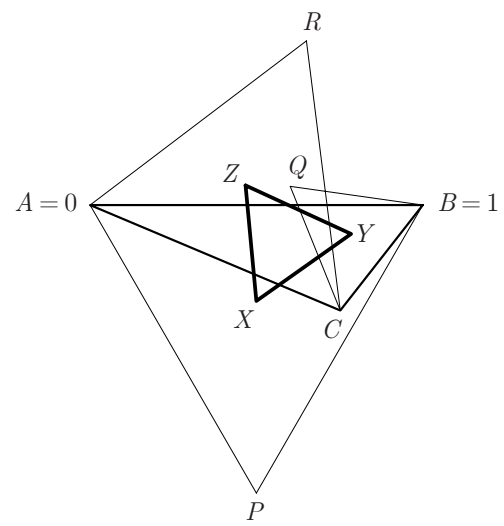
(a) $\text{Im}(z) > 0$



(b) $\text{Im}(z) > 0$



(c) $\text{Im}(z) < 0$



(d) $\text{Im}(z) < 0$

Figura 2.12: A construção clássica do triângulo interno de Napoleão não admite uma extensão contínua.

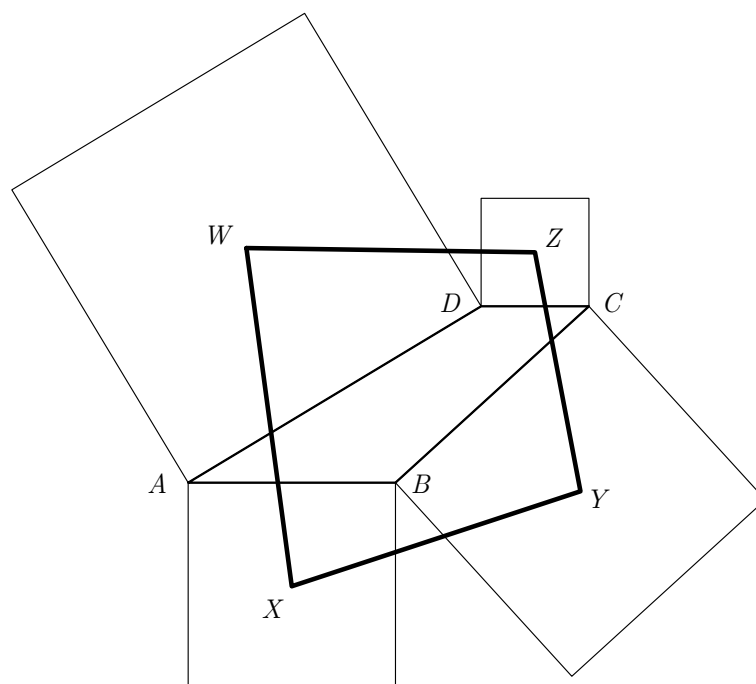


Figura 2.13: O teorema de Napoleão não vale para quadriláteros.

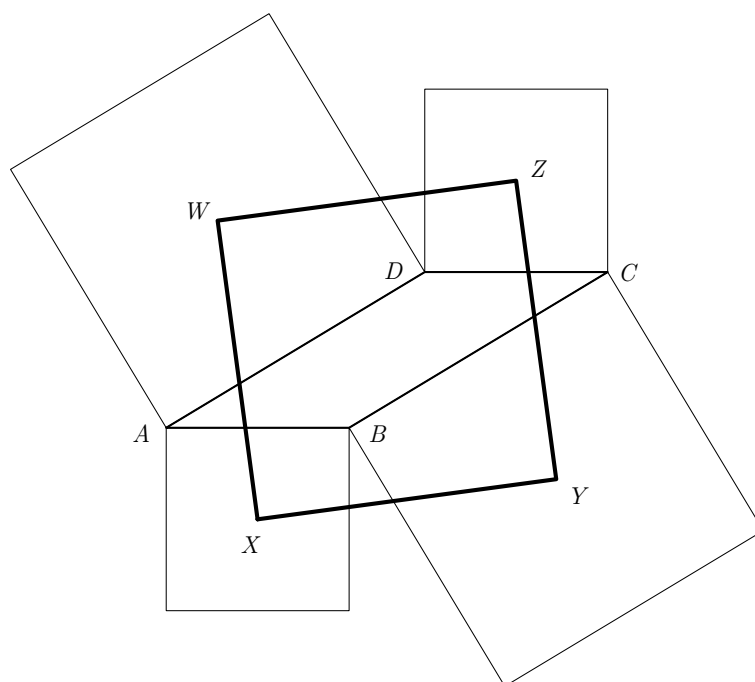


Figura 2.14: O teorema de Thébault para paralelogramos.

Barlotti apresentou sua generalização em 1955, usando trigonometria no plano complexo para justificá-la [8]. Desde então, várias alternativas de demonstração foram sugeridas: [55] (usando trigonometria), [111] (polígonos recursivos), [47] (polinômios) e [48] (análise de Fourier e formas hermitianas).

Daremos a seguir uma demonstração cotando a complexidade algébrica do resultado. Mais precisamente, vamos mostrar que a generalização de Barlotti é associada a uma expressão afim. Desta maneira, como no caso do teorema de Napoleão, duas configurações geométricas (onde a generalização de Barlotti é claramente verdadeira) serão suficientes para estabelecer o resultado no caso geral.

Demonstração do teorema 2.4.

Como a propriedade de um n -ágono ser regular é invariante por translações, rotações e homotetias, basta considerar os casos em que \mathcal{P}_n é a imagem por uma transformação linear $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (sobre o corpo dos reais) do n -ágono regular \mathcal{R}_n cujos vértices são as n -ésimas raízes da unidade $1, w^1, \dots, w^{n-1}$.

A partir desta observação, é fácil de ver que a generalização de Barlotti é equivalente a seguinte sentença: *para cada* transformação linear $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, os baricentros dos n -ágonos regulares construídos sobre os lados de $\mathcal{P}_n = T(\mathcal{R}_n)$ formam um n -ágono \mathcal{Q}_n regular. Vamos apresentar uma demonstração deste resultado supondo que T é uma transformação linear inversível. Uma vez feito isto, o caso em que T não é inversível seguirá por continuidade.

Se T é inversível, então podemos supor que $T(1) = 1$. Toda transformação linear deste tipo fica completamente identificada pelo seu valor z em i :

$$T(i) = z.$$

Sendo assim, para estabelecer o resultado, devemos mostrar que *para cada* $z \in \mathbb{C}$, os centros $O_1(z), O_2(z), \dots, O_{n-1}(z)$ dos n -ágonos regulares construídos sobre os lados do n -ágono de vértices $T(1), T(w^1), \dots, T(w^{n-1})$ formam, por sua vez, um outro n -ágono regular (figura 2.15). Em termos algébricos, precisamos verificar que

$$O_{j+1}(z) - O_j(z) \cdot e^{2\pi/n} = 0, \quad (2.5)$$

para cada $z \in \mathbb{C}$ e para cada $j = 1, \dots, n$. Mas cada centro $O_j(z)$ é uma expressão

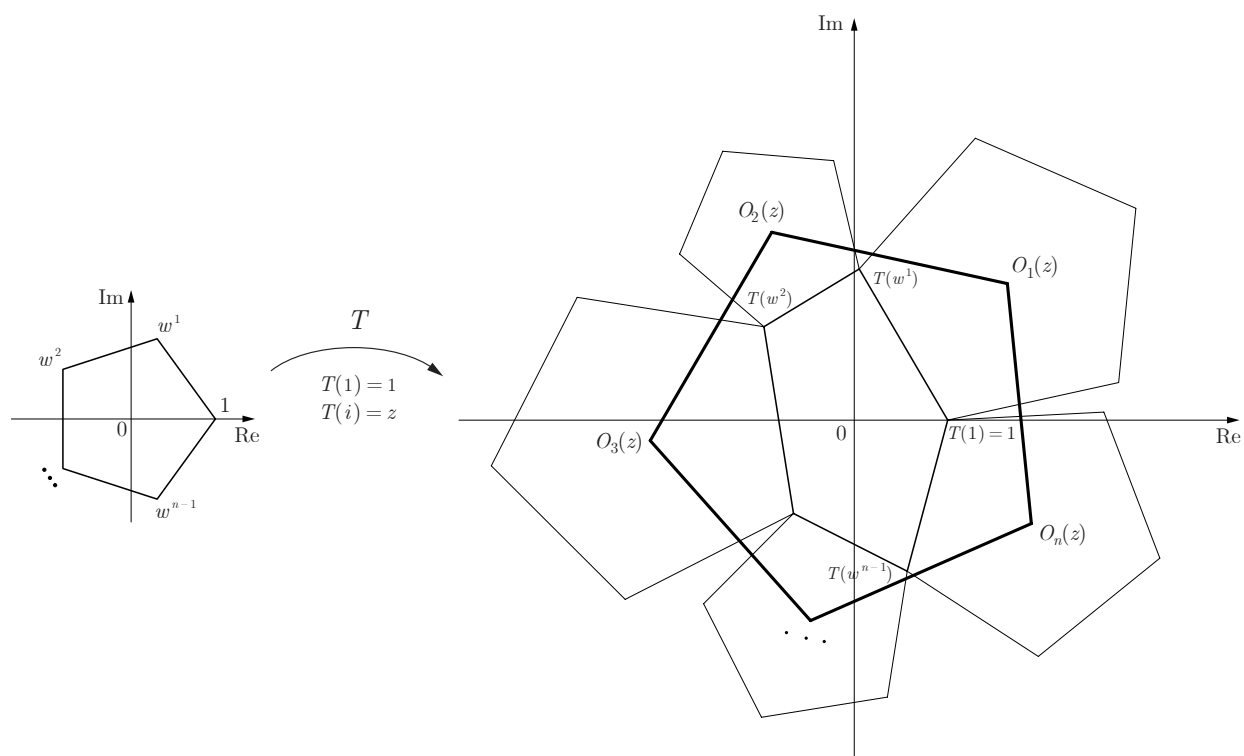


Figura 2.15: A generalização de Barlotti do teorema de Napoleão.

afim em z , dado que cada vértice $T(w^j)$ também é uma expressão afim em z , pois se $w^j = a_j + b_j \cdot i$, então

$$T(w^j) = T(a_j + b_j \cdot i) = a_j \cdot T(1) + b_j \cdot T(i) = a_j + b_j \cdot z.$$

Desta maneira, duas soluções particulares z_1 e z_2 da equação 2.5 (isto é, duas escolhas de transformações lineares para as quais a generalização de Barlotti é verdadeira) são suficientes para estabelecer o resultado no caso geral. Basta tomar, por exemplo, $z_1 = +i$ (quando T é a identidade) e $z_2 = -i$ (quando T é a reflexão com relação ao eixo real). ■

Observação. Barlotti também demonstrou que a recíproca do teorema 2.4 é verdadeira, isto é, que se os baricentros dos n -ágonos regulares construídos sobre cada um dos lados de um n -ágono \mathcal{P}_n (qualquer) formam um n -ágono \mathcal{Q}_n regular, então \mathcal{P}_n é um n -ágono afinamente regular [8, 55].

2.4 Outras propriedades do triângulo de Napoleão

Existem muitas propriedades interessantes relativas aos triângulos interno e externo de Napoleão. As referências [40, 69, 84, 127] apresentam um bom número delas. Nesta seção cotaremos a complexidade algébrica de algumas destas propriedades.

Propriedade 1 Os triângulos de Napoleão externo e interno têm o mesmo baricentro, que coincide com o do triângulo inicial.

Demonstração:

Considere a configuração da figura 2.9. Os baricentros dos triângulos externo e interno de Napoleão do triângulo inicial são expressões afins em z . Ver que este baricentros coincidem também resulta em uma equação afim. Assim, para verificarmos a propriedade, basta exibirmos duas configurações desta propriedade. Considere, por exemplo, aquelas indicadas na figura 2.10 da página 28. ■

Propriedade 2 A diferença entre as áreas dos triângulos externo e interno de Napoleão é igual a área do triângulo inicial.

Demonstração:

Novamente, considere a configuração da figura 2.9 na página 26, onde $A = 0$, $B = 1$ e $C = z$. Já vimos que os triângulos externo e interno de Napoleão são equiláteros e que seus vértices são expressões afins em z . Se l e l' são os lados destes triângulos, respectivamente, então podemos escrever

$$l = \|\alpha z + \beta\| \quad \text{e} \quad l' = \|\delta z + \gamma\|, \quad \text{onde } \alpha, \beta, \delta \text{ e } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Se X, Y e Z são os vértices do triângulo externo de Napoleão (figura 2.1) e X', Y', Z' são os vértices do triângulo interno de Napoleão (figura 2.2), então

$$\begin{aligned} \text{área}(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i}, \\ \text{área}(\triangle XYZ) &= \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \|\alpha z + \beta\|^2 \quad \text{e} \quad \text{área}(\triangle X'Y'Z') = \frac{\sqrt{3}}{4} l'^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \|\delta z + \gamma\|^2. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que $\text{área}(\triangle ABC) = \text{área}(\triangle XYZ) - \text{área}(\triangle X'Y'Z')$, isto é, que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{\sqrt{3}}{4} \|\alpha z + \beta\|^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \|\delta z + \gamma\|^2.$$

Desenvolvendo esta equação, chegamos à seguinte expressão em z e \bar{z} ,

$$(\delta\bar{\delta} - \alpha\bar{\alpha}) z\bar{z} + \left(\delta\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} - \frac{4\sqrt{3}i}{3} \right) z + \left(\gamma\bar{\delta} - \beta\bar{\alpha} + \frac{4\sqrt{3}i}{3} \right) \bar{z} + \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} = 0,$$

de modo que a propriedade 2 é verdadeira se, e somente se, a expressão

$$P(z) = (\delta\bar{\delta} - \alpha\bar{\alpha}) z\bar{z} + \left(\delta\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} - \frac{4\sqrt{3}i}{3} \right) z + \left(\gamma\bar{\delta} - \beta\bar{\alpha} + \frac{4\sqrt{3}i}{3} \right) \bar{z} + \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}$$

é igual a zero para todo $z \in \mathbb{C}$.

Observe que P é um polinômio de grau 2 nas variáveis $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$. De fato, $P(z) = 0$ é a equação de um círculo. Sabemos que existe uma única circunferência que passa por três pontos não colineares. Portanto, se encontrarmos quatro raízes de P que não estão em uma mesma circunferência (isto é, qua-

tro configurações geométricas para as quais a propriedade 2 é verdadeira) então, obrigatoriamente, $P(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para isto, considere a figura 2.16.

Em (a), temos que $z = 0$, $\text{área}(\triangle XYZ) = \text{área}(\triangle X'Y'Z')$ e $\text{área}(\triangle ABC) = 0$. Em (b), temos que $z = 1$, $\text{área}(\triangle XYZ) = \text{área}(\triangle X'Y'Z')$ e $\text{área}(\triangle ABC) = 0$. Em (c), temos que $z = e^{+\frac{\pi}{3}i}$, $\text{área}(\triangle ABC) = \text{área}(\triangle XYZ)$ e $\text{área}(\triangle X'Y'Z') = 0$. Em (d), temos que $z = e^{-\frac{\pi}{3}i}$, $\text{área}(\triangle ABC) = \text{área}(\triangle X'Y'Z')$ e $\text{área}(\triangle XYZ) = 0$. Em todos estes casos, $\text{área}(\triangle ABC) = \text{área}(\triangle XYZ) - \text{área}(\triangle X'Y'Z')$. Isto mostra que $0, 1, e^{+\frac{\pi}{3}i}$ e $e^{-\frac{\pi}{3}i}$ são quatro raízes de P que não estão em uma mesma circunferência. ■

Propriedade 3 Na configuração de Napoleão, as retas que unem os vértices P, Q e R dos triângulos equiláteros aos vértices opostos do triângulo inicial $\triangle ABC$ se encontram em um único ponto I . Além disso, as retas fazem 60° entre si, e os segmentos $\overline{AQ}, \overline{BR}$ e \overline{CP} têm o mesmo comprimento.

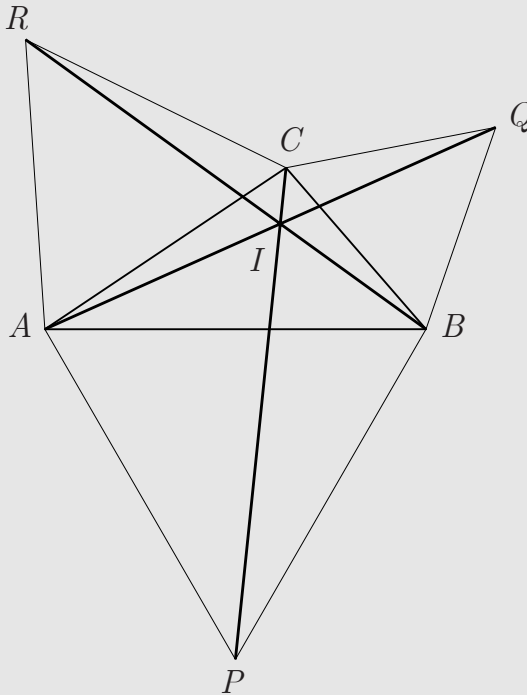


Figura 2.17: Três segmentos especiais.

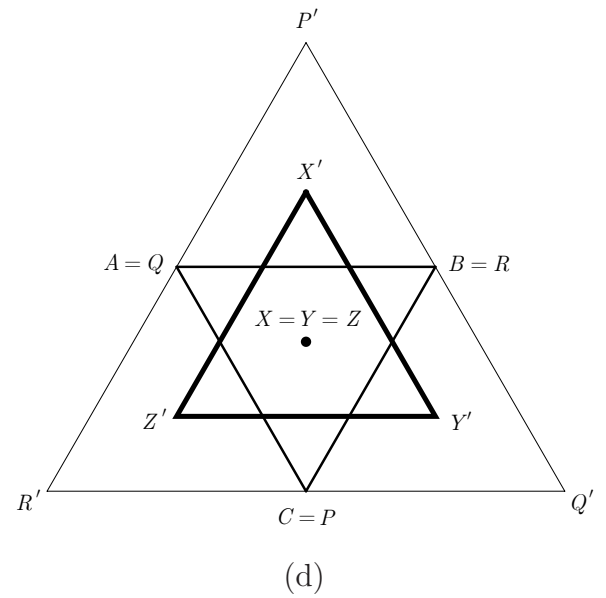
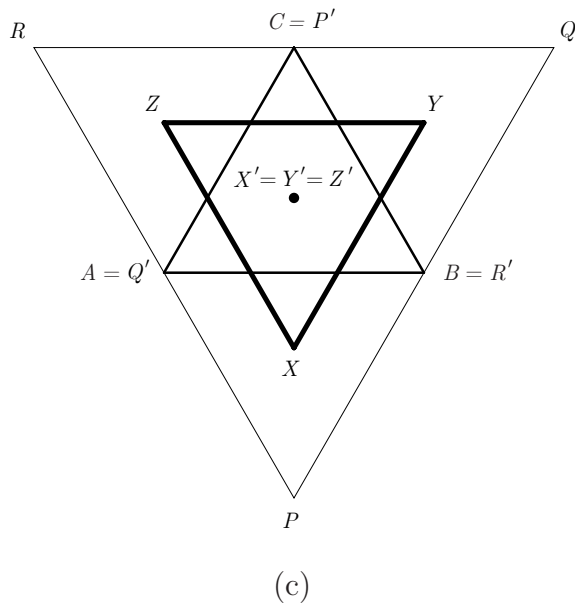
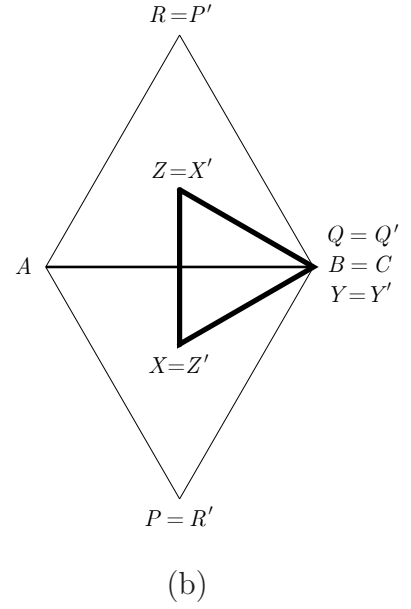
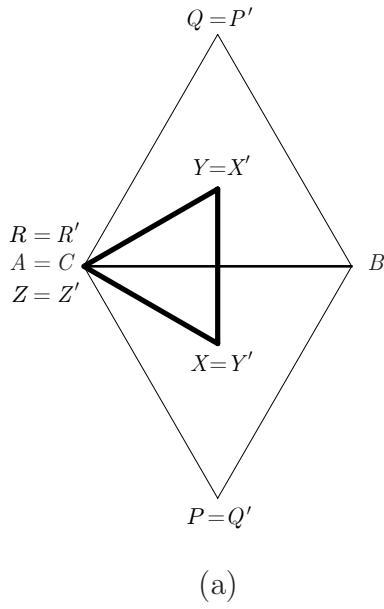


Figura 2.16: Quatro configurações onde a propriedade 2 é verdadeira.

Demonstração:

O fato que os segmentos \overline{AQ} e \overline{BR} têm o mesmo comprimento e se encontram fazendo 120° segue do fato que, em notação complexa, $R - B$ é uma rotação de 120° de $Q - A$. Como nos exemplos acima, é fácil ver que esta é uma propriedade afim: dois exemplos em que ela se verifica são óbvios — os empregados na demonstração 6 do teorema de Napoleão.

Para demonstrar a afirmação que falta, considere desta vez o triângulo $\triangle ABC$ no plano cartesiano \mathbb{R}^2 , de forma que seus vértices tenham coordenadas reais, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (x, y)$ qualquer. É fácil ver que, mais uma vez, as coordenadas de P , Q e R são expressões afins em x e y , isto é, elas são da forma $\alpha x + \beta y + \gamma$, com α , β e γ constantes reais. Sobre o ponto P sabemos um pouco mais: suas coordenadas são constantes. Portanto, podemos escrever $P = (a, b)$ e, usando a notação afim para indicar uma expressão afim nas variáveis x e y , $Q = (\text{afim}, \text{afim})$ e $R = (\text{afim}, \text{afim})$ (figura 2.18).

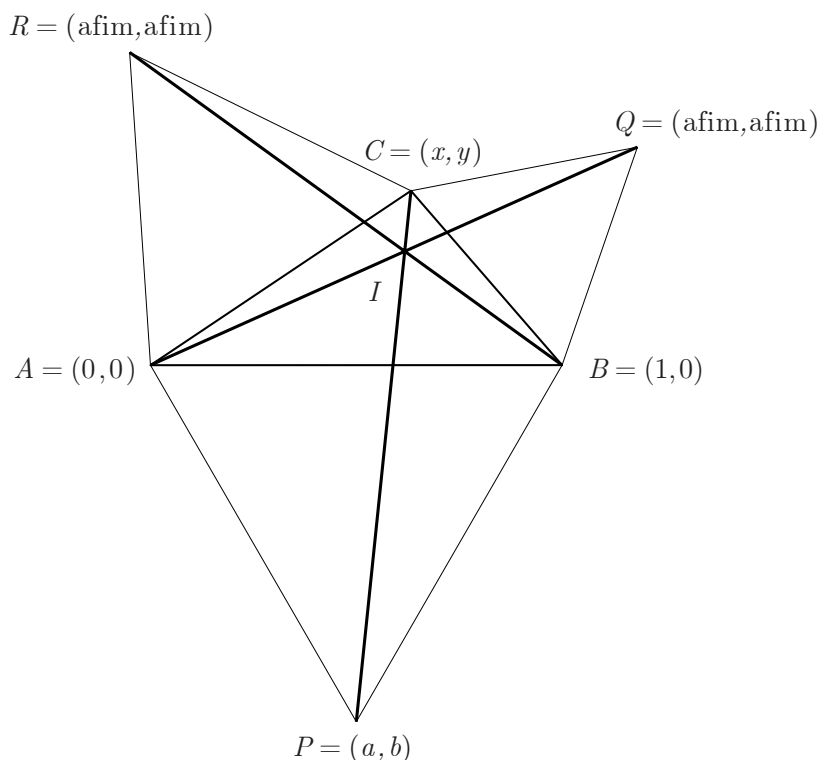


Figura 2.18: Os pontos P , Q e R têm coordenadas afins.

Em termos das seguintes parametrizações das retas \overleftrightarrow{AQ} , \overleftrightarrow{BR} e \overleftrightarrow{CP} ,

$$\begin{aligned} r &\mapsto A + r(Q - A) = (0, 0) + r(\text{afim}, \text{afim}) &= (0, 0) + r(\text{afim}, \text{afim}), \\ s &\mapsto B + s(R - B) = (1, 0) + s(\text{afim} - 1, \text{afim}) &= (1, 0) + s(\text{afim}, \text{afim}), \\ t &\mapsto P + t(C - P) = (a, b) + t(\text{afim} - a, \text{afim} - b) &= (a, b) + t(\text{afim}, \text{afim}), \end{aligned}$$

vemos que elas se interceptam em um mesmo ponto I se, e somente se, existem valores de r , s e t tais que

$$\begin{cases} (0, 0) + r(\text{afim}, \text{afim}) = (1, 0) + s(\text{afim}, \text{afim}), \\ (0, 0) + r(\text{afim}, \text{afim}) = (a, b) + t(\text{afim}, \text{afim}), \end{cases}$$

ou ainda, que existem valores de r , s e t que satisfazem a seguinte equação matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \text{afim} & \text{afim} & 0 \\ 0 & \text{afim} & \text{afim} & 0 \\ a & \text{afim} & 0 & \text{afim} \\ b & \text{afim} & 0 & \text{afim} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mas a fim de que $(1, r, s, t)$ seja uma solução (*não trivial*) do sistema linear homogêneo definido pela matriz M , devemos ter que

$$\det M = 0.$$

Por outro lado, o determinante de qualquer matriz da forma

$$\begin{pmatrix} \text{constante} & \text{afim} & \text{afim} & \text{afim} \\ \text{constante} & \text{afim} & \text{afim} & \text{afim} \\ \text{constante} & \text{afim} & \text{afim} & \text{afim} \\ \text{constante} & \text{afim} & \text{afim} & \text{afim} \end{pmatrix}$$

é um polinômio nas variáveis x e y do tipo

$$p(x, y) = \alpha(x)y^3 + \beta(x)y^2 + \gamma(x)y + \delta(x),$$

onde α , β , γ e δ são polinômios na variável x .

Assim sendo, se mostrarmos que $p(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, teremos então estabelecido que a propriedade 3 é verdadeira. Faremos isto usando

a técnica de provar a partir de casos particulares. Para a propriedade 3, a configuração geométrica evidente é aquela onde o triângulo inicial $\triangle ABC$ é isósceles (veja a figura 2.19).

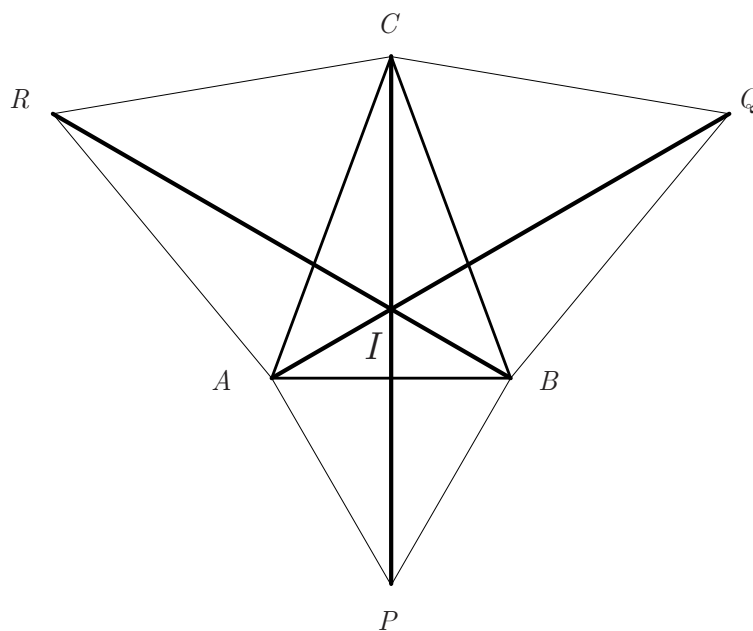


Figura 2.19: A propriedade 3 se verifica para um triângulo isósceles.

Fixe agora $x = x_0$ no intervalo $(0, 1/2)$, conforme a figura 2.20. Se escolhermos C como sendo um dos pontos (x_0, y_1) , (x_0, y_2) , (x_0, y_3) e (x_0, y_4) , obtidos a partir da interseção da reta $x = x_0$ com os círculos de raio 1 e centro em $(0, 0)$ e $(1, 0)$, veremos que o triângulo $\triangle ABC$ correspondente será isósceles. Desta maneira, segue-se que y_1 , y_2 , y_3 e y_4 são quatro raízes distintas do polinômio

$$q_{x_0}(y) = p(x_0, y) = \alpha(x_0)y^3 + \beta(x_0)y^2 + \gamma(x_0)y + \delta(x_0).$$

Como q_{x_0} tem grau 3, vemos que

$$q_{x_0}(y) = p(x_0, y) = 0, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Mas se isto acontece, então $\alpha(x_0) = \beta(x_0) = \gamma(x_0) = \delta(x_0) = 0$. Uma vez que x_0 é um ponto qualquer no intervalo $(0, 1/2)$ e α , β , γ e δ são polinômios, segue-se

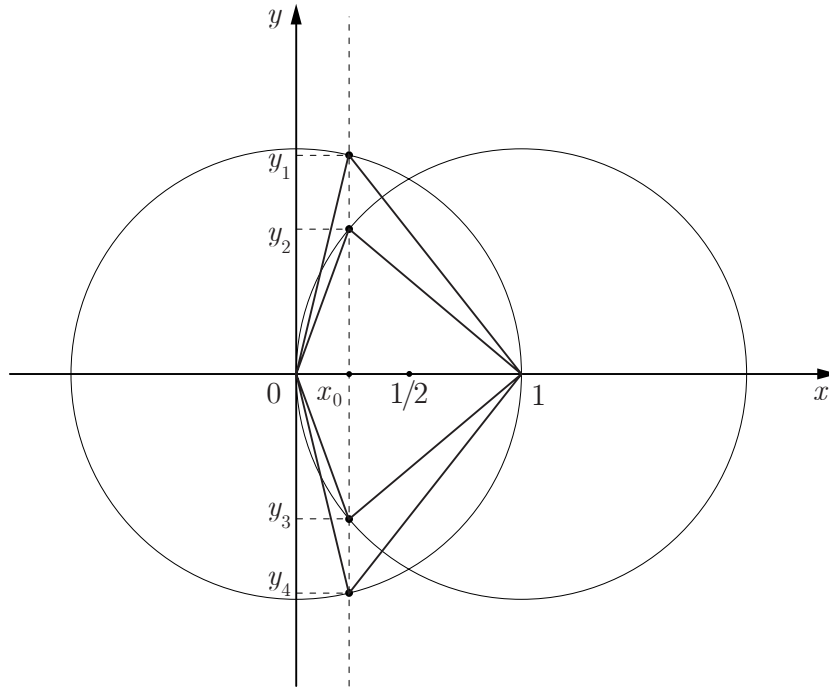


Figura 2.20: Quatro valores de y para os quais o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles.

que

$$\alpha(x) = \beta(x) = \gamma(x) = \delta(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Conseqüentemente, $p(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, como queríamos demonstrar. ■

Capítulo 3

Além de triângulos equiláteros e quadrados

No curso de atualização docente oferecido pela PUC-Rio/CAPES/FAPERJ, no ano de 1999, os professores de ensino médio participantes foram convidados a apresentar problemas de geometria que considerassem difíceis. Foram apresentados dois problemas sobre triângulos, sendo o segundo um clássico da geometria escolar. São eles:

Problema 1. Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles de ângulo principal $\widehat{A} = 100^\circ$. Como na figura 3.1, marque o ponto D na reta AB tal que $AD = BC$. Encontre o valor do ângulo $\alpha = \widehat{BCD}$.

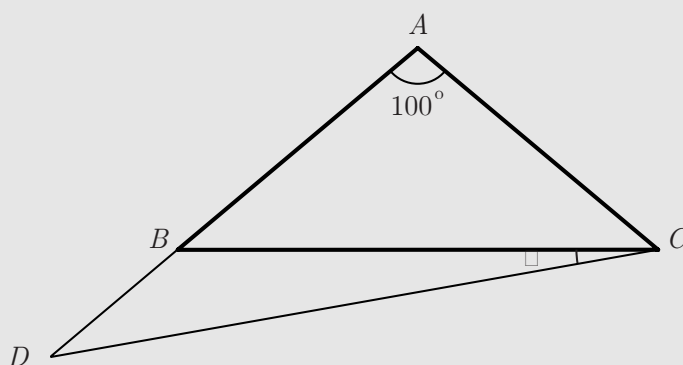


Figura 3.1: O problema 1.

Problema 2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles, de ângulo principal $\widehat{A} = 20^\circ$. Considere os pontos P e Q nos lados \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente, tais que $\angle BCP = 50^\circ$ e $\angle CBQ = 60^\circ$. Encontre o valor de $\alpha = \angle BQP$.

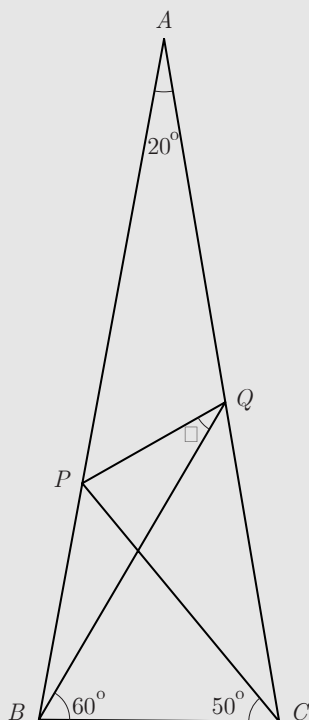


Figura 3.2: Problema 2.

Note uma particularidade destes problemas: os ângulos de 100° e 20° . Eles não costumam aparecer em problemas de geometria no ensino médio. Neste capítulo, mostraremos como resolver estes dois problemas usando propriedades dos lados e diagonais do eneágono e octadecágono regulares (os polígonos regulares de 9 e 18 lados, respectivamente). Para um algebrista, é natural acrescentar ao corpo \mathbb{R} dos reais o elemento $e^{2\pi/9}$, de maneira a obter o corpo minimal K contendo os vértices de um eneágono regular centrado na origem e tendo um de seus vértices sobre o número 1. Este corpo automaticamente contém todos os vértices do octadecágono centrado na origem tendo 1 como um de seus vértices, como uma figura comprova sem dificuldades. Em outras palavras, o octadecágono é quase inevitável no estudo do eneágono.

O estudo dos polígonos regulares contendo de 3 a 6 lados se faz essencialmente com expressões quadráticas. O eneágono e o octadecágono já são mais sofisti-

46CAPÍTULO 3. ALÉM DE TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS E QUADRADOS

cados: problemas associados a eles naturalmente envolvem equações polinomiais de grau 3. Um exemplo é a cúbica que relaciona $\cos(20^\circ)$ com $1/2 = \cos(60^\circ)$. Assim, tentativas ingênuas de resolver os dois problemas acima por geometria analítica recaem em dificuldades algébricas desse tipo. Os lemas explicitados abaixo são versões “sintéticas” (visuais!) de propriedades das raízes nonas (e octadecágonas!) da unidade.

O estudo de polígonos regulares que não sejam o triângulo equilátero (isto é, o hexágono regular) e o quadrado a problemas de geometria não é tão difundido, até porque os ângulos apresentados nos textos didáticos habituais do ensino médio não costumam variar além de 0° , 30° , 45° , 60° e 90° , os únicos ângulos cujas funções trigonométricas são memorizadas por alunos.

O exemplo seguinte de informação geométrica associada a um polígono regular é o estudo da razão áurea, uma relação entre diagonais e lados do pentágono regular, a partir da qual, aliás, é possível construir uma tabela trigonométrica de todos os ângulos múltiplos inteiros de 3° (veja o apêndice deste capítulo).

Portanto, a dificuldade dos professores de ensino médio em resolver os dois problemas acima pode ser atribuída ao fato das configurações geométricas associadas estarem relacionadas a polígonos menos familiares.

3.1 A geometria do eneágono e o problema 1

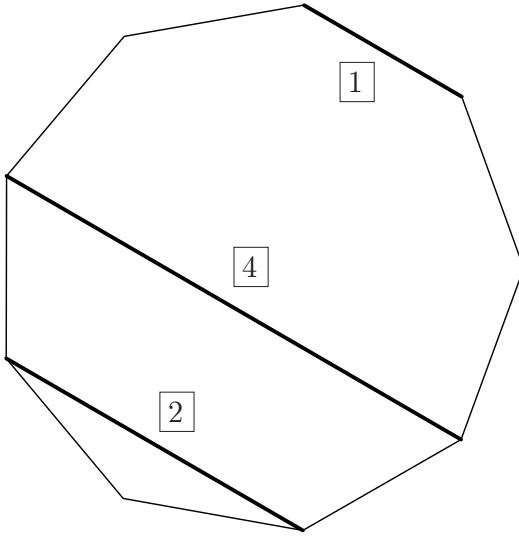
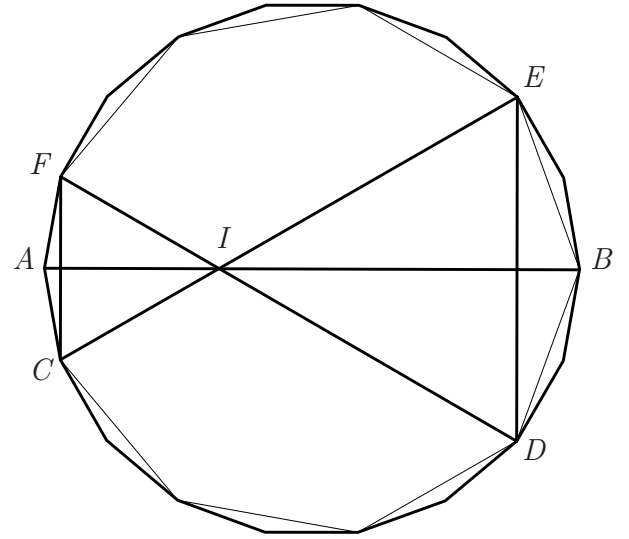
Existe uma relação métrica interessante entre as diagonais do eneágono, especificada no lema abaixo. Com ela, resolveremos o problema 1 de forma bastante simples.

Lema 3.1 Dado um eneágono regular, denote por $\boxed{1}$ o comprimento da lado do eneágono, e por $\boxed{2}$ e $\boxed{4}$ os comprimentos das diagonais que subentendem, respectivamente, dois e quatro lados do eneágono (figura 3.3 (a)). Então

$$\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{4}.$$

Demonstração:

Considere o octadecágono que circunscreve o eneágono e os pontos A , B , C , D , E e F dispostos conforme a figura 3.3 (b). \overline{AB} é o diâmetro do octadecágono e I é o ponto de interseção entre \overline{AB} e a diagonal \overline{CE} . Por simetria, é claro

(a) $\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{4}$.

(b) As diagonais do eneágono regular.

Figura 3.3: Uma relação métrica entre o lado e as diagonais do eneágono regular.

que a diagonal \overline{CE} também passará por I . Observe que as diagonais \overline{CF} , \overline{DE} e \overline{CE} têm comprimentos $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ e $\boxed{4}$, respectivamente. Sabemos que $\angle CIF = \angle DIE = (80^\circ + 40^\circ)/2 = 60^\circ$ e que, pela simetria da figura, $CI = IF$ e $DI = IE$, donde podemos concluir que os triângulos $\triangle CIF$ e $\triangle DIE$ são equiláteros. Desta forma, $CE = CF + DE$, isto é, $\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{4}$. ■

Resolução do problema 1.

Como o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles de ângulo principal $\widehat{A} = 100^\circ$, vemos que ele pode ser inscrito em um eneágono regular (figura 3.4).

Sejam então E o vértice do eneágono entre A e C tal que $\angle AEC = 140^\circ$ e P um ponto em \overline{BC} tal que $BP = BD$. Observe que $AB = AC = \boxed{2}$ e $AD = BC = \boxed{4}$. Sendo assim, pelo lema 3.1, temos que

$$BP = BD = AD - AB = \boxed{4} - \boxed{2} = \boxed{1}.$$

Portanto, os triângulos $\triangle DPB$ e $\triangle ACE$ são isósceles e congruentes, com $\angle DBP = \angle AEC = 140^\circ$ e $PD = AC = \boxed{2}$. Mas, $PC = BC - PB = \boxed{4} - \boxed{1} = \boxed{2} = PD$.

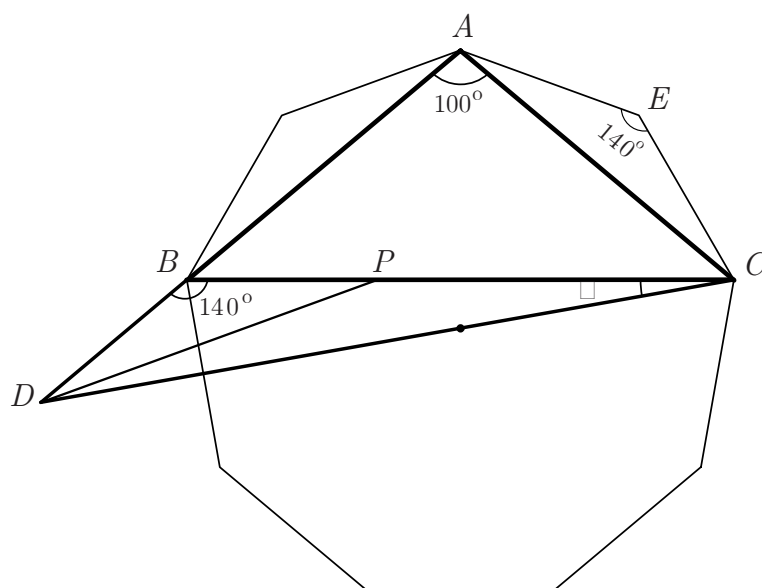


Figura 3.4: O triângulo $\triangle ABC$ inscrito em um eneágono regular.

Logo, o triângulo $\triangle DCP$ é isósceles e, portanto, $\alpha = 10^\circ$. ■

3.2 A geometria do octadecágono e o problema 2

No lema abaixo, indicamos a propriedade geométrica das diagonais do octadecágono regular que permite resolver o problema 2 de maneira simples.

Lema 3.2 O octadecágono regular tem quatro diagonais não diametraais que se interceptam em um único ponto sobre um diâmetro.

Demonstração:

Considere no plano complexo o octadecágono regular de vértices $1, w, w^2, \dots, w^{17}$ e $w^{18} = 1$, conforme a figura 3.5.

Vamos mostrar primeiro que as diagonais que unem w a w^{12} , w^2 a w^{14} , w^4 a w^{16} e w^6 a w^{17} se interceptam em um único ponto I . Para isto, é suficiente mostrar que as retas que unem w a w^{12} e w^2 a w^{14} se interceptam em um único ponto. Em termos das parametrizações

$$t \mapsto w + t(w^{12} - w), t \in \mathbb{R}, \quad s \mapsto w^2 + s(w^{14} - w^2), \quad s \in \mathbb{R},$$

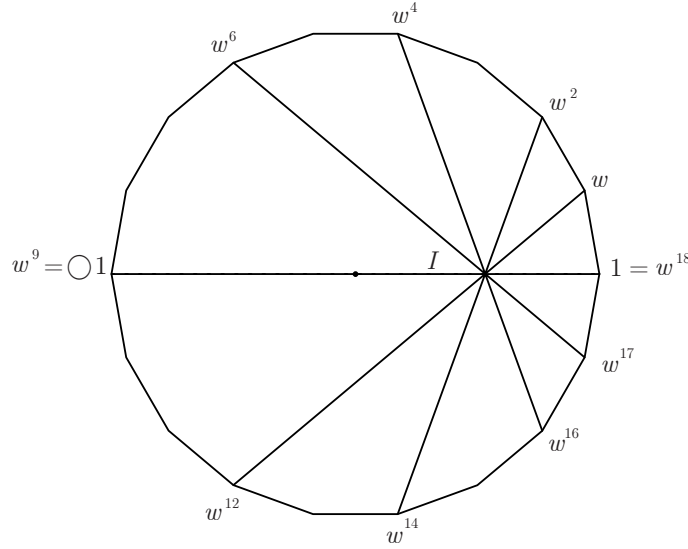


Figura 3.5: Algumas diagonais do octadecágono regular.

destas duas retas, isto é o mesmo que mostrar que existem únicos s e t tais que

$$w + t(w^{12} - w) = w^2 + s(w^{14} - w^2).$$

Conjugando os dois lados desta equação e observando que $\overline{w^1} = w^{17}$, $\overline{w^{12}} = w^6$, $\overline{w^2} = w^{16}$, $\overline{w^{14}} = w^4$, devemos então mostrar que o sistema linear

$$\begin{cases} (w^{12} - w)t + (w^2 - w^{14})s = w^2 - w, \\ (w^6 - w^{17})t + (w^{16} - w^4)s = w^{16} - w^{17}, \end{cases} \quad (3.1)$$

possui uma única solução. Mas isto segue do fato que

$$(w^{12} - w)(w^{16} - w^4) - (w^2 - w^{14})(w^6 - w^{17}) = w^2 + w^4 + w^5 + w^7 \neq 0,$$

onde usamos que $w^9 = -1$ e $w^{18} = +1$ para fazer as simplificações. Resta mostrar que o ponto I também pertence ao diâmetro que une -1 a $+1$ sobre o eixo real. Pela regra de Cramer,

$$s = \frac{w^2 + w^7}{w^2 + w^4 + w^5 + w^7}$$

e, portanto,

$$I = w^2 + s(w^{14} - w^2) = \frac{w^3 + w^6}{w^2 + w^4 + w^5 + w^7} = \frac{w^{15} + w^{12}}{w^{16} + w^{14} + w^{13} + w^{11}} = \bar{I}.$$

Sendo assim, I é um número real e, portanto, ele pertence ao diâmetro que une -1 a $+1$. ■

Resolução do problema 2.

Considere o triângulo inicial $\triangle ABC$ inscrito em um octadecágono regular e os vértices D, E, F, G, H, X e Y , conforme a figura 3.6.

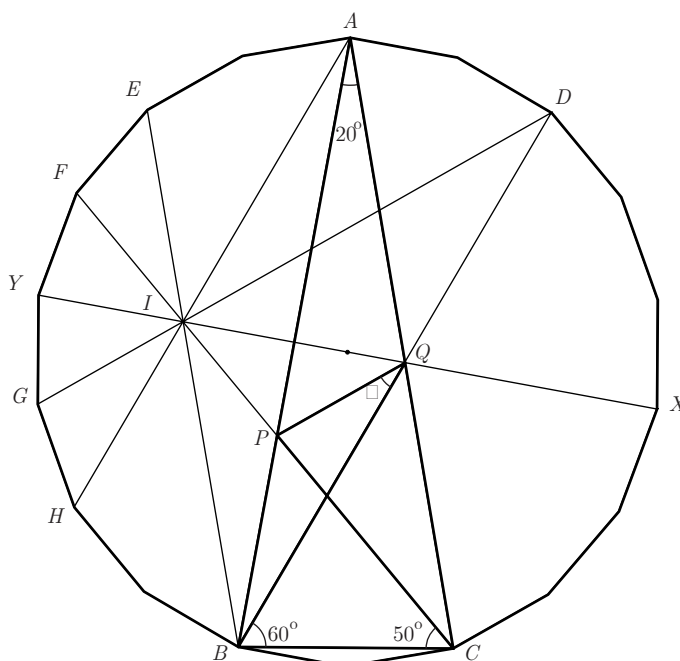


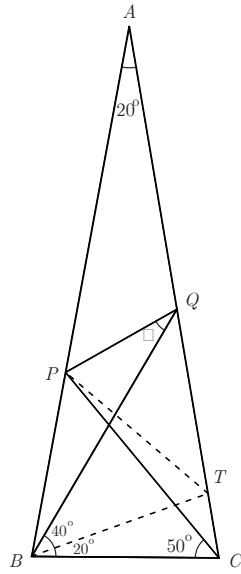
Figura 3.6: O triângulo $\triangle ABC$ inscrito no octadecágono.

Observe que $\angle QBA = 20^\circ = \angle QAB$ e, portanto, o triângulo $\triangle ABQ$ é isósceles com $AQ = BQ$. Pelo lema 3.2, as diagonais \overline{EB} , \overline{FC} , \overline{GD} e \overline{HA} se encontram no ponto I no diâmetro \overline{XY} e, como $AH \parallel DB$ e $AC \parallel EB$, temos que o quadrilátero $AQBI$ é um losango e os triângulos $\triangle AIP$ e $\triangle AQP$ são congruentes. Assim, $\angle PBI = \angle QBP = 20^\circ$, o que implica que $\alpha = \angle BIC = 30^\circ$. ■

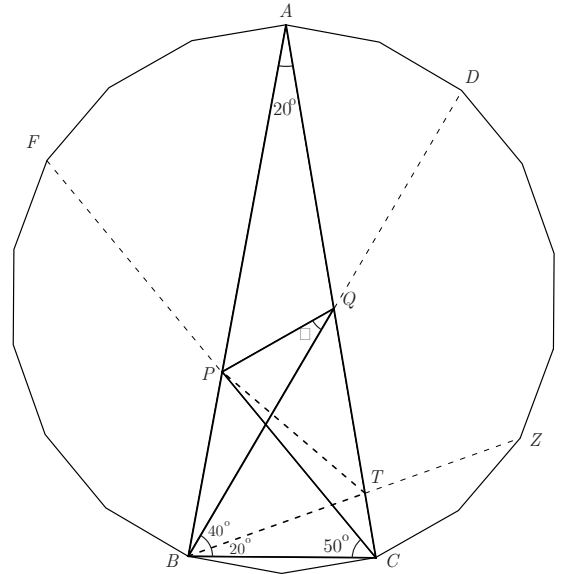
Tripp forneceu uma solução mais direta deste problema [123], fazendo uso de uma construção auxiliar que não é evidente: a partir da figura 3.2, trace

o segmento \overline{BT} , onde T é o ponto no lado \overline{AC} tal que $\angle TBC = 20^\circ$ (figura 3.7 (a)). Com isto, os triângulos $\triangle PBC$, $\triangle BTC$ e $\triangle QTB$ são isósceles. Assim, o triângulo $\triangle BPT$ é equilátero e, portanto, $\triangle PTQ$ é isósceles. Mas, $\angle PTQ = 40^\circ$, o que implica em $\alpha + 40^\circ = 70^\circ$ ou $\alpha = 30^\circ$.

Na geometria do octadecágono, o segmento auxiliar de Tripp tem uma explicação: ele é o segmento $\overline{BE'}$ que pertence à diagonal \overline{BZ} (figura 3.7(b)).



(a) A construção auxiliar de Tripp.



(b) A construção de Tripp e o 18-ágono.

Figura 3.7: A solução de Tripp do problema 2.

Tripp também generalizou o problema 2 da seguinte forma: com referência ao triângulo da figura 3.8, quais triplas (a, b, c) de ângulos inteiros (em graus) existem tais que α também seja um ângulo inteiro? Os ângulos que satisfazem esta condição são chamados *ângulos adventícios* [76, 123, 102, 103, 107]. Entre o total de 113.564 triplas possíveis, apenas 53 se revelaram candidatas, após inspeção numérica. De fato, demonstrações caso a caso comprovaram que todas as 53 triplas são adventícias: elas estão apresentadas na tabela 3.1 [123, 103]. Cada triângulo adventício está relacionado com um polígono regular apropriado (cujo número de lados é indicado por n na tabela 3.1): maiores detalhes podem ser encontrados em [107].

a	b	c	α	n
4	46	4	2	90
8	47	8	4	180
12	42	18	12	30
12	48	12	6	30
12	57	33	15	60
12	66	42	12	90
12	69	21	3	60
12	72	42	6	30
16	49	16	8	180
20	50	20	10	18
20	60	30	10	18
20	65	25	5	36
20	70	50	10	18
24	51	24	12	60
28	52	28	14	90
32	53	32	16	180
36	54	36	18	10
40	55	35	15	36
44	56	34	12	90
48	57	33	9	60
52	58	32	6	90
56	59	31	3	180
72	39	21	12	60
72	42	24	12	30
72	48	24	6	30
72	51	39	9	60
120	24	12	6	30

a	b	c	α	n
4	46	44	42	90
8	47	43	39	180
12	42	30	24	30
12	48	42	36	30
12	57	42	24	60
12	66	54	24	30
12	69	66	48	60
12	72	66	30	30
16	49	41	33	180
20	50	40	30	18
20	60	50	30	18
20	65	60	40	36
20	70	60	20	18
24	51	39	27	60
28	52	38	24	90
32	53	37	21	180
40	55	40	20	36
44	56	44	22	90
48	57	48	24	60
52	58	52	26	90
56	59	56	28	180
72	39	27	18	60
72	42	30	18	30
72	48	42	24	30
72	51	42	12	60
120	24	18	12	30

Tabela 3.1: As triplas adventícias.

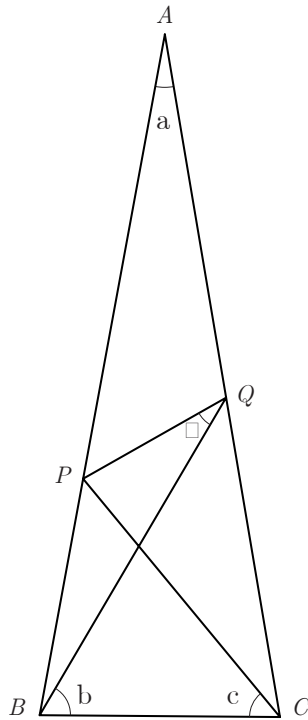


Figura 3.8: O problema adventício.

Para encerrar esta seção, convidamos o leitor a calcular o valor de x em função dos ângulos reais a , b e c , com $a + b + c = 90^\circ$, em cada uma das configurações abaixo.

3.3 Apêndice: a tabela trigonométrica de 3° em 3°

Usando as relações métricas entre os lados e as diagonais do quadrado e do triângulo equilátero podemos construir a tabela trigonométrica com os ângulos de 30° , 45° , 60° e 90° que aparecem nos textos de matemática do ensino médio.

Por outro lado, estudando a relação entre os lados e as diagonais de apenas mais um polígono, o pentágono, podemos construir uma tabela trigonométrica com todos os ângulos múltiplos inteiros de 3° . Com ele, podemos calcular o cosseno de 18° e, a partir daí, aplicar as identidades trigonométricas do cosseno da diferença dos ângulos de 18° e 15° para calcular

$$\cos(3^\circ) = \cos(18^\circ - 15^\circ) = \cos(18^\circ) \cos(15^\circ) + \sin(18^\circ) \sin(15^\circ),$$

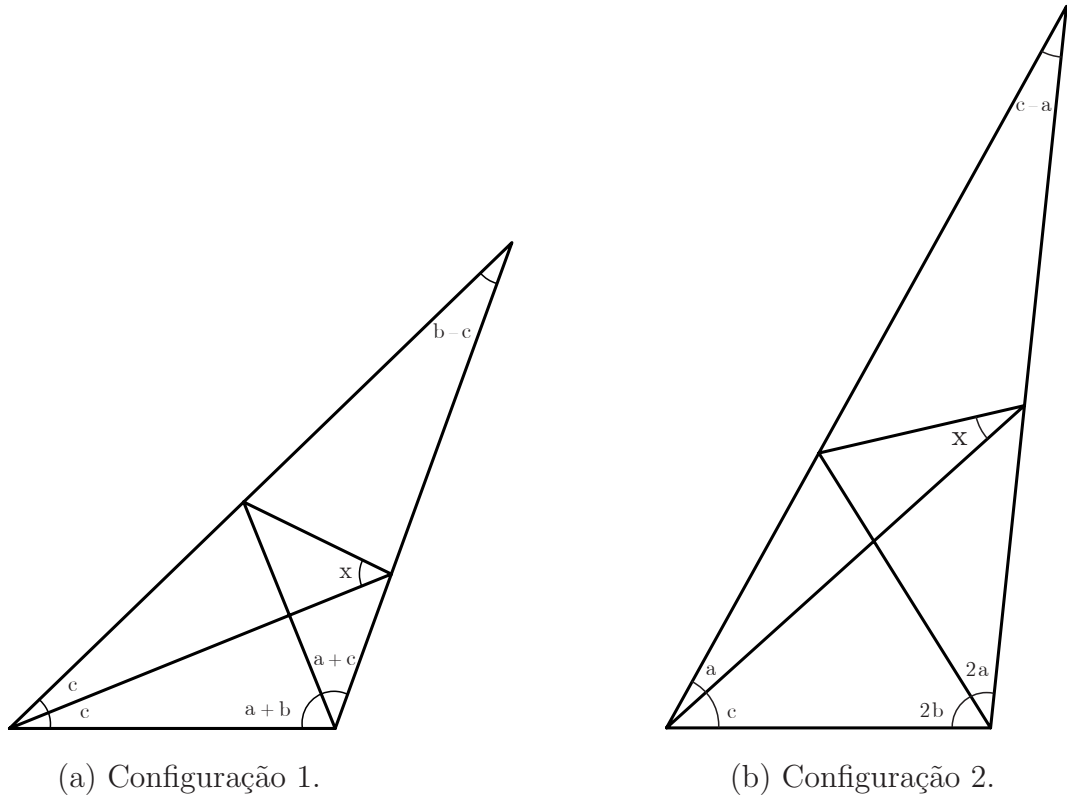


Figura 3.9: Dois problemas propostos.

lembrando, que o cosseno de 15° , por sua vez, pode ser obtido por

$$\cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos(45^\circ) \cos(30^\circ) + \sin(45^\circ) \sin(30^\circ).$$

Considere então a figura 3.10, onde o pentágono regular $ABCDE$ tem lado 1 e P é o ponto de interseção das diagonais \overline{AD} e \overline{BE} .

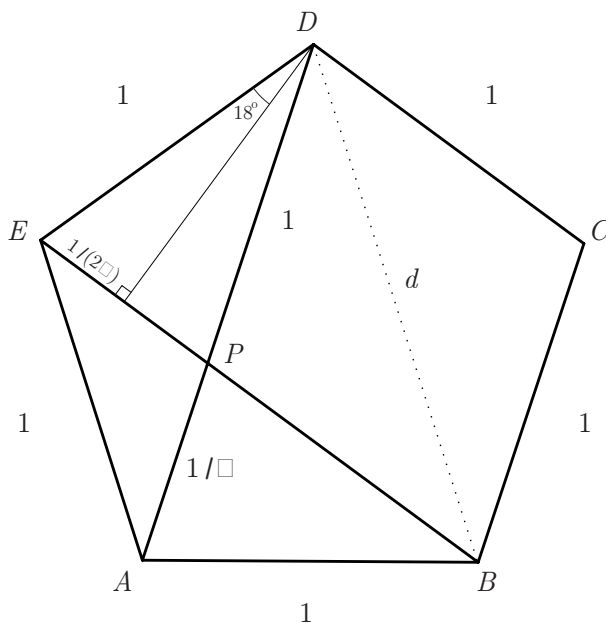


Figura 3.10: O pentágono regular e o ângulo de 18°.

O triângulo $\triangle PDE$ é isósceles, com $DE = DP = 1$. Escrevendo $AP = 1/\lambda$, temos que

$$d = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

é o comprimento da diagonal do pentágono. Observe que o triângulo $\triangle APE$ é isósceles e, portanto,

$$EP = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \sin 18^\circ = \frac{1/(2\lambda)}{1}.$$

Como os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle PDE$ são semelhantes, temos que

$$\frac{1}{1/\lambda} = \frac{d}{1}.$$

Usando que $d = 1 + 1/\lambda$, chegamos à equação quadrática $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, donde

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Desta forma, temos que

$$\sin(18^\circ) = \frac{1}{2\lambda} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad \text{e} \quad \cos(18^\circ) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Outro resultado igualmente interessante e fácil de se obter é a fórmula do seno e cosseno dos sucessivos arcos metades de 45° , 15° e 18° . De fato: da identidade trigonométrica

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2},$$

segue-se que

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2 + 2 \cos(\theta)}}{2} = \frac{\sqrt{8 + 8 \cos(\theta)}}{4},$$

para valores de θ entre 0° e 90° . A partir desta fórmula, é fácil concluir que

$$\cos\left(\frac{45^\circ}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}{2}, \quad (n + 1 \text{ raízes quadradas})$$

$$\cos\left(\frac{15^\circ}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{3}}}}}{2}, \quad (n + 2 \text{ raízes quadradas})$$

$$\cos\left(\frac{18^\circ}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + \cdots + 2 \sqrt{10 + 2 \sqrt{5}}}}}}{4} \quad (n + 2 \text{ raízes quadradas})$$

e, conseqüentemente,

$$\sin\left(\frac{45^\circ}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}{2}, \quad (n + 1 \text{ raízes quadradas})$$

$$\sin\left(\frac{15^\circ}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{3}}}}}{2}, \quad (n + 2 \text{ raízes quadradas})$$

$$\sin\left(\frac{18^\circ}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{8 - 2 \sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + \cdots + 2 \sqrt{10 + 2 \sqrt{5}}}}}}{4}. \quad (n + 2 \text{ raízes quadradas})$$

ângulo	seno	coseno
3°	$\frac{(1 - \sqrt{3}) \sqrt{20 + 4\sqrt{5}} + (1 + \sqrt{3}) (\sqrt{10} - \sqrt{2})}{16}$	$\frac{(1 + \sqrt{3}) \sqrt{20 + 4\sqrt{5}} - (1 - \sqrt{3}) (\sqrt{10} - \sqrt{2})}{16}$
6°	$\frac{\sqrt{5} + 1}{8} + \frac{\sqrt{3} (\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16}$	$\frac{\sqrt{3} (\sqrt{5} + 1)}{8} + \frac{(\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16}$
9°	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{5} + 1)}{8} - \frac{\sqrt{2} (\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16}$	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{5} + 1)}{8} + \frac{\sqrt{2} (\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16}$
12°	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3} (\sqrt{5} - 1)}{8}$	$\frac{\sqrt{3} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1}{8}$
15°	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} - 1)}{4}$	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} + 1)}{4}$
18°	$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$
21°	$\frac{\sqrt{2} (1 - \sqrt{3}) (1 + \sqrt{5})}{16} - \frac{\sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) (1 - \sqrt{5}) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{32}$	$\frac{\sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) (1 + \sqrt{5})}{16} + \frac{\sqrt{2} (1 - \sqrt{3}) (1 - \sqrt{5}) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{32}$
24°	$\frac{\sqrt{3} (1 + \sqrt{5})}{8} + \frac{(1 - \sqrt{5}) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16}$	$\frac{(1 + \sqrt{5})}{8} + \frac{\sqrt{3} (-1 + \sqrt{5}) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16}$
27°	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1)}{8}$	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1)}{8}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
33°	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) (\sqrt{5} - 1)}{16}$	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) (\sqrt{5} - 1)}{16}$
36°	$\frac{(\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$
39°	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) (\sqrt{5} + 1)}{16} - \frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) (\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{32}$	$\frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) (\sqrt{5} + 1)}{16} + \frac{\sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) (\sqrt{5} - 1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{32}$
42°	$\frac{\sqrt{3} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1}{8}$	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} (\sqrt{5} - 1)}{8}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Tabela 3.2: A tabela trigonométrica de 3° em 3°.

Capítulo 4

Automatização em geometria

Em 8 de agosto de 1900, por ocasião do Segundo Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris, David Hilbert apresentou 23 problemas em aberto com o intuito de apontar temas promissores para a investigação em matemática no século XX. Em um dos problemas, Hilbert perguntou se a teoria dos números era *completa*, no sentido que é sempre possível determinar através de uma demonstração se uma sentença lógica em aritmética é verdadeira ou falsa. Em uma teoria incompleta, uma afirmação sem contra-exemplos não é necessariamente demonstrável a partir dos axiomas.

Kurt Gödel, em 1931, forneceu uma resposta negativa [56, 57]: existem verdades na aritmética que ela própria desconhece, pior, não pode conhecer. Mais precisamente, um sistema de axiomas para a aritmética não consegue nem demonstrar nem negar determinadas afirmações sobre os números, ainda que essas afirmações sejam sintaticamente corretas e desprovidas de contra-exemplos. Este resultado é conhecido como o *Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel*. Uma vez que a aritmética é incompleta, tudo que a ela se reduza será incompleto.

Por outro lado, Alfred Tarski, em 1951, demonstrou que a teoria de *álgebra elementar* dos números reais e, portanto, também a teoria de *geometria elementar* é completa [118]. Na verdade, Tarski demonstrou que estas teorias são *decidíveis*, isto é, existe um *algoritmo* que em um número *finito* de passos consegue determinar se cada uma das sentenças da teoria é verdadeira ou falsa.

O fato da *geometria elementar* poder ser automatizada (mecanizada) é apontado como uma das razões para a perda de interesse em pesquisa na área de geometria [40, 131]. Essa perda de interesse já era notada nos tempos da criação

da geometria analítica. Hoje, este cenário está mudando — o uso do computador fez novos problemas e novos resultados surgirem. Muitas aplicações computacionais possuem uma forte componente geométrica [24, 131]: geometria discreta, modelagem geométrica, *computer aided design*, *constrained cad*, robótica, visualização em medicina, animação por computador, programação linear e não-linear, química computacional, física dos materiais, *geographic information systems* e análise de estabilidade. O desempenho do algoritmo é agora um fator crítico. O algoritmo de decisão de Tarski, por exemplo, é extremamente demorado. Aprimoramentos subseqüentes melhoraram de muito seu desempenho, mas ainda assim, praticamente não existe (e parece que nem pode existir) um programa de demonstração em geometria completo e rápido (o algoritmo do tipo Tarski mais rápido que se conhece atualmente é a *decomposição algébrica cilíndrica*, cuja complexidade computacional é da ordem de e^n , onde n é o tamanho dos dados de entrada [11]).

Neste capítulo, estudaremos alguns aspectos da teoria de automatização em geometria. Em particular, veremos que uma das etapas do processo é a conversão do problema de geometria para uma linguagem algébrica, consistindo tipicamente de igualdades e desigualdades entre polinômios com coeficientes inteiros em várias variáveis reais.

O cenário algébrico fornece critérios concretos para se medir a complexidade (o “grau de dificuldade”) dos problemas de geometria. Por exemplo, usando o programa de computador *Geometry Expert* [27, 30, 29, 31], Chou demonstrou automaticamente cerca de 366 problemas extraídos de um livro típico de geometria do ensino médio [2]. A estatística foi a seguinte: 219 deles são lineares e os demais são quadráticos, no sentido que os polinômios em várias variáveis obtidos na conversão do contexto geométrico para o contexto algébrico são tais que, considerando-se uma variável de cada vez, apenas polinômios de grau no máximo igual a 1 e 2 aparecem, respectivamente. Um problema de geometria de grau 3 (que não é estudado no ensino médio) é o teorema de Morley: os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes dos ângulos de um triângulo qualquer formam sempre um triângulo equilátero. A técnica de Chou, aliás, converte a proposição 3 do capítulo 1 em um problema de grau 2 no sentido acima. Com este levantamento, Chou também propôs uma classificação do nível de dificuldade dos teoremas de geometria em termos dos vários tipos de construções geométricas

envolvidas ([30], página 443): colinearidade, paralelismo, proporcionalidade, perpendicularidade, círculo, ângulo, em ordem crescente de dificuldade.

4.1 Euclides e a demonstração sintética

A demonstração de teoremas surgiu na Grécia antiga com Euclides, por volta de 300 a.C., com sua obra *Os Elementos*. O estilo de demonstração é *sintético* (isto é, sem o uso de números ou de exemplos específicos) e é o primeiro que aprendemos no colégio.

Do ponto de vista axiomático, *Os Elementos* possui muitas falhas. Por exemplo, na primeira proposição do Livro I, Euclides ensina como construir um triângulo equilátero sobre um dado segmento \overline{AB} (figura 4.1):

Com centro em A e raio AB, construa o círculo C_1 . Com centro em B e raio BA, construa o círculo C_2 . Seja C um dos pontos de interseção entre os dois círculos. O triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.

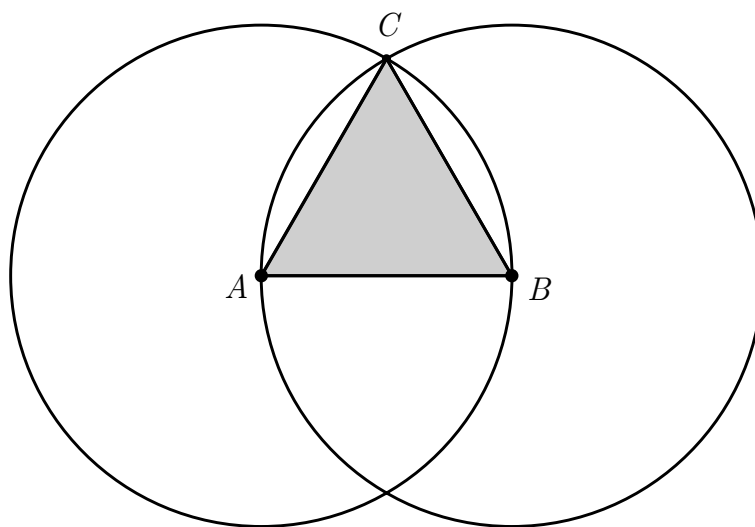


Figura 4.1: A construção de um triângulo equilátero.

O erro nesta construção é que os axiomas de Euclides não garantem a existência do ponto C . De fato, se considerarmos $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ como modelo para a geometria euclidiana (e, de fato, a restrição da geometria habitual a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ satisfaz a todos

os axiomas propostos por Euclides), não é possível construir o ponto C para o segmento com extremidades $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$ usando as instruções dadas na proposição. Os axiomas de Euclides não garantem completude do conjunto de pontos para o conceito habitual de distância! Uma axiomatização da geometria sem erros desta natureza foi conseguida apenas no final do século XIX, com a obra *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert.

Destacamos as seguintes características da demonstração sintética de Euclides:

- (E1) A demonstração é conduzida em um estilo dedutivo baseado no sistema axiomático e apresentado na forma “*definição, axioma, teorema, demonstração*”.
- (E2) A prova de cada teorema exige uma abordagem particular.

Um dos principais defeitos neste estilo de demonstração é o pouco cuidado que se tem ao tratar noções geométricas tais como “as duas regiões que uma reta separa” e “o interior de um ângulo”. Sem o devido esclarecimento destas idéias, conseqüências absurdas podem aparecer. Vamos ver dois exemplos, tirados de [1] e [28].

Exemplo 4.1 (UM TEOREMA FALSO) Todo triângulo é isósceles.

Uma demonstração (errada):

No triângulo $\triangle ABC$ da figura 4.2, seja O o ponto de interseção da mediatriz \overleftrightarrow{FO} do lado \overline{AB} com a bissetriz \overleftrightarrow{CO} do ângulo $\angle ACB$.

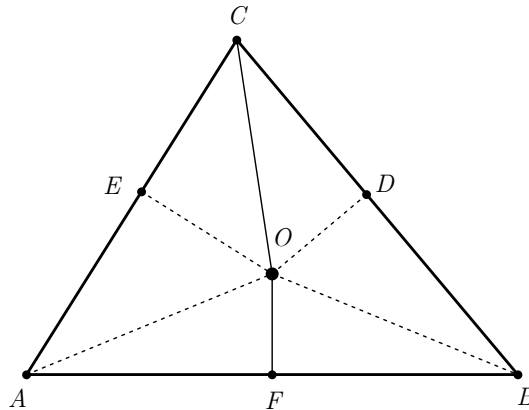


Figura 4.2: Todo triângulo é isósceles (um teorema falso).

Construa os segmentos \overline{OE} perpendicular ao lado \overline{AC} e \overline{OD} perpendicular ao lado \overline{BC} , respectivamente. Os triângulos retângulos $\triangle CEO$ e $\triangle CDO$ são

congruentes e, portanto, $EO = DO$ e $EC = DC$. Como $AO = BO$, o triângulo retângulo $\triangle AEO$ é então congruente ao triângulo retângulo $\triangle BDO$ e, assim, $AE = BD$. Conseqüentemente, $AC = AE + EC = BD + DC = BC$ e o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles.

Qual é o erro nesta demonstração? Ao contrário ao que a figura 4.2 sugere, a interseção O da mediatriz \overleftrightarrow{FO} com a bissetriz \overleftrightarrow{CO} *nunca* está no *interior* do triângulo $\triangle ABC$!

Exemplo 4.2 Seja $ABCD$ um paralelogramo (isto é, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$). Se E é a interseção das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , então $AE = CE$ (figura 4.3).

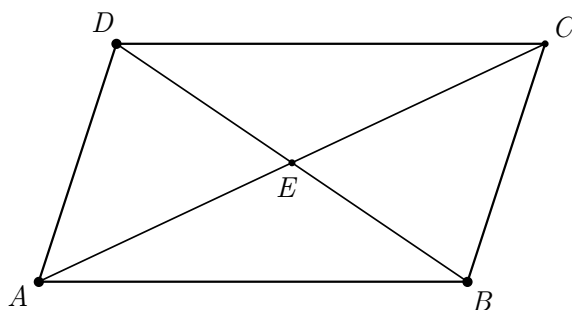


Figura 4.3: As diagonais de um paralelogramo se interceptam em seus pontos médios.

Na demonstração tradicional deste teorema, prova-se primeiro que os triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle CAD$ são congruentes (de modo que $AB = CD$) e, em seguida, prova-se que os triângulos $\triangle AEB$ e $\triangle CED$, por sua vez, também são congruentes (para concluir que $AE = CE$). A fim de estabelecer a congruência destes triângulos, é preciso usar que $\angle CAB = \angle ACD$. Isto decorre facilmente do fato que $\angle CAB$ e $\angle ACD$ são os dois ângulos alternos com relação aos segmentos paralelos \overline{AB} e \overline{CD} . Por outro lado, algo que não é evidente, de difícil demonstração e que está sendo usado implicitamente, é o fato de que os pontos D e B estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{AC} .

Chou [30] menciona outro grave defeito potencial do estilo sintético: a ausência de *condições de não-degenerescência*. Cada teorema em geometria é válido sob certas condições auxiliares que freqüentemente não estão explicitadas no enunciado do teorema. No caso do teorema no exemplo 4.2 acima, é necessário supor que A , B e C são não colineares. Sem as condições de não-degenerescência, as

demonstrações tradicionais de geometria tornam-se imprecisas e, por este motivo, fica muito difícil reproduzi-las em um programa de computador que obtém provas em geometria automaticamente. Apesar de alguns esforços neste sentido [54, 95, 95, 32, 72], nenhum programa de computador baseado em demonstração sintética conseguiu provar teoremas não triviais em geometria de maneira eficiente.

4.2 Descartes e a demonstração analítica

Com o clássico *La Géométrie* em 1637 [42], René Descartes criou um novo estilo de demonstração em geometria. Neste texto, ele explica como converter, através de um sistema de coordenadas conveniente, construções geométricas em operações algébricas do tipo $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b e $\sqrt{a^2 + b^2}$, onde a e b representam tamanhos de segmentos. Com este método, Descartes conseguiu reduzir geometria à álgebra convencional e conseqüentemente substituir deduções lógicas sintéticas por manipulações algébricas (o que é conhecido nos dias de hoje por *geometria analítica*).

No próximo exemplo, demonstramos um teorema de Gauss usando geometria analítica.

Exemplo 4.3 (O TEOREMA DE GAUSS-BODENMILLER) Um *quadrilátero completo* é uma configuração geométrica consistindo de 4 retas, onde cada reta intercepta a outra em um único ponto e não existem triplas de retas concorrentes. Em uma tal configuração, há somente 6 pontos de interseção. Um segmento onde cada extremidade é um destes seis pontos e que não está contido nas 4 retas iniciais, é denominado uma *diagonal* do quadrilátero completo. É fácil de ver que qualquer quadrilátero completo possui sempre três diagonais.

Na figura 4.4, temos um exemplo de um quadrilátero completo formado pelas retas \overleftrightarrow{AE} , \overleftrightarrow{AF} , \overleftrightarrow{BF} e \overleftrightarrow{DE} , onde os seis pontos de interseção são A , B , C , D , E e F e as diagonais são os segmentos \overline{AC} , \overline{BD} e \overline{EF} .

O teorema de Gauss-Bodenmiller afirma que os pontos médios das três diagonais de qualquer quadrilátero completo são sempre colineares. A demonstração por geometria analítica foi a encontrada por Gauss, e é substancialmente mais simples do que a demonstração sintética [15]. O leitor está convidado a demonstrar o resultado usando as técnicas do capítulo 1: o teorema é equivalente

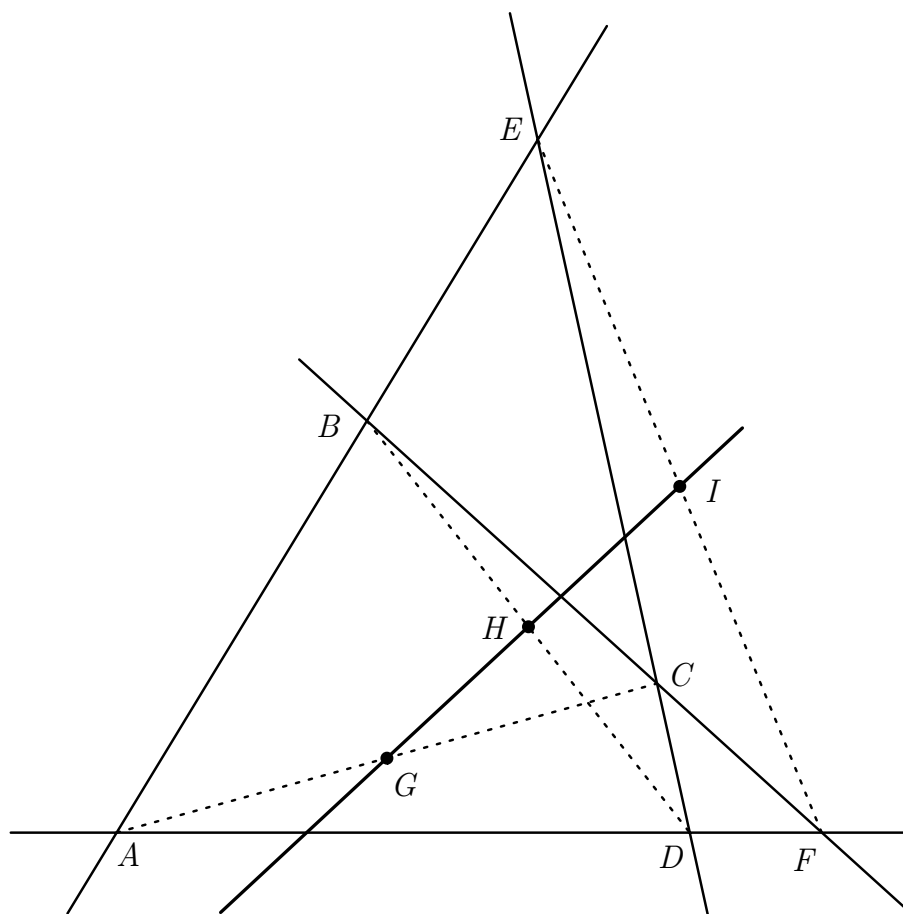


Figura 4.4: O teorema de Gauss-Bodenmiller.

a demonstrar que um polinômio $p(s, t)$ em duas variáveis reais é identicamente nulo — o polinômio aliás é de grau dois em cada variável.

Destacamos as seguintes características da demonstração analítica:

- (D1) Ao contrário da demonstração sintética de Euclides, a demonstração é agora conduzida por meio de cálculos algébricos.
- (D2) Ainda assim, cada demonstração exige tratamento individualizado. De fato: para cada teorema, devemos procurar uma maneira específica de manipular as expressões algébricas obtidas a partir da hipótese, para chegar em uma expressão algébrica que permita concluir a tese.

4.3 Hilbert e o método universal

Uma outra mudança significativa na maneira de se demonstrar teoremas em geometria ocorreu com o clássico *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert em 1899 (a referência [63] é uma tradução para o inglês do original em alemão [62]).

Nesta obra, além de fornecer um tratamento axiomático mais rigoroso da geometria euclidiana, Hilbert estabeleceu uma ponte entre o método dedutivo de Euclides e o método analítico (computacional) de Descartes. De fato, Hilbert mostrou como introduzir um sistema de coordenadas cartesiano a partir do sistema axiomático da geometria euclidiana usando um sistema numérico (isto é, um corpo) adequado:

SISTEMA AXIOMÁTICO \longrightarrow SISTEMA NUMÉRICO \longrightarrow SISTEMA DE COORDENADAS.

O sistema numérico a que Hilbert se refere é construído usando a mesma idéia de Descartes, isto é, através de operações algébricas sobre os tamanhos de segmentos. Mas, desta vez, estas operações algébricas são usadas para criar um modelo direto dos axiomas (de Hilbert) para a geometria ([63], páginas 29–59).

Em contraste com as demonstrações sintética e analítica de Euclides e Descartes, onde cada teorema possui uma prova que lhe é peculiar, Hilbert construiu um método universal de demonstração para uma classe específica de teoremas: os assim denominados *teoremas com pontos de interseção puros*. Um teorema com pontos de interseção puros tem as seguintes características ([63], página 97):

1. Os únicos objetos geométricos que aparecem no enunciado do teorema são pontos e retas (em quantidade finita).
2. As únicas operações geométricas permitidas são traçar uma reta por pontos, marcar a interseção entre duas retas e traçar uma reta paralela à outra por um dado ponto.
3. Todos os pontos e retas envolvidos na formulação da hipótese do teorema podem ser definidos ou construídos um a um, em uma ordem específica (isto é, o teorema é do tipo *construtivo*).
4. A tese é uma propriedade sobre concorrência ou paralelismo entre retas.

Hilbert mostrou então que a classe de teoremas com pontos de interseção puros é *mecanizável*, isto é, existe um *método de decisão* que permite concluir se cada teorema desta classe é verdadeiro ou falso. Na página 97 de [63] Hilbert descreve este método universal que, em linguagem mais algorítmica, é descrito nos vários passos abaixo [135].

PASSO 1. Escolha um sistema de coordenadas, dado por dois eixos regradados que se encontram em uma origem.

PASSO 2. Defina pontos e retas, um a um, em uma ordem específica.

PASSO 3. Defina variáveis independentes u_1, u_2, \dots, u_r e variáveis dependentes x_1, x_2, \dots, x_s , em uma ordem específica, de forma que a hipótese do teorema em questão seja convertida em relações algébricas da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{P_1(\mathbf{u})}{Q_1(\mathbf{u})}, \\ x_2 = \frac{P_2(\mathbf{u}, x_1)}{Q_2(\mathbf{u}, x_1)}, \\ \vdots \\ x_s = \frac{P_s(\mathbf{u}, x_1, \dots, x_{s-1})}{Q_s(\mathbf{u}, x_1, \dots, x_{s-1})}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde todos os P_i e Q_k são polinômios em $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ e nas variáveis dependentes x_1, \dots, x_{i-1} definidas anteriormente. Converta

também a tese do teorema em questão para uma relação algébrica da forma

$$R(\mathbf{u}, x_1, \dots, x_s) = 0, \quad (4.2)$$

onde R é uma função racional.

PASSO 4. Elimine as variáveis $x_s, x_{s-1}, \dots, x_2, x_1$ a partir da relação (4.2) usando, para isto, as relações do sistema (4.1):

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}, x_1, \dots, x_s) = 0 &\Leftrightarrow R_1(\mathbf{u}, x_1, \dots, x_{s-1}) = 0 \Leftrightarrow \dots \\ &\dots \Leftrightarrow R_{s-1}(\mathbf{u}, x_1) = 0 \Leftrightarrow R_s(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned}$$

PASSO 5. Se $R_s(\mathbf{u}) = 0$, então o teorema em questão é verdadeiro sob as condições (de não-degenerescência):

$$Q_i(\mathbf{u}, x_1, \dots, x_{i-1}) \neq 0, \quad (4.3)$$

para cada $i = 1, \dots, s$. Caso contrário, o teorema em questão é falso, pelo menos sob as condições (4.3).

Exemplo 4.4 (FORMA ESPECIAL DO TEOREMA DE DESARGUES) Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos no plano euclidiano. Se as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes em um ponto O e as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} são paralelas às retas $\overleftrightarrow{A'B'}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$, respectivamente, então a reta \overleftrightarrow{BC} é paralela à reta $\overleftrightarrow{B'C'}$.

Vamos demonstrar o teorema seguindo os passos do método universal de Hilbert.

PASSO 1. Considere o ponto O como a origem $(0,0)$ e dois eixos quaisquer x e y passando por O . Isto estabelece nosso sistema de coordenadas (figura 4.5).

PASSO 2. Escolha agora, nesta ordem, pontos arbitrários $A = (u_1, 0)$ e $A' = (u_2, 0)$ no eixo x , $B = (0, u_3)$ no eixo y e $C = (u_4, u_5)$ no plano.

PASSO 3. Construa a reta \overleftrightarrow{AB} e, por A' , construa a reta paralela a \overleftrightarrow{AB} que intercepta o eixo y no ponto $B' = (0, x_1)$. Assim,

$$x_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_3. \quad (4.4)$$

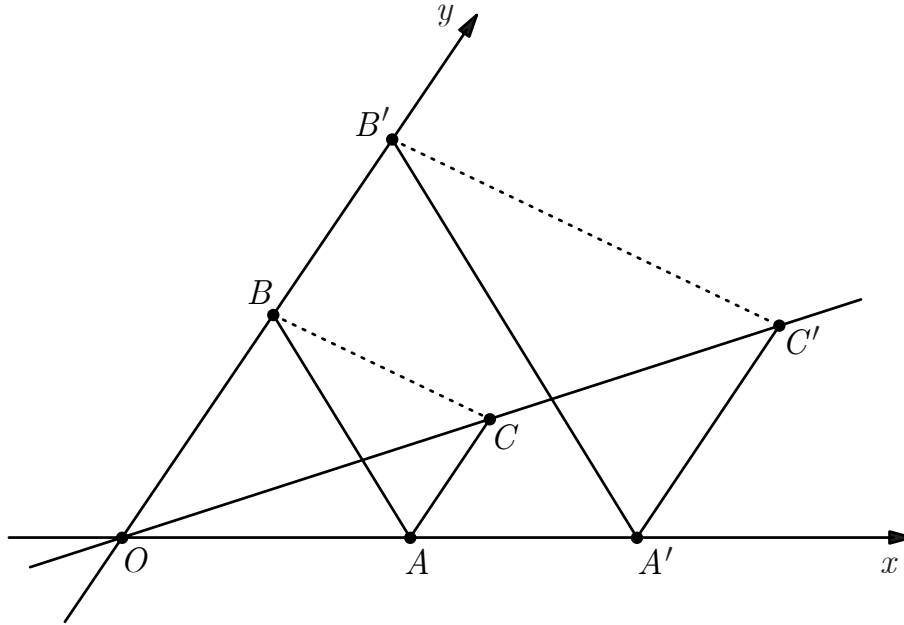


Figura 4.5: Uma forma especial do teorema de Desargues.

Construa as retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{OC} e, por A' , construa a reta paralela a \overleftrightarrow{AC} que encontra \overleftrightarrow{OC} no ponto $C' = (x_2, x_3)$.

Convertendo os fatos geométricos que $\overleftrightarrow{CC'}$ passa por O e \overleftrightarrow{AC} é paralela a $\overleftrightarrow{A'C'}$ para o contexto algébrico obtemos, respectivamente, as seguintes equações

$$u_4 \cdot x_3 - u_5 \cdot x_2 = 0, \quad (4.5)$$

$$(u_4 - u_1) \cdot x_3 - u_5 \cdot (x_2 - u_2) = 0. \quad (4.6)$$

Supondo que

$$u_1 \neq 0, \quad u_4 \neq 0, \quad u_5 \neq 0, \quad (4.7)$$

vemos que o sistema definido pelas equações (4.4), (4.5) e (4.6) é equivalente a

$$x_1 = \frac{u_2 \cdot u_3}{u_1}, \quad x_2 = \frac{u_2 \cdot u_4 \cdot u_5}{u_1 \cdot u_5}, \quad x_3 = \frac{u_5 \cdot x_2}{u_4}. \quad (4.8)$$

Desta maneira, as condições (4.7) e (4.8) formam a hipótese do teorema. Para escrever a tese, observe que \overleftrightarrow{BC} ser paralela a $\overleftrightarrow{B'C'}$ corresponde a

$$u_4 \cdot (x_3 - x_1) - (u_5 - u_3) \cdot x_2 = 0. \quad (4.9)$$

PASSO 4. Temos

$$\begin{aligned} u_4 \cdot (x_3 - x_1) - (u_5 - u_3) \cdot x_2 = 0 & \xleftrightarrow{x_3} u_4 \cdot \left(\frac{u_5 \cdot x_2}{u_4} - x_1 \right) - x_2 \cdot (u_5 - u_3) = 0 \\ & \iff -u_4 \cdot x_1 + u_3 \cdot x_2 = 0 \\ & \xleftrightarrow{x_2} -u_4 \cdot x_1 + \frac{u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5}{u_1 \cdot u_5} = 0 \\ & \xleftrightarrow{x_1} -u_4 \cdot \frac{u_2 \cdot u_3}{u_1} + \frac{u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5}{u_1 \cdot u_5} = 0. \end{aligned}$$

PASSO 5. Uma vez que

$$-u_4 \cdot \frac{u_2 \cdot u_3}{u_1} + \frac{u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5}{u_1 \cdot u_5}$$

é, de fato, igual a 0 para todo $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ satisfazendo as condições (4.7), concluímos que, sob estas condições, o teorema é verdadeiro.

Vamos examinar as condições de não-degenerescência (4.7) com mais cuidado. O caso $u_1 = 0$ fará com que A coincida com O e, neste caso, o teorema perderá o seu significado geométrico, pois não será possível construir uma configuração geométrica que atenda a hipótese do teorema.

A condição $u_4 = 0$ fará com que os pontos C e C' estejam no eixo y . Observe que, mesmo neste caso degenerado, o teorema é verdadeiro (figura 4.6).

A condição $u_5 = 0$ fará com que os pontos C e C' estejam agora no eixo x . Mas, desta vez, para quase toda escolha do ponto C' no eixo x , o teorema é falso (figura 4.7)!

Desta maneira, as condições de não degenerescência (4.7) são indispensáveis para que o teorema tenha algum significado geométrico ou para que o teorema

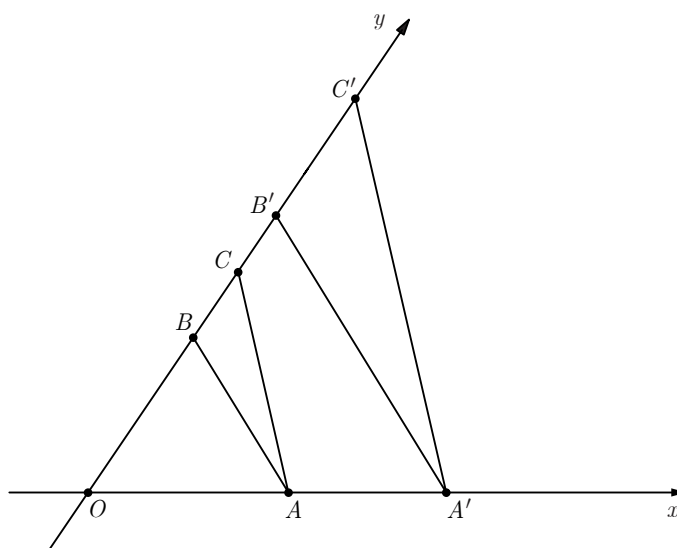


Figura 4.6: Um caso degenerado onde o teorema de Desargues é verdadeiro.

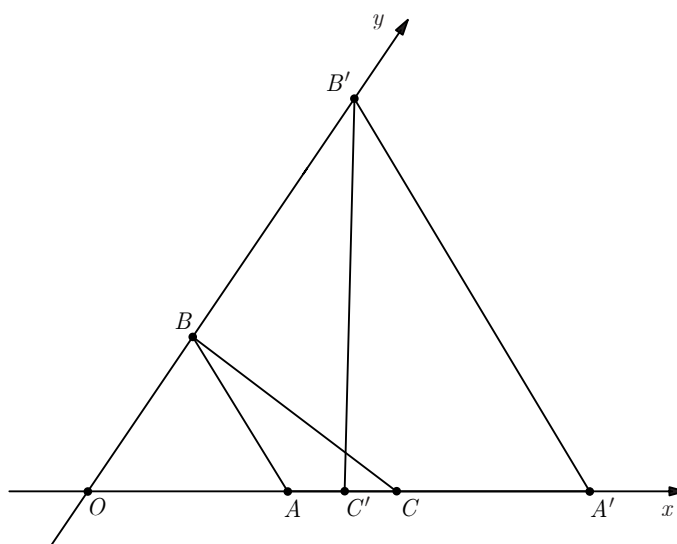


Figura 4.7: Um caso degenerado onde o teorema de Desargues é falso.

seja verdadeiro.

Para a classe teoremas com pontos de interseção puros, destacamos as seguintes características do método universal de Hilbert:

- (H1) Como no caso da demonstração analítica de Descartes, a demonstração é conduzida por meio de cálculos algébricos.
- (H2) Em contraste com as demonstrações sintética e analítica de Euclides e Descartes, todos os teoremas são demonstrados da mesma maneira por um único método.

4.4 Tarski e a eliminação de quantificadores

A classe de teoremas em geometria para os quais o método universal de Hilbert pode ser aplicado é muito restrita.

Em maio de 1951, Alfred Tarski publicou em *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry* [118] um método de decisão para uma classe muito mais ampla de teoremas em geometria. Não é nossa intenção fazer uma descrição de toda a teoria envolvida na formulação do método, algo fora das pretensões desta dissertação (o leitor interessado pode consultar também as referências [121, 59]). Em vez disso, consideraremos três tópicos específicos: a classe de teoremas para os quais o método pode ser aplicado, o processo de *eliminação de quantificadores* (que é a idéia fundamental do método) e, finalmente, questões de desempenho computacional (isto é, complexidade) do algoritmo.

A Geometria Elementar de Tarski

O método de decisão de Tarski vale para as teorias de *álgebra* e *geometria elementar*. O adjetivo *elementar* é usado para indicar uma teoria que pode ser formulada ou estabelecida sem o uso de ferramentas da teoria de conjuntos, isto é, toda a linguagem da teoria versa apenas sobre os *objetos* da teoria e não sobre *conjuntos* formados por estes objetos. Em lógica, uma teoria com estas características é denominada de *primeira ordem* [9].

Podemos então caracterizar a *álgebra elementar* de Tarski como a parte da teoria geral dos números reais com as seguintes restrições de linguagem:

- Todas as variáveis representam exclusivamente números reais.

- As únicas constantes são -1 , 0 e $+1$.
- As operações algébricas restringem-se à adição ($+$), subtração ($-$) e multiplicação (\cdot).
- Os operadores relacionais são os de desigualdade ($<$ e $>$) e o de igualdade ($=$).

É permitido ainda usar as operações lógicas de conjunção (\wedge), disjunção (\vee) e negação (\sim) e os quantificadores universal (\forall) e existencial (\exists). Sendo assim,

- $0 > 1 + 1$;
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, [(a < 0 \vee a > 0) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x \cdot x \cdot x + b \cdot x \cdot x + c \cdot x + d = 0)]$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, [(0 < x \wedge x < 1) \Rightarrow (x \cdot x \cdot x \cdot x < x \cdot x)]$;

são exemplos de sentenças em álgebra elementar (a primeira é falsa e as demais são verdadeiras). Normalmente, estas sentenças são escritas como

- $0 > 2$;
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, [a \neq 0 \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} \mid ax^3 + bx^2 + cx + d = 0)]$;
- $\forall x \in (0, 1), x^4 < x^2$.

Por outro lado, não é permitido usar variáveis que representem seqüências, subconjuntos ou funções arbitrárias de números reais. Por exemplo, enquanto as sentenças

Todo polinômio de grau 3 possui pelo menos uma raiz real.
Todo polinômio de grau 5 possui pelo menos uma raiz real.
Todo polinômio de grau 7 possui pelo menos uma raiz real.

podem ser facilmente convertidas para a linguagem de álgebra elementar, a sentença

Todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.

não pode pois, para formulá-la, é necessário usar um quantificador no subconjunto dos números ímpares para descrever o grau do polinômio, o que não é permitido.

Grabiner [59] observa que todos os axiomas algébricos da teoria dos números reais podem ser formulados dentro da teoria de álgebra elementar, com exceção do axioma da completude. Para substituir completude, Tarski usa o teorema do valor intermediário para polinômios. Os detalhes podem ser encontrados em [59, pp. 2–3] ou [120, pp. 311–312].

Com relação à *geometria elementar*, podemos caracterizá-la como a parte da geometria euclidiana que pode ser traduzida para a linguagem de álgebra elementar fixando-se um sistema de coordenadas.

Um erro freqüente é confundir a geometria elementar de Tarski com a geometria que se aprende no colégio [119]. Teoremas de geometria que explicitamente ou implicitamente usam números naturais não podem ser convertidos para a linguagem de primeira ordem. A generalização de Barlotti (seção 2.3 do capítulo 1) e os porismos de Steiner e Poncelet (considerados no próximo capítulo) se enquadram nesta categoria. O teorema que afirma que não é possível fazer a trisseção de um ângulo com régua e compasso é outro exemplo (mais sutil) de um resultado fora do escopo da geometria elementar de Tarski.

A Eliminação de Quantificadores

O método de decisão apresentado por Tarski depende do teorema de Sturm, que é um algoritmo para resolver se sentenças como as abaixo são verdadeiras ou falsas:

O polinômio p possui exatamente k raízes no intervalo I .

onde, evidentemente, p , k e I são especificados a priori. Estas sentenças formam um subconjunto de sentenças da teoria de álgebra elementar.

Em linhas gerais, Tarski primeiro estende o teorema de Sturm para uma classe maior de fórmulas e, depois, mostra como reduzir qualquer fórmula com uma variável quantificada para uma fórmula equivalente, sem a variável, dentro desta classe. Aplicando-se recursivamente este processo, o método obtém uma fórmula sem variáveis quantificadas que é equivalente a fórmula original. Por exemplo, para a fórmula

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

o método de Tarski elimina a variável quantificada x e apresenta como resposta a fórmula equivalente

$$b^2 - 4 \cdot c \geq 0.$$

Caso a fórmula seja uma sentença (isto é, uma fórmula onde todas as variáveis estão quantificadas), o método elimina todas as variáveis e obtém como sentença equivalente a fórmula $0 = 0$, de onde se pode concluir que a sentença original é verdadeira, ou $0 = 1$, de onde se pode concluir que a sentença original é falsa.

A idéia de eliminação de quantificadores permeia vários problemas de matemática. Como um exemplo trivial, considere eliminação gaussiana agindo no sistema

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Para resolvê-lo, podemos somar as duas equações e obter uma terceira equação onde apenas a variável x aparece:

$$2x = 4. \quad (4.11)$$

Para explicitar a eliminação de quantificadores, vamos reescrever o sistema (4.10) em linguagem de lógica:

$$\exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = 3 \wedge x - y = 1.$$

Quando aplicamos o método de eliminação gaussiana, a variável quantificada y é eliminada e conseguimos uma fórmula equivalente em termos da variável x apenas. Neste contexto, podemos considerar o método de eliminação gaussiana como um método de decisão para a classe de fórmulas em álgebra elementar que envolvem conjunções de equações lineares com quantificadores existenciais.

Um exemplo menos trivial aparece no estudo de estabilidade de uma certa equação diferencial parcial [68]:

$$c > 0 \wedge [\forall s, t \in \mathbb{R}, (0 \leq s \leq 1 \wedge 0 \leq t \leq 1) \Rightarrow (-2stc^3 + 3stc^2 + sc^2 - 2sc + tc^2 - 2tc + 1 \geq 0)].$$

Eliminando-se as variáveis quantificadas s e t , uma fórmula equivalente e muito mais simples (obtida com o programa QEPCAD [101]) aparece:

$$(0 < c \leq 1/2) \vee c = 1.$$

Exemplos como esse devem convencer o leitor dos méritos de algoritmos de computação simbólica.

Outras aplicações da teoria de eliminação de quantificadores incluem: soluções de sistemas de igualdades e desigualdades de polinômios, otimização polinomial, aproximação, estudo da topologia dos conjuntos semi-algébricos, computação gráfica, modelagem geométrica, planejamento do movimento de robôs, análise de estabilidade, etc [67, 24].

Questões de desempenho

Apesar do método de decisão de Tarski poder decidir em um número *finito* de passos se cada uma das sentenças de álgebra e geometria elementar é verdadeira ou falsa, o seu desempenho computacional é muito ruim. De fato, a complexidade do método de decisão de Tarski em termos do número de átomos da fórmula não pode ser limitada por nenhuma torre finita de exponenciais, o que torna impraticável sua implementação em computador.

Vários aperfeiçoamentos foram sugeridos para o método original de Tarski. O melhor algoritmo desta classe que se conhece é a *decomposição algébrica cilíndrica* [33, 4, 5, 70]. O programa de computador QEPCAD, disponível no endereço [101], implementa este algoritmo [66]. O uso de computação paralela também foi considerado [11, 68].

Outro aspecto é a *qualidade* da fórmula (uma indicação da complexidade de uma fórmula para usuários humanos). Eliminar quantificadores pode dar origem a expressões de péssima qualidade. Um exemplo clássico é o problema da elipse, proposto por Kahan [71]: encontre condições necessárias e suficientes para que uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados esteja dentro de um círculo centrado na origem e com raio 1.

Usando as variáveis a , b , c e d de acordo com a figura 4.8, não é difícil de ver que o problema pode ser representado pela fórmula

$$a > 0 \wedge b > 0 \wedge [\forall x, y \in \mathbb{R}, (x - a)^2/c^2 + (y - b)^2/d^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1]$$

ou, dado que divisões não são permitidas na linguagem de álgebra elementar, por

$$a > 0 \wedge b > 0 \wedge [\forall x, y \in \mathbb{R}, b^2(x - c)^2 + a^2(y - d)^2 = a^2b^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1].$$

Lazard [77] mostrou que qualquer eliminação dos quantificadores nas variáveis x e y irá produzir uma resposta que contém um polinômio T de grau 12 e 104 termos nas variáveis a, b, c e d . A fórmula ótima apresentada por Lazard para o problema da elipse é a seguinte:

$$\begin{aligned} & [(a > 0) \wedge (T \geq 0) \wedge (c^2 + (b + |d|)^2 - 1 \leq 0) \wedge (a^2 \leq b \vee a^2d^2 \leq (1 - a^2)(a^2 - b^2))] \\ & \vee \\ & [(a = b) \wedge (c^2 + d^2 \leq (1 - a)^2) \wedge (a \leq 1)] \\ & \vee \\ & [(a < b) \wedge (T \geq 0) \wedge (d^2 + (a + |c|)^2 - 1 \leq 0) \wedge (b^2 \leq a \vee b^2c^2 \leq (1 - b^2)(b^2 - a^2))], \end{aligned}$$

onde o polinômio T é dado por:

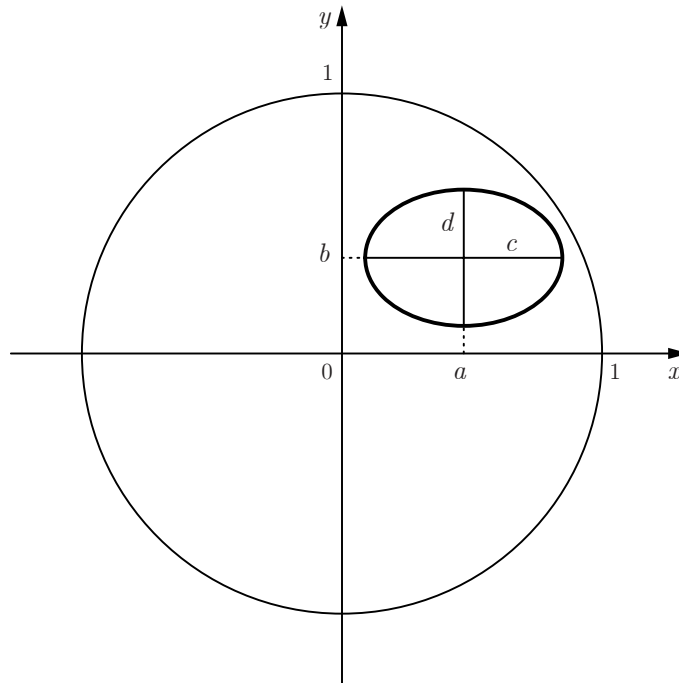


Figura 4.8: O problema da elipse de Kahan.

$$\begin{aligned}
T = & a^4 d^8 + ((2 a^2 b^2 + 2 a^4) c^2 + (-4 a^4 + 2 a^2) b^2 + 2 a^6 - 4 a^4) d^6 \\
& + ((b^4 + 4 a^2 b^2 + a^4) c^4 + ((-6 a^2 - 2) b^4 + (2 a^4 + 2 a^2) b^2 - 2 a^6 - 6 a^4) c^2 \\
& + (6 a^4 - 6 a^2 + 1) b^4 + (-6 a^6 + 10 a^4 - 6 a^2) b^2 + a^8 - 6 a^6 + 6 a^4) d^4 \\
& + ((2 b^4 + 2 a^2 b^2) c^6 + (-2 b^6 + (2 a^2 - 6) b^4 + (-6 a^4 + 2 a^2) b^2 - 2 a^4) c^4 \\
& + ((6 a^2 + 4) b^6 + (-10 a^4 - 6 a^2 + 6) b^4 + (6 a^6 - 6 a^4 - 10 a^2) b^2 + 4 a^6 \\
& + 6 a^4) c^2 + (-4 a^4 + 6 a^2 - 2) b^6 + (6 a^6 - 8 a^4 + 4 a^2 - 2) b^4 \\
& + (-2 a^8 + 4 a^6 - 8 a^4 + 6 a^2) b^2 - 2 a^8 + 6 a^6 - 4 a^4) d^2 + b^4 c^8 \\
& + (2 b^6 + (-4 a^2 - 4) b^4 + 2 a^2 b^2) c^6 + (b^8 + (-6 a^2 - 6) b^6 \\
& + (6 a^4 + 10 a^2 + 6) b^4 + (-6 a^4 - 6 a^2) b^2 + a^4) c^4 + ((-2 a^2 - 2) b^8 \\
& + (6 a^4 + 4 a^2 + 6) b^6 + (-4 a^6 - 8 a^4 - 8 a^2 - 4) b^4 + (6 a^6 + 4 a^4 + 6 a^2) b^2 \\
& - 2 a^6 - 2 a^4) c^2 + (a^4 - 2 a^2 + 1) b^8 + (-2 a^6 + 2 a^4 + 2 a^2 - 2) b^6 \\
& + (a^8 + 2 a^6 - 6 a^4 + 2 a^2 + 1) b^4 + (-2 a^8 + 2 a^6 + 2 a^4 - 2 a^2) b^2 + a^8 - 2 a^6 + a^4.
\end{aligned}$$

O método de decisão de Tarski para demonstrar teoremas possui as mesmas características do método universal de Hilbert:

- (T1) A demonstração é conduzida por meio de cálculos algébricos, no caso, pela eliminação de quantificadores via uma generalização do teorema de Sturm.
- (T2) Todos os teoremas são demonstrados da mesma maneira por um único método.

A diferença é que a classe de teoremas para os quais o método de Tarski pode ser aplicado é muito maior: ela inclui todos os teoremas que podem ser formulados na linguagem de primeira ordem.

4.5 O método de Wu

Apesar dos aperfeiçoamentos dados pela teoria de decomposição algébrica cilíndrica, o método de Tarski e suas variações ainda não constituem uma ferramenta eficaz de demonstração automática de teoremas em geometria.

Em 1977, o matemático chinês Wu Wen-Tsün introduziu um método algébrico com o qual ele e seus discípulos — Chou Shang-Ching, Xiao Shan-Gao e Zhang

Jing-Zhong — demonstraram uma grande variedade de teoremas em geometria, cujas provas tradicionais são consideradas muito difíceis [135, 27, 28, 30, 29, 30].

O método de Wu demonstra teoremas cuja hipótese e tese podem ser convertidas em *equações polinomiais* com coeficientes racionais. Problemas de geometria que envolvem desigualdades, como o problema da elipse de Kahan, não podem ser tratados pelo método de Wu. O método entretanto permite (e emprega) negações de igualdades.

Uma vez que a conversão para a linguagem algébrica é feita, o método verifica se o polinômio g associado à tese é identicamente nulo no conjunto dos pontos que anulam simultaneamente todos os polinômios $h_i, i = 1, \dots, n$ associados à hipótese (uma idéia muito parecida com a do método universal de Hilbert):

$$h_1 = 0 \wedge h_2 = 0 \wedge \dots \wedge h_n = 0 \Rightarrow g = 0. \quad (4.12)$$

Isto pode ser feito empregando bases de Gröbner [36, pp. 280–305] ou pseudo-divisões sucessivas [28, pp. 12–13], a técnica original de Wu, que também possui uma interpretação no contexto de bases de Gröbner.

Não vamos entrar nos detalhes do método de Wu. O leitor interessado pode consultar o trabalho original [135] ou as referências [27, 28, 36]. O grande mérito de seu trabalho foi observar que na conversão do enunciado original do teorema (descrito como uma construção seqüencial) para uma sentença da forma (4.12), condições de *não-degenerescência* não são especificadas. Veja, por exemplo, o caso da forma especial do teorema de Desargues apresentada no final da seção 4.3. O método de Wu identifica automaticamente condições algébricas de não-degenerescência que devem ser incorporadas à hipótese de (4.12) a fim de obter uma sentença verdadeira [105, 112, 10, 22, 10]. Em boa parte dos casos, o método consegue fornecer uma interpretação geométrica para a condição algébrica de não-degenerescência. No caso da forma especial do teorema de Desargues apresentada no final da seção 4.3, por exemplo, o método automaticamente identifica que é necessário acrescentar ao enunciado do teorema a hipótese adicional de que A, A', C, C' e O não sejam colineares.

Capítulo 5

Inversões e o porismo de Steiner

O porismo de Steiner é um bom exemplo de como a geometria se beneficia do emprego de enfoques mais sofisticados: por meio de uma *inversão*, uma espécie de troca de variáveis geométrica, o problema original se trivializa. Inversões, por sua vez, são essencialmente as *transformações de Möbius*, que no curso habitual de variável complexa surgem como o grupo de transformações conformes da esfera de Riemann. Um aluno contemporâneo de matemática provavelmente nunca viu a inversão geométrica, dois milênios mais velha do que a transformação de Möbius.

Para E. T. Bell, o matemático suíço Jacob Steiner (1796 – 1863), foi o “maior geômetra desde Apolônio”. O porismo se encontra nas páginas 225 e 455 de suas obras completas, editadas por Weierstrass [117].

Sejam c , C círculos disjuntos e K um terceiro círculo tangente aos dois. Uma *cadeia de Steiner* de tamanho n para o par (c, C) , construída a partir de K , é uma sequência de n círculos, $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$, tangentes a c e C tais que $K = K_1 = K_{n+1}$, e K_i é tangente a K_{i+1} , para cada $1 \leq i \leq n$ (figura 5.1).

Teorema 5.1 (O PORISMO DE STEINER) Se dois círculos c e C disjuntos admitem uma cadeia de Steiner de tamanho n para uma certa escolha do círculo inicial K , então é possível construir uma cadeia de Steiner para o par (c, C) de mesmo tamanho para *qualquer* outra escolha do círculo inicial K .

Este resultado, bem como o teorema de Barlotti e o porismo de Poncelet (descrito no apêndice deste capítulo), são exemplos de teoremas de geometria que não podem ser demonstrados pelo método de decisão desenvolvido por Tarski: eles

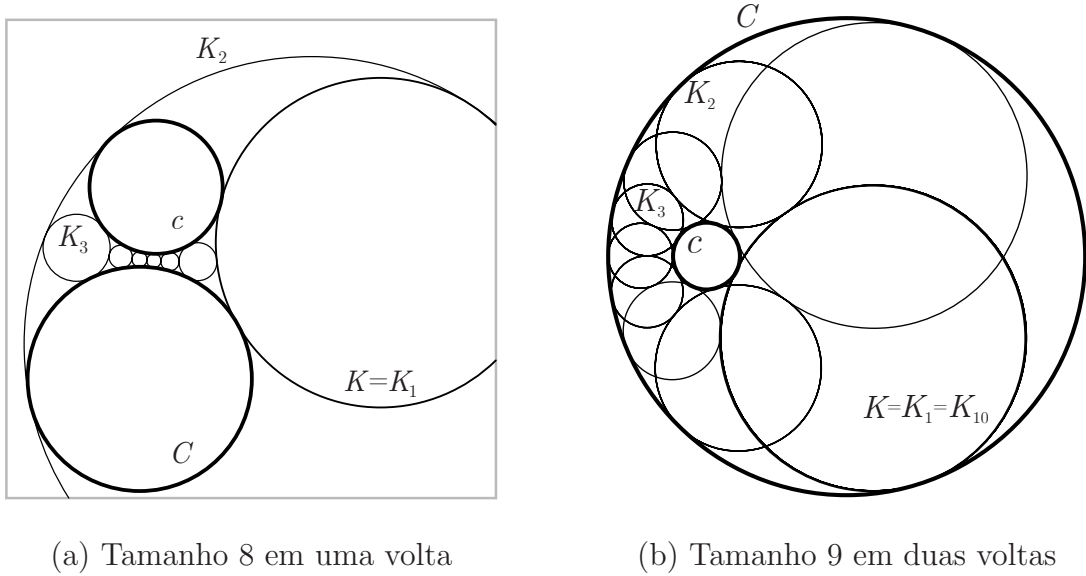


Figura 5.1: Duas cadeias de Steiner.

não estão no cenário de lógica de primeira ordem, uma vez que seus enunciados apresentam um quantificador existencial sobre a variável n , obviamente um número natural.

Não existe um consenso para o significado original da palavra grega porismo. De acordo com John Conway, em um artigo do grupo de discussão `geometry.puzzles`, um porismo é “algo como um teorema sutil”. As demais definições que encontramos são semelhantes: um porismo é uma proposição que, apesar de conter um quantificador universal, é sempre verdadeira ou sempre falsa, independente da escolha da variável sobre a qual age esse quantificador. Informalmente, porismos são proposições que descrevem configurações geométricas com uma certa liberdade, mas que sempre ou nunca têm uma certa propriedade específica [65].

5.1 Inversões

Dado um círculo C de raio r e centro O , definimos a *inversão de um ponto* $P \neq O$ em relação a C como sendo o ponto P' no raio que parte de O e passa

por P , tal que

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Dizemos que O é o *centro de inversão* e C é o *círculo de inversão* (figura 5.2). Os pontos P e P' são *pontos inversos* em relação a C .

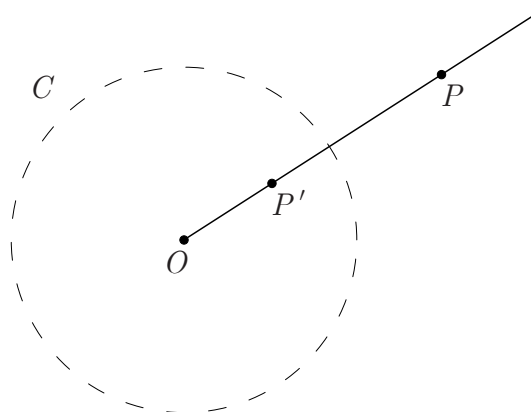


Figura 5.2: P' é a inversão de P com relação ao círculo C .

É fácil ver que, se P' é o ponto inverso de P , então P é o inverso de P' . Uma inversão leva o interior para o exterior do círculo de inversão C , e vice-versa, já que para $OP < r$ temos $OP' > r$ e para $OP > r$ temos $OP' < r$. Os únicos pontos do plano que permanecem fixos sob uma inversão são os pontos do próprio círculo de inversão.

Quando P converge para o centro de inversão, o ponto inverso P' vai a infinito (no sentido que seu módulo vai a infinito). Por esta razão, geômetras acharam oportuno considerar inversões agindo sobre um conjunto estendido, contendo o plano e um ponto auxiliar (“em infinito”). Inversões operam sobre este plano estendido bijetivamente. Um dos grandes sucessos do início da geometria algébrica foi justamente apresentar uma descrição mais precisa desse tipo de argumento. A interpretação algébrica das inversões, por meio de transformações de Möbius, foi um dos recursos empregados nesta formalização.

Uma *transformação de Möbius* é uma função

$$\begin{aligned} T: \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\mapsto T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ com $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. O conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é a *esfera de*

Riemann, onipresente em cursos de variável complexa. Por meio de projeções estereográficas, colocam-se cartas na esfera de Riemann, e nelas fica evidente que transformações de Möbius são analíticas em todo seu domínio [90, pp. 139–146].

A seguir, listamos alguns resultados familiares da teoria de transformações de Möbius. As transformações de Möbius obviamente incluem as translações $T(z) = z + \beta$, $\beta \in \mathbb{C}$, dilatações $T(z) = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ e a inversão algébrica $T(z) = 1/z$ e são fechadas por composição. Mais até, todas as transformações de Möbius são composições de translações, dilatações e inversão algébrica. Transformações de Möbius levam o conjunto de retas e círculos no plano em si mesmo — uma demonstração simples desse fato consiste em manipular as equações de retas e círculos. A seguir, apresentaremos uma demonstração na tradição de geometria sintética.

A inversão algébrica $T(z) = 1/z$ e a inversão $\tau(P) = P'$ pelo círculo unitário centrado na origem são muito similares. De fato, interpretando $P = z$ como um ponto no plano complexo, então $P' = \overline{1/z} = 1/\bar{z}$; geometricamente, P' é a reflexão de $1/z$ em relação ao eixo real. De fato, dado um ponto z de argumento θ , o número $1/z$ tem módulo $1/|z|$ e argumento $-\theta$. Isto implica que o seu conjugado $1/\bar{z}$ (com módulo $1/|z|$ e argumento θ) representa, de fato, a inversão de z pelo círculo unitário centrado na origem (figura 5.3). Assim, as propriedades

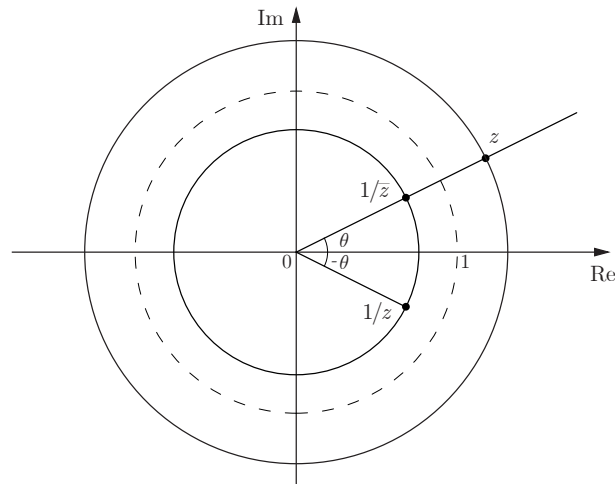


Figura 5.3: A inversão algébrica é o conjugado de uma inversão.

listadas na proposição abaixo podem ser admitidas para ambas as inversões, $1/z$ e $1/\bar{z}$.

Proposição 5.1 Uma inversão transforma

- (a) uma reta que passa pelo centro de inversão O em uma reta por O ,
- (b) uma reta por O em um círculo por O ,
- (c) um círculo por O em uma reta por O e
- (d) um círculo que não passa por O em um círculo que não passa por O .

Demonstração (Courant e Robbins [35]):

Considere uma inversão com relação a um círculo C com centro O .

- (a) Evidente.
- (b) Seja ℓ uma reta qualquer que não passa por O . Trace por O uma reta perpendicular r a ℓ (figura 5.4). Sejam A o ponto onde r encontra ℓ e A' o ponto inverso de A . Marque em ℓ , qualquer ponto P e encontre o seu inverso P' . Como $OA' \cdot OA = OP' \cdot OP = r^2$, segue que

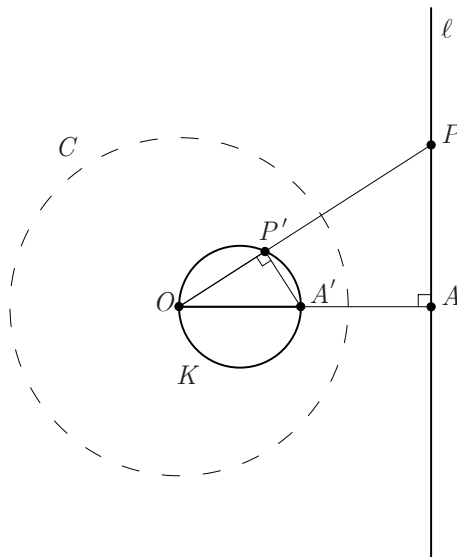


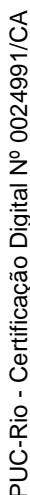
Figura 5.4: A inversão de uma reta ℓ que não passa por O .

$$\frac{OA'}{OP'} = \frac{OP}{OA}.$$

Logo, os triângulos $\triangle OP'A$ e $\triangle OAP$ são semelhantes e o ângulo $\angle OP'A$ é reto. É claro então que P' pertence ao círculo K de diâmetro OA' , tal que a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0024991/CA

- PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0024991/CA



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0024991/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0024991/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0024991/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0024991/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0024991/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0024991/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0024991/CA

A inversão geométrica $1/\bar{z}$ não é uma função analítica: de fato, ela viola as equações de Cauchy-Riemann. Mais até, ela inverte orientação, como indicado nas figuras abaixo.

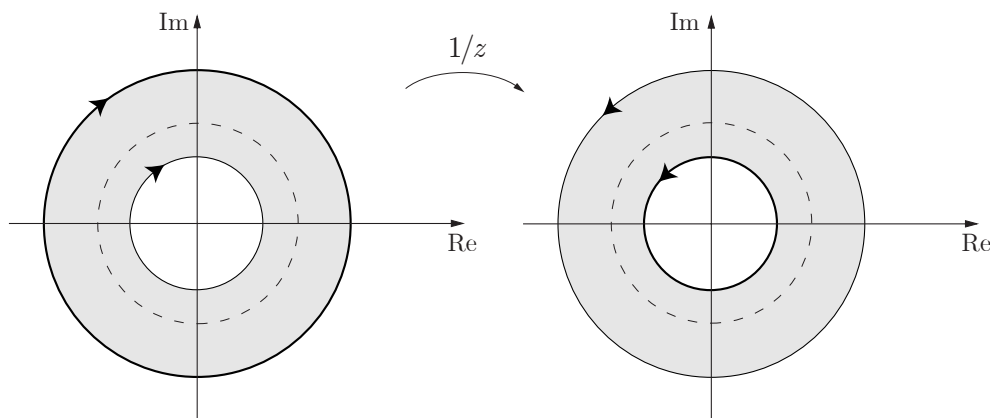


Figura 5.6: A inversão de algébrica, $1/z$.

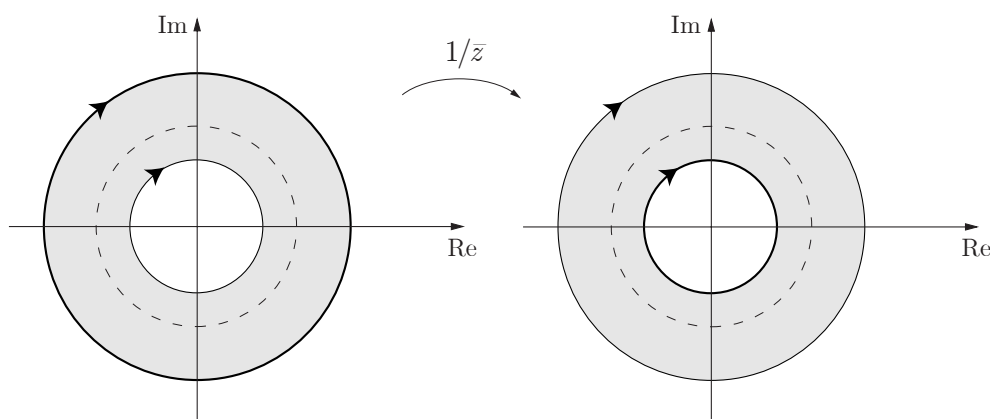


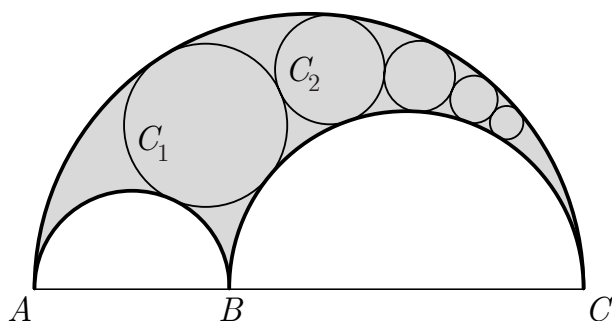
Figura 5.7: A inversão geométrica, $1/\bar{z}$.

Transformações de Möbius preservam ângulos entre, por exemplo, reta e círculos, por serem conformes [90]. Assim, inversões geométricas também preservam ângulos. Essa é uma das razões para que sejam muito úteis na resolução de problemas de geometria sobre tangência de círculos. Dois exemplos clássicos são (i) o teorema de Pappus e (ii) o problema de Apolônio:

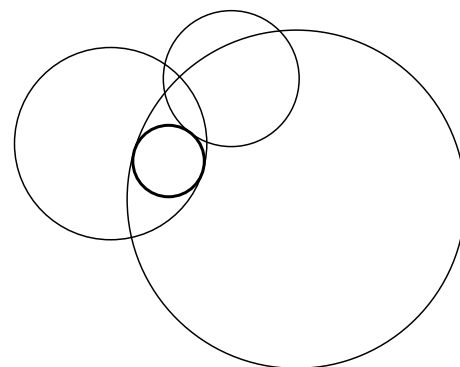
- (i) Dada a configuração de um *arbelos* — três arcos, AB , BC e AC , dispostos como na figura 5.8 (i), onde o ponto B varia entre o diâmetro AC — construa na parte sombreada, uma *cadeia de Pappus*, que consiste em uma seqüência

de círculos C_1, C_2, \dots, C_n , tal que C_1 seja tangente as três arcos dados, e a partir de então para cada $1 \leq i \leq n$, C_i e C_{i+1} são tangentes entre si e aos dois arcos maiores. O *teorema de Pappus* afirma que os pontos de tangência entre os círculos da cadeia estão em um círculo, os centros dos círculos C_1, C_2, \dots, C_n estão sobre uma elipse e que o diâmetro de qualquer círculo C_n vale $1/(n - \text{ésimo})$ da altura do seu centro à reta base ABC (para ver o primeiro fato, simplesmente escolha A como centro de inversão — o prazer de completar o argumento fica por conta do leitor).

- (ii) Dados três círculos quaisquer no plano, construa um círculo que seja tangente aos três iniciais (aliás, este problema possui oito soluções!). De fato, não é difícil ver que esse problema se reduz a encontrar um círculo tangente a dois outros passando por um ponto dado O . Agora, inverta a nova configuração por O : basta agora traçar retas tangentes a dois círculos dados — um problema muito simples.



(i) O arbelos de Pappus



(ii) O problema de Apolônio

Figura 5.8: Dois problemas de geometria sobre tangência de círculos

5.2 A demonstração do porismo

O porismo de Steiner é trivial no caso particular em que os círculos c e C são concêntricos. É fácil até ver que existe uma cadeia de Steiner de tamanho n

dando k voltas se, e somente se, os raios r e R dos dois círculos satisfazem

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{1 + \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}. \quad (5.1)$$

O caso geral em que os círculos c e C não são concêntricos pode ser reduzido ao caso particular por meio de inversões geométricas (ou uma transformação de Möbius). De fato, tome círculos c e C disjuntos. Escolha um ponto O em c para ser o centro de inversão: as inversões de c e C por O são, respectivamente, uma reta ℓ e um círculo K disjuntos.

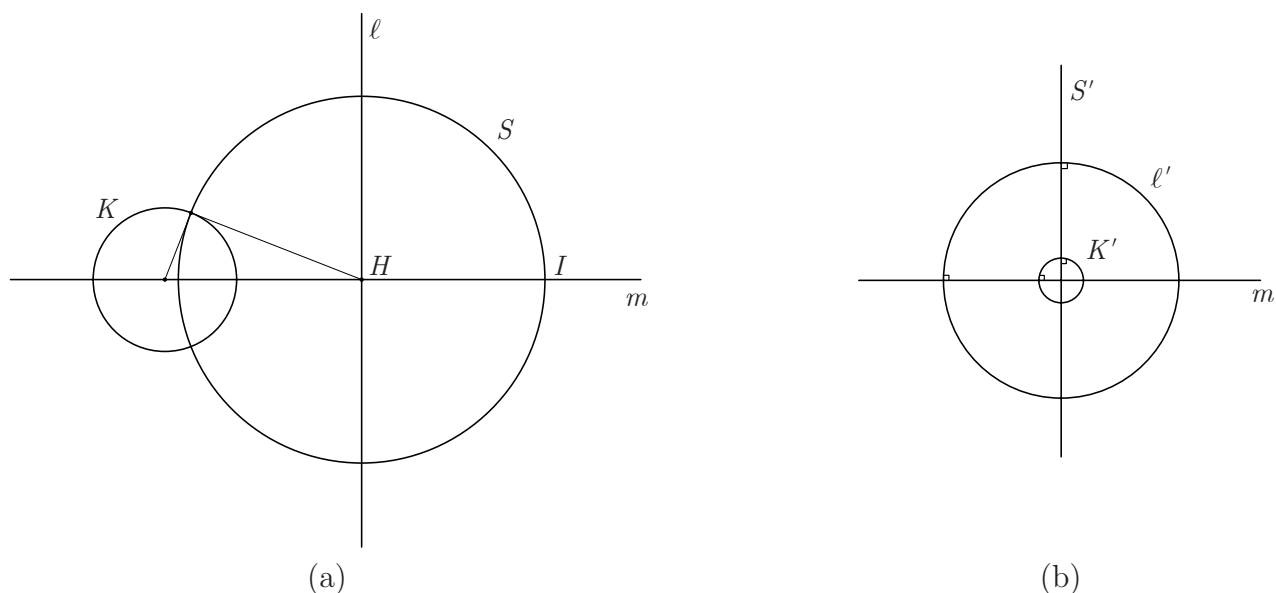


Figura 5.9: Tornando dois círculos concêntricos usando inversões.

Seja m a reta que passa pelo centro do círculo K e é perpendicular a reta ℓ , e H a interseção destas retas. Note que a interseção H está fora do círculo K . Podemos construir um círculo S com centro em H e ortogonal ao círculo K , escolhendo seu raio como o segmento que sai de H e tangencia K (figura 5.9 (a)).

Finalmente, invertendo K e ℓ agora por um ponto na interseção do círculo S e da reta m , obtemos um par de círculos ortogonais a S e m . Mas as inversões de S e m são um par de retas ortogonais. Logo, as inversões do círculo K e da

reta ℓ devem ser um par de círculos concêntricos (figura 5.9 (b)). ■

Uma consequência do porismo de Steiner (e de sua versão quantitativa para círculos concêntricos descrita acima) é que, dado uma configuração de círculos disjuntos c e C , a razão entre os raios de círculos concêntricos nos quais o par é levado por uma transformação de Möbius só depende da configuração. De fato, não é possível levar por uma transformação de Möbius um par de círculos concêntricos a outro se as razões entre os raios nos dois pares não forem iguais. O leitor com alguma prática de geometria conforme certamente identificará este invariante como sendo o (único) invariante conforme de uma região “com um furo” [91].

Outra propriedade interessante da cadeia de Steiner é que os centros de seus círculos estão sobre uma elipse. O resultado segue da seguinte proposição, que também demonstra a segunda parte do teorema de Pappus.

Proposição 5.2 Seja c um círculo no interior do círculo C . O lugar geométrico dos centros dos círculos tangentes a c e C é uma elipse.

Demonstração:

Considere os círculos disjuntos c e C de raios r e R em um sistema de coordenadas no qual c e C têm centros em $(A, 0)$ e $(-A, 0)$, respectivamente. Note que $d = 2A < R - r$.

Seja S um círculo com centro (x, y) e raio ρ tal que S tangencia c e C (figura 5.10).

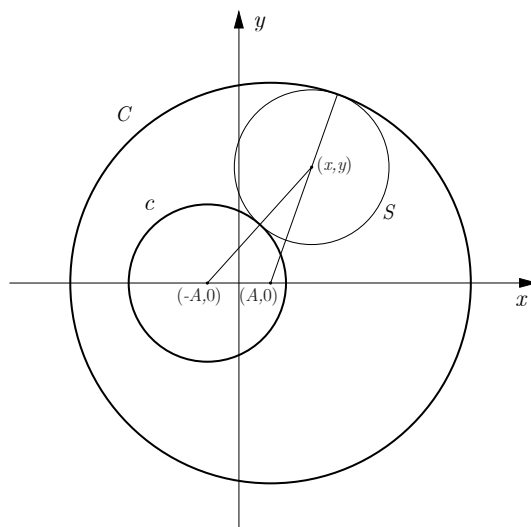


Figura 5.10: Os círculos c e C em um sistema de coordenadas.

A soma das distâncias dos centros $(-A, 0)$ e $(A, 0)$ ao centro (x, y) do círculo S é constante:

$$(R - \rho) + (r + \rho) = R + r \quad (5.2)$$

Assim, (x, y) está sobre uma elipse de focos $(-A, 0)$ e $(A, 0)$. ■

Usando um argumento semelhante, é possível mostrar um pouco mais. Se c for exterior a C , o lugar geométrico é uma hipérbole. Se c e C têm dois pontos comuns, o lugar geométrico consiste de duas elipses e uma hipérbole.

5.3 Apêndice: O porismo de Poncelet

O objetivo deste apêndice é descrever superficialmente outra situação geométrica com várias afinidades com o porismo de Steiner.

Sejam E_e e E_i duas elipses tais que E_i é interior a E_e e seja P um ponto na elipse E_e . Uma *trajetória de Poncelet* de tamanho n para o par (E_e, E_i) , construída a partir de P , é uma trajetória poligonal fechada de n pontos, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, na elipse E_e , tais que $P = P_1 = P_{n+1}$, e o segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$ é tangente a E_i para cada $1 \leq i \leq n$. (figura 5.11 (a)).

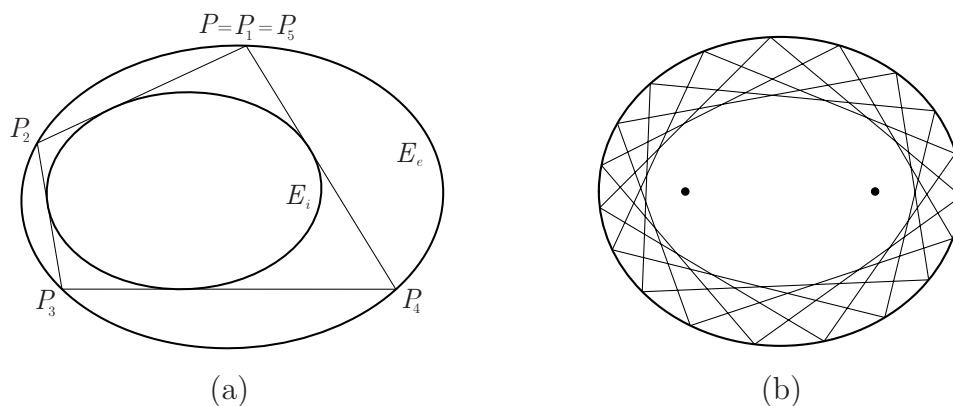


Figura 5.11: Trajetórias entre duas elipses.

Teorema 5.2 (O PORISMO DE PONCELET) Seja E_i uma elipse no interior da elipse E_e . Se para uma certa escolha do ponto inicial $P \in E_e$, é possível construir uma trajetória de Poncelet de tamanho n , então é possível construir uma trajetória do mesmo tamanho para *qualquer* outra escolha do ponto inicial $P \in E_e$.

O estudo do porismo de Poncelet pode ser reduzido ao estudo das trajetórias de uma bola de bilhar numa mesa elíptica, como se verifica fazendo uso de *transformações projetivas*, que são os objetos matemáticos naturais para o estudo da perspectiva. Informalmente, considere a correspondência sugerida na figura 5.12 entre pontos do plano α e os do plano. Na verdade não é que tenhamos uma bijeção entre os pontos dos dois planos: o formalismo matemático acrescenta *retas em infinito* aos planos (e em geometria projetiva o que se chama de reta na verdade é um círculo topológico), e nesses planos estendidos existe de fato uma bijeção naturalmente associada à figura. Para detalhes, o leitor pode consultar [12]. Fica claro da descrição visual que transformações projetivas levam retas em retas (não vamos considerar as situações críticas envolvendo infinito). Um conhecimento mínimo das seções cônicas indica também que transformações projetivas podem levar círculos em elipses, hipérboles ou parábolas, e vice-versa. Mais, tangências entre curvas são preservadas (isso não quer dizer que ângulos sejam respeitados!).

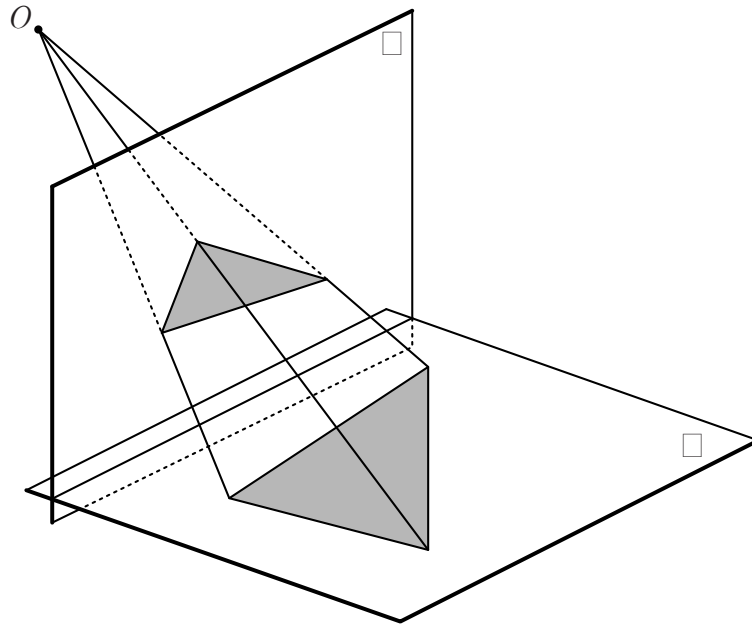


Figura 5.12: Uma transformação projetiva.

Assim como transformações de Möbius podem converter dois círculos disjuntos em dois círculos concêntricos, transformações projetivas podem converter duas elipses disjuntas em pelo menos três alternativas: em um círculo e uma elipse em seu interior tendo o mesmo centro, ou em um par de elipses confocais, ou ainda num par de círculos. Assim, o porismo de Poncelet pode ser demonstrado apenas para estas situações particulares (a demonstração em [99], por exemplo, faz uso da terceira alternativa).

Vamos considerar a segunda alternativa (figura 5.11 (b)). Nesse caso, os segmentos que compõem a trajetória de Poncelet na configuração inicial se convertem em uma outra trajetória de Poncelet na configuração consistindo de duas elipses confocais com uma propriedade adicional: os ângulos que dois segmentos consecutivos fazem com a normal no ponto de interseção com a elipse exterior são iguais (figura 5.13). Reciprocamente, a trajetória de uma bola de bilhar numa mesa elíptica, que colide com a borda da mesa de maneira a satisfazer a lei de reflexão habitual (ângulo de incidência = ângulo de reflexão), dá origem a uma seqüência de segmentos, todos tangentes à uma mesma elipse, confocal à elipse que forma a borda da mesa. Assim, o porismo de Poncelet e o fechamento da trajetória no bilhar elíptico são problemas equivalentes.

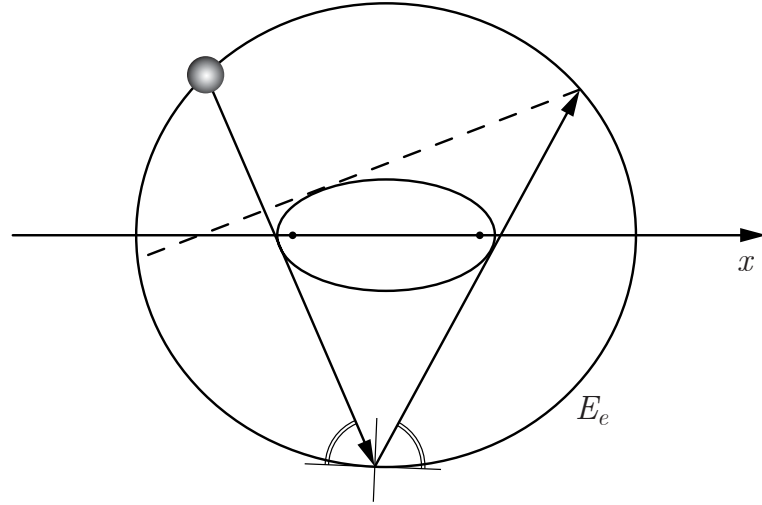


Figura 5.13: Uma trajetória do bilhar elíptico e sua lei de conservação.

O bilhar elíptico abre novas possibilidades de interpretação. Imagine a posição da bola e sua direção de tacada sendo descritas por um par

$$(\text{ponto da borda, vetor de comprimento 1}) \in M = E_e \times S^1.$$

Aqui, $S^1 \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ é o círculo unitário centrado na origem. O bilhar define uma função $\psi: M \rightarrow M$ que “avança de uma tacada”. Birkhoff [13] mostrou a existência de uma área em M que é mantida invariante por ψ . Ainda em outra linguagem, Birkhoff mostrou a existência de uma 2-forma não degenerada (mais geral ainda, de uma estrutura simplética) em M . O fato que todos os segmentos de uma trajetória são tangentes a uma elipse comum indica que ψ , além de preservar a área de Birkhoff, tem outra lei de conservação associada. Mais concretamente, seja U um aberto conexo de M cujos pontos descrevem todos os segmentos tangentes a alguma elipse confocal à borda da mesa. Cada elipse dessas encontra um semi-eixo maior fixo em um único ponto x — podemos definir a lei de conservação como sendo a função $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ que leva cada ponto ao valor x obtido por essa construção.

É claro que as curvas de nível associadas a essa lei de conservação (isto é, o conjunto de pares de U que dão origem a segmentos tangentes a uma mesma elipse) podem ser parametrizadas por um círculo. Isso é bastante para invocar um resultado muito geral em geometria simplética: o teorema de Arnold-Liouville. O teorema habitualmente é descrito para campos que respeitam estru-

turas simpléticas [3]: a versão do teorema para difeomorfismos (como é o caso de ψ) pode ser encontrada em [125]. Nesse caso muito simples, é possível descrever suas conseqüências sem introduzir objetos matemáticos mais sofisticados. Para cada valor x da lei de conservação H , seja $C_x = H^{-1}(x)$ o nível associado, parametrizado por S^1 . Então, para todo nível x_0 , existe um intervalo aberto I contendo x_0 tais que o anel $C_I = S^1 \times I$ serve de domínio para uma troca de variável entre anéis $\alpha : C_I \rightarrow S^1 \times I' \subset \mathbb{R}^2$ com a seguinte propriedade:

$$(\alpha \circ \psi \circ \alpha^{-1})(\theta, x) = (\theta + \mu(x), x),$$

para uma escolha adequada de $\mu(x)$. A partir desse fato, o porismo de Poncelet é evidente: dependendo do valor de $\mu(x)$, rotações do círculo fecham ou não.

Bibliografia

- [1] C. F. Adler, *Modern Geometry, An Integrated First Course*. New York, PA: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- [2] N. Altshiller-Court, *College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools*. New York: Barnes & Noble, Inc., 1952.
- [3] V. I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [4] D. S. Arnon, G. E. Collins e S. McCallum, *Cylindrical Algebraic Decomposition I: The Basic Algorithm*. SIAM Journal of Computing, vol. 12, no. 4, pp. 865–877, 1984.
- [5] D. S. Arnon, G. E. Collins e S. McCallum, *Cylindrical Algebraic Decomposition II: An Adjacency Algorithm for the Plane*. SIAM Journal of Computing, vol. 13, no. 4, pp. 878–889, 1984.
- [6] M. Atiyah, *What is geometry?* The Mathematical Gazette, vol. 66, pp. 179–184, Outubro, 1982.
- [7] H. F. Baker, *A Remark on Polygons*. Journal of the London Mathematical Society, vol. 17, pp. 162–164, 1942.
- [8] A. Barlotti, *Una proprietà degli n -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n -agono regolare*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, vol. 10, no. 3, pp. 96–98, 1955.
- [9] J. Barwise, *An Introduction to First-Order Logic*. Em *Handbook of Mathematical Logic* (J. Barwise, editor), pp. 5–45, North Holland Publishing Company, 1977.

- [10] M. Bulmer, D. Fearnley-Sander e T. Stokes, *Remarks on Geometric Theorem Proving*. Em *Automated Deduction in Geometry* (J. Richter-Gebert e D. Wang, editores), vol. 2061 de *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 104–128, Berlin e Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.
- [11] M. Ben-Or, D. Kozen e J. Reif, *The Complexity of Elementary Algebra and Geometry*. Journal of Computer and System Sciences, vol. 32, pp. 251–264, Abril, 1986.
- [12] M. Berger, *Geometry I*. Berlin e Heidelberg: Springer-Verlag. 1994 (corrected second printing).
- [13] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, vol. 9 de *Colloquium Publications*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1927. 1966 (revised edição).
- [14] W. L. Black, H. C. Howland e B. Howland, *A Theorem about Zig-Zags between Two Circles*. The American Mathematical Monthly, vol. 81, pp. 755–757, Setembro, 1974.
- [15] A. Bogomolny, *Theorem of Complete Quadrilateral: What is It?* 2002.
<http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/Quadri.shtml>.
- [16] C. Bonferroni, *Un teorema sul Triangolo e il Teorema di Napoleone*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, vol. 5, no. 3, pp. 85–89, 1950.
- [17] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort e D. W. Raven, *Poncelet's Closure Theorem*. Expositiones Mathematicae, vol. 5, pp. 289–364, 1987.
- [18] O. Bottema, *A Triangle Transformation*. Elemente der Mathematik, vol. 29, pp. 135–138, 1971.
- [19] G. Boutte, *The Napoleon Configuration*. Forum Geometricorum, vol. 2, pp. 39–46, 2002.
- [20] S. Brodie, *Napoleon's Theorem by Plane Tessellation*. 2000.
<http://www.cut-the-knot.com/Generalization/NapTess.shtml>.
- [21] S. Brodie e M. Lambrou, *Napoleon's Theorem*. 2000.
<http://www.cut-the-knot.com/proofs/napoleon.shtml>.

- [22] M. Bulmer, D. Fearnley-Sander e T. Stokes, *The Kinds of Truth of Geometry Theorems*. Em *Automated Deduction in Geometry* (J. Richter-Gebert e D. Wang, editores), vol. 2061 de *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 129–142, Berlin e Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.
- [23] J. H. Cadwell, *Topics in Recreational Mathematics*. New York, NY: Cambridge University Press, 1966.
- [24] B. F. Caviness e J. R. Johnson, *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*. Texts and Monographs in Symbolic Computation, Wien and New York: Springer-Verlag, 1998.
- [25] G. zhe Chang e P. J. Davis, *A Circulant Formulation of the Napoleon-Douglas-Neumann Theorem*. Linear Algebra and Its Applications, vol. 54, pp. 87–95, 1983.
- [26] S.-S. Chern, *What is Geometry?* The American Mathematical Monthly, vol. 97, pp. 679–686, Outubro, 1990.
- [27] S.-C. Chou, *Proving and Discovering Theorems in Elementary Geometries Using Wu's Method*. PhD Thesis, Department of Mathematics, University of Texas, Austin, 1985.
- [28] S.-C. Chou, *Mechanical Geometry Theorem Proving*. Mathematics and Its Applications, Norwell, MA, USA: Dordrecht Reidel Publishing Company, 1988.
- [29] S.-C. Chou, X. Shan-Gao e J.-Z. Zhang, *An Introduction to Geometry Expert*. Em *Proceedings of CADE-13* (M. A. McRobbie e J. K. Slaney, editores), vol. 1104 de *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 235–239, 13th International Conference on Automated Deduction, Springer-Verlag, 1996.
- [30] S.-C. Chou, X.-S. Gao e J.-Z. Zhang, *Machine Proofs in Geometry : Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems*, vol. 6 de *Applied Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1998.
- [31] S.-C. Chou, X. Shan-Gao e J.-Z. Zhang, *Geometry Expert*. 2002.
<http://www.mmrc.iss.ac.cn/~xgao/gex.html>.

- [32] H. Coelho e L. M. Pereira, *Automated Reasoning in Geometry Theorem Proving with Prolog*. Journal of Automated Reasoning, vol. 2, pp. 329–390, Dezembro, 1986.
- [33] G. E. Collins, *Quantifier Elimination for Real Closed Fields by Cylindrical Algebraic Decomposition*. Em *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition* (B. F. Caviness e J. R. Johnson, editores), Texts and Monographs in Symbolic Computation, pp. 85–121, Wien e New York: Springer-Verlag, 1997.

Reproduzido de *Automata Theory and Formal Languages* (Lecture Notes in Computer Science, vol. 33), H. Brakhage (editor), Springer-Verlag, com correções do autor.
- [34] J. Conway, *Reply to “Two Circles and Triangle Puzzle”*. Artigo do Usenet Newsgroup `geometry.puzzles`, Dezembro, 2001.
- [35] R. Courant e H. Robbins, *What is mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. London: Oxford University Press, 1941.
- [36] D. Cox, J. Little e D. O’Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 1992.
- [37] H. S. M. Coxeter, *Interlocked Rings of Spheres*. Script Mathematica, vol. 18, pp. 113–121, 1952.
- [38] H. S. M. Coxeter e S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, vol. 19 de *MAA New Mathematical Library*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1967.
- [39] Z. Dadic, *Some methodological aspects of Getaldic’s Mathematical Works*. Historia Mathematica, vol. 1, no. 2, pp. 207–214, 1984.
- [40] P. J. Davis, *The Rise, Fall, and Possible Transfiguration of Triangle Geometry: A Mini-History*. The American Mathematical Monthly, vol. 102, pp. 204–214, 1995.
- [41] H. Demir, *An Extension of Napoleon’s Theorem*. The American Mathematical Monthly, vol. 76, p. 833, Setembro, 1969.

- [42] R. Descartes, *La Géométrie*. Paris: A. Hermann, Librairie Scientifique, 1636.
- [43] J. Douglas, *On Linear Polygon Transformations*. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, vol. 46, pp. 551–560, Junho 1940.
- [44] J. Douglas, *Geometry of Polygons in the Complex Plane*. Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology, vol. 19, pp. 93–130, 1940.
- [45] A. Faifofer, *Elementi di Geometria*. décima sete edição, 1911.
- [46] H. E. Fettis, *The Fermat and Hessian Points of a Triangle*. The American Mathematical Monthly, vol. 53, pp. 74–78, February 1946.
- [47] J. C. Fisher, D. Ruoff e J. Shilleto, *Polygons and Polynomials*. in *The Geometric Vein, The Coxeter Festschrift* (C. Davis, B. Grünbaum e F. A. Sherk, editores), pp. 321–333, New York, USA: Springer-Verlag, 1982.
- [48] J. C. Fisher, D. Ruoff e J. Shilleto, *Perpendicular Polygons*. The American Mathematical Monthly, vol. 92, no. 1, pp. 23–37, 1985.
- [49] H. G. Forder, *The Calculus of Extension*. New York, USA: Chelsea, 1960.
- [50] M. Frame e T. Cogevina, *An Infinite Circle Inversion Limit Set Fractal*. Computers & Graphics, vol. 24, pp. 797–804, 2000.
- [51] D. Gale, *Triangle and Computers*. The Mathematical Intelligencer, vol. 17, no. 1, pp. 20–26, 1995.
- [52] M. Gardner, *The Diverse Pleasures of Circles that are Tangent to One Another*. Scientific American, pp. 18–28, Janeiro, 1979.
- [53] J. Gafunkel e S. Stahl, *The Triangle Reinvestigated*. The American Mathematical Monthly, vol. 72, pp. 12–20, Janeiro, 1965.
- [54] H. Gelernter e J. R. H. e D. W. Loveland, *Empirical Explorations of the Geometry-Theorem Proving Machine*. Em *Computers and Thought* (E. A. Feigenbaum e J. Feldman, editores), pp. 134–152, New York: McGraw-Hill, 1963.

- [55] L. Gerber, *Napoleon's Theorem and Parallelogram Inequality for Affine-Regular Polygons*. The American Mathematical Monthly, vol. 87, pp. 644–648, 1980.
- [56] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte Systeme I*. Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 38, pp. 172–198, 1931.
- [57] K. Gödel, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. New York: Dover Publications, Inc., 1992.
 Tradução para o inglês do artigo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, publicado em 1931 em Monatshefte für Mathematik und Physik, vol 38, pp. 173–198.
- [58] H.-G. Gräbe, *GEOPROVER 1.2 – A Small Package for Mechanized Plane Geometry Theorem Proving. With versions for Reduce, Maple, MuPAD and Mathematica*. Março, 2002.
<http://www.informatik.uni-leipzig.de/~compalg/software/geoprover/>.
- [59] D. Grabiner, *The Tarski-Seidenberg Theorem*. Technical Report, Princeton University, 2002.
- [60] R. Graham e F. Yao, *A Whirlwind Tour of Computational Geometry*. The American Mathematical Monthly, vol. 97, pp. 687–701, Outubro, 1990.
- [61] L. shin Hahn, *Complex Numbers & Geometry*. Spectrum Series, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1994.
- [62] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. 1899.
- [63] D. Hilbert, *Foundations of Geometry*. La Salle, Illinois: Open Court, segunda edição, 1971.
 Tradução da edição alemã *Grundlagem der Geometrie*, translated by Leo Unger de 1899.
- [64] A. Hoffer, *Geometry is More Than Proof*. Mathematics Teacher, Janeiro, 1981.

- [65] J. P. Hogendijk, *On Euclid's Lost Porism and Its Arabic Traces*. Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche, vol. VII, no. 1, pp. 93–115, 1987.
- [66] H. Hong, *Improvements in CAD-based Quantifier Elimination*. PhD Thesis, Ohio State University, Ohio, 1990.
- [67] H. Hong e R. Liska, *Special Issue on Application of Quantifier Elimination*. Journal of Symbolic Computation, vol. 24, no. 2, pp. 123–231, 1997.
- [68] H. Hong, R. Liska, N. Robidoux e S. Steinberg, *Elimination of Variables in Parallel*. SIAM News, vol. 33, no. 8, pp. 1–5, 2000.
- [69] R. Honsberger, *Mathematical Gems from Elementary Combinatorics, Number Theory, and Geometry*, vol. 1–3 de *Dolciani Mathematical Expositions*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1973.
- [70] M. Jirstrand, *Cylindrical Algebraic Decomposition — An Introduction*. Technical Report, Linköping University, Outubro, 1995.
- [71] W. Kahan, *Problem no. 9: An Ellipse Problem*. SIGSAM Bulletin of the ACM, vol. 35, no. 2, p. 11, 1975.
- [72] K. R. Koedinger e J. R. Anderson, *Abstract Planning and Perceptual Chunks: Elements of Expertise in Geometry*. Cognitive Science, vol. 14, pp. 511–550, 1990.
- [73] J. J. Koenderink, *The Brain a Geometry Engine*. Psychological Research, vol. 52, pp. 122–127, 1990.
- [74] H. W. Kuhn, *“Steiner’s” Problem Revisited*. Em *Studies in Optimization* (G. B. Dantzig e B. C. Eaves, editores), vol. 10 de *MAA Studies in Mathematics*, pp. 52–70, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [75] C.-A. Laisant, *Sur quelques proprietes des polygones*. Compte rendu: Association Française pour l’Avancement des Sciences, 1877. pp. 142–154.
- [76] E. M. Langley, *Problem 644 (the original statement of the adventitious triangle problem)*. The Mathematical Gazzete, vol. 11, pp. 321–323, 1922.

- [77] D. Lazard, *Quantifier Elimination: Optimal Solution for Two Classical Examples*. Journal of Symbolic Computation, vol. 5, pp. 261–266, 1988.
- [78] Å. Lima, *Steiners Porisme*. Nordisk Matematisk Tidsskrift, vol. 37, no. 1, pp. 18–30, 1989.
- [79] G. Lion, *Variational Aspects of Poncelet's Theorem*. Geometriae Dedicata, vol. 52, pp. 105–118, 1994.
- [80] N. J. Lord, *A Method for Vector Proofs in Geometry*. Mathematics Magazine, vol. 58, pp. 84–89, Março, 1985.
- [81] A. Machado, *Nineteen Problems on Elementary Geometry*. The Mathematical Intelligencer, vol. 17, no. 1, pp. 17–19, 1995.
- [82] J. S. Mackay, *The Geometrography of Euclid's Problems*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 12, pp. 2–16, 1893-4.
- [83] E. Maor, *Trigonometric Delights*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1998.
- [84] H. Martini, *On the Theorem of Napoleon and Related Topics*. Mathematische Semesterberichte, vol. 43, pp. 47–64, 1996.
- [85] H. Martini e B. Weissbach, *Napoleon's Theorem with Weights in n -Space*. Geometriae Dedicata, vol. 74, pp. 213–223, 1999.
- [86] J. G. Mauldon, *Similar Triangles*. Mathematics Magazine, vol. 39, pp. 165–174, 1966.
- [87] D. Merriell, *Further Remarks on Concentric Polygons*. The American Mathematical Monthly, vol. 72, pp. 960–965, Novembro, 1965.
- [88] D. R. Morrison, *Poncelet's Theorem*. Lecture Note, Duke University, Durham, North Carolina, 2001.
<http://www.cgtp.duke.edu/~drm/mth250/>.
- [89] E. Motta, *Aplicações dos Números Complexos à Geometria*. Eureka!, vol. 6, pp. 30–38, 1999.

- [90] T. Needham, *Visual Complex Analysis*. Oxford: Clarendon Press, 1997.
- [91] Z. Nehari, *Conformal Mapping*. New York: Dover.
- [92] R. D. Nelson, *Napoleon revisited*. The Mathematical Gazette, vol. 58, pp. 108–116, 1974.
- [93] B. H. Newmann, *Some Remarks on Polygons*. Journal of the London Mathematical Society, vol. 16, pp. 230–245, 1941.
- [94] B. H. Neumann, *A Remark on Polygons*. Journal of the London Mathematical Society, vol. 17, pp. 165–167, 1942.
- [95] A. J. Nevins, *Plane Geometry Theorem Proving Using Forward Chaining*. Artificial Intelligence, vol. 6, pp. 1–23, Março, 1974.
- [96] J. Olive, *Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning*. Paper for Conference on Teaching and Learning Problems in Geometry, The University of Georgia, Athens, Georgia, USA, Maio, 2000.
- [97] P. Pech, *The Harmonic Analysis of Polygons and Napoleon's Theorem*. Journal of Geometry and Graphics, vol. 5, no. 1, pp. 13–22, 2001.
- [98] D. Pedoe, *In Love with Geometry*. The College Mathematics Journal, vol. 29, pp. 170–188, Maio, 1998.
- [99] J. V. Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*. 1822.
- [100] B. Poonen e M. Rubinstein, *The Number of Intersection Points Made by the Diagonals of a Regular Polygon*. SIAM Journal on Discrete Mathematics, vol. 11, no. 1, pp. 135–156, 1998.
- [101] H. Hong, *QEPCAD*.
<http://www.eecis.udel.edu/~saclib/>.
- [102] D. A. Quadling, *The Adventitious Angles Problem: a Progress Report*. The Mathematical Gazette, vol. 61, pp. 55–58, 1977.
- [103] D. A. Quadling, *Last Words on Adventitious Angles*. The Mathematical Gazette, vol. 62, no. 421, pp. 174–183, 1978.

- [104] T. Recio, *Cálculo Simbólico y Geométrico*. Educación Matemática en Secundaria, Madrid, España: Editorial Síntesis, 1998.
- [105] T. Recio e M. R. Vélez, *Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry*. Journal of Automated Reasoning, vol. 23, no. 1, pp. 63–82, 1998.
- [106] J. F. Rigby, *A Concentrated Dose of Old-Fashioned Geometry*. The Mathematical Gazette, vol. 57, pp. 296–298, 1973.
- [107] J. F. Rigby, *Adventitious Quadrangles: a Geometrical Approach*. The Mathematical Gazette, vol. 62, no. 421, pp. 183–191, 1978.
- [108] J. F. Rigby, *Multiple Intersections of Diagonals of Regular Polygons, and Related Topics*. Geometriae Dedicata, vol. 9, no. 2, pp. 207–238, 1980.
- [109] J. F. Rigby, *Napoleon Revisited*. Journal of Geometry, vol. 33, pp. 129–146, 1988.
- [110] J. F. Rigby, *Napoleon, Escher, and Tessellations*. Mathematics Magazine, vol. 64, pp. 242–246, Outubro, 1991.
- [111] D. Ruoff e J. Shilleto, *Recursive Polygons*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, vol. 15–B, no. 5, pp. 968–981, 1978.
- [112] D. Fearnley-Sander, *Plane Euclidean Reasoning*. Em *Automated Deduction in Geometry* (X. Shan-Gao, D. Wang e L. Yang, editores), vol. 1669 de *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 86–110, Berlin e Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.
- [113] I. J. Schoenberg, *The Finite Fourier Series and Elementary Geometry*. The American Mathematical Monthly, vol. 57, pp. 390–404, Junho 1950.
- [114] I. J. Schoenberg, *Mathematical Time Exposures*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1982.
- [115] C. J. Scriba, *Wie kommt “Napoleon Satz” zu seinem Namen?* Historia Mathematica, vol. 8, pp. 458–459, 1980.
- [116] M. Serra, *Discovering Geometry, An Inductive Approach*. Berkeley, California, USA: Key Curriculum Press, 1993.

- [117] J. Steiner, *Gesammelte Werke, Bind 1*. Berlin: Druck und Verlag, 1881. Karl Weierstrass (editor).
- [118] A. Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. Em *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition* (B. F. Caviness e J. R. Johnson, editores), Texts and Monographs in Symbolic Computation, pp. 24–84, Wien New York: Springer-Verlag, 1995.

Este texto apareceu previamente em *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, University of California Press, Berkeley e Los Angeles, 1951.
- [119] A. Tarski, *What is Elementary Geometry?* Em *The Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics* (L. Henkin, P. Suppes e A. Tarski, editores), Studies in Logic and The Foundations of Mathematics, pp. 16–29, Amsterdam: North-Holland, 1959.
- [120] A. Tarski, *The Completeness of Elementary Algebra and Geometry*. Em *Alfred Tarski: Collected Papers* (R. McKenzie e S. Givant, editores), vol. 4, pp. 289–346, Basel: Birkhäuser Verlag, 1987.
- [121] A. Tarski e S. Givant, *Tarski's Systems of Geometry*. The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 5, no. 2, pp. 175–214, 1999.
- [122] V. Thébault, *Solution to Problem 169*. National Mathematics Magazine, vol. 12, pp. 192–194, 1937–38.
- [123] C. Tripp, *Adventitious Angles*. The Mathematical Gazette, vol. 59, pp. 98–106, 1975.
- [124] G. Turner, *Elementi di Geometria*, vol. I. 1843.
- [125] A. P. Veselov, *Integrable Maps*. Russian Mathematical Surveys, vol. 46, no. 5, pp. 1–51, 1991.
- [126] E. Wagner, *Construções Geométricas*, vol. 9 de *Coleção do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

- [127] J. E. Wetzel, *Converses of Napoleon's Theorem*. The American Mathematical Monthly, vol. 99, pp. 339–351, Abril, 1992.
- [128] W. Whiteley, *Logic and Invariant Theory. I: Invariant Theory of Projective Properties*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 177, pp. 121–139, Março, 1973.
- [129] W. Whiteley, *Logic and Invariant Theory II: Homogeneous Coordinates, the Introduction of Higher Quantities, and Structural Geometry*. Journal of Algebra, vol. 50, pp. 380–394, 1978.
- [130] W. Whiteley, *Logic and Invariant Theory IV. Invariants and Syzygies in Combinatorial Geometry*. Journal of Combinatorial Theory, vol. 26, pp. 251–267, 1979.
- [131] W. Whiteley, *The Decline and Rise of Geometry*. To appear Proceedings of the 1999 CMESG Conference, Department of Mathematics and Statistics, York University, Toronto, Ontario, Canada, 1999.
<http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/cmescg.pdf>.
- [132] W. Whiteley, *Dynamic Geometry and the Practice of Geometry*. For distribution at ICME9 Tokyo, Department of Mathematics and Statistics, York University, Toronto, Ontario, Canada, 2000.
<http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Dynamic.pdf>.
- [133] Y.-C. Wong, *Some Properties of the Triangle*. The American Mathematical Monthly, vol. 48, pp. 530–535, 1941.
- [134] Y.-C. Wong, *Some Extensions of the Douglas-Neumann Theorem for Concentric Polygons*. The American Mathematical Monthly, vol. 75, pp. 470–482, 1968.
- [135] W.-T. Wu, *Mathematics Mechanization: Mechanical Geometry Theorem-Proving, Mechanical Geometry Problem-Solving, and Polynomial Equations-Solving*, vol. 489 de *Mathematics and Its Applications*. Boston, USA: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [136] P. Y. Wu, *Polygons and Numerical Ranges*. The American Mathematical Monthly, vol. 107, pp. 528–540, Junho–Julho, 2000.

- [137] I. M. Yaglom, *Geometric Transformations I*. New Mathematical Library, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1973.