

3

Grupos de Coxeter Hiperbólicos

Iremos dar início neste capítulo mostrando um exemplo de grupo de Coxeter Hiperbólico de posto três que corresponde a um grupo de isometrias no plano hiperbólico ($\mathbb{H}^n$) no modelo de Poincaré e no modelo de Klein respectivamente.

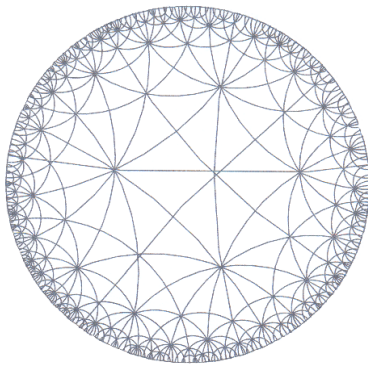


Figura 3.1: Modelo de Poincaré

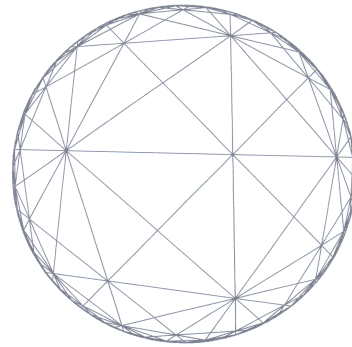


Figura 3.2: Modelo de Klein

Ou seja, temos um triângulo hiperbólico, em que $m(a, b) = 4$, $m(b, c) = 6$ e $m(a, c) = 2$.

De fato $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} < \pi$

É o grupo de Coxeter hiperbólico infinito pois $W = \{ \langle a, b, c \rangle \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^4 = (bc)^6 = (ac)^2 = e \}$

Temos então:

$$m(a, a) = m(b, b) = m(c, c) = 1$$

$$m(a, b) = m(b, a) = -\cos \frac{\pi}{4}$$

$$m(a, c) = m(c, a) = -\cos \frac{\pi}{2}$$

$$m(b, c) = m(c, b) = -\cos \frac{\pi}{6}$$

Logo, a forma simétrica bilinear associada é dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Vimos na seção anterior como são os autovalores da matriz simétrica da forma bilinear de um grupo de Coxeter, isto é, o polinômio característico é dado por $(t-1)(t^2-2t+c)$, onde $c = 1 - a^2 - b^2$. Substituindo, dados que $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos que $c = 1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} < 0$. Assim, B é não degenerada de assinatura $(2,1)$, e B não é definida positiva, pois seus autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$, como $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, $\lambda_3 < 0$.

Portanto, a forma bilinear B é não degenerada, mas não é positiva definida. Veremos que para um grupo de Coxeter ser hiperbólico, esta condição deve ser satisfeita. O posto de W é 3 e a assinatura de B é $(2, 1)$, ou seja, da forma $(n-1, 1)$.

Gostaríamos de saber como se comportam grupo de coxeter hiperbólicos em dimensões maiores. Para isto, iremos considerar duas classes de exemplos:

1. Grupos de Coxeter hiperbólicos de domínio fundamental compacto.
2. Grupos de Coxeter hiperbólicos com domínio fundamental não compacto de volume finito, podendo ter vértices no infinito.

Veremos algumas propriedades importantes de grupos de coxeter Hiperbólicos.

Concentraremos agora no caso em que (W, S) é irredutível e a forma B é não degenerada, permitindo identificar V com seu dual. Denote por ω_s ($s \in S$) a base dual da base α_s ($s \in S$), relativa a B .

O cone C (um subconjunto de V) definido abaixo:

$$C = \{\lambda \in V \mid B(\lambda, \alpha_s) > 0, \forall s \in S\} = \{\sum c_s \omega_s \mid c_s > 0\}$$

Em particular, todos os ω_s moram no fecho D de C , que é um domínio fundamental para a ação de W na união de todos $w(C)$, $w \in W$.

Defina o sistema de Coxeter irredutível (W, S) como hiperbólico se B tem assinatura $(n-1, 1)$ e $B(\lambda, \lambda) < 0$ para todo $\lambda \in C$. Também dizemos

que W é hiperbólico.

Note que a definição força $B(\lambda, \lambda) \leq 0$ para todo $\lambda \in D$, o que se aplica, em particular aos elementos da base dual ω_s .

Nosso objetivo será analisarmos o grupo de Coxeter através de seu grafo, de modo que seja razoável uma classificação completa.

O seguinte Lema nos será útil.

Lema 3.1 *Seja E um espaço n -vetorial real, munido de uma forma simétrica bilinear B de assinatura $(n-1, 1)$. Fixe um vetor não nulo $\lambda \in E$, e seja $H = \{\mu \in E \mid b(\lambda, \mu) = 0\}$. Então a restrição de B para H é do tipo positivo se, e somente se $B(\lambda, \lambda) \leq 0$.*

Demonstração: Note que, se $B(\lambda, \lambda) \neq 0$, então $\lambda \notin H$, e E é soma direta ortogonal de H e da reta através de λ . Neste caso, a restrição B para H é não degenerada, e é do tipo positiva (na verdade, definida positiva) precisamente quando $B(\lambda, \lambda) < 0$ pela hipótese da assinatura. Suponha que a restrição de B para H é do tipo positiva. A observação precedente implica que $B(\lambda, \lambda)$ não pode ser estritamente positiva.

Reciprocamente, suponha $B(\lambda, \lambda) \leq 0$. Se $B(\lambda, \lambda) < 0$, a discussão acima realmente mostra que a restrição de B para H é do tipo positiva. Se $B(\lambda, \lambda) = 0$, assim $\lambda \in H$, a restrição de B para H é degenerada. Mas desde que B tem assinatura $(n-1, 1)$, sua restrição para algum hiperplano H' é definida positiva, e o mesmo é verdade da sua restrição para o hiperplano $H' \cap H$ em H (não contendo λ). E segue que B é do tipo positivo em H .

Proposição 3.2 *Seja (W, S) um sistema de Coxeter irredutível, com grafo Γ associado à forma bilinear B . É hiperbólico se, e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) *B é não degenerada, mas não definida positiva.*

(b) *Para cada $s \in S$, o grafo de Coxeter pela remoção s de Γ é do tipo positivo.*

Demonstração: Suponha primeiro que W é hiperbólico, assim (a) segue da assunção da assinatura de B . Para verificar (b), fixe $s \in S$, como observado

acima, $B(\omega_s, \omega_s) \leq 0$. Seja L_s o hiperplano ortogonal à ω_s . Os $\alpha_t (t \neq s)$ forma uma base de L_s . O lema mostra que a restrição de B para L_s é do tipo positiva. Mas a matriz desta forma restrita é a matriz associada com o grafo de Coxeter obtido pela remoção s de Γ .

Reciprocamente, suponha W satisfazendo (a) e (b). Graças a (a), o conjunto $N = \{\lambda \in V \mid B(\lambda, \lambda) < 0\}$ é não vazio. Por que por (b), a interseção de N com cada hiperplano L_s é vazia, assim, cada componente conexa de N mora em uma das componentes conexas do complemento de $\bigcup_{s \in S} L_s$. Estes são os conjuntos da forma $\sum_{s \in S} c_s \alpha_s$, com $c_s > 0$ para certos s , e $c_s < 0$ para outros. Agora, vemos porque a assinatura de B deve ser $(n-1, 1)$. Caso contrário, de (a), poderíamos ter um menor espaço bidimensional Z de V para o qual $Z \setminus \{0\} \subset N$. Mas Z é conexo e portanto mora em um dos conjuntos descritos, que contradiz o fato de Z ser fechado.

Finalmente, mostramos que C mora em N , C cone (menos a origem) com duas componentes conexas, cada uma delas convexas. De acordo com (b), B é do tipo positivo no hiperplano L_s ortogonal a ω_s , e portanto o lema acima mostra que $B(\omega_s, \omega_s) \leq 0$, assim, cada ω_s mora no fecho de N . Segue que sua cobertura convexa D mora no fecho de N , assim $C \subset N$.

Na situação em que B é não degenerada, W é um subgrupo do grupo ortogonal correspondendo ao grupo $G = O(v)$. Agora, G é um grupo de Lie real, com uma medida de Haar, que põem a noção de volume para o espaço homogêneo $\frac{G}{W}$.

Isto pode nos mostrar que o volume é finito se, e somente se B é definida positiva (no caso em que W é finito), ou então B tem assinatura $(n-1, 1)$, e $\{B(\lambda, \lambda) < 0, \forall \lambda \in C\}$. Quando B tem assinatura $(n-1, 1)$, um componente de $\{\lambda \in V \mid B(\lambda, \lambda) = -1\}$ dá um modelo padrão de espaço hiperbólico $(n-1)$ -dimensional. Que é justamente o modelo do hiperbolóide visto no primeiro capítulo, considerando a métrica de Lorentz, cuja forma simétrica bilinear tem a assinatura $(n-1, 1)$.

Assim, no nosso exmplo que iniciamos o capítulo, temos então um grupo de reflexão no plano hiperbólico compacto.

Daremos um próximo resultado sem prova, de um critério que refina a proposição anterior.

W é hiperbólico compacto se, e somente se ambas as condições são satisfeitas:

1. *B é não degenerada, mas não definida positiva*

2. Para cada $s \in S$, o grafo de Coxeter obtido pela remoção s de Γ é definido positivo.

3.0.10

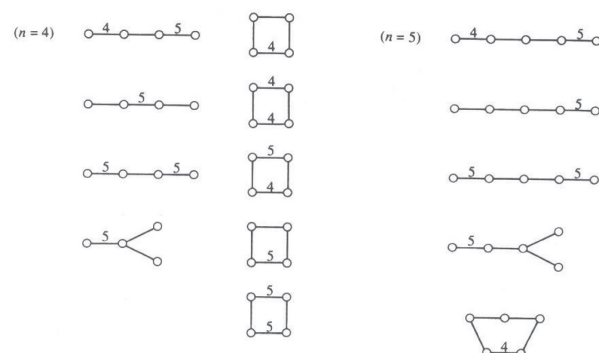
Lista dos grupos de Coxeter hiperbólicos

Grupos de Coxeter hiperbólicos como definidos aqui dão exemplos interessantes para o estudo de grupos discretos agindo no espaço hiperbólico real.

Um dos fatos impressionantes desta classificação é que Grupos de Coxeter hiperbólicos existem apenas de posto 3 a 10, e para os de posto 4 a 10 existem um número finito deles. Grupos de Coxeter hiperbólicos compactos existem somente de posto 3, 4 e 5.

Segue abaixo a lista de todos os grupos de Coxeter hiperbólicos de posto 4 a 10, cuja versão aparece em [KO].

1. Grupos de Coxeter hiperbólicos compactos ($n \geq 4$)



2. Grupos de Coxeter hiperbólicos não compactos ($n \geq 4$)

