# 2
# Grupos de Coxeter

Neste Capítulo faremos uma breve apresentação da teoria de grupo de Coxeter, e veremos que grupos de Coxeter admitem variadas interpretações geométricas como grupo gerado por reflexões, que compartilham muitas caracteristicas interessantes.

### 2.0.3
### Sistema de Coxeter

Um sistema de Coxeter é um par $(W, S)$ consistindo de um grupo $W$, infinito ou finito, e um conjunto de geradores $S \subset W$, sujeito às relações abaixo:

$$(ss')^{m(s,s')} = 1$$

onde $m(s, s) = 1$, $m(s, s') = m(s', s) \geq 2$ para $s \neq s'$ em $S$, e $m(s, s') = \infty$ se não houver relação entre o par $s$ e $s'$.

Chamamos $|S|$ de posto de $(W, S)$.

Para obtermos um sistema de Coxeter $(W, S)$ é preciso especificar um conjunto finito $S$ e uma matrix simétrica $B$ indexada por $S$, com entradas em $\mathbb{Z} \cup \infty$ sujeita às condições:

$$m(s, s) = 1, \quad m(s, s') \geq 2, \quad s \neq s'$$

Podemos também representar o grupo através de um grafo $\Gamma$ tendo $S$ como seu conjunto de vértices, cujas arestas que ligam $s$ a $s'$ são chamadas de $m(s, s')$ desde que este número ( $\infty$ permitido) seja pelo menos 3. Se não existe aresta ligando $s$ a $s'$, fica subtendido que $m(s, s') = 2$. No caso de $m(s, s') = 3$ , podemos omitir nome da aresta.

Desde que os geradores de $S$ tenham ordem 2 em $W$, cada $w \neq 1$ em $W$ pode ser escrito na forma $W = s_1 s_2 \cdots s_i$, para algum $s_i$ (não necesariamente distintos) em $S$.

Se $r$ é menor possível, chamamos o comprimento de $w$, escrevemos $l(w)$,a qualquer expressão de $w$ como um produto de $r$ elementos de $S$ de uma expressão reduzida. Por convenção, $l(1) = 0$. Um elemento de $W$ pode ter numerosas expressões reduzidas.

Propriedades elementares da função comprimento:

1. $l(w) = l(w^{-1})$
2. $l(w) = 1$ se e somente se $w \in S$
3. $l(ww') \leq l(w) + l(w')$
4. $l(ww') \leq l(w) + l(w')$
5. $l(w) - 1 \leq l(ws) \leq l(w) + 1$

As propriedades são de fácil demonstração, não o faremos aqui.

### 2.0.4
### Representação geométrica de $W$

Dado um sistema de Coxeter $(W, S)$, temos por representação de $W$ um grupo gerado por reflexões (ortogonal) em um espaço Euclidiano.

Começaremos com um espaço vetorial $V$sobre $\mathbb{R}$, com base $\{\alpha_s | s \in S\}$ em correspondêntcia injetora com $S$, e vamos impor uma geometria em $V$, tal que o ângulo entre $\alpha_s$ e $\alpha'_s$ seja compatível com $m(s, s')$.

**Definição 2.1** *Definimos $B$ como a forma simétrica bilinear:*

$$B(\alpha_s, \alpha'_s) = -cos(\frac{\pi}{m(s, s')})$$

*onde*

$$B(\alpha_s, \alpha'_s) = \begin{cases} -1, & m(s, s') = \infty \\ 1, & s = s' \\ \leq 0, & se \;\; s \neq s'. \end{cases}$$

**Definição 2.2** *Para cada $s \in S$ definimos a reflexão $\sigma_s : V \to V$ pela regra:*

$$\sigma_s \lambda = \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s$$

Claro que $\sigma_s \alpha_s = -\alpha_s$, enquanto $\sigma_s$ fixa o hiperplano $H_s$. Em particular, $\sigma_s$ tem ordem 2 em $GL(V)$.

Temos que $\sigma_s$ preserva a forma $B$. De fato, $B(\alpha_s \lambda, \alpha_s \mu) = B(\lambda, \mu)$ $\forall \lambda$, $\mu \in V$. Como resultado, cada elemento do subgrupo $GL(V)$ gerado por $\sigma_s$ $(s \in S)$ é preservado por $B$.

Nossa questão agora será mostrar que existe um homomorfismo de $W$ nele mesmo, onde $s \to \sigma_s$. É suficiente checar que

$$(\sigma_s \sigma'_s)^{m(s,s')} = 1$$

quando

$$s \neq s'$$

Considere o espaço bidimensional $V_{s,s'} = R\alpha_s \bigoplus R\alpha'_s$. Nós observamos que a restrição de $B$ para $V_{s,s'}$ é positiva semidefinida, e além disso, é não degenerada quando $m < \infty$. De fato, tome $\lambda = a\alpha_s + b\alpha'_s(a \ e \ b \in \mathbb{R})$ e façamos

$$B(\lambda, \lambda) = a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{m}$$
$$= (a - b\cos\frac{\pi}{m})^2 + b^2 \sin^2\frac{\pi}{m} \geq 0$$

$B$ é positiva definida em $V_{s,s'}$ se $\sin\frac{\pi}{m} \neq 0$, isto é, $m < \infty$. Então, quando $m < \infty$ a forma $B$ é positiva definida, e assim, encontraremos situação familiar com o plano euclidiano. Ambos, $\alpha_s$ e $\alpha'_s$ agem como reflexão ortogonal . Desde que $B(\alpha_s, \alpha'_s) = -\cos\frac{\pi}{m} = \cos(\pi - \frac{\pi}{m})$.

Assim, o ângulo enre $R^+\alpha_s$ e $R^+\alpha'_s$ é $(\pi - \frac{\pi}{m})$, forçando o ângulo entre as retas de reflexão (espelhos) ser $\frac{\pi}{m}$.

Reconhecemos $\sigma_s\sigma'_s$ como uma rotação através do ângulo $\frac{2\pi}{m}$, e portanto, tem ordem $m$.

Se $m = \infty$ então teremos $B(\alpha_s, \alpha'_s) = -1$. Considerando $\lambda = \alpha_s + \alpha'_s$, $B(\lambda, \alpha_s) = 0 = B(\lambda, \alpha'_s)$, assim, ambos, $\alpha_s$ e $\alpha'_s$ fixam $\lambda$. Logo, $\sigma_s\sigma'_s\sigma_s = \sigma_s(\alpha_s + 2\alpha'_s) = 3\alpha_s + 2\alpha_s = 2\lambda + \alpha_s$, por interação, $(\sigma_s\sigma'_s)^k\alpha_s = 2k\lambda + \alpha_s(k \in \mathbb{Z})$, implica que $\sigma_s\sigma'_s$ tem ordem infinita em $V_{s,s'}$, e portanto, em $V$.

### 2.0.5
### Raízes positivas e negativas

Veremos um critério para determinar quando $l(ws)$ é maior ou menor que $l(w)$ em termos da ação de $W$ em $V$. Assumiremos $w(\alpha_s)$ no lugar de $\sigma(w)(\alpha_s)$.

Um sistema de raízes $\Phi$ de $W$ consiste do conjunto de vetores unitários em $V$ permutados por $W$.

Definimos $\Phi$ como a coleção de todos os vetores $w(\alpha_s)$, onde $w \in W$ e $s \in S$. Observe que $\Phi = -\Phi$, desde que $s(\alpha_s) = -\alpha_s$.

Se $\alpha$ é uma raiz, podemos escrevê-lo unicamente na forma $\alpha = \Sigma c_s\alpha_s(c_s \in \mathbb{R})$.

Chamamos de positiva( negativa) e escrevemos $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$ se todos os $c_s \geq 0$ $(\leq 0)$. Assim, $\Phi^+$ será o conjunto de raizes positivas e $\Phi^-$ o conjunto de raizes negativas.

**Teorema 2.3** *Seja $w \in W$ e $s \in S$. Se $l(ws) > l(w)$, então $w(\alpha_s) > 0$. Se $l(ws) < l(w)$ então $w(\alpha_s) < 0$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [HU]

**Proposição 2.4** *(a) Se $s \in S$, então $s$ manda $\alpha_s$ em seu negativo, mas permuta as demais raízes positivas.*
*(b) Para qualquer $w \in W$, $l(w)$ é igual ao número de raízes positivas enviadas por $w$ em raizes negativas.*

**Demonstração** :

(a) Suponha $\alpha > 0$, mas $\alpha \neq \alpha_s$. Como todas as raizes são vetores unitários, $\alpha$ não pode se um múltiplo de $\alpha_s$ . Podemos portanto escrever $\alpha = \Sigma\, c_t\alpha_t$ $, t \in S$, onde todos os coeficientes são não negativos e alguns $c_t > 0$, $t \neq s$. Aplicando $s$ a $\alpha$ somente alteramos sua soma pela adição de uma constante multipla de $\alpha_s$, assim, os coeficientes de $\alpha_t$ que sobram são estritamente positivos.

Segue que $s(\alpha)$ não pode ser raiz negativa, assim está em $\Pi = \Phi^+$. Portanto$(\Pi\backslash\alpha_s) \subset \Pi\backslash\alpha_s$. Aplicando $s$ a ambos os lados temos a inclusão reversa.

(b) Se $w \in W$, definimos $n(w)$ como o número de raízes positivas de que $w$ manda em raízes negativas, assim

$$n(w) = Card\Pi(w), onde\Pi(w) = \Pi \cap w^{-1}() - \Pi.$$

Não é claro que $n(w)$ é finito, mas segue da prova de (a) que $n(w) = l(w)$, $n(s) = 1$ para $s \in S$. Para ver que $n(w) = l(w)$, verificamos que , para $s \in S$, $w \in W$, a condição $w(\alpha_s) > 0$ implica que $n(ws) = n(w) + 1$, por outro lado $w(\alpha_s) < 0$ implica que $n(ws) = n(w) - 1$. Se $w(\alpha_s) > 0$ a parte (a) garante que $\Pi(ws)$ é união disjunta de $s(\Pi(w))$ $e$ $\{\alpha_s\}$.

Similarmente, se $w(\alpha_S) < 0$, então $\Pi(ws) = s(\Pi(w)\backslash\{\alpha_s\})$, com $\alpha_s \in \Pi(w)$.

Usaremos em $l(w)$ para provar que $n(w) = l(w)$, $\forall w \in W$.

É óbvio para $l(w) = 0$ e, (parte a), $l(w) = 1$.

Sabemos que $l(ws) = l(w) + 1$ (respectivamente $l(w) - 1$) quando $w(\alpha_s) > 0$ (respectivamente $< 0$). Combinando o parágrao anterior e a hipótese de indução, completamos a prova.

### 2.0.6
### Raízes e Reflexão

Como $\delta : W \to GL(V)$ definido, cada $s \in S$ age como uma reflexão. Mais geralmente, associamos uma reflexão em $GL(V)$ com cada raiz $\alpha \in \Phi$, como segue. Dizemos que $\alpha = w(\alpha_s)$ para algum $w \in W$, $s \in S$. Considere $wsw^{-1}$agindo em $V$.

$$\begin{aligned} wsw^{-1} &= w[w^{-1}(\lambda) - 2B(w^{-1}(\lambda), \alpha_s)\alpha_s] \\ &= \lambda - 2B(w^{-1}(\lambda), \alpha_s)w(\alpha_s) \\ &= \lambda - 2B(\lambda, w(\alpha_s))w(\alpha_s) \\ &= \lambda - 2B(\lambda, \alpha)\alpha \\ &= s_\alpha \end{aligned}$$

Assim, $wsw^{-1}$ depende apenas de $\alpha$, não de escolha de $w$ e $s$. $s_\alpha$ age em $V$ como reflexão em que $\alpha \to -\alpha$ e fixa o hiperplano ortogonal a $\alpha$. Assim, $\alpha$ e $-\alpha$ determinam a mesma reflexão, $s_\alpha = s_{-\alpha}$.

Denotamos por $T$ o conjunto de todas as reflexões $s_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ . Assim,

$$T = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$$

**Proposição 2.5** *Se $\alpha$ e $\beta \in \Phi$ e $\beta = w(\alpha)$ para algum $w \in W$, então $ws_\alpha w^{-1} = s_\beta$.*

**Demonstração** *Segue da fórmula acima e do fato de $B$ ser $W$-invariante.*

**Proposição 2.6** *Seja $w \in W$, $\alpha \in \Pi$. Então $l(ws_\alpha) > l(w) \Leftrightarrow w(\alpha) > 0$.*

**Demonstração**: Por indução em $l(w)$, o caso $l(w) = 0$ é trivial. Se $l(w) > 0$, existe $s \in S$ tal que $l(sw) < l(w)$. Então $l((sw)s_\alpha) = l(s(ws_\alpha)) \geq l(ws_\alpha) - 1 > l(w) - 1 = l(w)$. Por indução, $sw(\alpha) > 0$. Suponha $w(\alpha) < 0$. A única raiz negativa enviada em raiz positiva por $s$ é $-\alpha_s$, assim $w(\alpha) = -\alpha_s$. Mas então, quando $sw(\alpha) = \alpha_s$ implicaria $(sw)s_\alpha(sw)^{-1} = s$, com $ws_\alpha = sw$. Isto contradiz $l(ws_\alpha) > l(w) > l(sw)$. Como resultado, $w(\alpha)$ deve ser positivo. O próximo resultado tratará da natureza da expressão reduzida em $W$.

**Teorema 2.7** *Seja $w = s_1 \cdots s_r$( $s_i \in S$) não necesseriamente um expressão reduzida. Suponha uma reflexão $t \in T$ satisfazendo $l(wt) < l(w)$. Então, existe* *um índice $i$ para o qual $wt = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r$(omitindo $s_i$). Se a expressão de $w$ for reduzida, então $i$ é único.*

**Demonstração**: Escreva $t = s_\alpha$( suponha $\alpha > 0$). Desde que $l(wt) < l(w)$, então $w(\alpha) < 0$. Como $\alpha > 0$, existe um índice $i \leq r$ para o qual $s_{i+1} \cdots s_r(\alpha) > 0$ mas $s_i s_{i+1} \cdots s_r(\alpha) < 0$. Somente as raizes positivas que $s_i$ envia para as negativas são $\alpha_{s_i}$, assim $s_{i+1} \cdots s_r(\alpha) = \alpha_{s_i}$. E implica que $(s_{i+1} \cdots s_r)t(s_r \cdots s_{r+1}) = s_i$ ou $wt = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r$.

Se $l(w) = r$, considere o que aconteceria se existisse um índice $i < j$ tal que $wt = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_j \cdots s_r = s_1 \cdots s_i \cdots s_j \cdots s_r$. Depois de cancelado, temos $s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$, ou $s_i \cdots s_j = s_{i+1} \cdots s_{j-1}$ nos permitimos escrever $w = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots \widehat{s_j} \cdots s_r$. Isto contradiz o fato de $l(w) = r$.

Voltaremos nossa atenção para alguns casos especiais mais importantes. Primeiro, iremos simplificar muitas questões para o caso quando o grafo de Coxeter for conexo. Reconsideraremos a representação geométrica de $w$ relativo à forma bilinear $B$, e mostraremos que somente grupos de Coxeter finitos são grupos finitos de reflexões. Usaremos $s$ e $t$ para denotarmos elementos de $S$, no sistema de Coxeter $(W, S)$.

### 2.0.7
### Sistema de Coxeter irredutível

Um sistema de coxeter $(W, S)$ é dito irredutível se o grafo de Coxeter $\Gamma$ é conexo.

**Definição 2.8** *Um grafo se diz conexo se há pelo menos uma cadeia ligando cada par de vértices deste grafo $G$.*

**Proposição 2.9** *Seja $(W, S)$ um sistema de Coxeter. Se $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_r$ são as componenetes conexas do grafo de Coxeter $\Gamma$, seja $S_1, S_2, \cdots, S_r$ os subconjuntos correspondentes de $S$. Então $W$ é o produto direto de subgrupos parabólicos $W_{S_1}, W_{S_2}, \cdots, W_{S_r}$ e cada Sistema de Coxeter $(W_{S_i}, S_i)$ é irredutível).*

**Demonstração**: Usaremos indução em $r$. Desde que os elementos de $S_i$ comutam com os elementos de $S_j$, quando $i \neq j$, é claro que o subgrupo parabólico centraliza cada um deles, onde cada $S_i$ é normal em $W$.

O produto desses subgrupos contém $S$ e portanto todos os $W$. Por indução $W_{S/S_i}$ é produto direto dos $W_{S_j}$ restantes, implica que $W_{S_i}$ intersecta trivialmente. Assim, o produto é direto.

A construção da representação $\sigma : W \to GL(V)$ é fiel. Os elementos de $S$ são representados pelas reflexões $\sigma_s$ relativas a forma bilinear $B$ em $V$. Na base $\{\alpha_s \mid s \in S\}$, $B$ é definida por:

$$B(\alpha_s, \alpha_t) = -\cos \frac{\pi}{m(s,t)}$$

Precisamos examinar mais de perto algumas caracrísticas topológicas desta situação. Para qualquer base ordenada fixa de $V$, podemos identificar $V$ com $\mathbb{R}^n$ e $GL(V)$ com $GL(n, \mathbb{R})$. Note que $GL(n, \mathbb{R})$é um conjunto aberto de todas as matrizes $n \times n$. Note também que a multiplicação de um conjunto de matrizes por uma matriz fixada induz um homeomorfismo do espaço das matrizes $n \times n$.

Utilizando uma base dual para para $V^*$ conseguimos identificações similares para $V^*$ e para $GL(V^*)$. O conjunto aberto $C$ em $V^*$, cujo fecho é um domínio fundamental para ação de $W$ na união de todos os seus $W$-transladados. Esta claro que para qualquer $f \in V^*$ fixado, a órbita da função $GL(V^*) \to V^*$ mandando $g \to g \cdot f$ é contínua (sendo dada na forma coordenada de polinômios lineares). Assim, a imagem inversa de $C$( chamada de $C_0$) é uma vizinhança aberta do elemneto identidade 1 em $GL(V^*)$. Escolha $f \in C$. Então pelo teorema implica que $\sigma^*(W) \cap C_0 = 1$. Um elemnto arbitrário $g = \sigma^*(w)$ tem uma vizinhança aberta $gC_0$ intersectando $\sigma^*(W)$ em $g$. Isto significa que $\sigma^*(W)$ é um subconjunto discreto de $GL(V^*)$. Pelo transporte da estrutura obtemos:

**Proposição 2.10** *$\sigma(W)$ é um subgrupo discreto de $GL(V)$, topologizado como acima.*

**Proposição 2.11** *Se a forma $B$ é positiva definida, então $W$ é finito.*

**Demonstração**: Se $B$ é positiva definida, $V$ é apenas um espaço euclidiano, que pode ser identificado com $V^*$. Utilizando uma base ortogonal de $V$ na discussão acima, identificamos $\sigma(W)$ como um subgrupo do grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. É bem sabido que $O(n, \mathbb{R})$ é um subconjunto compacto do conjunto de todas as matrizes $n \times n$: É fechado em virtude de ser definido por equações polinomiais($M \cdot M^t = 1$, $M$ matriz), e é limitado porque as linhas (ou colunas) de uma matriz ortogonal são vetores unitários. Por outro lado, a proposição mostra que $\sigma(W)$ é um subgrupo discreto de $O(n, \mathbb{R})$. Desde que um subgrupo discreto de um grupo Hausdorff compacto seja fechado(daí finito), $W \cong \sigma(W)$, é finito.

Devemos provar a discussão desta proposição abaixo, assim, mostrando que os grupos de Coxeter finitos são o mesmo que grupos de reflexões finitos.

Como ilustrados pelos grupos diedrais finitos e infinitos, a forma bilinear simétrica $B$ em $V$ pode ou não ser não degenerada. Aqui olhamos mais de perto o radical de $B$:

$$V^{\perp} := \{\lambda \in V \mid B(\lambda, \mu) = 0 \ \forall \ \mu \in V\}$$

Note antes de mais nada que $V^{\perp}$ é um subespaço próprio $W$-invariante, desde que $B$ seja $W$-invariante e não identicamente nulo. Afirmamos que $V^{\perp} = \bigcap_{s \in S} \mathbb{H}_s$ (onde $\mathbb{H}_s$ é o complemeto ortogonal de $\alpha_s$ relativo a $B$), e é portanto fixado por $W$. Uma inclusão está clara, em outra direção $B(\lambda, \alpha_s) = 0$ para todo $s \in S$ força $\lambda \in V^{\perp}$.

**Proposição 2.12** *Assuma que* $(W, S)$ *seja irredutível*
*(a) Cada subsepaço próprio* $W$*-invariante de* $V$ *esta incluindo no radical* $V^{\perp}$ *da forma* $B$*, onde* $V^{\perp} = \bigcap_{s \in S} \mathbb{H}_s$ *é fixado pontualmente por* $W$*.*

*(b) Se* $B$ *é degenerado então* $V$ *falha em ser completamente redutível como um* $W$*-módulo.*

*(c) Se* $B$ *é não degenerado, então* $V$ *é irredutível como um* $W$*-módulo.*

*(d) Os únicos endomorfismos de* $V$ *que comutam com a ação de* $w$ *são os escalares.*

**Demonstração**: (a) Seja $V' \neq V$ um subespaço $W$-invariante. Suponha primeiro que nenhuma raiz $\alpha_s(\ s \in S)$ mora em $V'$. Cada $\sigma_s$ age em $V'($ com possíveis autovalores $1, -1)$. Mas o $(-1)$- Autoespaço, não ocorre em $V'$ por assunção. Isto força $\sigma_s$ fixar $V$ pontualmente, para que $V'$ more na interseção de todos os $H_s(V^{\perp})$.

O que acontece se algun $\alpha_s$ morar em $V'$? Tome qualquer vizinho $t$ de $s$ no grafo $\Gamma$ de Coxeter, para que $\sigma_t$ ($\alpha_s = \alpha_s + c\alpha_t$, para algum $c \neq 0$). Desde que $\sigma_t(\alpha_s) \in V'$ isto força a $t \in V'$ também. Mas $\Gamma$ é conexo, então podemos proceder passo a passo para tomar todos os $\alpha_s(t \in S)$ em $V'$, quando $V' = V$ contrariando a hipótese.

(b) Se $B$ é degenerado, $V^{\perp}$ é um subespaço próprio $W$-invariante não nulo , que de acordo com a parte (a), não pode ter qualquer complemeto $W$-Invariante.

(c) Se $B$ é não degenerado, a parte (a) implica que $V$ não tem nenhum $W$-submódulos próprios não nulos.

(d) Suponha que um endomorfismo $z$ de $V$ comute com todos $\sigma(w)$, $w \in W$. Fixe qualquer $s \in S$. Desde que $z$ comute com $\sigma_s$, a linha $L$ , por $\alpha_s$ é z-invariante, então $z$ age com um autovalor $c$. Afirmamos que $z$ é apenas $c$ vezes a operador identidade 1. Considere o núcleo de $V'$ de $t - c \cdot 1$. Isto é claramente estável abaixo $\sigma(W)$, e contém $L$, que não mora em $V^{\perp}$. Graças a parte (a) devemos ter $V' = V$.



### 2.0.8
### Grupos de Coxeter Finitos

Nosso objetivo é mostrar que os grupos de Coxeter finitos são precisamente os grupos de reflexões finitos. Para isto precisamos lançar mão de alguns fatos padrões sobre representação de grupos.

**Lema 2.13** *Seja $\rho : G \to GL(E)$ uma representação de grupo, com $E$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$.*

*(a) Se G é finito, então existe uma forma bilinear G - invariante positiva definida em $E$.*

*(b) Se G é finito, então $\rho$ é completamente reduzível.*

*(c) Suponha que os únicos endomorfismos de $E$ comutando com $(\rho(G)$ sejam escalares. Se $\beta$ e $\beta'$ são forma bilineares simétricas não degeneradas em $E$, tanto G-invariante, então $\beta'$ é um multiplo escalar de $\beta$.*

**Demonstração** (a) Comece com qualquer forma bilinear simétrica positiva definida $\beta$ em $E$, e faça a média disso “sobre G”para obter uma que seja

$G$-invariante também:

$$\overline{\beta}(\lambda, \mu) = \sum_{g \in G} \beta(g \cdot \lambda, g \cdot \mu)$$

onde $\lambda$, $\mu \in$ S e $g \cdot \lambda = \rho(g)(\lambda)$, etc.

(b) Agora $E$ é a soma direta de qualquer subespaço e seu complemento ortogonal relativa a forma positiva definida de $\overline{\beta}$ construida em (a) pela não degeneração. Por outro lado, o complemento ortogonal de um subespaço $G$ -invariante é também $G$ -invariante, desde que $\overline{\beta}$ seja uma forma invariante. Redutibilidade completa segue.

(c) Qualquer forma não degenerada estabelece um isomorfirsmo entre espaço vetorial entre $E$ e seu espaço dual $E^*$ na forma usual. Quando a forma é invariante este se torna um isomorfismo de $G$ -módulos. Compondo o isomorfismo definido por $\beta$ com inversa daquela definida por $\beta'$ dá um isomorfismo $G$ -módulo de $E$ nele mesmo, isto é, um isomorfismo de $E$ comutando com $\rho(G)$. Isto é apenas um escalar, então $\beta$ e $\beta'$ são proporcionais.



**Teorema 2.14** *As seguintes condições no grupo de Coxeter $W$ são equivalentes:*

*(a) $W$ é finito.*

*(b) A forma bilinear $B$ é definida positiva.*

*(c) $W$ é um grupo de reflexão finito.*

**Demonstração**: Sem perda de generalidade, podemos assumir que $(W, S)$ é um sistema de Coxeter irredutível.

(a) $\Rightarrow$ (b). Graças a parte (b) do lema anterior, $W$ age completa e reduzivelmente em $V$. Então a parte (b) da proposição anterior implica que $B$ deve ser não degenerado. A parte (c) da proposição diz que $w$ age irredutivelmente, e (d) diz que os escalares são os únicos endomorfismo de $V$ comutando com a ação de $W$, na parte (c) do lema acima concluimos que $B$ é a única forma bilinear simétrica não degenerada $W$-Invariante em $V$. Mas pela parte (a) do lema, há uma forma $W$-invariante definida positiva em $V$, chame

$B'$. Então $B' = cB$ para algum $c \in \mathbb{R}$ não nulo. Desde que $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$, devemos ter $c > 0$, portanto $B$ é também definida positiva.

(b) $\Rightarrow$ (c) Aplicar colorário

(c) $\Rightarrow$ (a) Este é imediato.

## 2.0.9
## Grupo de Coxeter de posto 3

Há muitos grafos conexos de posto 3. Estes de fato tem uma caracterização unificada, que será o primeiro passo em direção a discussão dos grupos de Coxeter hiperbólicos. Seja $\Gamma$ um grafo de Coxeter conexo de posto 3, dois casos devem ser distiguidos. Primeiro suponha que $\Gamma$ não é um ciclo, e rotulamos as duas arestas por $m, n \geq 3$.

Seja $a = \cos(\frac{\pi}{m})$, $b = \cos(\frac{\pi}{n})$. A matriz da forma $B$ é então

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1 & -b \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico correspondente é $(t-1)(t^2 - 2t + c)$, onde $c = 1 - a^2 - b^2$. Assim, seus autovalores são $1, 1 \pm \sqrt{a^2 + b^2}$.

São positivos quando $a^2 + b^2 < 1$. Desde que os cossenos em questão têm valores variando de $\dfrac{1}{2}$ à 1,existem somente três possibilidades : (m,n) $=$ $(3,3), (3,4), (3,5)$.

O autovalor 0 ocorre somente quando $a^2 + b^2 = 1$, que pode ocorrer nos dois casos: $(m, n) = (4, 4), (3, 6)$.

Considere agora quando o grafo $\Gamma$ é um círculo. Rotulamos as arestas de $m, n, p \geq 3$, com $a$ e $b$ como antes e $c = \cos(\dfrac{\pi}{p})$. Agora, a mtriz $B$ é:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -a & -c \\ -a & 1 & -b \\ -c & -b & 1 \end{pmatrix}$$

O determinante é $d = 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc$, desde que $a,\ b,\ c \geq \dfrac{1}{2}$, e $d = 0$ quando $a = b = c = \frac{1}{2}$, ou $m = n = p = 3$. Suponha por outro lado que $d < 0$. Desde que o traço é 3, nem todos os autovalores são negativos, portanto a assinatura deve ser $(2, 1)$.

Denote por $c$ a soma dos recíprocos de três rótulos $m(s, t)$, $s \neq t$. Então, $c > 1$ se, e somente $B$ é positiva definida, $c = 1$ se, e somente se $B$ é positiva semi definida( mas não definida positiva), $c < 1$ se e somente se $B$ é não degenerada de assinatura $(2, 1)$(Aqui $c\pi$ pode ser interpretado como a soma dos ângulos de um triângulo na geometria que é respectivamente esférica, eucidiana, hiperbólica).