

# 1

## Geometria Hiperbólica

### Modelos de $\mathbb{H}^n$

Apresentaremos três classes de modelos para o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , de acordo com as transformações correspondentes a isometrias. No modelo do hiperbolóide, as isometrias são transformações de “Lorenz”, transformações lineares preservando uma forma quadrática. No modelo de Klein, as isometrias são transformações projetivas, levando retas em retas. E finalmente, nos modelos da bola unitária e do semi-espaço superior, as isometrias são as transformações de Möbius, preservando ângulos.

Faremos uma exposição das principais características dos modelos acima citados.

O estudo das Variedades Riemannianas de dimensão 2, completas, simplesmente conexas e com curvatura constante igual a  $-1$  é de grande importância no desenvolvimento da geometria hiperbólica.

Não nos limitaremos aqui, apenas o caso  $n = 2$ . Iniciando com um estudo completo de um destes exemplos, construiremos outros, através de difeomorfismos, que lhes serão isométricos. Estaremos sempre preocupados em determinar as geodésicas e a métrica em cada um desses exemplos.

### 1.1

#### O Modelo do Hiperbolóide

É preciso, para entendimento deste capítulo, que sejamos familiarizados com noções de geometria Riemanniana encontradas na referência [CA]. Utilizaremos aqui sem qualquer menção explícita.

O primeiro modelo de variedade completa com curvatura constante igual a  $-1$  é construído considerando a forma quadrática  $Q(x) = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2\}$  definida no espaço  $\mathbb{R}^n$ .

Será essencialmente  $\{x \in \mathbb{R}^n; Q(x) = -1 \text{ e } x_{n+1} > 0\}$ .

Para estudarmos este modelo, torna-se necessário definir métricas pseudo-Riemannianas.

**Definição 1.1** *Uma métrica pseudo-Riemanniana em uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$  é a escolha para cada ponto  $p \in M$  de uma forma simétrica bilinear não degenerada  $(,)_p$  (porém, não necessariamente positiva definida) em  $T_pM$  que varia diferencialmente com  $p$  no seguinte sentido:*

*Se  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  ( $n = \dim M$ ) é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p \in M$  com  $X(X_1, \dots, X_n) = q \in X(U)$  e  $\frac{\sigma}{\sigma X_i}(q) = dX(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  então,  $g_{ij}(X_1 \dots X_n) = (\frac{\partial}{\partial X_i}(g), \frac{\partial}{\partial X_j}(g))_q$  é uma função diferenciável em  $U$ .*

É fácil ver que a forma quadrática

$$Q(x) = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2\}$$

definida para todo  $x$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  introduz uma métrica pseudo-Riemanniana  $(,)$  no  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esta métrica é chamada métrica de Lorentz e no caso  $n = 3$  ela aparece naturalmente em relatividade.

Veremos que, no que segue, algumas propriedades de espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$  munido desta métrica pseudo-Riemanniana. Antes, porém, convém observar que as noções de conexão, isometrias, e suas propriedades podem ser estendidas naturalmente, a métricas pseudo-Riemannianas.

**Definição 1.2** *Sejam  $(M, \langle, \rangle)$  e  $(N, \langle, \rangle)$  variedades pseudo-Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é chamada uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle'_{f(p)}$$

para todo  $p \in M, u, v \in T_pM$  (I)

**Definição 1.3** *Sejam  $M$  e  $N$  como na definição anterior, e  $U \subset M$  aberto. Um difeomorfismo  $f : U \rightarrow f(U) \subset N$  satisfazendo (I) chama-se isometria local.*

**Definição 1.4** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade pseudo-Riemanniana de dimensão  $n$ ,  $(M, \langle, \rangle)$  é compatível com a métrica pseudo-Riemanniana se*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

onde  $X, Y, Z$  são campos de vetores tangentes a  $M$ .

**Definição 1.5** A conexão afim  $\nabla$  é simétrica quando  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ , for all  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  onde  $[X, Y] = XY - YX$  e  $\mathcal{X}(M)$  é o conjunto dos campos de vetores tangentes a  $M$ .

**Teorema 1.6** Dada uma variedade pseudo-Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim de  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:

1.  $\nabla$  é simétrica
2.  $\nabla$  é compatível com a métrica pseudo-Riemanniana

A demonstração deste teorema é análoga a feita para métricas Riemannianas [CA].

Uma propriedade importante da conexão pseudo-Riemanniana associada a métrica de Lorentz, definida no espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$ , é que o transporte paralelo usual desta conexão coincide com o transporte paralelo usual do  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Isto será necessário para determinarmos as isometrias de  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$ .

**Proposição 1.7** O transporte paralelo da conexão pseudo-Riemanniana do  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$  onde  $(\cdot, \cdot)$  é a métrica de Lorentz, coincide com o transporte paralelo usual do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Demonstração:** Sabemos que para cada  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $T_p \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ . Seja portanto  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e identifiquemos  $e_i(p)$  (que é obtido do vetor  $e_i$  fazendo uma translação da origem 0 do  $\mathbb{R}^{n+1}$  para o ponto  $p$ ), com o vetor  $e_i$ .

Dada a forma quadrática  $Q : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , a ela está associada a forma bilinear

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow u_1 v_1 + \dots + u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}$$

onde  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$  são elementos do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Segue-se que a métrica de Lorentz é definida em cada  $p \in \mathbb{R}^{n+1}$  do seguinte modo:

$$(\cdot, \cdot) : T_p \mathbb{R}^{n+1} \times T_p \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v)_p \rightarrow (u, v)$$

Portanto, os coeficientes

$$g_{ij}(p) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \neq n + 1, \\ -1, & i = j = n + 1. \end{cases}$$

A conexão pseudo-Riemanniana no  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$  é dada por

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_n \rangle = e_i(e_j, e_k) - e_k(e_i, e_j) + e_j(e_i, e_k) - ([e_i, e_j], e_k) + ([e_k, e_i], e_j) - ([e_j, e_k], e_i) = 0$$

pois,  $(e_j, e_k) = C$ ,  $C$  constante  $\forall j, k$  e portanto a derivada da direção do vetor  $e_i$ ,  $e_i(e_j, e_k) = 0$  para todo  $i = 1 \cdots n + 1$  Além disso,

$$[e_j, e_k] = e_j e_k - e_k e_j = 0$$

Temos assim que  $\nabla_{e_i} e_j = 0$ ,  $\forall i, j = 1 \cdots n + 1$  e portanto, se  $X$  é um campo de vetores em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$X(p) = \sum X(p) e_i, p \in \mathbb{R}^{n+1}$$

e  $\nabla_{e_j} X = \nabla_{e_j} \sum_i x_i e_i = \sum_i e_j(x_i) e_i = \sum_i x_i \nabla_{e_j} e_i = \sum_i e_j(x_i) e_i$  isto é

$$\nabla_{e_j} X = \sum_i e_j(x_i) e_i$$

Seja  $V$  um campo de vetores ao longo de uma curva  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ .

Escrevendo  $V$  na base canônica  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  do  $\mathbb{R}^{n+1}$  temos que

$$V = \sum_{j=1}^{n+1} v^j e_j \text{ onde } v^j = v^j(t)$$

A derivada covariante  $\frac{DV}{dt}$  de  $V$  ao longo da curva  $C$  é dada pela expressão

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt} \left( \sum_{j=1}^{n+1} v^j e_j \right) = \sum_j v^j \frac{De_j}{dt} + \sum_j \frac{Dv^j}{dt} e_j$$

mas

$$\frac{De_j}{dt} = \nabla \frac{dc}{dt} e_j = \nabla_{\sum \frac{dx_i}{dt} e_i} e_j = \sum \frac{dx_i}{dt} \nabla_{e_i} e_j = 0.$$

logo,  $\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} e_j$  isto é, a derivada coariante coincide com a derivada usual e portanto o transporte paralelo coincide com o transporte paralelo usual do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Como o transporte paralelo coincide com o transporte paralelo usual do  $\mathbb{R}^{n+1}$  as geodésicas de  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$  são retas usuais.

**Proposição 1.8** *Qualquer aplicação  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  que preserva  $(\cdot, \cdot)$  é linear.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  preserva  $(,)$  e seja  $e_1, \dots, e_{n+1}$ , base ortonormal do  $(\mathbb{R}^{n+1}, (,))$  (um vetor  $v$  é unitário se  $|v| = \sqrt{(v, v)} = 1$  ou  $i = \sqrt{-1}$ ).

Afirmamos que  $\{f(e_1), \dots, f(e_{n+1})\}$  é base ortonormal do  $(\mathbb{R}^{n+1}, (,))$ .

De fato, como  $f$  preserva  $(,)$  temos:

$$(1) f(e_j) = 0, \forall j$$

$(f(e_j), f(e_j)) = (e_j, e_j) = 1$  ou  $-1$ , logo,  $(f(e_j), f(e_j)) \neq 0$ , o que implica que  $f(e_j) \neq 0$ .

$$(2) (f(e_i), f(e_j)) = (e_i, e_j) = 1 \text{ ou } -1, \text{ se } i = j \text{ ou } 0, \text{ se } i \neq j$$

Resta mostrar que  $f$  é linear, e para isto, seja  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ .

Escrevendo  $f(a)$  na base  $\{f(e_1), \dots, f(e_{n+1})\}$ :

$f(a) = \sum b_i f(e_i)$  onde  $b_i = (f(a), f(e_i)) = (a, e_i) = a_i$  logo  $f(a) = \sum a_i f(e_i)$ , e portanto,  $f$  é linear.

Seja  $O^1(n+1)$  o grupo das transformações lineares  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  que preservam  $(,)$ .

Queremos mostrar que as isometrias de  $(\mathbb{R}^{n+1}, (,))$  são as aplicações da forma

$$p \rightarrow A(p) + q$$

$$A \in O^1(n+1), q \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Para isto, necessitamos do lema que segue,

**Lema 1.9** *Se uma aplicação  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma isometria, então  $\forall p, q \in \mathbb{R}^{n+1}$  temos que  $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$  onde*

$$d(p, q) = \int_0^1 \|C'(t)\| dt, \quad C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

uma reta com  $C(0) = p$  e  $C(1) = q$ .

**Demonstração:** Se  $f$  é uma isometria,  $f$  é um difeomorfismo e  $\forall p, q \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$ .

Seja  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma parametrização da reta com  $C(0) = p$  e  $C(1) = q$ .

Como  $f$  é isometria e as retas são geodésicas de  $(\mathbb{R}^{n+1}, (,))$  e  $f \circ C(0) = f(p)$  e  $f \circ C(1) = f(q)$ .

Concluimos assim que

$$d(f(p), f(q)) = \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} f \circ C(t) \right\| dt = \int_0^1 \|df \circ C'(t)\| dt = \int_0^1 \|C'(t)\| dt = d(p, q)$$

Finalmente, podemos determinar as isometrias de  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$ .

**Teorema 1.10** *As isometrias de  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$  são da forma.*

$$p \rightarrow A(p) + q \quad A \in O^1(n+1), \quad q \in \mathbb{R}^{n+1}$$

**Demonstração:** É claro que todas as aplicações da forma  $p \rightarrow A(p) + q$   $A \in O^1(n+1)$ ,  $q \in \mathbb{R}^{n+1}$  são isometrias de  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$ .

Para provar que toda isometria de  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  de  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$  é desta forma, consideremos primeiramente o caso em que  $f(0) = 0$ .

Seja  $f$  uma isometria, pelo lema anterior,  $\forall p, q \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$ .

Em particular,  $d(f(p), f(0)) = d(p, 0)$  mas  $d(f(p), 0) = \int_0^1 \|f(p)\| dt = \|f(p)\|$ ,  $(C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \ t \rightarrow tf(p))$  é uma reta ligando  $p$  a  $0$ .

Analogamente,  $d(p, 0) = \|p\|$ , e portanto,  $\|f(p)\| = \|p\|$ , ou seja,  $f$  preserva  $(\cdot, \cdot)$ .

Assim,  $f$  pertence a  $O^1(n+1)$ .

Se  $f(0) \neq 0$ , seja  $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  definida por  $A(p) = f(p) - f(0)$ ,

$A$  é uma isometria de  $\mathbb{R}^{n+1}$  pois

$$dA_p(v) = df_p(v) \quad \forall p, v \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Além disso,  $A(0) = 0$ , logo  $A \in O^1(n+1)$  e

$$f(p) = A(p) + q, \quad q = f(0)$$

Estamos prontos a descrever o primeiro exemplo de variedade Riemanniana completa de curvatura seccional constante e igual a  $-1$ .

**Definição 1.11** *A esfera de raio imaginário na métrica de Lorentz é*

$$S_i^n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid X_1^2 + \dots + X_n^2 - X_{n+1}^2 = -1\}$$

Definimos  $\mathbb{H}^n = H_i^n = \{X \in S_i^n \mid X = (X_1, \dots, X_{n+1}), X_{n+1} > 0\}$

**Proposição 1.12**  *$\mathbb{H}^n$  é uma variedade Riemanniana de dim  $n$  cujo espaço tangente em cada ponto  $p \in \mathbb{H}^n$  é*

$$T_p \mathbb{H}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}, (v, p) = 0\}$$

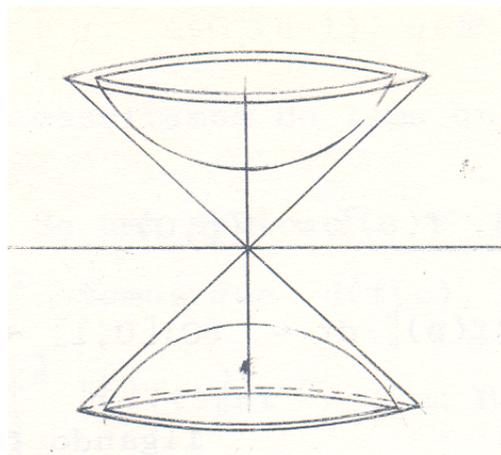


Figura 1.1: Modelo do Hiperbolóide

**Demonstração:** É fácil ver que  $\mathbb{H}^n$  é variedade Riemanniana de dim  $n$  já que  $\mathbb{H}^n = Q^{-1}(-1)$  onde

$$Q : U = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}; X_{n+1} > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X \rightarrow (x, x)$$

e  $-1$  é o valor regular de  $Q$ .

De fato, para todo  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in U$  temos que

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$$

e,  $dQ(x) = (2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n - 2x_{n+1})$  não é sobrejetiva se  $x_i = 0, \forall i$ , isto é, se  $x = 0$ , mas  $0 \notin Q^{-1}$  logo,  $-1$  é o valor regular de  $Q$  e isto mostra que  $Q^{-1}(-1)$  é variedade diferencial de dimensão  $n + 1 - 1 = n$ .

Para calcular o espaço tangente a  $\mathbb{H}^n$  em um ponto  $p \in \mathbb{H}^n$ , seja  $C : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}^n$  uma curva diferenciável com  $C(0) = p$  e  $C'(0) = v$ .

Do fato de  $C(t) \in \mathbb{H}^n, \forall t$  segue-se que

$$(C(t), C(t)) = -1, \forall t,$$

derivando em relação a  $t$ ,

$$(C(t), C'(t)) = 0$$

em particular

$$(C(0), C'(0)) = 0,$$

isto é

$$(p, v) = 0.$$

Mostramos assim que se um vetor  $v \in T_p\mathbb{H}^n$ , então  $(v, p) = 0$ .

Logo,  $v \in T_p\mathbb{H}^n \subseteq \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; (v, p) = 0\} = p^\perp$ .

Por outro lado,  $Q|_{p^\perp}$  é não degenerada pois, se  $w \in p^\perp$  é tal que  $(v, w) = 0$  para todo  $v \in p^\perp$ , segue que  $w \in (p^\perp)^\perp = \{p\} =$  espaço gerado por  $p$  e portanto  $w = \lambda p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , mas  $0 = Q(w) = \lambda^2$  e  $Q(p) = -\lambda^2$ , logo,  $\lambda = 0$  o que implica que  $w = 0$ .

Como  $Q|_{p^\perp}$  é não degenerada,  $\dim p^\perp = n = \dim T_p\mathbb{H}^n$ , e portanto,  $T_p\mathbb{H}^n = p^\perp$ .

### 1.1.1

#### Métrica Riemaniana do $\mathbb{H}^n$

Mostraremos no que segue, que a métrica induzida pela métrica de Lorentz  $(,)$  do  $\mathbb{R}^{n+1}$  é Riemaniana. Para isto, é conveniente considerar o índice de uma função bilinear  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  em um espaço vetorial  $V$  que é definido como sendo a maior dimensão de qualquer subespaço  $W \subset V$  no qual  $B$  é negativa definida.

Vê-se facilmente que a função bilinear

$$B : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) = (X, Y) = X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n - X_{n+1}Y_{n+1}$$

tem índice 1.

**Proposição 1.13** *Um vetor  $v \neq 0$  é tangente a  $\mathbb{H}^n$  se, e somente se  $(v, p) = 0$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $0 \neq v \in T_p\mathbb{H}^n$ . Sabemos da proposição anterior que  $(v, p) = 0$ .

(I)  $v$  e  $p$  são linearmente independentes, caso contrário,  $v = \lambda p$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$  e teríamos

$$0 = (v, p) = (\lambda p, p) = -\lambda$$

o que nos leva a uma contradição.

$$(II) (v, v) \geq 0$$

Seja  $W = \{v, p\}$  o espaço gerado pelos vetores  $v$  e  $p$ ,  $\dim W = 2$  já que  $p$  e  $v$  são linearmente independentes. Suponhamos que  $(v, v) \leq 0$ .

Para todo  $w \in W$ ,  $w = av + bp$  com  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

$$Q(a) = a^2Q(v) + b^2Q(p) = a^2Q(v) - b^2 < 0$$

Isto significa que a forma bilinear  $B$  associada a  $Q$ , restrita a  $w$  é negativa definida e portanto, a forma bilinear  $B$  tem índice maior ou igual a 2, o que nos dá uma contradição.

Agora, como  $v$  e  $p$  são linearmente independentes, segue que  $(v + p, v + p) \geq 0$  e portanto

$$0 \leq (v + p, v + p) = (v, v) + 2(v, p) + (p, p) = (v, v) - 1$$

Se  $(v, v) = 0$  então  $(v + p, v + p) < 0$  contradição, logo  $(v, v) > 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$  é tal que  $(v, v) > 0$ . Queremos mostrar que existe  $p \in \mathbb{H}^n$  tal que  $v \in T_p\mathbb{H}^n$ .

Seja

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\sqrt{\sum_1^n v_i^2 (\sum_1^n v_i^2 - v_{n+1}^2)}} (v_1 v_{n+1}, \dots, v_n v_{n+1}, \sum_1^n v_i^2) \\ (p, p) &= \frac{v_1^2 v_{n+1}^2 + \dots + v_n^2 v_{n+1}^2 + (\sum_1^n v_i^2)^2}{\sum_1^n v_i^2 (\sum_1^n v_i^2 - v_{n+1}^2)} = \\ &= \frac{\sum_1^n v_i^2 (v_{n+1}^2 - \sum_1^n v_i^2)}{v_i^2 (\sum_1^n v_i^2 - v_{n+1}^2)} = -1 \end{aligned}$$

Logo,  $p \in \mathbb{H}^n$ .

Além disso,

$$(v, p) = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^n v_i^2 (\sum_1^n v_i^2 - v_{n+1}^2)}} (v_1^2 v_{n+1} + \dots + v_n^2 v_{n+1} - v_{n+1} (\sum_1^n v_i^2)^2) = 0,$$

isto é,

$$v \in T_p\mathbb{H}^n.$$

A proposição que acabamos de demonstrar, garante que a pseudo-métrica  $(,)$  do  $\mathbb{R}^{n+1}$ , restrita a  $\mathbb{H}^n$  é positiva definida e portanto é uma métrica para este espaço.

### 1.1.2

#### Curvatura e Geodésica de $\mathbb{H}^n$

Para provarmos que  $\mathbb{H}^n$  tem curvatura seccional constante e igual a  $-1$  relembramos que, dada uma imersão  $f : M \rightarrow \bar{M}$ ,  $M$  e  $\bar{M}$  são variedades diferenciáveis, podemos definir para cada ponto  $p \in M$  uma aplicação bilinear:

$$B : T_pM \times T_pM \rightarrow T_p\bar{M}$$

$$(x, y) \rightarrow (\bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y)(p)$$

Onde  $\nabla, \bar{\nabla}$  são as conexões Riemannianas de  $M$  e  $\bar{M}$  respectivamente e,  $\bar{X}, \bar{Y}$  são extensões a  $\bar{M}$  dos campos de vetores  $X, Y$  tangentes a  $M$  tais que  $X(p) = x$  e  $Y(p) = y$ .

$B$  é chamada segunda forma fundamental de  $M$  e, para cada vetor unitário  $n \in (T_pM)^\perp$  associamos a  $B$  uma aplicação linear auto-adjunta.

$$S_n : T_pM \rightarrow T_pM$$

determinada por  $\langle S_n(x), Y \rangle = \langle B(x, y), n \rangle$

Mostra-se que  $S_n(x) = (\bar{\nabla}_X N)^T$ , onde  $X$  e  $N$  são campos de vetores tangentes a  $\bar{M}$  com  $X(p) = x$  e  $N(p) = n$ .

**Proposição 1.14**  $Sp(x) = -I$  onde  $I$  é aplicação identidade do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$p \in (T_p\mathbb{H}^n)^\perp$  pois  $T_p\mathbb{H}^n = \{v, (v, p) = 0\}$ , logo, tem sentido falarmos na aplicação linear  $Sp$ .

Observe que a aplicação linear

$$N : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x \longrightarrow x$$

é uma extensão de  $p$  a um campo de vetores em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$N$  sendo linear é diferenciável e, para todo  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$dN_p(v) = N(v) = v$$

Como a derivada covariante do  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$  coincide com a derivada usual

$$\nabla_X N(p) = X(N)(p) = dN_p(x) = N(x) = x.$$

Logo,  $(\nabla_X N)(p) = x \in T_p \mathbb{H}^n$  O que implica que,

$$(\nabla_{X'} N)^T(p) = x$$

e portanto,

$$Sp(x) = -x \quad \forall x \in T_p \mathbb{H}^n$$

O que mostra que  $Sp = -I$ .

Uma consequência imediata dessa proposição é o corolário que enunciaremos a seguir e cujo resultado será usado no cálculo da curvatura de  $\mathbb{H}^n$ .

**Corolário 1.15**  $B(x, y) = p(x, y)$ ,  $x, y \in T_p \mathbb{H}^n$

**Demonstração:**  $B(x, y)(p) = (\overline{\nabla}_x Y)(p) - \nabla_X Y(p)$ ,  $X, Y$  são campos de vetores tangentes a  $\mathbb{H}^n$ , com  $X(p) = x$  e  $Y(p) = y$ .

Segue da definição de  $B$  que  $B(x, y) \in (T_p \mathbb{H}^n)^\perp$

$$\mathbb{R}^{n+1} = T_p \mathbb{H}^n \oplus (T_p \mathbb{H}^n)^\perp$$

e  $\dim(T_p \mathbb{H}^n) = n$  logo

$$\dim(T_p \mathbb{H}^n)^\perp = 1.$$

Como  $0 \neq p \in (T_p \mathbb{H}^n)^\perp$ ,  $B(x, y) = \lambda p$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$-\lambda = (B(x, y), p) = (S_p(x), y) = (-x, y) = -(x, y)$  Logo,  $\lambda = (x, y)$  e  $B(x, y) = p(x, y)$ .

**Proposição 1.16**  $\mathbb{H}^n$  é uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  com curvatura seccional constante e igual a  $-1$ .

**Demonstração:** Observemos que a curvatura do  $(\mathbb{R}^{n+1}, (\cdot, \cdot))$  é  $\overline{K} = 0$  por que os coeficientes

$$R_{ijkl} = (R(e_i, e_j), e_k, e_l) = 0,$$

$\forall e, j, k, l = 1 \cdots n + 1$ , onde  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  é base canônica do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e,

$$R(e_i, e_j)e_k = \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k + \nabla_{(e_i, e_j)} e_k$$

que é identicamente zero para todo  $i, j, k$  já que

$$\nabla_{e_i} e_k = 0, \quad (e_i, e_k) = 0 \quad \forall i, k$$

$$R_{ijkl} = 0, \quad \forall i, j, l, k$$

implica que  $\bar{K} = 0$ .

Pelo Teorema de Gauss [CA], denotando por  $K$  a curvatura seccional de  $\mathbb{H}^n$  temos, para quaisquer vetores ortonormais  $x, y \in T_p \mathbb{H}^n$

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = (B(x, x), B(x, x)) - |B(x, y)|^2$$

isto é,

$$K(x, y) = (B(x, x), B(x, x)) - |B(x, y)|^2$$

Pelo corolário anterior,

$$B(x, x) = p(x, x) = p$$

$$B(y, y) = p(y, y) = p$$

$$B(x, y) = p(x, y) = 0$$

Logo,

$$K(x, y) = (p, p) = -1.$$

Para provarmos que  $\mathbb{H}^n$  é um exemplo de variedade Riemaniana completa com curvatura seccional constante igual a  $-1$  resta-nos mostrar que ela é completa. Para isto é suficiente verificarmos que ela é uma variedade homogênea.

**Definição 1.17** *Uma variedade Riemaniana  $M$  é homogênea se dados  $p, q \in M$  existe uma isometria  $f : M \rightarrow M$  com  $f(p) = q$ .*

**Teorema 1.18** *Toda variedade homogênea é completa.*

**Demonstração:** Ver em [CA]

Vamos verificar a existência desta isometria.

**Proposição 1.19** *As restrições dos elementos de  $O^1(n+1)$ , o subgrupo das transformações lineares de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que preservam  $(,)$  a  $\mathbb{H}^n$  são isometrias de  $\mathbb{H}^n$  e, dados  $x, y \in \mathbb{H}^n$  e bases  $\{v_i\}_{i=1}^n, \{w_i\}_{i=1}^n$  de  $T_x\mathbb{H}^n$  e  $T_y\mathbb{H}^n$  respectivamente, a transformação linear que leva*

$$x \rightarrow y$$

$$v_i \rightarrow w_i$$

é uma isometria de  $\mathbb{H}^n$ .

**Demonstração:** Seja  $f \in O^1(n+1)$ . Sabemos que  $f$  é uma isometria de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Para provarmos que  $f$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^n$  basta mostrarmos que  $f(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n$ .

Se  $q \in f(\mathbb{H}^n)$  então existe  $p \in \mathbb{H}^n$  tal que  $f(p) = q$ .

Como  $f$  é isometria de  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(q, q) = (f(p), f(p)) = (p, p) = -1$$

Logo,  $q \in \mathbb{H}^n$  e mostramos que

$$f(\mathbb{H}^n) \subseteq \mathbb{H}^n \quad (I)$$

Se  $p \in \mathbb{H}^n$  seja  $q = f(p)$

$$(q, q) = (f(p), f(p)) = (p, p) = -1$$

Logo,  $p \in f(\mathbb{H}^n) \Rightarrow \mathbb{H}^n \subseteq f(\mathbb{H}^n) \quad (II)$

(I) e (II)  $\Rightarrow f(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n$  e portanto  $f$  é isometria de  $\mathbb{H}^n$ .

Seja  $x, y \in \mathbb{H}^n$  e  $\{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\{w_1, \dots, w_n\}$  bases ortonormais de  $T_x\mathbb{H}^n$  e  $T_y\mathbb{H}^n$  respectivamente.

Como  $(x, v_i) = (y, w_i) = 0, \forall i$  e  $(x, x) = (y, y) = -1$  assim,  $\{x, v_1, \dots, v_n\}$  e  $\{y, w_1, \dots, w_n\}$  são bases ortonormais de  $(\mathbb{R}^n, (,))$ . Logo,

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x \rightarrow y$$

$$v_i \rightarrow w_i \quad i = 1, \dots, n.$$

é um elemento de  $O^1(n+1)$  e portanto  $f|_{\mathbb{H}^n}$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^n$  com  $f(x) = y$ .

Com a proposição que acabamos de demonstrar concluímos que  $\mathbb{H}^n$  é homogênea e portanto completa.

Finalizando o estudo deste modelo, mostraremos que as geodésicas de  $\mathbb{H}^n$  são as interseções desta variedade com planos que passam pela origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposição 1.20** *As simetrias de  $\mathbb{H}^n$  em relação a planos  $P$  que passam pela origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$  são isometrias de  $\mathbb{H}^n$ .*

Seja  $P$  um plano que passa pela origem de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Sejam  $v_1, v_2$  base ortonormal de  $P$  e completemos esta base a uma base ortonormal  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$  do  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Uma simetria de  $\mathbb{R}^{n+1}$  em relação ao plano  $P$  é aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$u_i \rightarrow u_i \quad i = 1, 2$$

$$u_j \rightarrow u_j \quad j = 3, \dots, n+1$$

Afirmamos que  $f \in O^1(n+1)$  porque

1.  $i, j = 1, 2 \quad (f(u_i), f(u_j)) = (u_i, u_j)$
2.  $i = 1, 2 \quad j \neq 1, 2$   
 $(f(u_i), f(u_j)) = (u_i, -u_j) = -(u_i, u_j) = 0 = (u_i, u_j) \quad i \neq j$
3.  $i, j \neq 1, 2$   
 $(f(u_i), f(u_j)) = (-u_i, -u_j) = (u_i, u_j)$

Isto é,  $f$  preserva o produto interno e portanto é um elemento de  $O^1(n+1)$ .

$f$  sendo um elemento de  $O^1(n+1)$ ,  $f|_{\mathbb{H}^n}$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^n$  pela proposição anterior.

**Proposição 1.21** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $Y : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável. Se existe isometria  $f : M \rightarrow M$  tal que*

1.  $f|_{\sigma(I)} = id$
2.  $f(p) \neq p, \forall p \in M, p \notin \gamma(I)$

Então  $\gamma$  é uma geodésica de  $M$ .

**Demonstração:** Seja  $p \in \gamma$  e  $B_\sigma(p)$  tal que a aplicação exponencial

$$\exp_p : B_\sigma(0) \rightarrow B_\sigma(p)$$

é um difeomorfismo.

Sabemos que se  $q \in B_\sigma(p)$  existe uma geodésica minimizante  $\tilde{\gamma}$  ligando  $p$  a  $q$ .

Suponhamos que  $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ . Sendo  $f$  uma isometria de  $M$  temos que  $f(\tilde{\gamma})$  é uma geodésica minimizante ligando  $f(p)$  a  $f(q)$ .

Mas  $f(p) = p$  e  $f(q) = q$  e pela unicidade de uma tal geodésica,  $f(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$  e implica que  $f|_{\tilde{\gamma}} = id$  nos leva a uma contradição.

Logo,  $\gamma$  é geodésica.

Observamos que as interseções de  $\mathbb{H}^n$  com um plano que passa pela origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$  é uma curva e os pontos desta curva são os únicos que permanecem invariantes por uma simetria de  $\mathbb{H}^n$  em relação ao plano considerado. Segue daí que estas curvas são geodésicas de  $\mathbb{H}^n$ . Como dado qualquer ponto  $p \in \mathbb{H}^n$  e qualquer vetor  $\mathbf{p}$  passando pela origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e que contém  $v$ , estas são as únicas geodésicas de  $\mathbb{H}^n$ .

Através de um cálculo simples, podemos achar uma parametrização destas geodésicas.

## 1.2

### Modelo Projetivo de Klein

O exemplo que apresentaremos a seguir é conhecido, na geometria hiperbólica, como o modelo de Klein e ele tem a vantagem de que suas geodésicas são segmentos de retas euclidianas.

Passaremos agora a construir tal exemplo.

Para isso, consideremos  $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$  e definimos

$$\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$p \rightarrow \phi(p)$$

onde  $\phi(p)$  é a interseção de  $\mathbb{R}^n$  com a reta que passa por  $p$  e  $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposição 1.22**  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo de  $\mathbb{H}^n$  sobre  $B^n(1) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$

**Demonstração:** Se  $p = (p_1, \dots, p_{n+1})$  é um ponto de  $\mathbb{H}^n$ , a reta que passa por  $p$  e  $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  é dada por:

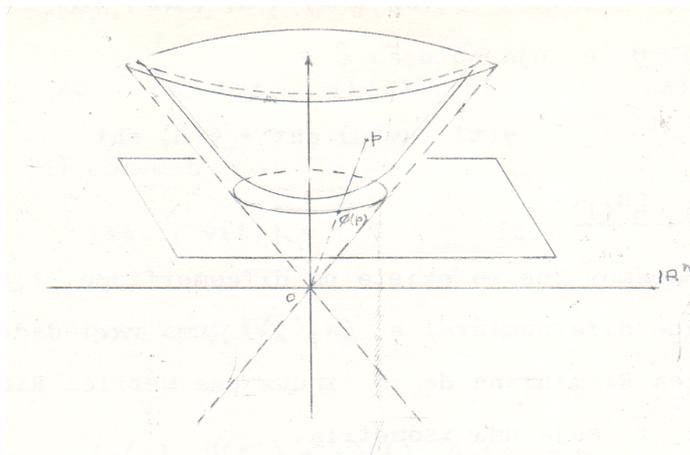


Figura 1.2: Modelo projetivo de Klein

$r_p = \{x_1 = \lambda p_1; x_{n+1} = \lambda p_{n+1} \text{ e portanto } \phi(p) = r_p \cap \mathbb{R}^n\}$  é dada pela equação:

$$x_{n+1} = 1$$

Concluimos que

$$\lambda = \frac{1}{p_{n+1}} e,$$

$$\phi(p) = \left( \frac{p_1}{p_{n+1}}, \dots, \frac{p_n}{p_{n+1}}, 1 \right)$$

ou seja,

$$\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(p_1, \dots, p_{n+1}) \rightarrow \left( \frac{p_1}{p_{n+1}}, \dots, \frac{p_n}{p_{n+1}}, 1 \right)$$

É claro que é diferenciável e se  $(p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{H}^n$ ,  $\phi(p) = \left( \frac{p_1}{p_{n+1}}, \dots, \frac{p_n}{p_{n+1}}, 1 \right)$  é tal que

$$\sum_1^n \frac{P_i^2}{P_n^2 + 1} = \frac{1}{P_n^2 + 1} \sum_1^n p_i^2 = \frac{P_{n+1}^2 - 1}{P_n^2 + 1} < 1$$

já que,  $p \in \mathbb{H}^n$  então  $\sum_1^n p_i^2 - p_{n+1}^2 = -1$  ou seja,  $\sum_1^n p_i^2 = p_{n+1}^2 - 1$ .

Concluimos assim que  $\phi(\mathbb{H}^n) \subset B^n(1)$

Seja agora,  $x = (x_1, \dots, x_n, 1) \in B^n(1)$ . Queremos encontrar  $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{H}^n$  tal que  $\phi(p) = x$

Suponhamos que existe tal  $p$ , isto é,

$$\phi(p) = \left( \frac{p_1}{p_{n+1}}, \dots, \frac{p_n}{p_{n+1}}, 1 \right) = (x_1, \dots, x_n, 1)$$

Temos assim o sistema

$$x_1 = \frac{p_1}{p_{n+1}}$$

$$\dots$$

(I)

$$x_n = \frac{p_n}{p_{n+1}}$$

Elevando ao quadrado cada equação do sistema e somando temos,

(II)

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = \frac{p_1^2 + \dots + p_n^2}{p_{n+1}^2 + 1}$$

$p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n$  e  $x = (x_1, \dots, x_n, 1) \in B^n(1)$  implicam que

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 = p_{n+1}^2 - 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1$$

respectivamente.

Substituindo em (II) temos

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{p_{n+1}^2 - 1}{p_{n+1}^2}$$

O que implica que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1\right)p_{n+1}^2 = -1$$

ou seja  $p_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}}$

Substituindo o valor de  $p_{n+1}$  em (I) segue-se que

$$p_i = x_i(p_{n+1}) = \frac{x_i}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

e portanto,

$$p = \left( \frac{x_1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}} \right)$$

é um ponto de  $\mathbb{H}^n$  tal que  $\phi(p) = x$ .

Mostramos assim que  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n(1)$  é sobre.

Para provarmos que  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n(1)$  é um difeomorfismo basta verificarmos que é injetiva e que  $\phi^{-1} : B^n(1) \rightarrow \mathbb{H}^n$  é diferenciável.

(1)  $\phi$  é 1-1

Sejam  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ ,  $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$  elementos de  $\mathbb{H}^n$  tais que

$$\phi(x) = \phi(y)$$

isto é

$$\left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1 \right) = \left( \frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}}, 1 \right)$$

Concluimos daí que

$$\frac{x_i}{x_{n+1}} = \frac{y_i}{y_{n+1}}, \text{ for all } i = 1, \dots, n. \text{ (I)}$$

Do fato de  $x, y \in \mathbb{H}^n$  segue-se

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 - x_{n+1}^2 \quad e \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 - y_{n+1}^2$$

elevando ao quadrado (I) e somando em relação a  $i$  temos

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{y_{n+1}^2} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

isto é,

$$\begin{aligned} (1 - x_{n+1}^2)y_{n+1}^2 &= x_{n+1}^2(1 - y_{n+1}^2) \\ y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2y_{n+1}^2 &= x_{n+1}^2 - x_{n+1}^2y_{n+1}^2 \\ x_{n+1}^2 &= y_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Como  $x_{n+1} > 0$  e  $y_{n+1} > 0$  segue que

$$x_{n+1} = y_{n+1}$$

Substituindo em (I) temos que

$$x_i = y_i, \forall i$$

Logo,  $\phi$  é injetiva.

É imediato que

$$\phi^{-1} : B^n(1) \rightarrow \mathbb{H}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n, 1) \rightarrow \left( \frac{x_1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}} \right)$$

é diferenciável e com isso terminamos a demonstração de que  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n(1)$  é difeomorfismo.

## 1.2.1

**Métrica e Geodésica em  $B^n(1)$** 

Sendo  $\phi$  um difeomorfismo, a métrica em  $\mathbb{H}^n$  induz uma métrica em  $\langle, \rangle$  em  $B^n(1)$  de modo que  $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n(1)$  seja isometria.

$(\mathbb{H}^n, \langle, \rangle)$  e  $(B^n(1), \langle, \rangle)$  sendo isométricas segue, do fato de  $\mathbb{H}^n$  ser uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante e igual a  $-1$  que  $B^n(1), \langle, \rangle$  também o é.

Mostraremos agora que as geodésicas de  $(B^n(1), \langle, \rangle)$  são interseções de retas euclidianas com  $B^n(1)$ .

**Proposição 1.23** *As geodésicas de  $(B^n(1), \langle, \rangle)$  são as cordas de  $S^n = \delta B^n(1)$  menos os extremos.*

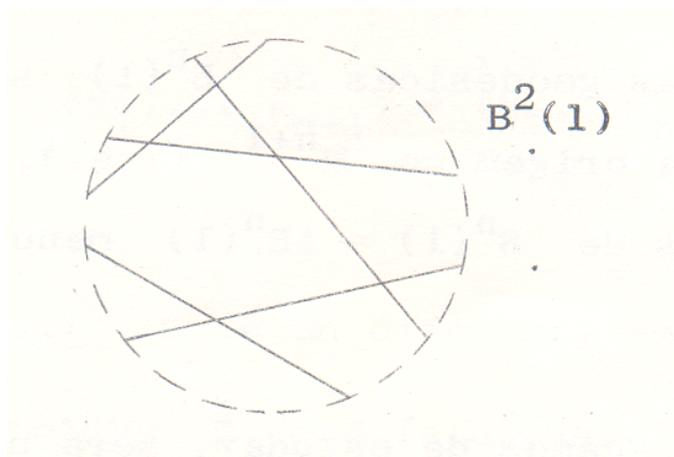


Figura 1.3: Geodésicas em  $B^n(1)$

**Demonstração:** Sabemos que as geodésicas de  $\mathbb{H}^n$  são  $\mathbb{H}^n \cap P$  onde  $P$  é um plano que passa pela origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n(1)$  sendo uma isometria, as geodésicas de  $B^n(1)$  são  $\phi(\gamma)$  onde  $\gamma$  é uma geodésica de  $\mathbb{H}^n$ .

Logo, as geodésicas de  $B^n(1)$  são  $\phi(\mathbb{H}^n \cap P)$  onde  $P$  é um plano que passa pela origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Queremos mostrar que  $\gamma = \phi(\mathbb{H}^n \cap P)$ .

Se  $p \in \gamma$ , a reta que passa por  $p$  e a origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$  está contida em  $P$ .

De fato,

$p \in \gamma = \phi(\mathbb{H}^n \cap P)$  implica que  $\phi^{-1}(p) \in \mathbb{H}^n \cap P$  logo, a reta que passa por  $\phi^{-1}$  e a origem de  $\mathbb{R}^{n+1}$  está contida em  $P$ . Mas por definição da  $\phi$ ,  $\phi^{-1}$  e  $p = \phi(\phi^{-1}(p))$  estão sobre a mesma reta.

Usando este fato, temos que  $\phi(p) \in P$  e portanto,  $\phi(p) \in \phi(\mathbb{H}^n \cap P)$ .

Isto é,

$$\phi(\mathbb{H}^n \cap P) \subseteq \phi(\mathbb{H}^n) \cap P \quad (I)$$

Por outro lado, se  $p \in \phi(\mathbb{H}^n) \cap P$  existe  $x \in \mathbb{H}^n$  tal que  $\phi(x) = p$ .

Queremos mostrar que  $x \in P$ ,  $x$  está na reta determinada pelos pontos 0 e  $p$  que estão no plano  $P$  logo,  $x \in P$  o que significa que  $x \in \mathbb{H}^n \cap P$  e portanto

$$\phi(x) \in \phi(\mathbb{H}^n \cap P) = \phi(\gamma)$$

Concluimos assim que  $\phi(\mathbb{H}^n) \cap P \subset \phi(\gamma)$ , e então  $\phi(\gamma) = \phi(\mathbb{H}^n) \cap P$ .

Provamos que as geodésicas de  $B^n(1)$  são  $B^n(1) \cap P$ , onde  $P$  é um plano passando pela origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$ , isto é, que as geodésicas de  $B^n(1)$  são as cordas de  $S^n(1) = \delta B^n(1)$  menos os extremos.

### 1.3

#### Modelo da Bola Unitária ( $B^n(2)$ ) e o Modelo do Semi-Espaço Superior ( $\mathbb{H}_+^n$ )

O Modelo que descreveremos agora é obtido através de uma projeção estereográfica, e conhecido na geometria hiperbólica como modelo de Poincaré. Neste modelo, as retas não são retas euclidianas, mas ele tem a vantagem sobre o modelo de Klein pois seus ângulos são medidos de modo euclidiano.

Chamemos de  $S^{n-} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_1^{n-1} x_i^2 + (x_{n+1} - 1)^2 = 1, x_{n+1} < 1\}$  o hemisfério sul da esfera de raio 1 e centro no ponto  $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $B^n(2) = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum x_i^2 < 4\}$  a bola de centro na origem e raio 2.

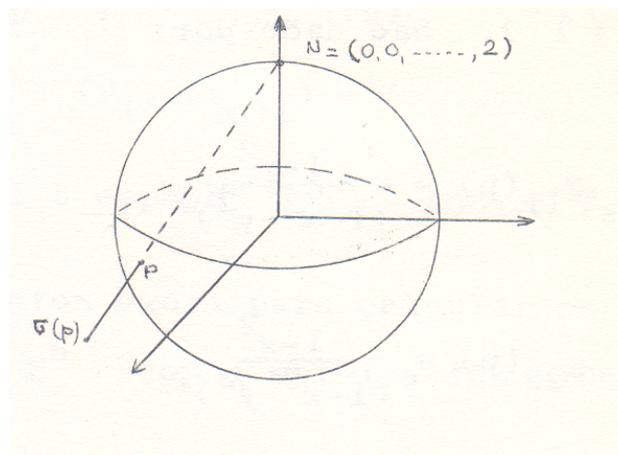


Figura 1.4: Modelo do Poincaré

Para cada  $p \in S^{n-}$  consideremos a reta  $r_p$  determinada por  $p$  e pelo polo norte  $N = (0, \dots, 0, 2)$  de  $S^n$

Definimos

$$\sigma : S^n \rightarrow B^n(2)$$

$$p \rightarrow \sigma(p)$$

onde  $\sigma(p)$  é o ponto de interseção da reta  $r_p$  com  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 1.24**  $\sigma : S^n \rightarrow B^n(2)$  é um difeomorfismo.

**Demonstração:** (1)  $\sigma(S^{n-}) = B^n(2)$

Seja  $p \in S^{n-}$ ,  $p = (p_1 \cdots p_{n+1})$ ,  $p_{n+1} < 0$  e  $\sum_1^n p_i^2 + (p_{n+1} - 1)^2 = 1$

A reta determinada por  $p$  e  $N$  é dada por

$$x_1 = \lambda p_1$$

...

$$x_n = \lambda p_n$$

$$x_{n+1} = 2 + \lambda(p_{n+1} - 2)$$

Pela definição de  $\sigma$ ,

$$\sigma(p) = r_p \cap \mathbb{R}^n$$

Fazendo  $x_{n+1} = 0$ , temos  $\lambda = \frac{2}{2 - p_{n+1}}$

e, neste caso

$$\sigma(p) = \left( \frac{2p_1}{2 - p_{n+1}}, \dots, \frac{2p_n}{2 - p_{n+1}} \right).$$

Queremos mostrar que  $\sigma(p) \in B^n(2)$ .

Elevando ao quadrado cada coordenada de  $\sigma(p)$  e somando chegamos a

$$\frac{4 \sum_i^n p_i^2}{(2 - p_{n+1})^2} = \frac{4(1 - (p_{n+1} - 1)^2)}{(2 - p_{n+1})^2} = \frac{4(1 - p_{n+1}^2 + 2p_{n+1} - 1)}{(2 - p_{n+1})^2} =$$

$$\frac{4p_{n+1}}{(2 - p_{n+1})}$$

Do fato de  $p \in S^{n-}$  temos,

$$0 < p_{n+1} < 1$$

o que implica que

$$2 - p_{n+1} > 1$$

logo,

$$0 < \frac{4p_{n+1}}{2 - p_{n+1}}$$

e portanto,  $\sigma(p) \in B^n(2)$  ou seja,  $\sigma(S^{n-}) \subset B^n(2)$ .

Por outro lado, se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  é um elemento de  $B^n(2)$ , suponhamos que existe  $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in S^{n-}$  tal que  $\sigma(p) = x$ .

$$\sigma(p) = \left( \frac{2p_1}{2 - p_{n+1}}, \dots, \frac{2p_n}{2 - p_{n+1}} \right) = (x_1, \dots, x_n)$$

Logo,

$$\frac{2p_1}{2 - p_{n+1}} = x_1$$

$$\frac{2p_n}{2 - p_{n+1}} = x_n$$

Elevando ao quadrado e somando temos,

$$\frac{4 \sum_1^n p_i^2}{(2 - p_{n+1})^2} = \sum_1^n x_i^2 \text{ (II)}$$

mas  $(p_1, \dots, p_{n+1}) \in S^{n-}$  implica que  $\sum_1^{n+1} p_i^2 = 1$  e portanto

$$p_{n+1}^2 = 1 - \sum_1^n p_i^2$$

Substituindo em (II) obtemos,

$$\frac{4p_{n+1}}{(2 - p_{n+1})^2} = \sum_1^n p_i^2$$

ou seja,

$$p_{n+1} = \frac{2 \sum_1^n x_i^2}{4 + \sum_1^n x_i^2}$$

Substituindo o valor de  $p_{n+1}$  em (I) para cada  $i = 1, \dots, n$ .

$$p_i = \frac{x_i(2 - p_{n+1})}{2} = \frac{x_i}{2} \left( 2 - \frac{2 \sum_1^n x_i^2}{4 + \sum_1^n x_i^2} \right) = \frac{4x_i}{4 + \sum_1^n x_i^2} = \frac{x_i}{1 + \frac{1}{4} \sum_1^n x_i^2}$$

Mostramos assim que para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in B^n(2)$  existe

$$p = \left( \frac{x_1}{1 + \frac{1}{4} \sum_1^n x_i^2}, \dots, \frac{x_n}{1 + \frac{1}{4} \sum_1^n x_i^2}, \frac{\frac{1}{2} \sum_1^n x_i^2}{1 + \frac{1}{4} \sum_1^n x_i^2} \right) \in S^{n-}$$

e tal que  $\sigma(p) = x$ .

Concluimos portanto que  $B^n(2) \subset \sigma(S^{n-})$  e deste fato segue que

$$B^n(2) = \sigma(S^{n-})$$

(2)  $\sigma$  é (1 - 1)

$$\sigma(p) = \sigma(q) \Rightarrow$$

$$\frac{2p_1}{2 - p_{n+1}} = \frac{2q_1}{2 - q_{n+1}}$$

...

$$\frac{2p_n}{2 - p_{n+1}} = \frac{2q_n}{2 - q_{n+1}}$$

ou seja,

$$\forall i = 1, \dots, n, \frac{p_i}{2 - p_{n+1}} = \frac{q_i}{2 - q_{n+1}}$$

Elevando ao quadrado e somando:  $\frac{1}{(2 - p_{n+1})^2} \sum_1^n p_i^2 =$

$$\frac{q_i}{(2 - q_{n+1})^2} \sum_1^n q_i^2.$$

Isto é,  $\frac{p_{n+1}(2 - p_{n+1})}{(2 - p_{n+1})^2} = \frac{q_{n+1}(2 - q_{n+1})}{(2 - q_{n+1})^2} \frac{p_{n+1}}{2 - p_{n+1}} = \frac{q_{n+1}}{2 - q_{n+1}}$

e, portanto,  $p_{n+1} = q_{n+1}$  e  $p_i = q_i, \forall i$ .

Mostramos assim, que  $\sigma$  é biunívoca e a diferenciabilidade de  $\sigma$  é

$$\sigma^{-1} : B^n(2) \rightarrow S^{n-}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \left( \frac{x_1}{1 + \frac{1}{4} \sum x_i^2}, \dots, \frac{x_n}{1 + \frac{1}{4} \sum x_i^2} \right)$$

é imediata.

Logo,  $\sigma$  é difeomorfismo.

### 1.3.1

#### Métrica e Geodésicas de $B^n(2)$

**Definição 1.25** Para cada  $p \in B^n(2)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^n = T_p B^n(2)$  definimos

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\sigma_p^{-1}(u), d\sigma_p^{-1}(v) \rangle'_{\sigma^{-1}(p)}$$

onde  $\langle, \rangle'$  é a métrica da semi-esfera  $S^{n-}$ .

Já sabemos que, sendo  $\sigma$  um difeomorfismo,  $\langle, \rangle$  define de fato uma métrica Riemanniana em  $B^n(2)$  em que  $\sigma : (S^{n-}, \langle, \rangle') \rightarrow (B^n(2), \langle, \rangle)$  é uma isometria.

Além disso  $(B^n(2), \langle, \rangle)$  é uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante igual a  $-1$ .

**Definição 1.26** Duas métricas  $\langle, \rangle$  e  $\langle\langle, \rangle\rangle$  em uma variedade diferenciável  $M$  são conformes se existe uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  positiva, tal que para todo  $p \in M$  e todo  $u, v \in T_pM$  se tenha

$$\langle u, v \rangle_p = f(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle_p$$

Observamos que a métrica de  $B^n(2)$  é conforme a métrica usual do  $\mathbb{R}^n$ .

Um outro fato importante é que as isometrias de  $B^n(2)$  são as aplicações conformes de  $B^n(2)$  sobre si mesma.

Este fato será provada na próxima seção. Para o caso  $n \geq 3$  não faremos aqui porque não nos será necessário neste trabalho. Para quem estiver interessado ele poderá ser encontrado na referência [SP].

Finalizando o nosso estudo deste exemplo, provaremos o seguinte teorema:

**Teorema 1.27** As geodésicas de  $(B^n(2), \langle, \rangle)$  são os semi-círculos e segmentos de reta perpendiculares a  $\gamma = \delta B^n(2)$

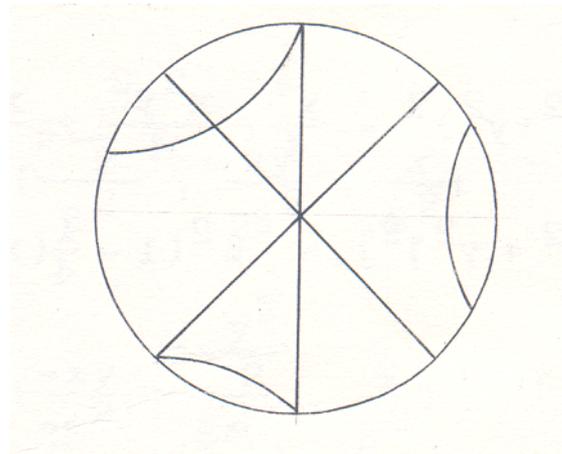


Figura 1.5: Geodésicas

**Demonstração:** Sabemos que a projeção estereográfica leva retas em círculos.

$\sigma : S^{n-} \rightarrow B^n(2)$  sendo uma isometria, as geodésicas de  $B^n(2)$  são as imagens das geodésicas de  $S^{n-}$  por  $\sigma$ .

Como as geodésicas de  $S^{n-}$  são semi-círculos perpendiculares a

$$\delta B^n(1) = \{(x_1, \dots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum x_i^2 = 1\}$$

Concluimos que as geodésicas de  $B^n(2)$  são semi-círculos e segmentos de reta perpendiculares a  $\bar{\sigma}(\delta B^n(1))$  onde  $\bar{\sigma}$  é uma extensão de  $\sigma$  a  $S^{n-} \cup \delta B^n(1)$ , extensão esta que pode ser feita naturalmente.

Afirmamos que  $\sigma(\delta B^n(1)) = \gamma$ .

De fato, se  $x = (x_1, \dots, x_n, 1) \in \delta B^n(1)$ ,  $\sum_1^n x_i^2 = 1$  e  $\sigma(x) = (2x_1, \dots, 2x_n)$  é tal que

$$\sum 4x_i^2 = 4 \sum x_i^2 = 4$$

Vemos assim que se  $x \in \delta B^n(1)$  então  $\sigma(x) \in \gamma$

Reciprocamente, se  $x = (x_1, \dots, x_n, 1) \in \gamma$   $\sum_1^{n+1} x_i^2 = 4$  e

$$\sigma^{-1}(x) = \left(\frac{x_1}{2}, \dots, \frac{x_n}{2}, 1\right)$$

é um elemento de  $\delta B^n(1)$  e portanto,  $\sigma(\delta B^n(1))$

Portanto as geodésicas de  $B^n(2)$  são segmentos de retas passando pela origem de  $\mathbb{R}^n$ , (por serem os únicos segmentos que intersectam  $\gamma$  ortogonalmente) ou semi-círculos perpendiculares a  $\gamma$ .

É fácil ver que qualquer segmento de reta ou semi-círculos nas condições acima é uma geodésica de  $B^n(2)$ . Basta considerarmos sua imagem por  $\sigma^{-1}$  que é uma geodésica de  $S^{n-1}$  e depois a imagem desta geodésica por  $\sigma$ .

Veremos que é possível munirmos o semi-espaço superior

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

de uma métrica Riemanniana, conforme a métrica usual do  $\mathbb{R}^n$  e tal que com esta métrica,  $\mathbb{H}^n$  é uma variedade completa com curvatura constante e igual a  $-1$  e suas isometrias são as aplicações conformes do espaço  $\mathbb{R}^n$ .

E lembremos que a métrica do exemplo que acabamos de estudar é conforme a métrica usual do  $\mathbb{R}^n$ . Nada é mais natural tentarmos introduzir em  $\mathbb{H}^n$  uma métrica, induzida pela métrica de  $B^n(2)$ , através de uma aplicação conforme do  $\mathbb{R}^n$ .

Para isso, consideremos o ponto  $N = (0, \dots, 0, -2) \in \mathbb{R}^n$  e a inversão

$$I : \mathbb{R}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$x \rightarrow \frac{x - N}{|x - N|^2}$$

Sabemos que  $I$  é uma aplicação conforme e resta-nos provar que  $I$  é um difeomorfismo.

**Proposição 1.28**  $I : \mathbb{R}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é um difeomorfismo.

**Demonstração:** É claro que  $I$  é diferencial e para mostrarmos a proposição basta provarmos que  $I$  tem uma inversa  $I^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{N\}$  que também é diferenciável.

Afirmamos que a aplicação diferenciável

$$I^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{N\}$$

$$x \rightarrow \frac{x}{|x|^2} + N$$

é a inversa que desejamos.

De fato, para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

$$I^{-1}(I(x)) = I^{-1} \left( \frac{x - N}{|x - N|^2} \right) = \frac{\frac{x - N}{|x - N|^2} + N}{\left| \frac{x - N}{|x - N|^2} + N \right|^2} = x - N + N = x.$$

Logo,  $I^{-1} \circ I = id_{\mathbb{R}^n}$

Reciprocamente, se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{N\}$ .

$$I(I^{-1}) = I \left( \frac{x}{|x|^2} + N \right) = \frac{\frac{x}{|x|^2} + N - N}{\left| \frac{x}{|x|^2} + N - N \right|^2} = x$$

Ou seja,

$$I \circ I^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$$

**Proposição 1.29**  $I(B^n(2)) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > \frac{1}{4}\}$ , onde

$$B^n(2) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum x_i^2 < 4\}$$

**Demonstração:** Se  $x \in B^n(2)$  então  $\sum x_i^2 < 4$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$I(x) = \left( \frac{x_1}{\sum x_i^2 + 4x_{n+4}}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\sum x_i^2 + 4x_{n+4}}, \frac{x_{n+2}}{\sum x_i^2 + 4x_{n+4}} \right)$$

Como  $x \in B^n(2)$

$$-2 < x_n < 2$$

o que implica que

$$0 < x_n + 2 < 4$$

e,

$$0 < \sum x_i^2 + 4x_n + 4 \leq x_n^2 + 4x_n + 4 = (x_n + 2)^2$$

Logo,  $\frac{x_n + 2}{\sum x_i^2 + 4x_n + 4} \geq \frac{x_n + 2}{(x_n + 2)^2} = \frac{1}{x_n + 2} > \frac{1}{4}$  o que demonstra a proposição.

Pelo visto nas proposições anteriores a aplicação conforme

$$f : B^n(2) \rightarrow \mathbb{H}^n$$

$$x \rightarrow I(x) - \frac{1}{4}e_n$$

onde  $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo e sua inversa é

$$f^{-1} : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n(2)$$

$$x \rightarrow I^{-1}(x + \frac{1}{4}e_n)$$

$f$  sendo um difeomorfismo, a métrica de  $B^n(2)$  induz uma métrica em  $\mathbb{H}^n$  de modo que  $f$  seja uma isometria e portanto  $\mathbb{H}^n$  com essa métrica é o exemplo que queríamos encontrar.

### 1.3.2

#### Métrica e Geodésica do Semi-espço superior

Um outro fato importante já mencionado, é que as isometrias de  $\mathbb{H}^n$  são aplicações conformes de  $\mathbb{H}^n$  sobre si mesmo.

Observamos que a isometria entre  $\mathbb{H}^n$  e  $B^n(2)$  é uma aplicação conforme e portanto este resultado sendo verdadeiro para uma variedade é verdadeiro para outra.

Aqui demonstraremos apenas o caso  $n = 2$  que é tratado de modo diferente dos outros casos ( $n \geq 3$ ) por ser o único caso que utilizaremos neste trabalho. A demonstração para o caso  $n \geq 3$  pode ser encontrado em [SP].

**Proposição 1.30** *Seja  $(x, y) = z = x + iy, i = \sqrt{-1}$  a transformação linear  $z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^2$ .*

**Demonstração:** Seja

$$T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$z = (x, y) \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

- (1) Se  $z \in \mathbb{H}^2$  então  $T(z) \in \mathbb{H}^2$

$z = (x, y) \in \mathbb{H}^2$  implica que  $y > 0$

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(ax + b) + iay}{(cx + d) + icy} = \frac{[(ax + b)(cx + d) + acy^2] + (ad - bc)yi}{(cx + d)^2 + c^2y^2}$$

Logo,  $T(z) = z' = x' + iy'$  onde

$$y' = \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2} > 0$$

o que prova que  $T(z) \in \mathbb{H}^2$ .

E, portanto,  $z' \in \mathbb{H}^2$

2. (2)  $T$  é difeomorfismo

Sabemos que  $T$  é diferenciável pois é a restrição a  $\mathbb{H}^2$  da aplicação diferenciável

$$f : C \setminus \left\{ \left(-\frac{d}{c}, 0\right) \right\} \rightarrow C$$

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

e que tem uma inversa

$$T^{-1} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$z \rightarrow \frac{dz - b}{-cz + a}$$

De fato,

$$T(T^{-1}(z)) = T\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right) = \frac{a\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right) + b}{c\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right) + d}$$

$$= \frac{adz - ab - bcz + ab}{cdz - cb - cdz + ad} = z$$

$$T^{-1}(T(z)) = T^{-1}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{d\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) - b}{-c\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) + a} = z$$

Logo,  $T(T^{-1}(z)) = T^{-1}(T(z)) = z \forall z \in \mathbb{H}^2$  e portanto  $T^{-1}$  é inversa de  $T$ .

Para mostrarmos que  $T$  é uma isometria resta-nos provar que ela preserva a 1ª forma fundamental de  $\mathbb{H}^2$ .

Para todo  $z \in \mathbb{H}^2$ ,  $z = (x, y)$ ,  $y > 0$  a primeira forma fundamental  $ds^2$  é dada por

$$ds^s = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$$

onde  $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle_z$ ,  $\{e_1, e_2\}$  base canônica de  $\mathbb{R}^2 = T_z\mathbb{H}^2$ .

Escrevendo como  $z = x + iy$  temos que  $\bar{z} = x - iy$  e  $z - \bar{z} = 2iy$

$$dz = dx + idy \quad d\bar{z} = dx - idy$$

Logo,

$$dzd\bar{z} = dx^2 + dy^2 = ds^2$$

por outro,  $(z - \bar{z})^2 = -4y^2$

e portanto,

$$ds^2 = -\frac{4dzd\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}$$

Seja  $\tilde{z} = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $\bar{\tilde{z}} = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{dT}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

logo,

$$d\tilde{z} = \frac{dz}{(cz + d)^2}$$

e

$$d\bar{\tilde{z}} = \frac{d\bar{z}}{(c\bar{z} + d)^2}$$

$$\tilde{z} - \bar{\tilde{z}} = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = \frac{z - \bar{z}}{(cz + d)(c\bar{z} + d)}$$

$$(d\tilde{s})^2 = -\frac{4d\tilde{z}d\bar{\tilde{z}}}{(\tilde{z} - \bar{\tilde{z}})^2} = \frac{-4dzd\bar{z}}{\frac{(cz + d)^2(c\bar{z} + d)^2}{(z - \bar{z})^2}} = \frac{-4dzd\bar{z}}{(cz + d)^2(c\bar{z} + d)^2} = ds^2$$

Assim,  $T$  preserva a 1ª forma fundamental.

Sabemos que toda aplicação conforme do espaço  $\mathbb{H}^2$  é uma isometria deste espaço e portanto as isometrias de  $\mathbb{H}^2$  são as aplicações conformes deste espaço nele mesmo.

Provaremos que as geodésicas de  $\mathbb{H}^n$  são semi-retas e semicírculos perpendiculares ao hiperplano

$$\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}.$$

Para provarmos isto usaremos o seguinte resultado da geometria Riemanniana e cuja demonstração pode ser encontrada em [CA].

**Lema 1.31** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e sejam  $(x_1, \dots, x_n)$  coordenadas locais em  $M$ . Seja  $x_k = x_k(t)$  onde  $t$  é um parâmetro arbitrário, uma curva dada em  $M$  pelas equações:*

$$x_k'' + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k x_i' x_j' = \alpha x_k', \quad (x_i' = \frac{dx_i}{dt})$$

onde  $\alpha = \alpha(t, x_1, \dots, x_n)$  e,

$\Gamma_{ij}^k, i, j, k = 1, \dots, n$  são os símbolos de Christoffel a variedade  $M$ . Então  $x_k(t)$  é uma geodésica.

**Proposição 1.32** *Seja  $R$  o hiperplano  $x_n = 0$  e  $P$  um plano perpendicular a  $R$ . Então existe uma isometria  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  tal que  $f(P) = x_1 x_n$ .*

**Demonstração:**  $R$  sendo o hiperplano  $x_n = 0$  segue que  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$  é normal a  $R$ .  $P$  é um plano perpendicular a  $R$ , logo  $e_n$  é paralelo a  $P$ .

Seja  $v \in P$  tal que  $\{e_n, v\}$  é base ortonormal de  $P$ ,  $v$  é perpendicular a  $e_n$  portanto,  $v \in R$ . Sejam  $w_1, \dots, w_{n-1}$  vetores de  $R$  tal  $\{v, w_1, \dots, w_{n-1}, e_n\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$e_i \rightarrow v$$

$$e_i \rightarrow w_i$$

$$e_n \rightarrow e_n$$

é uma isometria de  $\mathbb{R}^n$  portanto uma aplicação conforme.

Sabemos que as isometrias de  $\mathbb{H}^n$  são as aplicações conformes de  $\mathbb{H}^n$  sobre si mesmos. Para mostrarmos que  $f$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^n$  basta portanto observarmos que  $f(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n$ , pois  $f$  deixa invariante a  $n$ -ésima coordenada de cada ponto do  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = x_1 v + \sum_{i=2}^{n-1} x_i w_i + x_n e_n$ .

$v, w_i \in \mathbb{R}, \forall i \Rightarrow v = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0), w_i = (w_i^1, \dots, w_i^{n-1}, 0)$

Logo, a  $n$ -ésima coordenada de  $f(x)$  é  $x_n$ .

**Teorema 1.33** *As retas perpendiculares ao hiperplano  $x_n = 0$  e os círculos de  $\mathbb{H}^n$  cujos planos que os contém são perpendiculares ao hiperplano  $x_n = 0$  e cujos centros estão neste hiperplano são geodésicas de  $\mathbb{H}^n$ .*

Pela proposição anterior, basta considerarmos retas e círculos no plano  $x_1 x_n$ . Dividiremos a demonstração em dois casos:

1º caso: Seja  $r$  uma reta no plano  $x_1x_n$  perpendicular ao hiperplano  $x_n = 0$ .

Como  $r$  é perpendicular ao hiperplano  $x_n = 0$  seu vetor direção é  $v_r = e_n = (0, 0, \dots, 1)$  Seja  $x_0$  ponto onde  $r$  intersecta o hiperplano  $x_n = 0, x_0 = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ .

Uma parametrização de  $r$  pode ser dada por

$$t \rightarrow x_0 + te_n, t > 0.$$

A aplicação

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$p \rightarrow x_0 + p$$

é uma isometria de  $\mathbb{R}^n$  que deixa a última coordenada invariante, logo, é uma isometria de  $\mathbb{H}^n$ .

Seja  $\gamma$  uma parametrização do eixo  $x_n$  definida abaixo:

$$\gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$$

$$t \rightarrow (0, \dots, 0, t)$$

Temos então

$$\frac{d\gamma}{dt} = (0, \dots, 0, 1)$$

e portanto,

$$\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = \frac{1}{t}$$

Para provarmos que  $\gamma$  é uma geodésica de  $\mathbb{H}^n$  basta mostrarmos que para toda curva diferenciável  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$ ,  $a > 0$  com  $c(a) = \gamma(a)$ ,  $c(b) = \gamma(b)$  temos que o comprimento

$$|\ell(\gamma)|_a^b \leq |\ell(c)|_a^b$$

Seja portanto,  $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  uma parametrização de  $C$ .

$$\ell(c) = \int_a^b \left| \frac{dc}{dt} \right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt \geq \int_a^b \left| \frac{dx_n}{dt} \right| dt \geq \int_a^b \frac{dx_n}{x_n} = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ell(\gamma)$$

2º caso: Seja  $c$  um semicírculo de centro no hiperplano  $x_n = 0$ , contido no plano  $x_1x_n$ .

A equação de um tal círculo é dada por

$$x_n^2 + (x_1 - c)^2 = r^2$$

$$x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$$

onde  $c \in \mathbb{R}$   $r \in \mathbb{R}$ .

Fazendo  $x_1 = t$  temos  $x_n(t) = \sqrt{r^2 - (t - c)^2}$

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - (t - c)^2}} - 2(t - c) = -\frac{(t - c)}{\sqrt{r^2 - (t - c)^2}} = -\frac{(t - c)}{x_n}$$

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\frac{1}{x_n} + \frac{(t - c)}{x_n^2} \frac{dx_n}{dt} = \frac{1}{x_n} - \frac{(t - c)^2}{x_n^3}$$

Um cálculo simples mostra que os símbolos de Christoffel da variedade  $\mathbb{H}^n$  são

$\Gamma_{ij}^k = 0, i, j, k$  distintos  $\Gamma_{ij}^i = f_j, \Gamma_{ii}^j = f_j, \Gamma_{ij}^j = -f_i, \Gamma_{ii}^j = -f_i$ , onde  $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  e  $f(x_1, \dots, x_n) = \ln x_n$

Queremos mostrar que

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\sum_{ij} \Gamma_{ij}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} + \alpha \frac{dx_n}{dt}$$

onde,

$$\alpha = \alpha(t, x_1, \dots, x_n)$$

Se  $i \neq 1, n, \frac{dx_i}{dt} = 0, \frac{dx_1}{dt} = 0$  e se  $i, j, k$  distintos  $\Gamma_{ij}^k = 0$

Logo, basta provarmos que

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\{\Gamma_{11}^n \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_{n1}^n \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_n}{dt} + \Gamma_{1n}^n \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_n}{dt} + \Gamma_{nn}^n (\frac{dx_n}{dt})^2\} + \alpha \frac{dx_n}{dt}$$

$$\Gamma_{11}^n = f_n = \frac{\partial x}{\partial x_n} \ln x_n = \frac{1}{x_n}$$

$$\Gamma_{n1}^n = -f_1 = 0$$

$$\Gamma_{1n}^n = -f_1 = \frac{\partial x}{\partial x_n} \ln x_n = 0$$

$$\Gamma_{nn}^n = -f_n = -\frac{1}{x_n}.$$

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n} \left(\frac{t - c}{x_n}\right)^2$$

$$-\sum_{ij} \Gamma_{ij}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = -\frac{1}{x_n} - \frac{(t - c)^2}{x_n^3} + \frac{2(t - c)^2}{x_n^3}$$

$$= \frac{d^2x_n}{dt^2} - \frac{2(t-c)}{x_n^2} \frac{dx_n}{dt} = \frac{d^2x_n}{dt^2} - \alpha \frac{dx_n}{dt}.$$

onde  $\alpha = \frac{2(t-c)}{x_n^2}$

Logo,  $\frac{d^2x_n}{x_n^2} = -\sum_{ij} \Gamma_{ij}^m \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} + \alpha \frac{dx_n}{dt}.$

Sabemos que se  $k \neq 1, n$   $\frac{dx_n}{dt} = 0$   $\frac{dx_1}{dt} = 1$  e portanto,

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0$$

Logo,

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = \sum \sum \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = \sum_i \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \sum_i \Gamma_{in}^k \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_n}{dt} =$$

$$\Gamma_{11}^k \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \Gamma_{n1}^k \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_n}{dt} + \Gamma_{1n}^k \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_n}{dt} + \Gamma_{nn}^k \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2$$

Se  $k \neq 1, n$

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = f_k + f_k \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 = 0 \text{ pois } f_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \ln x_n = 0$$

e  $\frac{d^2x_k}{dt^2} = -\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} + \alpha \frac{dx_k}{dt}$

Se  $k = 1$

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^1 \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = \Gamma_{ij}^1 + \Gamma_{n1}^1 \frac{dx_n}{dt} + \Gamma_{1n}^1 \frac{dx_n}{dt} + \Gamma_{nn}^1 \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2$$

$$= f_1 - f_n \frac{dx_n}{dt} - f_n \frac{dx_n}{dt} + f_1 \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2$$

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \ln x_n = 0 \quad f_n = \frac{\partial}{\partial x_n} \ln x_n = \frac{1}{x_n}$$

logo,  $\sum_{ij} \Gamma_{ij}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_j}{dt} = \frac{2(t-c)}{x_n}$  e portanto

$$-\sum_{ij} \Gamma_{ij}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_j}{dt} + \alpha \frac{dx_1}{dt} = -\frac{2(t-c)}{x_n} + \frac{2(t-c)}{x_n} = 0 = \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

isto é,  $\forall k = 1 \dots n$

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} = -\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} + \alpha \frac{dx_k}{dt}$$

Pelo lema, segue que  $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0, \sqrt{r^2 - (t - c)^2})$  é uma geodésica de  $\mathbb{H}^n$

Observemos que para cada ponto  $p \in \mathbb{H}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$  existe em plano perpendicular ao hiperplano  $x_n = 0$  tal que  $p \in P$  e  $v$  é paralelo ao plano  $P$ . Além disso, em  $P$  é sempre possível traçar uma reta perpendicular a este hiperplano passando por  $p$  com direção  $v$  ou um semicírculo perpendicular a este hiperplano, com centro nele, passando por  $p$  cuja tangente em  $p$  é dado pelo vetor  $v$ .

Pela unicidade das geodésicas passando por um ponto dado e com velocidade neste ponto, concluímos que as geodésicas de  $\mathbb{H}^n$  são exatamente dadas pelo teorema que acabamos de ver.