



**Hellen Angélica da Silva Almeida**

## **Grupos de Coxeter hiperbólicos**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro  
Setembro de 2009



**Hellen Angélica da Silva Almeida**

## **Grupos de Coxeter hiperbólicos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Carlos Frederico Palmeira**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Paul A. Schweitzer**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Guilherme Augusto de La Roque Leal**

Departamento de Matemática — UFRJ

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de Setembro de 2009

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Hellen Angélica da Silva Almeida**

Mestrado: Matemática Pura — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC–Rio (2007–2009).

Graduação: Licenciatura em Matemática — Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ (2002–2006).

Ficha Catalográfica

Almeida, Hellen A. S.

Grupos de Coxeter hiperbólicos / Hellen Angélica da Silva Almeida; orientador: Nicolau Corção Saldanha. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2009.

v., 63 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Álgebra. 3. Grupo. 4. Coxeter. 5. Hiperbólico.

I. Saldanha, Nicolau C.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Deus e Diogo

“Aquele que é poderoso para fazer muito mais abundantemente além daquilo que pedimos ou pensamos, segundo o poder que em nós opera, a esse glória na igreja, por Jesus Cristo, em todas as gerações, para todo o sempre. Amém” (Efésios 3.19-20).glória e honra para todo sempre!

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Deus, pois a Ele eu devo tudo o que tenho, tudo o que sou e o que vier a ser. Obrigada Senhor pois nunca me desamparaste.

Ao meu amado esposo Diogo, presente de Deus em minha vida, ofereço a você este trabalho, sem você esta realização não seria possível, te amo.

Aos meus pais, irmãos e avós que sempre estiveram ao meu lado ao longo desta caminhada.

Ao meu querido orientador Nicolau, pela disponibilidade em ensinar, e pela paciência, muito obrigada professor, aprendi muito com o senhor.

Aos meus amigos, em especial, a Camilla, Marcela e Aline. Vivemos muita coisa juntas e muitas ainda estão por vir, amo vocês.

Aos meus professores que colaboraram para que estivesse aqui, destes, destaco os meus amigos Marisa, Guilherme e Adilson.

Obrigado por fazerem parte da minha vida, amo vocês.

Aos e que conquistei ao longo do mestrado, não posso deixar de citar Camilla, obrigada amiga.

## Resumo

Almeida, Hellen A. S.; Saldanha, Nicolau C.. **Grupos de Coxeter hiperbólicos**. Rio de Janeiro, 2009. 63p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Grupos de Coxeter ou de reflexões são importantes no estudo de inúmeras áreas da matemática, incluindo grupos e álgebras de Lie. Nesta dissertação apresentaremos a teoria básica de grupos de reflexões e a classificação dos grupos hiperbólicos, i.e., daqueles que agem no espaço hiperbólico tendo como domínio fundamental um politopo compacto.

## Palavras-chave

Álgebra. Grupo. Coxeter. Hiperbólico.

## Abstract

Almeida, Hellen A. S.; Saldanha, Nicolau C.. **Hyperbolic Coxeter groups**. Rio de Janeiro, 2009. 63p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Groups of Coxeter or of reflections they are important in the study of countless areas of the mathematics, including groups and algebras of Lie. In this dissertation we will present the basic theory of groups of reflections and the classification of the hyperbolic groups, this is of those that act in the hyperbolic space tends as fundamental domain a compact politopo.

## Keywords

Algebra. groups. Coxeter. Hyperbolic.

# Sumário

1	Geometria Hiperbólica	10
1.1	O Modelo do Hiperbolóide	10
1.1.1	Métrica Riemaniana do $\mathbb{H}^n$	17
1.1.2	Curvatura e Geodésica de $\mathbb{H}^n$	19
1.2	Modelo Projetivo de Klein	24
1.2.1	Métrica e Geodésica em $B^n(1)$	28
1.3	Modelo da Bola Unitária ( $B^n(2)$ ) e o Modelo do Semi-Espaço Superior ( $\mathbb{H}_+^n$ )	29
1.3.1	Métrica e Geodésicas de $B^n(2)$	32
1.3.2	Métrica e Geodésica do Semi-espço superior	36
2	Grupos de Coxeter	44
2.0.3	Sistema de Coxeter	44
2.0.4	Representação geométrica de $W$	45
2.0.5	Raízes positivas e negativas	46
2.0.6	Raízes e Reflexão	48
2.0.7	Sistema de Coxeter irredutível	49
2.0.8	Grupos de Coxeter Finitos	52
2.0.9	Grupo de Coxeter de posto 3	54
3	Grupos de Coxeter Hiperbólicos	56
3.0.10	Lista dos grupos de Coxeter hiperbólicos	60
	Referências Bibliográficas	61



## Lista de figuras

1.1	Modelo do Hiperbolóide	16
1.2	Modelo projetivo de Klein	25
1.3	Geodésicas em $B^n(1)$	28
1.4	Modelo do Poincaré	29
1.5	Geodésicas	33
3.1	Modelo de Poincaré	56
3.2	Modelo de Klein	56