

## 2

### Medida de Incertezas: Fundamentos

#### 2.1

##### Introdução

O resultado de um processo de medição fornece uma determinada informação que usualmente é chamada de conhecimento. A fim de quantificar quão completo é este conhecimento, devem ser realizadas avaliações críticas acerca da confiabilidade da qualidade desta informação, baseadas em normas e critérios de análise e propagação de erros e incertezas do processo de medição.

O comportamento ou desempenho do processo de medição somente pode ser avaliado a partir da informação disponível, que por sua vez é associada a influências de incertezas. Assim, esta análise requer a noção de fundamentos teóricos para o tratamento de vários tipos de incertezas.

A necessidade de manipular incertezas na resolução de problemas tem sido objeto de vários estudos [AYYUB, 2006], [FERRERO, 2007], [SALICONE, 2007] e [PERTILE, 2008]. Nestes, indica-se que ferramentas tradicionais, tais como a teoria de probabilidade, são insuficientes para manipular todas as formas de incertezas. Neste cenário, novas ferramentas têm sido propostas para a análise de incertezas, tais como funções de credibilidade, funções de possibilidades e teoria intervalar, que são capazes de lidar também com conhecimento incompleto.

Nesta seção são apresentados sucintamente fundamentos teóricos sobre medidas de incertezas, tais como teoria de erros, teoria de incertezas, teoria da evidência e teoria de possibilidades. O objetivo final é identificar ou selecionar uma teoria apropriada para a análise das incertezas e tratamento do conhecimento incompleto da informação.

#### 2.2

##### Teoria de Erros

A teoria de erros foi proposta por K.F. Gauss, no início do século XIX, e foi a primeira tentativa de quantificar quão completa é a informação fornecida pelo resultado de uma medição. Na teoria de erros, considera-se que qualquer grandeza física tem um valor verdadeiro, e a variabilidade experimental do resultado da medição é explicado devido à

existência de erros. Assim, define-se o erro relativo de uma grandeza de medida  $x$  como [SALICONE, 2007]:

$$\varepsilon = \frac{x_m - x_t}{x_t} \quad (2.1)$$

em que  $x_m$  é o valor da grandeza medida  $x$  e  $x_t$  é o valor verdadeiro.

Nesta teoria, os erros são divididos em duas categorias: erros aleatórios (*random*) e erros sistemáticos. Erros aleatórios ocorrem com diferentes valores e sinais para cada medição (da mesma grandeza e com as mesmas condições operacionais) e surgem em função das variações estocásticas do processo de medição. Os erros aleatórios de medição não podem ser compensados pela aplicação de uma correção, mas seus efeitos podem ser reduzidos aumentando o número de observações. Deste modo, dado um conjunto de  $n$  medições de uma grandeza  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (realizadas nas mesmas condições), elas podem ser consideradas  $n$  variáveis estatísticas de uma mesma população, em que o valor médio e o desvio padrão podem ser estimados com respeito ao valor verdadeiro  $x_t$ , definidos por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.2)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.3)$$

em que  $\bar{x}$  é o valor médio e  $\sigma$  é o desvio padrão.

O valor médio dos valores medidos pode ser considerado como a melhor estimativa da grandeza  $x$ . De fato, com um número suficiente de medições,  $n \rightarrow \infty$ , o valor médio  $\bar{x}$  estará muito próximo do valor verdadeiro  $x_t$  e o valor médio do erro será aproximadamente zero.

Erros sistemáticos sempre ocorrem com o mesmo valor e sinal quando a medição de uma grandeza é repetida, seguindo o mesmo procedimento, com os mesmos instrumentos de medição, e sob as mesmas condições. Do ponto de vista teórico, ao contrário dos erros aleatórios, os erros sistemáticos podem ser compensados e seus efeitos podem ser eliminados, desde que sejam totalmente conhecidos. Entretanto, na prática, seus efeitos podem ser geralmente reduzidos, mas não eliminados completamente [SALICONE, 2007].

## 2.3

### Teoria de Incertezas

Ao final do século XX, a teoria de erros foi substituída pela teoria de incertezas, em virtude do antigo conceito de erros ser um conceito ideal e impossível de ser avaliado, uma vez que o valor verdadeiro não é conhecido. Deste modo, a mudança de conceitos de erros para

incertezas, foi descrita com a publicação do “Guia de expressão e incertezas de medidas” (GUM – *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*) [GUM, 1993]. Neste guia, o conceito de incerteza é definido como um parâmetro, associado ao resultado da medição, que caracteriza a dispersão dos valores medidos e que reflete a falta de conhecimento do valor verdadeiro da medição.

De acordo com o GUM, devem-se considerar, para a avaliação da incerteza somente os efeitos aleatórios, isto é, considera-se que todos os efeitos sistemáticos tenham sido identificados e compensados significativamente. Deste modo, a incerteza pode ser avaliada de maneira estatística, determinando-se o valor do desvio padrão de uma função de densidade de probabilidade [GUM, 1993] e [SALICONE, 2007].

Uma maneira de se determinar a função de densidade de probabilidade é via um procedimento experimental; entretanto, este procedimento requer tempo e nem sempre pode ser realizado, principalmente por razões práticas e econômicas. Por outro lado, os parâmetros da função de densidade de probabilidade podem ser determinados a partir do conhecimento a priori: certificados de calibração, experiência do operador, banco de dados de medições passadas, etc. As duas formas de determinação da função de densidade de probabilidade são igualmente confiáveis e são ambas consideradas pelo guia GUM. Neste, elas são categorizadas segundo o tipo de avaliação das incertezas em tipo *A* e tipo *B*, respectivamente.

Para processos em que a grandeza de interesse é obtida de forma indireta, isto é, a partir das medições de outras grandezas obtidas diretamente, a incerteza associada com o resultado da medição final é dada pela combinação dos valores das incertezas individuais.

Para exemplificar este procedimento, considera-se a medição indireta da grandeza  $y$ , a partir de  $n$  medições diretas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , em que a relação matemática entre elas é definida por  $x = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Se as medições são correlacionadas, a incerteza combinada,  $u(y)$ , do resultado da medição de  $y$  é dada por [GUM, 1993]:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} \quad (2.4)$$

em que:  $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$  é a estimativa da covariância associada com  $x_i$  e  $x_j$ . O grau de correlação entre  $x_i$  e  $x_j$  está caracterizado pelo coeficiente de correlação, dado por:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad (2.5)$$

em que:  $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ , e  $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq 1$ .

Se as estimações  $x_i$  e  $x_j$  são independentes  $r(x_i, x_j) = 0$ , isto é, se as medições  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são não correlacionadas, a incerteza combinada,  $u(y)$ , do resultado da medição de  $y$  é dada por:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} \quad (2.6)$$

em que:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  é o coeficiente de sensibilidade e  $u(x_i)$  é a incerteza associado à quantidade  $x_i$ .

No caso da estimação total da incerteza, torna-se necessário tratar cada fonte de incertezas separadamente, a fim de se obter a parcela de contribuição de cada uma delas. Cada uma das contribuições à incerteza total é denominada componente de incerteza  $(\partial f / \partial x_i)^2$ , que deve ser multiplicada pelo valor da própria incerteza elevada ao quadrado. Assim, com base nesta análise, pode-se determinar como cada componente de incerteza contribui para o resultado da incerteza total. A componente de maior incerteza é aquela cuja contribuição é a maior no cálculo de  $u(y)$  [HALL, 2005].

O guia GUM também estabelece que se deve fornecer um intervalo de confiança dentro do qual podem ser atribuídos os valores para a quantidade medida, com um nível de confiança requerido [GUM, 1993]. O intervalo de confiança de um resultado de medida  $y$  é geralmente dado como um intervalo centrado em  $y$  e definido por  $(y \pm U)$ , como ilustrado na Figura 2.1, e pode ser determinado se a distribuição de probabilidades for conhecida, e uma vez que o nível de confiança requerido tenha sido definido [SALICONE, 2007].

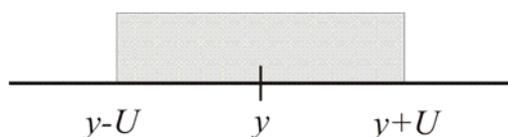


Figura 2.1. Intervalo de confiança.

O semi-comprimento  $U$  do intervalo de confiança, que é chamado de incerteza expandida [GUM, 1993], é geralmente dada como um múltiplo da incerteza padrão:

$$U = k_p u(y) \quad (2.7)$$

em que  $k_p$  é o fator de cobertura e  $u(y)$  é a incerteza padrão (desvio padrão).

Isto significa que o intervalo de confiança é determinado a partir da definição do valor de  $k_p$ . De fato, o fator de multiplicação  $k_p$  depende estritamente da distribuição de probabilidade e do nível de confiança requerido. Por exemplo, para uma distribuição de probabilidade Gaussiana, para cada valor do fator de cobertura define-se um intervalo de

confiança, que corresponde a um nível de confiança determinado, como ilustrado na Figura 2.2 [SALICONE, 2007].

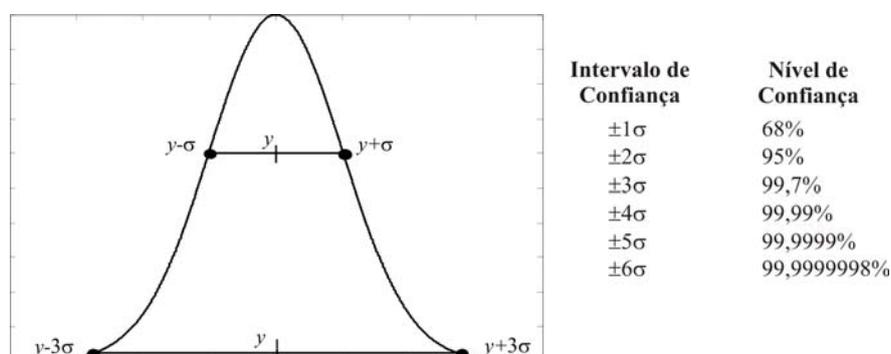


Figura 2.2. Intervalos de confiança associados a níveis de confiança requeridos.

## 2.4

### Teoria da Evidência

A estratégia baseada no conceito de incertezas foi a primeira tentativa para quantificar a falta de informação originada por efeitos aleatórios sem a necessidade de fazer referência ao valor verdadeiro da medição. Entretanto, nessa estratégia considera-se que as contribuições de incertezas sejam somente do tipo aleatória, isto é, quando presentes as contribuições sistemáticas, estas devem ser totalmente compensadas e eliminadas, pois as incertezas das contribuições sistemáticas não se propagam de forma probabilística [SALICONE, 2007].

Em muitas aplicações práticas de instrumentação e medição, as contribuições sistemáticas são identificadas, mas o seu valor exato não é conhecido. A fim de representar a influência das contribuições sistemáticas, utilizam-se intervalos de confiança, em que o valor desta contribuição está incluído, embora o valor em si seja desconhecido.

Quando não é possível definir se as contribuições de incertezas são do tipo aleatórias ou sistemáticas, devido à falta do conhecimento da informação, tem-se a *Ignorância Parcial*. Neste caso, as contribuições de incertezas aleatórias e sistemáticas são representadas por meio de intervalos de confiança, como ilustrado na Figura 2.3, em que o intervalo interno representa as incertezas sistemáticas e os intervalos laterais externos representam as incertezas aleatórias [SALICONE, 2007].

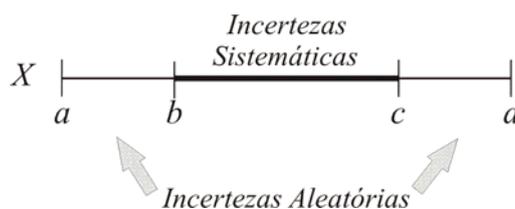


Figura 2.3. Caso de Ignorância Parcial: Representação das incertezas aleatórias e sistemáticas num intervalo de confiança.

As considerações acima justificam a necessidade de uma nova teoria que permita representar de uma maneira mais geral os casos de ignorância parcial, total e seus casos particulares: *Teoria da Evidência*, introduzida por Shafer em 1970 como uma re-interpretação da Inferência Estatística de Dempster [SALICONE, 2007]. Nesta teoria, a informação fornecida por uma fonte de conhecimento a respeito do valor real de uma variável  $x$ , definida em um universo de discurso  $X$ , é codificada sob a forma de um *corpo de evidência* sob  $X$ . Deste modo, a teoria da evidência se inicia com a idéia familiar de se utilizar um número real entre zero e um para indicar o grau de credibilidade para uma proposição sob a evidência disponível.

Por vários séculos, a idéia de quantificar o grau de credibilidade por números tem sido realizada por meio do conceito de probabilidade. Entretanto, a teoria da evidência define que os graus numéricos de credibilidade e de probabilidade têm seus próprios papéis e obedecem a regras diferentes que podem ser derivadas como casos particulares de uma estrutura teórica mais geral [AYYUB, 2006], [DO COUTTO, 2007] e [SALICONE, 2007].

Na teoria da evidência, define-se a função de credibilidade  $Bel : P(X) \rightarrow [0,1]$ , que representa o grau com que um conjunto de medidas sustenta ou evidencia uma dada hipótese. A função de credibilidade satisfaz às seguintes condições:

$$Bel(\phi) = 0 \quad (2.8)$$

$$Bel(X) = 1 \quad (2.9)$$

$$\text{Se } A_1 \text{ e } A_2 \subset X \text{ então } Bel(A_1 \cup A_2) \geq Bel(A_1) + Bel(A_2) - Bel(A_1 \cap A_2) \quad (2.10)$$

e, se  $A_1 \cap A_2 = \phi$ ,  $Bel(A_1 \cup A_2) \geq Bel(A_1) + Bel(A_2)$ .

Além disso, se  $A_1 = A$  e  $A_2 = \bar{A}$  (isto é,  $\bar{A} \cap A = \phi$  e  $\bar{A} \cup A = X$ ):

$$Bel(A) + Bel(\bar{A}) \leq 1 \quad (2.11)$$

A equação (2.11) define a regra da aditividade para a teoria da evidência e pode ser exemplificada da seguinte maneira: para uma determinada proposição definida por  $A$ , com suficiente evidência da credibilidade desta proposição, pode-se considerar  $Bel(A) = 0,7$  e  $Bel(\bar{A}) = 0,2$ . Por outro lado, com pouca evidência sob a afirmação da proposição, pode-se ter  $Bel(A) = 0,2$  e  $Bel(\bar{A}) = 0,1$ . Quando não existe nenhuma evidência da credibilidade da

afirmação ou negação da proposição, tem-se  $Bel(A) = 0$  e  $Bel(\bar{A}) = 0$ . Portanto, a teoria da evidência permite representar a falta do conhecimento sob uma determinada informação, sendo esta situação chamada de ignorância total.

Define-se, também, uma subclasse de funções de credibilidade que obedecem à regra da aditividade. Esta particular função de credibilidade é chamada de *Função de Credibilidade Bayesiana*, derivado da Teoria Bayesiana, que segue as três regras básicas da teoria de probabilidades:

$$Bel(\phi) = 0 \quad (2.12)$$

$$Bel(X) = 1 \quad (2.13)$$

$$\text{Se } A_1 \cap A_2 = \phi, \text{ então } Bel(A_1 \cup A_2) = Bel(A_1) + Bel(A_2) \quad (2.14)$$

A equação (2.14) define a regra da aditividade para a Teoria Bayesiana (ou Teoria de Probabilidade), cuja característica fundamental indica que, para um valor de credibilidade da proposição  $A_1$ , a credibilidade da proposição  $A_2$  concorda com a negação da proposição  $A_1$ , isto é, se mantemos a crença numa proposição, temos que estar de acordo com a crença da negação. Portanto, esta característica faz com que as funções de credibilidade Bayesianas não sejam úteis para a representação da ignorância total, já que não é possível representar a falta do conhecimento da informação ou a falta de credibilidade.

A teoria de evidência, de um modo geral, é capaz de representar a ignorância parcial ou total, que é uma situação frequente na área de instrumentação e medição. Por exemplo, para uma determinada medição, se a informação de distribuição de probabilidade é disponível, os resultados da medição estão contidos dentro de intervalos de confiança definidos para níveis de confiança determinados. Entretanto, se nenhuma informação sobre a distribuição de probabilidades é disponível, está-se em uma situação de ignorância parcial.

## 2.5

### Teoria de Possibilidades

Na teoria de possibilidades define-se uma função de possibilidade em que, de acordo com uma determinada evidência, um conjunto de proposições pertence ou não a um conjunto particular  $E$  (tal que  $E \subseteq X$ ) [AYYUB, 2006]. Assim, a função de possibilidade baseada na evidência acerca de  $E$  é dada por:

$$Pos_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \bar{E} \end{cases} \quad (2.15)$$

para todo  $x \in X$ .

Especificamente na área de instrumentação, utiliza-se esta teoria para representar e avaliar incertezas compatíveis com o guia de expressão de incertezas (GUM) para construir um subconjunto, interpretado como uma distribuição de possibilidade, que representa a incerteza em medições.

A distribuição de possibilidade pode ser vista como uma função de pertinência *fuzzy* de funções de possibilidade da variável  $x$ , empilhadas de acordo com o valor do nível de confiança, denominados  $\alpha$ -cuts ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). Para o propósito de decomposição em  $\alpha$ -cuts, o eixo  $\mu$  de uma função de pertinência é subdividido em  $m$  segmentos, igualmente espaçados por  $\Delta\mu = 1/m$ , e  $(m+1)$  níveis de pertinência  $\mu_j = j * \Delta\mu$  ( $j = 0, \dots, m$ ). Na Figura 2.4 apresenta-se um exemplo de um número *fuzzy* triangular decomposto em  $m = 5$  níveis [HANSSE, 1999].

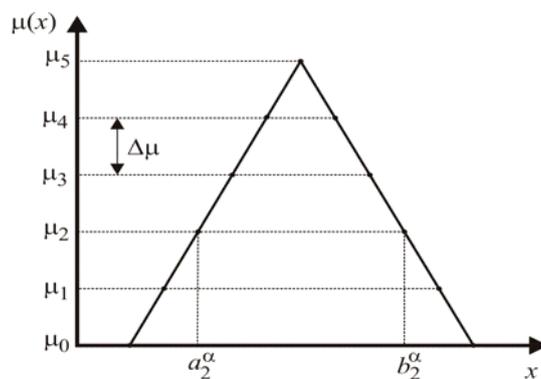


Figura 2.4. Decomposição de um número *fuzzy* em  $m = 5$  níveis de pertinência.

A partir desta decomposição, a operação  $\alpha$ -cut pode ser aplicada a números *fuzzy*, em que o  $\alpha$ -cut para um conjunto *fuzzy*  $X$  é o conjunto  $X^{(\alpha)}$  definido por:

$$X^{(\alpha)} = \{x \in \mathfrak{R} \mid \mu_X(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.16)$$

A notação  $\alpha$ -cut comumente utilizada para a forma de números *fuzzy*  $L$ - $R$  é dada por:

$$X^{(\alpha)} = [X_L^{(\alpha)}, X_R^{(\alpha)}] \quad (2.17)$$

em que  $X_L^{(\alpha)}$  e  $X_R^{(\alpha)}$  são os limites inferior e superior de cada intervalo  $X^{(\alpha)}$  que correspondem a intervalos específicos de possibilidade.

As operações com números *fuzzy* seguem as mesmas propriedades das operações intervalares [MOORE, 1995]. A diferença é que, com os números *fuzzy*, as operações são realizadas para cada nível de pertinência ( $\alpha$ -cut).

## 2.6

### Variáveis *Fuzzy* em Instrumentação e Medição

Na Teoria da Evidência as variáveis aleatórias são consideradas variáveis naturais da teoria de probabilidade, descritas por funções de densidade de probabilidade  $p(x)$ , que podem ser utilmente transformadas para distribuições de possibilidade. As variáveis *fuzzy* podem ser consideradas como variáveis naturais da teoria de possibilidades descritas por suas funções de distribuição possibilística  $r(x)$ . Deste modo, de uma forma geral, a análise de incertezas de contribuições aleatórias e sistemáticas não compensadas ou de ignorância total estão baseadas na teoria de possibilidade e na matemática intervalar [SALICONE, 2007] [PERTILE, 2008].

Na Figura 2.5 mostra-se uma variável *random-fuzzy* em que, para cada valor de  $\alpha$ , tem-se um intervalo de confiança  $[a_\alpha, d_\alpha]$  associado a um nível de confiança  $1-\alpha$ . Este intervalo de confiança permite descrever as contribuições de incertezas aleatórias e sistemáticas, em que os efeitos sistemáticos ou a ignorância parcial são representados através do intervalo interno  $[b_\alpha, c_\alpha]$ , enquanto que contribuições aleatórias são representadas através dos intervalos externos laterais  $[a_\alpha, b_\alpha]$  e  $[c_\alpha, d_\alpha]$ . Por esta razão, variáveis *random-fuzzy* (RFV) podem representar apropriadamente os efeitos aleatórios e sistemáticos das incertezas [SALICONE, 2007] e [PERTILE, 2008].

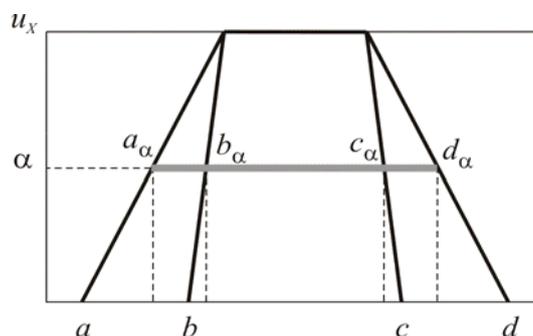


Figura 2.5. Variável *random-fuzzy* (RFV).

#### 2.6.1

##### Procedimento para construir uma RFV

A fim de construir uma RFV, as contribuições das incertezas aleatórias de uma variável (representadas por uma distribuição de probabilidades) são transformadas para uma distribuição de possibilidades. Da mesma forma, as contribuições das incertezas sistemáticas ou de ignorância parcial são representadas por distribuições de possibilidades. Estas duas representações são reunidas para construir uma RFV final. Para tal, o seguinte procedimento pode ser adotado [SALICONE, 2007] e [PERTILE, 2008].

- a) Inicialmente, identificam-se as contribuições sistemáticas não compensadas ou de ignorância parcial que podem ser atribuídas a um valor exato ou a um intervalo de confiança definido. Se a informação disponível permite identificar um intervalo de confiança  $[b_\alpha, c_\alpha]$ , então pode-se definir uma função de pertinência com intervalos constantes como ilustrado na Figura 2.6(a). Caso a informação disponível permita identificar intervalos de confiança variáveis, então a contribuição do efeito sistemático é representada como ilustrado na Figura 2.6(b).

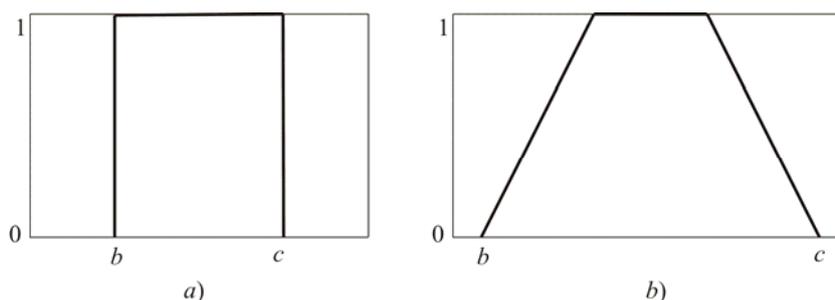


Figura 2.6. Variável *fuzzy*: a) intervalos de confiança iguais; b) intervalos de confiança variáveis.

- b) Contribuições aleatórias para a incerteza da variável são representadas por uma função de densidade de probabilidade (PDF), que pode ser determinada experimentalmente (Tipo A) ou a partir de informações a priori de especificações, experiência do especialista ou de banco de dados (Tipo B).
- c) Em seguida, a PDF da contribuição aleatória é transformada em uma função de distribuição de possibilidade, como ilustrado nas Figuras 2.7(a) e 2.7(b). O resultado desta transformação determina um conjunto de intervalos  $[L_\alpha, R_\alpha]$ , associado com nível de confiança  $1-\alpha$ .
- d) Finalmente, para construir uma RFV completa da forma  $[[a_\alpha, b_\alpha], [c_\alpha, d_\alpha]]$ , combinam-se os intervalos  $[b_\alpha, c_\alpha]$  encontrados no passo (a) com os intervalos  $[L_\alpha, R_\alpha]$  encontrados no passo (c), para cada nível de confiança  $1-\alpha$ , como ilustrado na Figura 2.7(d). Para este propósito, os valores de  $a_\alpha$  e  $d_\alpha$  são determinados por:

$$a_\alpha = b_\alpha - (P - L_\alpha) \quad (2.18)$$

$$d_\alpha = c_\alpha - (L_\alpha - P) \quad (2.19)$$

Seguindo o procedimento descrito anteriormente, é possível representar a informação disponível através de uma RFV, considerando que as incertezas aleatórias, representadas por uma PDF, são transformadas para uma distribuição de possibilidade.

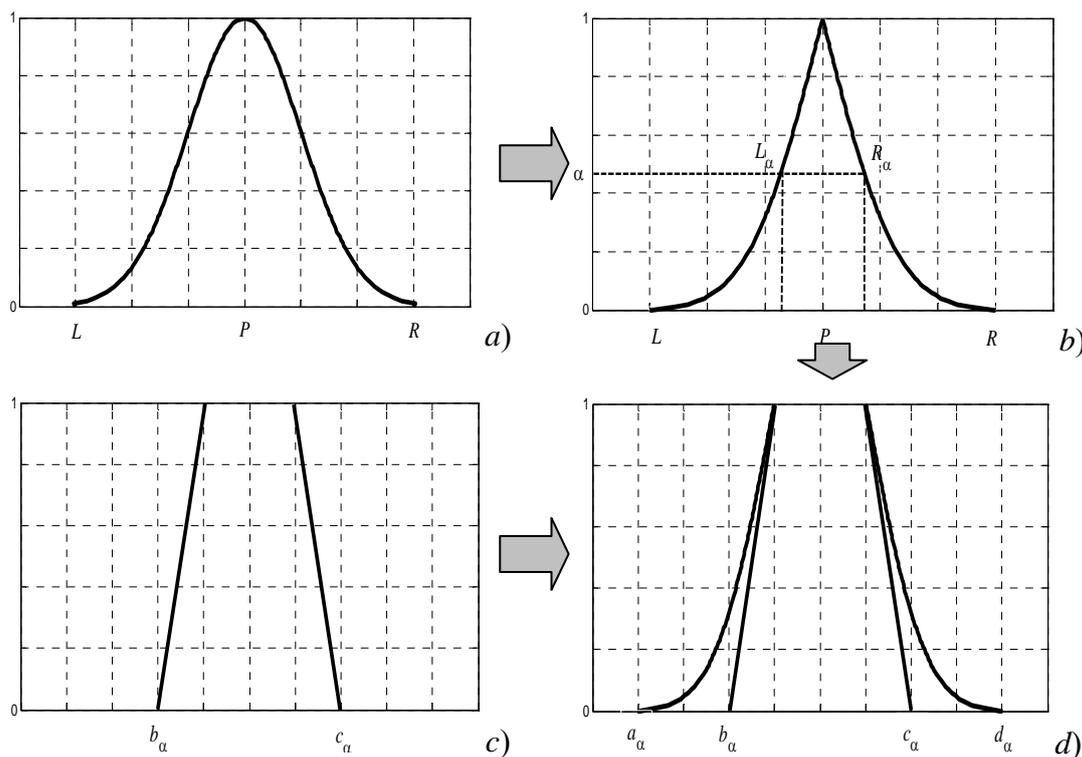


Figura 2.7. Construção de uma RFV: a) PDF de uma contribuição aleatória; b) Função de distribuição de possibilidades de contribuições aleatórias; c) Intervalos de confiança associados com efeitos sistemáticos ou caso de ignorância parcial; d) RFV completa.

## 2.6.2

### Transformação de Probabilidade para Possibilidade

De forma a construir a RFV considerando-se as contribuições das incertezas aleatórias e sistemáticas ou de ignorância parcial, no passo (c) da seção 2.6.1 requer-se realizar a transformação de uma função de densidade de probabilidade (PDF) para uma função de distribuição. Do ponto de vista da metrologia, a função de distribuição de probabilidades e a função de distribuição de possibilidades contêm as mesmas informações. A transformação é baseada no conceito de intervalos de confiança e consiste nos seguintes passos [SALICONE, 2007] e [PERTILE, 2008]:

- Considera-se uma função de distribuição de probabilidade, com suporte  $[L, R]$  e com valor máximo da função, dado por  $x = P$ , como ilustrado na Figura 2.8(a).
- A integral da função densidade de probabilidade segue a seguinte condição:

$$\int_L^R PDF_X(x) dx = 1 \quad (2.20)$$

- c) Definem-se  $M$  pontos igualmente espaçados  $L_1, \dots, L_M$  em  $[L, P]$  com  $L < L_1 < L_2 < \dots < L_M < P$  e  $M$  pontos igualmente espaçados  $R_M, \dots, R_1$  em  $[P, R]$  com  $P < R_M < R_{M-1} < \dots < R_1 < R$ , como ilustrado na Figura 2.8(a).
- d) Para cada valor de  $k=1, \dots, M$ , calcula-se o nível de confiança  $1-\alpha_k$  associado ao intervalo de confiança  $[L_k, R_k]$  dado por:

$$\int_{L_k}^{R_k} PDF_X(x) dx = 1 - \alpha_k \quad (2.21)$$

Desta maneira, são obtidos  $M+2$  intervalos  $[L, R]$ ,  $[L_1, R_1]$ ,  $[L_2, R_2]$ , ...,  $[L_M, R_M]$ ,  $[P, P]$  associados a  $M+2$  níveis de confiança  $1, 1-\alpha_1, 1-\alpha_2, \dots, 1-\alpha_M, 0$  com  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_M$ , como ilustrado na Figura 2.8(b).

- e) A partir de um processo de interpolação, é possível encontrar intervalos  $[L_\alpha, R_\alpha]$  associados aos valores desejados de  $\alpha$ .

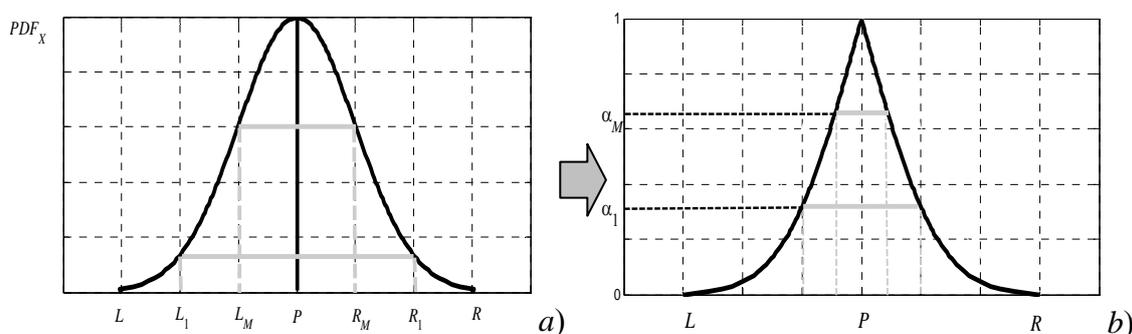


Figura 2.8. Transformação: a) Função de densidade de probabilidade; b) Função de distribuição de Possibilidades.

## 2.7

### Conclusão

As principais conclusões deste capítulo são:

- A teoria da evidência permite representar de um modo geral os diferentes tipos de contribuições de incertezas: aleatórias e sistemáticas ou de ignorância total.
- A teoria de conjuntos *fuzzy* pode ser utilizada para operar com medidas de incertezas de uma maneira compatível com o guia de expressão e incertezas (GUM). A abordagem *fuzzy* consiste em representar as medições e suas incertezas por variáveis *random-fuzzy* (RFV).