

**Martin Pablo Santacatterina**

**Classificação de Álgebras de Lie semi-simples  
reais via Diagramas de Satake**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em  
Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção  
do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro  
Setembro 2017

**Martin Pablo Santacatterina**

## **Classificação de Álgebras de Lie semi-simples reais via Diagramas de Satake**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Orientador

Departamento de Matemática

**Profa. Alessia Mandini**

Departamento de Matematica - PUC-Rio

**Prof. David Torres**

Departamento de Matematica - PUC-Rio

**Prof. Marcos Craizer**

Departamento de Matematica - PUC-Rio

**Prof. Pedro Zühlke**

IME - USP

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador do Centro Técnico Científico  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 12 de setembro de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Martin Pablo Santacatterina**

Possui graduação pelo ISFD Y T. No. 24 Bernardo Houssay de Buenos Aires, Argentina.

#### Ficha Catalográfica

Santacatterina, Martin P.

Classificação de Álgebras de Lie semi-simples reais via Diagramas de Satake/ Martin Pablo Santacatterina; orientador: Nicolau Corção Saldanha. — Rio de Janeiro: PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2017.

v., 210 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Dissertação 2. Álgebra de Lie. 3. Subálgebra de Cartan. 4. Sistema de Raízes. 5. Diagrama de Dynkin. 6. Diagrama de Satake. 7. Grupo de Weyl. 8. Forma real compacta. 9. Decomposição de Cartan. 10. Abeliano maximal. I. Corção Saldanha, Nicolau. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 620.11

A Alicia Luchini, minha nona

## Agradecimentos

Tem muitas pessoas que me ajudaram a concretizar este sonho, e sem elas não teria conseguido superar os obstáculos epistemológicos, emocionais e materiais com que me deparei. Entre outras coisas ainda me lembro meu primeiro semestre na PUC, morando na longínqua ilha de Paqueta e ficando refém dos bizarros horários da barca.

Agradeço a Deus, pelos boas pessoas que colocou em meu caminho.

Agradeço a minha família, por estar perto mesmo estando geograficamente longe.

Agradeço a meu orientador Nicolau Saldanha, pela paciência e a bondade.

Agradeço a os membros da banca pela leitura.

Agradeço a todos os professores do departamento de matemática que teve a sorte de conhecer nas aulas ou nos corredores do departamento, pois foi um privilegio poder me adentrar um pouquinho mais no belo mundo da matemática com sua ajuda: Lorenzo Diaz, Luca Scala, David Martinez, Boyam Sirakov, Paul Schweitzer, Carlos Tomei e, especialmente, Marcos Craizer, quem sempre me ajudo com uma palavra e uma dica desde que cheguei a PUC.

Agradeço a Yunelsy Alvarez, Dania Gonzalez, Hugo Oliveira, João Schilittler, Renato De Paula, Rafael Sanabria, Orlando Fonseca, Elizabeth Velasco, Vitor Goulart e Emilia Alves pela força e por compartilhar minhas alegrias e tristezas.

Agradeço a meus grandes amigos Jorge Chaloub e Raquel Lima, pela hospitalidade, conversas e ajudas varias nesta caminhada.

Agradeço meus amigos Rouhollah Ebrahimi e Arash Azadeh pelas tardes no jardim na PUC, bebendo chá persa e escutando o doce som do setar.

Agradeço meus amigos da vida Walter Godoy e Mauro Insaurrealde, por ter me ajudado em momentos muito escuros da minha vida. Sempre lembro de vocês!

Agradeço a meu amigo Omar Horna, pelas intermináveis conversas existenciais noturnas subindo ao Parque da Cidade.

Agradeço ao pessoal da secretaria da Matemática, especialmente a Creuza, por tomar conta das burocracias.

Agradeço a Dona Maria pela sua presença e pelo seu espírito solidário.

Agradeço a instituição PUC-Rio por ter me permitido estudar e conhecer pessoas de diferentes cantos do planeta.

Agradeço à CAPES pela ajuda financeira.

Agradeço a Marianna Poyares, por me permitir conhecer o Brasil e pelos belos momentos compartilhados.

## Resumo

Santacatterina, Martin P.; Corção Saldanha, Nicolau. **Classificação de Álgebras de Lie semi-simples reais via Diagramas de Satake**. Rio de Janeiro, 2017. 210p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Iniciamos o trabalho com uma revisão da classificação de álgebras de Lie semi-simples sobre corpo algebricamente fechado de característica zero a través dos Diagramas de Dynkin. Posteriormente estudamos  $\sigma$ -sistemas normais e classificamos eles a través de diagramas de Satake. Finalmente estudamos a estrutura das formas reais de álgebras de Lie semi-simples complexas, explicitando a conexão com os diagramas de Satake e fornecendo assim uma classificação das mesmas.

## Palavras-chave

Álgebra de Lie; Subálgebra de Cartan; Sistema de Raízes; Diagrama de Dynkin; Diagrama de Satake; Grupo de Weyl; Forma Real Compacta; Decomposição de Cartan; Abeliano Maximal.

## Abstract

Santacatterina, Martin P.; Corção Saldanha, Nicolau (Advisor). **Classification of real semi-simple Lie Algebras by means of Satake Diagrams**. Rio de Janeiro, 2017. 210p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We begin the work with a review of the classification of semisimple Lie algebras over an algebraically field of characteristic zero through the Dynkin Diagrams. Subsequently we study  $\sigma$ -normal systems and classify them through Satake diagrams. Finally we study the structure of the real forms of complex semi-simple Lie algebras, explaining the connection with the Satake diagrams and thus providing a classification of them.

## Keywords

Lie Algebra; Cartan Subalgebra; Root System ; Dynkin Diagram; Satake Diagram; Weyl Group; Compact Real Form; Cartan Decomposition; Maximal Abelian Subalgebra.

# Sumário

1	Introdução	11
2	Preliminares	14
2.1	Conceitos básicos e Definições	14
2.2	Teoremas de Engel e Lie	19
2.3	Critérios de Cartan	24
2.4	Derivações e elementos semi-simples	28
3	O teorema de Weyl	32
3.1	Um pouco de Cohomologia de Álgebras de Lie	32
3.2	Lema de Whitehead	36
3.3	Teorema de Weyl	37
4	Subálgebras de Cartan	39
4.1	Subálgebras de Cartan e elementos regulares	39
4.2	Conjugação de subálgebras de Cartan	44
5	Estrutura de Álgebras de Lie semisimples	48
5.1	Representações de $sl(2, \mathbb{C})$	48
5.2	Decomposição de Álgebras de Lie semi-simples	54
5.3	Sistema simples de raízes	63
5.4	Matrizes de Cartan	67
6	Diagramas de Dynkin	72
6.1	Diagramas de Dynkin	72
6.2	Classificação dos diagramas	74
6.3	Realizações dos diagramas	85
6.4	Álgebras isomorfas	86
6.5	Construção das álgebra de Lie clássicas	95
7	Grupos de Weyl	110
7.1	Sistema de raízes	110
7.2	Câmaras de Weyl	113
8	Diagramas de Satake	119
8.1	$\rho$ – sistemas	119
8.2	Diagramas de Satake e alguns lemas técnicos	127
8.3	Classificação dos diagramas de Satake normais	132
9	Álgebras de Lie semi-simples reais	154
9.1	Formas reais e álgebras simples	154
9.2	Formais reais compactas	162
9.3	Decomposição de Cartan	170
9.4	Abelianos maximais	173



10	Classificação de álgebras de Lie semi-simples reais	178
10.1	Automorfismos involutivos de formas compactas	178
10.2	$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ como $\sigma$ -sistema normal	184
10.3	Relação entre Diagramas de Satake e Formas reais	187
10.4	Diagramas admissíveis e não admissíveis	191
	Referências bibliográficas	210

*Symmetry, as wide or narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection.*

**Hermann Weyl**

# 1

## Introdução

O grande algebrista Nathan Jacobson recomendava o estudo das álgebras de Lie imediatamente depois dos cursos de álgebra linear e estruturas algébricas. Por um lado pela beleza de seus resultados e sua estrutura, e por outro pela enorme quantidade de contactos com outros ramos da matemática (teoria de grupos, geometria diferencial, equações diferenciais). De fato os resultados pioneiros da teoria estabelecem a relação entre grupos de Lie e álgebras de Lie através da aplicação exponencial, a relação entre elementos de natureza geométrica e elementos de natureza algébrica. Esta dissertação considera apenas as álgebras de Lie, pois tem como objetivo obter uma classificação das álgebras de Lie semi-simples reais. Eventualmente mencionaremos algumas ligações com a teoria de grupos de Lie, para o leitor interessado. Antes de estudar as álgebras de Lie reais revisitamos a classificação das álgebras de Lie semi-simples sobre corpos algebricamente fechados, com particular interesse nas álgebras de Lie semi-simples complexas.

No segundo capítulo enunciamos uma série de definições e resultados básicos da teoria, tais como, entre outros: ideais, subálgebras, representações, álgebras solúveis e nilpotentes, álgebras simples e semi-simples, o conceito de derivação, os teoremas de Engel e Lie, os famosos critérios de Cartan e a definição de elemento semi-simples. Uma referência amena é [1].

O terceiro capítulo consiste numa demonstração do teorema de Weyl a partir do primeiro lema de Whitehead sobre cohomologias de álgebras de Lie. Este teorema faz parte do folclore da teoria e vai ser uma peça decisiva no estudo da estrutura das álgebras de Lie semi-simples. A referência para este capítulo é [2].

No quarto capítulo introduzimos o conceito de subálgebra de Cartan, estudamos sua relação com os chamados elementos regulares e mostramos que as subálgebras de Cartan são conjugadas.

No capítulo quinto estudamos as representações irredutíveis de  $sl(2, \mathbb{K})$  e mostramos que toda a estrutura das álgebras de Lie semi-simples é dada pelos

colchetes de Lie entre os espaços associados a os pesos(raízes) da representação adjunta. As raízes são completamente determinadas pelos valores que assume a chamada forma de Killing nelas. Mostramos que a forma de Killing restrita a uma subálgebra de Cartan é um produto interno. Assim toda a estrutura das álgebras de Lie semi-simples é dada pelas relações mútuas entre um número finito de elementos de um espaço vetorial com produto interno. Definimos formalmente o conceito de sistema simples de raízes associado a uma matriz de Cartan, e o conceito de matriz de Cartan, uma matriz que tem como entradas os chamados números de Killing, e que condensa toda a informação da estrutura das álgebras estudadas. Este material pode ser achado em [3], [4] ou [5] entre outras referências.

O capítulo sexto está dedicado a os estudo dos diagramas de Dynkin, grafos que contem a mesmas informações que a matriz de Cartan. Realizamos a classificação dos diagramas de Dynkin e provamos rigorosamente a consistência desta classificação, e dizer, garantimos que um diagrama é determinado a partir de uma álgebra semi-simples independentemente da escolha da subálgebra de Cartan e do sistema simples de raízes. também mostramos rigorosamente que se duas álgebras tem o mesmo diagrama então são isomorfas. Finalmente indicamos a construção da cada álgebra de Lie simples associada a um diagrama de Dynkin conexo.

No capítulo sete estudamos os grupos de Weyl, que proporcionam uma visão panorâmica dos sistemas de raízes. Introduzimos os importantes conceitos de câmaras de Weyl e involução principal, que serão de utilidade posteriormente. Mostramos a transitividade do grupo de Weyl nos sistemas de raízes, o que garante que os sistemas definidos por sistemas simples diferentes tem diagramas de Dynkin iguais.

O capítulo oito estudamos os chamados  $\sigma$ -sistemas normais e, logo de uma série de lemas preliminares muito técnicos, obtemos uma classificação dos mesmos utilizando os grafos conhecidos como diagramas de Satake. Uma ótima referência para o tratamento de  $\sigma$ -sistemas é [6].

No capítulo nove estudamos as álgebras de Lie semi-simples sobre o corpo dos reais. A ideia inicial consiste em considerar uma álgebra complexa  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  e, a partir dela as chamadas formas reais, isto é, álgebras de Lie reais cujas complexificadas são  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . Definimos o conceito central de forma real compacta e mostramos sua unicidade a menos de um automorfismo de  $\mathfrak{g}$ . Mostramos que a descrição de uma forma real não compacta é feita a partir da decomposição que se obtém ao intersecar ela com a forma real compacta (a chamada decomposição de Cartan). Introduzimos a noção de involução de Cartan. Estas ideias e resultados podem ser encontrados em [6] e também em [7], onde o autor

estabelece uma relação entre as álgebras de Lie semi-simples reais e espaços riemannianos simétricos.

No ultimo capítulo finalmente classificamos as álgebras de Lie semi-simples reais. Cada forma real tem associada um automorfismo involutivo da forma real compacta (a involução de Cartan). Os possíveis automorfismos são determinados por restrições a subálgebras de Cartan da forma compacta. Mostramos que essas restrições dão origem a  $\sigma$ -sistemas normais, já estudados no capítulo oito e classificados mediante os diagramas de Satake. Finalmente enunciamos um critério para determinar quais diagramas de Satake correspondem a formas reais e quais não. Neste capítulo seguimos bem de perto a exposição feita em [6].

## 2

### Preliminares

#### 2.1

##### Conceitos básicos e Definições

**Definição 2.1.** Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  munido de um produto (colchete)

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades:

1. bilinearidade;
2. anti-simétrico, isto é,  $[X, X] = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  (o que implica  $[X, Y] = -[Y, X]$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$  e é equivalente se o corpo de escalares não é de característica dois);
3. satisfaz a chamada identidade de Jacobi, isto é, para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  vale

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

Esta igualdade pode ser reescrita alternativamente de uma das duas formas

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]],$$

ou

$$[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]].$$

**Definição 2.2.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de Lie é um subespaço vetorial  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  que é fechado pelo colchete de Lie, e dizer,  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$  se  $X, Y \in \mathfrak{h}$ .

**Definição 2.3.** Uma transformação linear  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  (com  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  álgebras de Lie) e um homomorfismo se  $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y]$ . Se diz que é um isomorfismo se for um homomorfismo inversível e se diz que é um automorfismo se é um

isomorfismo e  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ . Se diz que as álgebras  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  são isomorfas se existe um isomorfismo  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ .

**Definição 2.4.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e seja  $\{X_1, \dots, X_n\}$  uma base de  $\mathfrak{g}$ . Tomando dois elementos desta base, o colchete entre eles pode ser escrito como combinação linear

$$[X_i, Y_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$$

Os coeficientes  $c_{ij}^k$  são denominados de *constantes de estrutura* da álgebra em relação à base dada.

O seguinte teorema vai ser utilizado mais de uma vez no presente trabalho para determinar a existência de isomorfismo entre duas álgebras de Lie.

**Teorema 2.1.** *Duas álgebras com as mesmas constantes de estrutura são isomorfas.*

*Demonstração.* Seja  $\mathfrak{g}$  álgebra de Lie com base  $\{X_1, \dots, X_n\}$  e seja  $\mathfrak{h}$  outra álgebra de Lie com base  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  e com as mesmas constantes de estrutura. Seja então a transformação linear  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  tal que  $\psi(X_i) = Y_i$ . Então temos

$$\psi([X, Y]) = \sum_{i,j} a^i b^j c_{ij}^k \psi(X_k) = \sum_{i,j} a^i b^j [Y_i, Y_j] = [\psi(X), \psi(Y)],$$

onde  $a^i$  e  $b^j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  são as coordenadas de  $X$  e  $Y$  respetivamente em relação a base de  $\mathfrak{g}$ . Isto mostra que se  $\psi$  é um isomorfismo.  $\square$

**Definição 2.5.** Um subespaço  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$  é um ideal se para todo  $Y \in \mathfrak{g}$  e para todo  $X \in \mathfrak{h}$  vale que  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ .

**Definição 2.6.** Seja  $V$  um espaço vetorial e  $gl(V)$  a álgebra de Lie das transformações lineares em  $V$ . Seja também  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que  $V$ ). Uma *representação* de  $\mathfrak{g}$  em  $V$  é um homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V).$$

Uma representação é dita fiel se  $Ker(\rho) = 0$ .

**Definição 2.7.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie sobre um corpo  $F$ . Um módulo de  $\mathfrak{g}$ , ou, alternativamente, um  $\mathfrak{g}$ -módulo, é um espaços vetorial finito  $V$  junto com uma aplicação

$$\begin{aligned} g : \quad V &\rightarrow V \\ (X, v) &\mapsto Xv \end{aligned}$$

satisfazendo as seguinte condições

- (i)  $(\lambda X + \mu Y)V = \lambda(Xv) + \mu(Yv)$ ,
- (ii)  $X(\lambda v + \mu w) = \lambda(Xv) + \mu(Xw)$ ,
- (iii)  $[X, Y]v = X(Yv) - Y(Xv)$ , para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $v, w \in V$  e  $\lambda, \mu \in F$ .

Módulos e representações são duas formas diferentes de descrever a mesma estrutura. De fato dada uma representação  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$  temos um  $\mathfrak{g}$ -módulo definindo

$$Xv := \rho(X)(v)$$

para todo  $X \in \mathfrak{g}$  e para todo  $v \in V$ . Reciprocamente se  $V$  é um  $\mathfrak{g}$ -módulo, podemos interpretar  $V$  como uma representação

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$$

de  $\mathfrak{g}$ , definindo  $\rho(X)$  pelo mapa linear  $v \rightarrow Xv$ . Feita essa observação, no presente trabalho usaremos indistintamente as linguagens de módulos e de representações.

**Definição 2.8.** Para um elemento  $X$  na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , considere a transformação linear

$$ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

definida por  $ad(X)(Y) = [X, Y]$ . Então a aplicação

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\rightarrow gl(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto ad(X) \end{aligned}$$

define uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{g}$  denominada de *representação adjunta*. O fato de  $ad$  ser linear provem da bilinearidade do colchete. Já a propriedade de homomorfismo de  $ad$  é equivalente a identidade de Jacobi.

**Definição 2.9.** Seja  $\rho$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ . Um subespaço  $W$  é dito *invariante* se para todo  $X \in \mathfrak{g}$  vale que  $\rho(X)W \subset W$ .

**Definição 2.10.** Uma representação  $\rho$  de  $\mathfrak{g}$  em  $V$  é dita *irredutível* se os únicos subespaços invariantes de  $\rho$  são os triviais  $0$  e  $V$ . A representação é dita *completamente redutível* se  $V$  se decompõe como

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

com cada  $V_i$  invariante e tal que a restrição de  $\rho$  a  $V_i$  é irredutível.



**Proposição 2.2.** *Seja  $\rho$  uma representação de dimensão finita de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ . Se todo subespaço invariante admite um complementar invariante, e dizer, se para todo  $U \subset V$  invariante, existe  $U_1$  também invariante tal que*

$$V = U \oplus U_1,$$

*então  $V$  é completamente redutível.*

*Demonstração.* Seja  $U$  subespaço invariante não trivial, então temos que existe  $U_1$  complementar invariante tal que  $V = U \oplus U_1$ . Se tanto  $U$  quanto  $U_1$  forem irredutíveis esta soma constitui a decomposição desejada. Suponhamos então que um deles, por exemplo  $U$ , é redutível. Se mostrarmos que para todo  $U' \in U$  invariante existe um  $U''$  invariante tal que  $U = U' \oplus U''$  então, a decomposição de  $V$  é obtida por indução e temos o resultado desejado. Seja então  $U' \in U$  invariante. Temos então que

$$U' \oplus U_1 \subset V$$

é invariante, pois a soma de subespaços invariantes é invariante. Por hipótese segue que existe  $U_2$  invariante tal que

$$V = (U' \oplus U_1) \oplus U_2,$$

e o subespaço  $(U_1 \oplus U_2) \cap U$  é invariante pois a interseção de subespaços invariantes também é invariante. Tomando  $U'' = ((U_1 \oplus U_2) \cap U)$  vamos a mostrar que

$$U = U'' \oplus U'.$$

Seja  $x \in U'$  e suponha que  $x \in U_1 \oplus U_2$ . então  $x = y + z$  com  $y \in U_1$  e  $z \in U_2$ . Como  $x - y \in U' \oplus U_1$ , da igualdade  $x - y = z$  se tira que  $x - y = z = 0$  e daí temos que  $x \in U' \cap U_1$ , o que implica  $x = 0$ . Isso mostra que a soma  $U = U'' \oplus U'$  é de fato uma soma direta. Agora, dado  $x \in U$ , pode-se escrever

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

com  $x_1 \in U'$ ,  $x_2 \in U_1$ ,  $x_3 \in U_2$ . Então  $x_2 + x_3 = x - x_1 \in U$ , mostrando que  $U$  é realmente a soma de  $U''$  e  $U'$ .  $\square$

**Definição 2.11.** Uma aplicação linear  $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é uma derivação da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se satisfaz

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

Um exemplo importante de derivação que aparece com frequência na teoria são as adjuntas dos elementos de  $\mathfrak{g}$ . O fato de  $ad$  ser bilinear provem da bilinearidade do colchete. Já a propriedade de homomorfismo de  $ad$  é equivalente a identidade de Jacobi.

**Definição 2.12.** Tomando, como sempre,  $\mathfrak{g}$  sendo uma álgebra de Lie, para dois subconjuntos  $A$  e  $B$  será usada a notação  $[a, b]$  para indicar o subespaço gerado por

$$\{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

Definise, por indução, os subespaços de  $\mathfrak{g}$  dados por  $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ ,  $\dots$ ,  $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$ . Essa serie é conhecida como *serie derivada* de  $\mathfrak{g}$ .

Prova-se facilmente que estes subespaços são na verdade ideais de  $\mathfrak{g}$ .

**Definição 2.13.** Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é dita *solúvel* se existe um  $k_0 > 1$ , tal que,

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}.$$

**Proposição 2.3.** *Valem os seguintes fatos:*

1. Se  $\mathfrak{g}$  é solúvel e  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$  é uma subálgebra, então  $\mathfrak{h}$  é solúvel.
2. Se  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$  é um ideal, então  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  é solúvel.

**Definição 2.14.** Definimos outro sequencia de subespaços dada por  $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2]$ ,  $\dots$ ,  $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$ . Essa serie é chamada *serie central descendente* da álgebra  $\mathfrak{g}$ .

**Proposição 2.4.** *A serie derivada decrece mais rápido que a serie central descendente:*

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}.$$

**Definição 2.15.** Uma álgebra de Lie é *nilpotente* se existe um  $k_0 \geq 1$  tal que vale

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}.$$

**Lema 2.5.** *Seja  $\mathfrak{g}$  álgebra de Lie. Então:*

1. Se  $\mathfrak{g}$  é nilpotente e  $\mathfrak{h}$  é subálgebra, então  $\mathfrak{h}$  é nilpotente.
2. Se  $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$  é nilpotente, então  $\mathfrak{g}$  é nilpotente.

**Proposição 2.6.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Então existe em  $\mathfrak{g}$  um único ideal solúvel  $\mathfrak{r}$  que contem todos os ideais solúveis de  $\mathfrak{g}$ .*

**Definição 2.16.** O ideal  $\mathfrak{r}$  da proposição anterior é chamado de *radical solúvel* (ou simplesmente radical) de  $\mathfrak{g}$ . O radical de  $\mathfrak{g}$  se denota  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ .

**Definição 2.17.** Uma álgebra de Lie é dita de *semi-simples* se  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$ , e dizer, se não possui ideais solúveis além do 0.

**Definição 2.18.** Uma álgebra  $\mathfrak{g}$  é chamada de *simples* se

1. Os únicos ideais de  $\mathfrak{g}$  são 0 e  $\mathfrak{g}$ ,
2.  $\dim \mathfrak{g} \neq 1$ .

A segunda propriedade é necessária para que exista compatibilidade entre os conceitos de álgebras simples e semi-simples.

## 2.2

### Teoremas de Engel e Lie

A continuação vamos a enunciar e, em alguns casos, provar uma série de resultados clássicos (entre eles os famosos teoremas de Engel e Lie) da teoria. Em muitos teoremas vamos a assumir que nossa álgebra  $\mathfrak{g}$  é uma subálgebra de  $gl(V)$  para um espaço vetorial  $V$ . Em outras palavras, vamos a assumir que  $\mathfrak{g}$  possui uma representação fiel. Existe um teorema relativamente profundo, conhecido como teorema de Ado, que garante que toda álgebra de Lie possui, de fato, uma representação fiel. A prova deste resultado foge dos limites deste trabalho, mas uma prova de este resultado usando álgebras universais envelopantes pode ser encontrada em [8].

**Lema 2.7.** *Seja  $\mathfrak{a}$  um ideal de uma subálgebra  $\mathfrak{g}$  de  $gl(V)$ . Seja*

$$W = \{v \in V : Av = 0 \text{ para todo } A \in \mathfrak{a}\}.$$

*Então  $W$  é subespaço  $\mathfrak{g}$ -invariante de  $V$ .*

*Demonstração.* Tome  $w \in W$  e  $Y \in \mathfrak{g}$ . Nos devemos mostrar que  $A(Yw) = 0$  para todo  $A \in \mathfrak{a}$ . Mas  $AY = YA + [A, Y]$ , onde  $[A, Y] \in \mathfrak{a}$  pois  $\mathfrak{a}$  é ideal, logo

$$A(Yw) = Y(Aw) + [A, Y](w) = 0.$$

□

**Lema 2.8.** *Assuma que o corpo base tem característica zero (em particular seja o corpo base  $\mathbb{C}$ ). Seja  $\mathfrak{g}$  uma subálgebra de Lie de  $gl(V)$  e seja  $\mathfrak{a}$  um ideal de  $\mathfrak{g}$ . Seja  $\lambda : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}$ . Seja o espaço preso associado*

$$V_\lambda = \{v \in V : Av = \lambda(A)v \text{ para todo } A \in \mathfrak{a}\}$$

é um subespaço  $\mathfrak{g}$ -invariante de  $V$

*Demonstração.* Devemos mostrar que se  $Y \in \mathfrak{g}$  e  $w \in V_\lambda$  então  $Y(w)$  é um autovetor para todo elemento de  $\mathfrak{a}$  com autovalor de  $A \in \mathfrak{a}$  dado por  $\lambda(A)$ . Temos que para todo  $A \in \mathfrak{a}$  vale

$$A(Yw) = Y(Aw) + [A, Y](w) = \lambda(A)Yw + \lambda([A, Y])w.$$

Temos que  $[A, Y] \in \mathfrak{a}$ , pois  $\mathfrak{a}$  é ideal. Logo, só temos que provar que o autovalor do comutador  $[A, Y]$  em  $V_\lambda$  é zero. Seja  $U = \text{span}\{w, Yw, \dots\}$ . Seja  $m$  o menor numero tal que os vetores  $w, Yw, \dots, Y^m w$  são linearmente dependentes. Temos então que  $U$  tem dimensão  $m$  e tem uma base dada por

$$w, Y(w), \dots, Y^{m-1}w.$$

Vamos a mostrar que se  $Z \in \mathfrak{a}$ , então  $Z$  mapeia  $U$  em  $U$ . De fato vamos a mostrar que em relação a base acima,  $Z$  tem matriz diagonal superior com entradas diagonais iguais a  $\lambda(Z)$ . Usamos indução no numero de colunas. Primeiramente temos que  $Zw = \lambda(Z)w$ . Isso da a primeira coluna da matriz. Logo, como  $[Z, Y] \in \mathfrak{a}$ , temos

$$Z(Yw) = Y(Zw) + [Z, Y]w = \lambda(Z)Y(w) + \lambda([Z, Y])w,$$

e isso nos oferece a segunda coluna. Para a coluna  $r$  temos

$$Z(Y^r w) = ZY(Y^{r-1}w) = (YZ + [Z, Y])Y^{r-1}w.$$

Pela hipótese de indução, podemos dizer que

$$Z(Y^{r-1}w) = \lambda(Z)Y^{r-1}w + u$$

para algum  $u \in \text{span}\{Y^j w : j < r-1\}$ . Então

$$YZ(Y^{r-1}w) = \lambda(Z)Y^r w + Yu$$

com  $Yu \in \text{span}\{Y^j w : j < r\}$ . Ainda mais, como  $[Z, Y] \in \mathfrak{a}$  temos por indução que

$$[Z, Y]Y^{r-1}w = v$$

para algum  $v \in \text{span}\{Y^j w : j \leq r-1\}$ . Temos então que  $Z$  tem matriz diagonal superior com entradas na diagonal iguais a  $\lambda(Z)$ . Tomamos agora  $Z = [A, Y]$ . O traço da matriz de  $Z$  atuando em  $U$  é  $m\lambda(Z)$ . Por outro lado

$U$  é invariante pela ação de  $A \in \mathfrak{a}$  e também, por construção, é invariante por  $Y$ . Logo o traço de  $Z$  em  $U$  é o traço de  $AY - YA$ , também vista como transformação linear em  $U$ , e então o traço é igual a zero. Concluimos então que  $m\lambda([A, Y]) = 0$  e, como o corpo base tem característica zero, segue que  $\lambda([A, Y]) = 0$ .  $\square$

**Proposição 2.9.** *Sejam  $X, Y : V \rightarrow V$  mapas lineares de um espaço vetorial complexo em si mesmo. Suponha que  $X$  e  $Y$  conmutam com  $[X, Y]$ . Logo  $[X, Y]$  é um mapa nilpotente.*

*Demonstração.* É suficiente mostrar que se  $\lambda$  é um autovalor do mapa linear  $[X, Y]$  então  $\lambda = 0$ . Seja  $\lambda$  um autovalor. Seja  $W = \{v \in V : [X, Y]v = \lambda v\}$  o autoespaço de  $[X, Y]$ . Seja  $\mathfrak{l}$  a subálgebra de Lie gerada por  $X, Y$  e  $[X, Y]$ . Como  $\text{span}\{[X, Y]\}$  é um ideal de  $\mathfrak{l}$ , o lema anterior diz que  $W$  é invariante baixo a ação de  $X$  e  $Y$ .

Tomamos uma base de  $W$  e sejam  $X$  e  $Y$  as matrizes de  $X$  e  $Y$  com relação a esta base. O comutador  $[X, Y]$  tem matriz  $XY - YX$  em sua ação em  $W$ . Mas todo elemento de  $W$  é autovetor de  $[X, Y]$  com autovalor  $\lambda$ . Logo  $XY - YX$  é uma matriz diagonal com entradas igual a  $\lambda$  na diagonal. Então, tomando o traço, temos que

$$0 = \text{tr}(XY - YX) = \lambda(\dim W).$$

Logo,  $\lambda = 0$ .  $\square$

**Lema 2.10.** *Seja  $X \in \mathfrak{g}$  tal que  $X : V \rightarrow V$  é nilpotente. Logo  $\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é nilpotente.*

*Demonstração.* Seja  $Y \in \mathfrak{g}$ . Temos

$$(\text{ad}(X))^m(Y) = [X, [X \dots [X, Y] \dots]].$$

Todo termo na soma resultante é da forma  $X^j Y X^{m-j}$  para algum  $j$  entre 0 e  $m$ . Suponha que  $X^r = 0$  e seja  $m \geq 2r$ . Logo  $j \geq r$ , em cujo caso  $X^j = 0$ , ou  $m - j \geq r$ , em cujo caso  $X^{m-j} = 0$ . Segue que  $(\text{ad}(X))^{2r} = 0$ .  $\square$

**Proposição 2.11.** *Suponha que  $\mathfrak{g}$  é uma subálgebra de  $\text{gl}(V)$ , onde  $V$  é diferente de zero, tal que todo elemento de  $\mathfrak{g}$  é uma transformação linear nilpotente. Logo, existe um elemento  $v$  diferente de zero tal que  $Xv = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ .*

*Demonstração.* Procedemos por indução em  $\dim(\mathfrak{g})$ . Se  $\dim(\mathfrak{g}) = 1$ , logo  $\mathfrak{g}$  é gerada por uma única transformação linear nilpotente, digamos  $Z$ . Logo

sabemos de Álgebra Linear que existe um elemento diferente de zero  $v$  tal que  $Zv = 0$ . Um elemento arbitrário de  $\mathfrak{g}$  e produto escalar de  $Z$ , logo  $v$  esta no nucleo de todo elemento de  $\mathfrak{g}$ . Suponhamos agora que  $\dim(\mathfrak{g}) > 1$ . Dividimos a demonstração em duas partes:

1. Tomamos uma subálgebra de Lie maximal propria  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}$ . Afirmamos que  $\mathfrak{m}$  é um ideal de  $\mathfrak{g}$  e que  $\dim(\mathfrak{m}) = \dim(\mathfrak{g}) - 1$ . Consideramos o espaço quociente  $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{m}$ . Definimos o mapa linear

$$\varphi : \mathfrak{m} \rightarrow gl(\bar{\mathfrak{g}})$$

onde para cada  $M \in \mathfrak{m}$  se tem que  $\varphi(M)$  atua em  $\bar{\mathfrak{g}}$  na forma

$$\varphi(M)(X + m) = [M, X] + m.$$

Note que  $\varphi$  é bem definido pois se  $X \in \mathfrak{m}$ , então  $[M, X] \in \mathfrak{m}$ . Ainda mais,  $\varphi$  é um homomorfismo de Lie, pois se  $M, N \in \mathfrak{m}$  logo pela identidade de Jacobi na quarta igualdade temos

$$\begin{aligned} [\varphi(M), \varphi(N)](X + m) &= \varphi(M)([N, X] + m) - \varphi(N)([M, X] + m) \\ &= ([M, [N, X]] + m) - ([N, [M, X]] + m) \\ &= [M, [N, X]] - [N, [M, X]] + m \\ &= [[M, N], X] + m = \varphi([M, N])(X + m). \end{aligned}$$

Logo  $\varphi(\mathfrak{m})$  é uma subálgebra de Lie de  $gl(\bar{\mathfrak{g}})$  e temos que  $\dim(\varphi(\mathfrak{m})) < \dim(\mathfrak{g})$ . Para aplicar a hipótese de indução precisamos mostrar que  $\varphi(M)$  é uma transformação linear nilpotente de  $\bar{\mathfrak{g}}$ . Mas  $\varphi(M)$  é inducida por  $ad(M)$  e  $M$  é nilpotente (pois por hipótese todo elemento de  $\mathfrak{g}$  é nilpotente). Logo, pelo lema 2.10 temos que  $ad(M) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é nilpotente e logo  $\varphi(M)$  é nilpotente. Pela hipótese de indução existe um elemento diferente de zero  $Y + \mathfrak{m} \in \bar{\mathfrak{g}}$  tal que  $\varphi(M)(Y + \mathfrak{m}) = [M, Y] + \mathfrak{m} = 0$  para todo  $M \in \mathfrak{m}$ . E dizer  $[M, Y] \in \mathfrak{m}$  para todo  $M \in \mathfrak{m}$ . Seja então  $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m} \oplus span\{Y\}$ . Como  $[Y, M] \in \mathfrak{m}$  para todo  $M \in \mathfrak{m}$  temos que esta é uma álgebra de Lie contendo  $\mathfrak{m}$ . Pela maximalidade de  $\mathfrak{m}$  temos que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus span\{Y\}$ . Como  $\mathfrak{m}$  é um ideal de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  temos que  $\mathfrak{m}$  é um ideal de  $\mathfrak{g}$ .

2. Aplicamos então a hipótese de indução a  $\mathfrak{m} \subset gl(V)$ . Isso nos dá um elemento diferente de zero  $w \in V$  tal que  $Mw = 0$  para todo  $M \in \mathfrak{m}$ . Seja

$$W = \{v \in V : M(v) = 0 \text{ para todo } M \in \mathfrak{m}\}$$

Então  $W$  é um subespaço de  $V$  diferente de zero. Pelo lema 2.7 temos que  $W$  é invariante sobre a ação de  $\mathfrak{g}$ , logo  $Y(W) \subseteq W$ . Logo, como  $Y$  é nilpotente, a restrição de  $Y$  a  $W$  é nilpotente. Logo existe um vetor diferente de zero  $v \in W$  tal que  $Yv = 0$ . Podemos escrever qualquer  $X \in \mathfrak{g}$  na forma  $X = M + \beta Y$  para algum  $M \in \mathfrak{m}$  e para algum  $\beta \in F$  sendo  $F$  o corpo base, em nosso caso  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ . Então temos

$$X(v) = M(v) + \beta Y(v) = 0.$$

Logo, existe  $v$  tal que  $Xv = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ .

□

O seguinte teorema é conhecido como teorema de Engel.

**Teorema 2.12.** *Seja  $V$  um espaço vetorial. Seja  $\mathfrak{g}$  uma subálgebra de  $gl(V)$  tal que todo elemento de  $\mathfrak{g}$  é uma transformação linear nilpotente. Logo existe uma base de  $V$  na qual todo elemento de  $\mathfrak{g}$  é representado por uma matriz estritamente triangular superior.*

*Demonstração.* Usamos indução em  $\dim(V)$ . Assumimos  $\dim(V) \geq 1$ . Pela proposição anterior temos que existe  $v \in V$  diferente de zero tal que  $Xv = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ . Seja  $U = \text{span}\{v\}$  e seja  $\bar{V}$  o espaço cociente  $V/U$ . Todo  $X \in \mathfrak{g}$  induz uma transformação linear  $\bar{X}$  de  $\bar{V}$ . O mapa dado por  $g \rightarrow gl(\bar{V})$  dado por  $X \rightarrow \bar{X}$  é um homomorfismo de álgebras de Lie. A imagem de  $\mathfrak{g}$  sobre este homomorfismo é uma subálgebra de  $gl(\bar{V})$  a qual satisfaz a hipótese do teorema de Engel. Ainda mais,  $\dim(\bar{V}) = N - 1$ , logo, pela hipótese indutiva existe uma base de  $\bar{V}$  tal que respecto a esta base todo  $\bar{X}$  é estritamente triangular superior. Se esta base é  $\{v_i + U : 1 \leq i \leq n-1\}$ , logo  $\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  é uma base de  $V$ . Como  $Xv = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ , as matrizes de elementos de  $\mathfrak{g}$  em relação a esta base são estritamente triangulares superiores. □

Podemos pensar de outra forma o teorema de Engel. Lembramos que uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é dita nilpotente se para algum  $m \geq 1$  temos  $\mathfrak{g}^m = 0$ . Vamos a provar outra versão do teorema de Engel. Antes disso citamos o seguinte lema.

**Lema 2.13.** *Seja  $\mathfrak{g}$  subálgebra de  $gl(V)$  e com uma base tal que todo elemento  $X \in \mathfrak{g}$  é representado por uma matriz estritamente triangular superior. Então  $\mathfrak{g}$  é nilpotente.*

**Teorema 2.14.** *Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é nilpotente se e só se para todo  $X \in \mathfrak{g}$  o mapa linear  $ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é nilpotente.*

*Demonstração.* Suponha que  $\mathfrak{g}$  é nilpotente. Então temos que existe algum  $m$  tal que

$$ad(X_0) \circ ad(X_1) \cdots \circ ad(X_{m-1}) = 0$$

para todo  $X_0, X_1, \dots, X_{m-1} \in \mathfrak{g}$ . Logo  $ad(X)^m = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  e, portanto, todo  $ad(X)$  é nilpotente.

Reciprocamente suponhamos que  $ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é nilpotente para todo  $X \in \mathfrak{g}$ . A representação adjunta de um homomorfismo injetivo  $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) \rightarrow ad(\mathfrak{g})$  e, por hipótese, todo elemento da imagem é uma transformação nilpotente. Então pelo teorema de Engel em sua primeira versão temos que existe uma base de  $\mathfrak{g}$  tal que todo elemento  $ad(X)$  tem uma matriz estritamente triangular superior. Logo pelo lema 2.13 temos que  $\mathfrak{j} = ad(\mathfrak{g})$  é nilpotente. Logo  $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$  é nilpotente e, pelo segundo item do lema 2.5,  $\mathfrak{g}$  é nilpotente.  $\square$

Outro teorema clássico é o teorema de Lie

**Teorema 2.15.** *Seja  $V$  um espaço vetorial complexo e seja  $\mathfrak{g}$  uma subálgebra solúvel de  $gl(V)$ . Então existe uma base de  $V$  na qual todo elemento de  $\mathfrak{g}$  é representado por uma matriz triangular superior.*

*Demonstração.* Ver [3].  $\square$

## 2.3

### Critérios de Cartan

**Proposição 2.16.** *Seja  $V$  espaço vetorial complexo e seja  $\mathfrak{g}$  subálgebra de Lie de  $gl(V)$ . Se  $tr(XY) = 0$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$  então  $\mathfrak{g}$  é solúvel.*

*Demonstração.* Vamos a mostrar que todo  $X \in \mathfrak{g}'$  é um mapa linear nilpotente. Logo segue pelo teorema de Engel que  $\mathfrak{g}'$  é nilpotente e consequentemente  $\mathfrak{g}$  é solúvel.

Seja  $X \in \mathfrak{g}'$  com decomposição de Jordan  $X = D + N$ , onde  $D$  é diagonalizável,  $N$  é nilpotente, e  $ND = ND$ . Fixamos uma base de  $V$  onde  $D$  é diagonal e  $N$  é estritamente triangular superior. Suponha que  $D$  tem entradas diagonais  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Nosso objetivo é provar que  $D = 0$ . Para isso é suficiente mostrar que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \overline{\lambda_i} = 0.$$

A matriz de  $\overline{D}$  é diagonal, com entradas diagonais dadas por  $\overline{\lambda_i}$  para  $1 \leq i \leq m$ . Como  $N$  estritamente triangular superior, temos que

$$tr(\overline{D}X) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \overline{\lambda_i}.$$



Agora, como  $X \in \mathfrak{g}'$ , podemos expressar  $X$  como combinação linear de comutadores  $[Y, Z]$  com  $Y, Z \in \mathfrak{g}$ , então precisamos mostrar que  $\text{tr}(\overline{D}[Y, Z]) = 0$ . Por uma propriedade da formula de Killing que segue facilmente de sua definição temos que isso é equivalente a mostrar que

$$\text{tr}([\overline{D}, Y]Z) = 0.$$

Então, pela nossa hipótese, é suficiente mostrar que  $[\overline{D}, Y] \in \mathfrak{g}$ . Em outras palavras, precisamos mostrar que  $\text{ad}(\overline{D})$  mapeia  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{g}$ . Sabemos que a decomposição de Jordan de  $\text{ad}(X)$  é  $\text{ad}(D) + \text{ad}(N)$ . Logo, por álgebra linear, sabemos que existe um polinômio  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$  tal que  $p(\text{ad}(X)) = \overline{\text{ad}(D)} = \text{ad}(\overline{D})$ . Logo, como  $\text{ad}(X)$  mapeia  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{g}$ , o mesmo acontece com  $p(\text{ad}(X)) = \text{ad}(\overline{D})$ .  $\square$

A verdade esta proposição vale para toda álgebra de Lie de dimensão finita, não necessariamente complexa. O leitor pode uma prova mais geral em [3] ou [8]. É importante observar que este teorema pode se aplicar a uma álgebra de Lie abstrata pois podemos interpretar  $\mathfrak{g}$  como subálgebra de  $\text{gl}(V)$  mediante a representação adjunta de  $\mathfrak{g}$  e considerando que  $\mathfrak{g}$  é solúvel se e somente se  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  é solúvel.

**Lema 2.17.** *Seja  $\mathfrak{g}$  solúvel,  $\mathfrak{g}$  subálgebra de  $\text{gl}(V)$  para algum  $V$ . Então existe uma base de  $V$  na qual todo elemento de  $\mathfrak{g}'$  é representado por uma matriz estritamente triangular superior e logo  $\text{traço}(XY) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  e para todo  $Y \in \mathfrak{g}'$*

*Demonstração.* Ver [1].  $\square$

O seguinte teorema se conhece na literatura como Primeiro critério de Cartan:

**Teorema 2.18.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie de dimensão finita (em particular uma álgebra complexa). Logo  $\mathfrak{g}$  é solúvel se e somente se  $\text{traço}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  e para todo  $Y \in \mathfrak{g}'$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathfrak{g}$  solúvel. Então  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{gl}(\mathfrak{g})$  é uma subálgebra solúvel de  $\text{gl}(\mathfrak{g})$ . Logo, o resultado segue pelo lema 2.17. Reciprocamente se  $\text{traço}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  e para todo  $Y \in \mathfrak{g}'$  temos pela proposição anterior que  $\text{ad}(\mathfrak{g}')$  é solúvel. Logo  $\mathfrak{g}'$  é solúvel e portanto  $\mathfrak{g}$  é solúvel.  $\square$

**Definição 2.19.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ . A forma de Killing de  $\mathfrak{g}$  é a forma bilinear simétrica definida por*

$$\langle X, Y \rangle := \text{traço}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

Uma propriedade importante da forma de Killing é a associatividade, que diz que para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  temos que

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle.$$

**Lema 2.19.** *A restrição da forma de Killing a um ideal  $\mathfrak{i}$  de  $\mathfrak{g}$  coincide com a forma de Killing de  $\mathfrak{i}$ .*

*Demonstração.* Dados  $X \in \mathfrak{i}$  e  $Y \in \mathfrak{g}$ , a imagem de  $ad(Y)ad(X)$  esta contida em  $\mathfrak{i}$ . Dessa forma, tomando uma base de  $\mathfrak{i}$  e complementando-a uma base de  $\mathfrak{g}$  vê-se que os elementos que estão fora de  $\mathfrak{i}$  não contribuem para o  $\text{traço}(ad(X) \circ ad(Y))$  e, portanto,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  coincide com  $\text{traço}(ad(X) \circ ad(Y))|_{\mathfrak{i}}$ . Como essa expressão é a forma de Killing de  $\mathfrak{i}$  se  $Y \in \mathfrak{i}$  tem-se em particular que essa forma coincide com a restrição a  $\mathfrak{i}$  da forma de Killing de  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

O seguinte teorema se conhece como Segundo critério de Cartan:

**Teorema 2.20.** *Um álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é semi-simple se e so se a forma de Killing é não degenerada.*

*Demonstração.* Assumindo  $\mathfrak{g}$  semi-simples, seja  $\mathfrak{g}^\perp$  o subespaço de  $\mathfrak{g}$  definido por

$$\mathfrak{g}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} : \langle X, Y \rangle = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Então  $\mathfrak{g}^\perp$  é um ideal pois se  $X \in \mathfrak{g}^\perp$ , e  $Y, Z$  são arbitrarios temos que

$$\langle [Z, X], Y \rangle = -\langle X, [Z, Y] \rangle = 0.$$

Como a restrição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $\mathfrak{g}^\perp$  é identicamente nula, e esta coincide com sua forma de Killing(pelo lema 2.19), se conclui a partir do primeiro critério de Cartan que  $\mathfrak{g}^\perp$  é solúvel. O fato de  $\mathfrak{g}$  ser semi-simples implica então que  $\mathfrak{g}^\perp = 0$ . Logo a forma de Killing é não degenerada.

Reciprocamente, suponhamos que  $\mathfrak{g}$  não é semi-simples. Então afirmamos que  $\mathfrak{g}$  admite um ideal abeliano  $\mathfrak{i}$  não trivial. Isso porque  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \neq 0$  e, portanto,  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^k$  é um ideal abeliano para algum  $k$ . Seja  $X \in \mathfrak{i}$ . Então para todo  $Y \in \mathfrak{g}$ , a imagem de  $ad(Y)ad(X)$  esta contida em  $\mathfrak{i}$  pois  $\mathfrak{i}$  é ideal. Por essa razão, o traço de  $ad(X)ad(Y)$  coincide com o traço de sua restrição a  $\mathfrak{i}$ . Mas  $ad(X)ad(Y)|_{\mathfrak{i}} = 0$  pois  $\mathfrak{i}$  é abeliano. Consequentemente

$$\langle Y, X \rangle = 0$$

para todo  $X \in \mathfrak{i}$ ,  $Y \in \mathfrak{g}$ . Logo a forma de Killing é degenerada.  $\square$

O segundo critério de Cartan constitui uma poderosa caracterização de semisimplicidade. A forma de Killing vai desempenhar um papel central na compreensão da estrutura das álgebras semi-simples. Isso se deve, e claro, ao fato dela não ser degenerada, permitindo que se introduza nessas álgebras uma estrutura semelhante a um produto interno.

**Teorema 2.21.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples. Então  $\mathfrak{g}$  se decompõe em soma direta*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$$

*com  $\mathfrak{g}_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  ideais simples. Nessa decomposição  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$  se  $i \neq j$ . Além do mais, o ortogonal  $\mathfrak{g}_i^\perp$  de uma componente simples, em relação a forma de Killing, e a soma das demais componentes.*

*Demonstração.* Seja  $\mathfrak{i} \in \mathfrak{g}$  um ideal não trivial. Então temos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{i}}$  é a restrição a  $\mathfrak{i}$  da forma de Killing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathfrak{g}$ , e se  $\mathfrak{i}^\perp$  denota o ortogonal de  $\mathfrak{i}$  em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  então temos que  $\mathfrak{i}^\perp$  é um ideal complementar a  $\mathfrak{i}$ . De fato, se  $X \in \mathfrak{i}^\perp$  e  $Y \in \mathfrak{g}$  então para todo  $Z \in \mathfrak{i}$  temos que

$$\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle X, [Y, Z] \rangle = 0$$

o que mostra que  $\mathfrak{i}^\perp$  é um ideal. Além do mais  $\mathfrak{j} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp$  é um ideal de  $\mathfrak{g}$  e sua forma de Killing é identicamente igual a zero, logo é um ideal solúvel, mas como  $\mathfrak{g}$  é semi-simples tem que ser  $\mathfrak{j} = 0$ . Daí temos que  $\mathfrak{i}^\perp$  é complementar a  $\mathfrak{i}$ . Vamos a provar que  $\mathfrak{i}$  é semi-simples. Para isso usaremos o segundo critério de Cartan. Suponha que  $\mathfrak{i}$  tem um ideal solúvel não trivial. Então a forma de Killing de  $\mathfrak{i}$  é degenerada. Mas a forma de Killing de  $\mathfrak{i}$  é dada pela restrição da forma de Killing de  $\mathfrak{g}$ , logo existe  $Y \in \mathfrak{i}$  tal que  $\langle X, Y \rangle = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{i}$ . Mas como  $Y \in \mathfrak{i}$  temos que  $\langle Z, Y \rangle = 0$  para todo  $Z \in \mathfrak{i}^\perp$ . Então temos que existe  $Y$  tal que  $\langle X, Y \rangle = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  e temos que a forma de Killing de  $\mathfrak{g}$  é degenerada, o que constitui um absurdo. Logo  $\mathfrak{i}$  não possui ideais solúveis, e dizer,  $\mathfrak{i}$  é semi-simples.

Agora vamos a provar a decomposição mencionada no enunciado procedendo por indução na dimensão de  $\mathfrak{g}$ . Seja  $\mathfrak{i}$  um ideal de  $\mathfrak{g}$  de dimensão mínima e suponhamos que  $\mathfrak{i} \neq \mathfrak{g}$ . Então, como a dimensão é mínima,  $\mathfrak{i}$  é um ideal simples de  $\mathfrak{g}$ . Pelo visto acima temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}^\perp$$

onde, como ideal de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{i}^\perp$  é uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão

menor que  $\mathfrak{g}$ . Logo, por indução,  $\mathfrak{i}^\perp$  é soma direta de ideais simples

$$\mathfrak{i}^\perp = \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$$

cada  $\mathfrak{g}_i$  é também um ideal de  $\mathfrak{g}$  pois  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ . Logo escrevendo  $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}_1$  temos a decomposição desejada.

Reciprocamente, suponhamos que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$  com  $\mathfrak{g}_i$  ideais simples. Seja  $\mathfrak{i}$  o radical de  $\mathfrak{g}$  (e dizer, o maior ideal solúvel de  $\mathfrak{g}$ ). Nosso objetivo é mostrar que  $\mathfrak{i} = 0$ . Para cada ideal  $\mathfrak{g}_i$  temos que  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}_i$  é um ideal solúvel de  $\mathfrak{g}_i$ . Mas  $\mathfrak{g}_i$  é simples, então

$$[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{i}, \mathfrak{g}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{i}, \mathfrak{g}_s] = 0$$

o que mostra que  $\mathfrak{i} \in Z(\mathfrak{g})$ . Mas em geral vale que

$$Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}_1) \oplus \cdots \oplus Z(\mathfrak{g}_s)$$

Nos sabemos que  $Z(\mathfrak{g}_i) = 0$  pois os  $\mathfrak{g}_i$  são ideais simples. Logo  $Z(\mathfrak{g}) = 0$  e segue que  $\mathfrak{i} = 0$ .  $\square$

Este teorema tem um importante corolário, que será usado no quarto capítulo, na demonstração do lema de Whitehead:

**Corolário 2.22.** *Se  $\mathfrak{g}$  é semi-simples, então  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ .*

*Demonstração.* Como  $\mathfrak{g}'$  é um ideal de  $\mathfrak{g}$  pela demonstração do teorema temos que existe um ideal  $\mathfrak{i}$  que complementa  $\mathfrak{g}'$ . Então, dados  $X, Y \in \mathfrak{i}$  tem-se que  $[X, Y] \in \mathfrak{i}$  pois  $\mathfrak{i}$  é ideal e  $[X, Y] \in \mathfrak{g}'$  por definição de  $\mathfrak{g}'$ . E dizer  $[X, Y] \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{i} = 0$ , isto é,  $\mathfrak{i}$  é ideal abeliano e, portanto  $\mathfrak{i} = 0$ . Segue que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ .  $\square$

## 2.4

### Derivações e elementos semi-simples

**Proposição 2.23.** *Se  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie semi-simples, então  $ad(\mathfrak{g}) = Der(\mathfrak{g})$ .*

*Demonstração.* Pela identidade de Jacobi sabemos que para todo  $H \in \mathfrak{g}$  o mapa linear  $ad(H)$  é uma derivação de  $\mathfrak{g}$ , então  $ad$  é um homomorfismo de álgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  em  $Der(\mathfrak{g})$ . Ainda mais, se  $\delta$  é uma derivação de  $\mathfrak{g}$  e

$X, Y \in \mathfrak{g}$  temos que

$$\begin{aligned} [\delta, ad(X)]Y &= \delta[X, Y] - ad(X)(\delta Y) \\ &= [\delta(X), Y] - [X, \delta(Y)] - [X, \delta(Y)] \\ &= ad(\delta(X))Y \end{aligned}$$

logo a imagem de  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow Der(\mathfrak{g})$  é um ideal de  $Der(\mathfrak{g})$ . Como  $\mathfrak{g}$  é semi-simples temos que  $\ker(ad) = Z(\mathfrak{g}) = 0$  pois  $Z(\mathfrak{g})$  é ideal solúvel. Então a álgebra de Lie  $\mathfrak{m} = ad(\mathfrak{g})$  é isomorfa a  $\mathfrak{g}$  e logo é semi-simples. Para mostrar que  $\mathfrak{m} = Der(\mathfrak{g})$  vamos a usar a forma de Killing da álgebra de Lie  $Der(\mathfrak{g})$ . Temos que

$$\dim(\mathfrak{m}) + \dim(\mathfrak{m}^\perp) = \dim(Der(\mathfrak{g}))$$

Nosso objetivo é mostrar que  $\dim(\mathfrak{m}^\perp) = 0$ . Como  $\mathfrak{m}$  é ideal de  $Der(\mathfrak{g})$ , a forma de Killing e a restrição a  $\mathfrak{m}$  da forma de Killing de  $Der(\mathfrak{g})$ . Pelo segundo critério de Cartan temos que a forma de Killing restrita a  $\mathfrak{m}$  é não degenerada e logo  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}^\perp = 0$  e logo  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^\perp] = 0$ . Logo, se  $\delta \in \mathfrak{m}^\perp$  e  $ad(X) \in \mathfrak{m}$  temos  $[\delta, ad(X)] = 0$ . Mas

$$[\delta, ad(X)] = ad(\delta(X))$$

logo, para todo  $X \in \mathfrak{g}$  temos  $\delta(X) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ , e dizer  $\delta = 0$ .  $\square$

**Proposição 2.24.** *Seja  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  uma derivação de uma álgebra de Lie finita sobre um corpo algebricamente fechado. Tome a decomposição primaria*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$$

onde

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} : (\delta - \lambda_i)^n X = 0, \exists n \geq 1\}$$

e o auto-espaço generalizado associado ao autovalor  $\lambda_i$ . Então

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$$

*Demonstração.* Pode se achar uma demonstração em [6].  $\square$

O lema anterior nos permite provar a seguinte proposição

**Proposição 2.25.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie complexa finita e  $D$  uma derivação de  $\mathfrak{g}$ . Seja a decomposição de Jordan de  $D$  dada por  $D = S + N$  com  $S$  diagonalizável e  $N$  nilpotente. Logo  $S$  e  $N$  também são derivações.*

*Demonstração.* Para mostrar que  $S$  é uma derivação é suficiente mostrar que  $S[X, Y] = [SX, Y] + [X, SY]$  para  $X, Y$  elementos de uma base. Como  $\mathfrak{g}$  se decompõe nos auto-espços generalizados de  $D$ , é suficiente mostrar a propriedade de derivação para  $X \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$  e  $Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_j}$  com  $\lambda_i, \lambda_j$  autovalores. Pelo lema anterior tem-se

$$[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$$

Como  $S$  atua diagonalmente os auto-espços generalizados de  $D$  são auto-espços de  $S$ . Assim, temos que

$$S[X, Y] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y]$$

sendo que  $[X, Y] = 0$  se  $\lambda_i + \lambda_j$  não é autovalor. Por outro lado temos que

$$[SX, SY] + [X, SY] = \lambda_i[X, Y] + \lambda_j[X, Y] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y]$$

o que mostra que  $S$  é derivação. Como  $N = D - S$  e  $D$  é derivação temos que  $N$  também é derivação.  $\square$

**Teorema 2.26.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples complexa. Cada  $X \in \mathfrak{g}$  pode se escrever unicamente como  $X = X_S + X_N$ , onde  $ad(X_S)$  é diagonalizável e  $ad(X_N)$  é nilpotente e  $[X_S, X_N] = 0$ . Além disso se  $Y \in \mathfrak{g}$  comuta com  $X$ , então  $[S, Y] = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $ad(X) = S + N$  com  $S \in gl(\mathfrak{g})$  diagonalizável e  $N \in gl(\mathfrak{g})$  nilpotente e  $[S, N] = 0$ . Pela proposição anterior sabemos que  $S$  e  $N$  são derivações de  $\mathfrak{g}$ . Pela proposição 2.23 sabemos que  $ad(\mathfrak{g}) = Der(\mathfrak{g})$ . Logo existem  $X_S$  e  $X_N$  tal que  $S = ad(X_S)$  e  $N = ad(X_N)$ . Como  $ad(X)$  é injetiva e

$$ad(X) = S + N = ad(X_S) + ad(X_N) = ad(X_S + X_N)$$

segue que  $X = X_S + X_N$ . Ainda mais,  $ad[X_S, X_N] = [ad(X_S), ad(X_N)] = 0$  implica  $[X_S, X_N] = 0$ . A unicidade da decomposição segue da unicidade da decomposição de Jordan.

Por outro lado suponhamos que  $Y \in \mathfrak{g}$  tal que  $[X, Y] = ad(X)(Y) = 0$ . Por um resultado conhecido de álgebra linear temos que  $ad(X_S) = S$  e  $ad(X_N) = N$  podem se expressar como polinômios em  $ad(X)$ . Logo

$$ad(X_N) = c_0 1_{\mathfrak{g}} + c_1 ad(X) + \cdots + c_r (ad(X))^r$$

Aplicando  $ad(X_N)$  a  $Y$  temos  $ad(X_N)(Y) = c_0 Y$ . Mas  $X_N$  é nilpotente e  $X_N(X) = c_0 X$ , logo  $c_0 = 0$ . Então  $ad(X_N)(Y) = [X_N, Y] = 0$  e  $[X_S, Y] = ad(X_S)(Y) = (ad(X) - ad(X_N))(Y) = 0$   $\square$

Com isso podemos dar as seguintes definições:

**Definição 2.20.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples complexa. Se diz que  $X \in \mathfrak{g}$  tem decomposição abstrata de Jordan dada por  $X = X_S + X_N$ . Se  $X_N = 0$  se diz que  $X$  é semi-simples.

### 3

## O teorema de Weyl

O objetivo deste capítulo é oferecer uma demonstração de natureza cohomologica do teorema de Weyl, que diz que toda representação de dimensão finita de uma álgebra de Lie semi-simples é completamente reductivel.

### 3.1

#### Um pouco de Cohomologia de Álgebras de Lie

Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  no espaço vetorial  $V$ . Associados a  $\mathfrak{g}$  e  $V$ , considere os espaços  $A^n$  de aplicações multilineares alternadas, definidos da seguinte forma:

1.  $A^0 = V$  que é interpretado como o espaço das aplicações constantes  $f_v : \mathfrak{g} \rightarrow V, F_v(X) = v$
2.  $A^n, n \geq 1$  é o espaço das aplicações n-lineares de  $\mathfrak{g}$  em  $V, f : \mathfrak{g}^n \rightarrow V$  que satisfazem, para toda permutação  $\sigma$  de  $n$  elementos

$$f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} f(X_1, \dots, X_n)$$

onde  $|\sigma|$  denota o grau da permutação  $\sigma$ , que é 0 ou 1 dependendo se  $\sigma$  é o produto de quantidade par ou ímpar de permutações simples.

No caso em que tanto  $\mathfrak{g}$  quanto  $V$  são de dimensão finita,  $A^n$  também é de dimensão finita e sua dimensão é dada por

$$\dim A^n = d \binom{m}{n}$$

sendo  $d$  a dimensão de  $V$  e  $m$  é a dimensão de  $\mathfrak{g}$ . Isso porque ao escolher uma base de  $V$ , pode-se definir um isomorfismo entre  $A^n$  e  $(\wedge^n \mathfrak{g})^d$  através das coordenadas de elementos de  $V$  em relação à base dada. Uma consequencia da ultima formula é que  $A^n = 0$  se  $n \geq m$ , e daí a quantidade de espaços e



finita. A cohomologia de  $\mathfrak{g}$  em relação à representação  $\sigma$  é definida a partir do operador de diferencial exterior  $d_n : A^{n-1} \rightarrow A^n$ ,  $n \geq 0$ , que, por sua vez, é definido pela fórmula

$$(df)(X_1, \dots, X_n) = \sum_i (-1)^{i+1} \rho(X_i) f(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \\ + \sum_{i,j} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n)$$

Por exemplo, as expressões de  $d_n$  para  $n \leq 2$  são:

$$d_0 v(X) = \rho(X)v$$

se  $v \in V$  e  $x \in \mathfrak{g}$

$$d_1 f(X, Y) = \rho(X)f(Y) - \rho(Y)f(X) - f([X, Y])$$

se  $f \in A^1$  e  $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$d_2 f(X, Y, Z) = \rho(X)f(Y, Z) - \rho(Y)f(X, Z) + \rho(Z)f(X, Y) \\ - f([X, Y], Z) + f([X, Z], Y) - f([Y, Z], X)$$

se  $f \in A^2$  e  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

**Proposição 3.1.** Para toda  $f \in A^n$ ,  $df \in A^{n+1}$  e  $d^2 = 0$ , isto é  $d_{n+1}d_n = 0$  para todo  $n \geq 0$ .

*Demonstração.* Ver [2]. □

**Definição 3.1.** Temos as seguintes definições:

1.  $C^n =: \ker d_n \subset A^n$
2.  $F^n := \operatorname{im} d_{n-1}$ . Tem-se pela proposição anterior que  $F^n \subset C^n$
3.  $H^n = C^n / F^n$  para  $n \geq 1$

Os elementos de  $C^n$  são chamados de cociclos e os de  $F^n$  de cofronteiras e os espaços  $H^n$  são os espaços de cohomologia da representação. Rigorosamente deveria se escrever  $H^n(\mathfrak{g}, \rho)$ . Seja agora  $\rho$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ , de

dimensão finita, e  $W$  um subespaço de  $V$  que seja invariante por  $\rho$ . Seja  $P$  o conjunto das projeções de  $V$  cuja imagem é  $W$ . Isto é,

$$P = \{P \in \operatorname{gl}(V) : P^2 = P, \operatorname{im} P = W\}$$

O núcleo de cada projeção  $P \in \mathbf{P}$  é um subespaço complementar a  $W$ , pois o núcleo e a imagem de uma projeção são complementares. Reciprocamente, dada uma decomposição  $V = W_1 \oplus W_2$  a aplicação  $v = v_1 + v_2 \in V \rightarrow v_1 \in W_1$ , com  $v_1 \in W_1$  e  $v_2 \in W_2$  define uma projeção com núcleo  $W_2$  e imagem  $W_1$ . Portanto, os complementares  $W_2$  de  $W_1$  são descritos pelas projeções com imagem  $W_1$ .

**Lema 3.2.** *Supondo  $W_1$  invariante, um complementar  $W_2$  é invariante se e somente se a projeção correspondente comuta para todos os elementos da imagem de  $\sigma$ , e dizer, se e somente se  $[\sigma(X), P] = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ .*

*Demonstração.* Suponhamos primeiro que a projeção comuta com todos os elementos da imagem de  $\rho$ . Seja  $v \in \ker P$  e  $X \in \mathfrak{g}$ . Então  $P\rho(X)v = \rho(X)Pv + [P, \rho(X)]v = 0$  e segue que  $\rho(X)(v) \in \ker P$ , e dizer o complementar  $W_2$  é invariante por  $\rho$ . Por outro lado a mesma igualdade mostra que  $[\rho(X), P]v = 0$  se  $v \in \ker P$  e invariante. Além do mais se  $w \in W_1$  então  $Pw = w$  e  $\sigma(X)w \in W$  e daí temos  $[\sigma(X), P]w = 0$ . Então temos que  $[\sigma(X), P] = 0$ .  $\square$

Algebricamente, a existência de um complementar invariante é descrito pela comutatividade da projeção com os elementos da álgebra. Esta comutatividade, como vamos a ver a continuação, tem uma interpretação cohomológica. Para simplificar a notação denotaremos  $W_1$  por  $W$ .

O conjunto  $\mathbf{P}$  das projeções sobre  $W$  é um subespaço afim do espaço dos endomorfismos de  $V$ . Seu subespaço vetorial paralelo é o espaço das transformações cuja imagem e  $W_1$  e que se anulam em  $W_1$  dado por

$$\varepsilon = \{T \in \mathfrak{gl}(V) : T(W) = 0; T(V) \in W\}$$

De fato, temos que se  $P \in \mathbf{P}$ ,  $Q \in \mathbf{P}$  então  $P$  e  $Q$  coincidem em  $W$  e, portanto,  $P - Q$  se anula em  $W$  e como a imagem esta em  $W$  então  $(P - Q) \in \varepsilon$ . Isto mostra que  $P$  esta contido num subespaço afim paralelo a  $\varepsilon$ . Por outro lado, dados  $P \in \mathbf{P}$ ,  $T \in \varepsilon$  temos que  $(P + T) \in \mathbf{P}$  pois certamente sua imagem esta em  $W$ , sua restrição a  $W$  é a identidade pelo fato de  $T$  se anular em  $W$  e

$$(P + T)^2 = P^2 + PT + TP + T^2 = P + T$$

pois  $P^2 = P$ ,  $T^2 = 0$ ,  $TP = 0$  e  $PT = T$ , como decorre do fato de que a imagem de  $T$  esta contida em  $W$  e a restrição de  $P$  a  $W$  é a identidade. Em suma, para qualquer projeção  $P \in \mathbf{P}$  vale  $\mathbf{P} = P + \varepsilon$ . Desta forma os subespaços complementares a  $W$  são descritos pelos elementos de  $\varepsilon$  tão logo fixamos uma projeção  $P_0 \in \mathbf{P}$ .

Retomando à questão da existência de complementares invariantes, fixado  $P_0 \in \mathbf{P}$  e tomando  $T \in \varepsilon$ , então pelo 3.2 o subespaço complementar

associado a  $P = P_0 + T$  é invariante se e só se  $[\rho(X), P] = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  o que, por sua vez, ocorre se e só se

$$[\rho(X), T] = [\sigma(X), -P_0]$$

para todo  $X \in \mathfrak{g}$ .

Agora vamos a definir uma representação de  $\mathfrak{g}$  que será de grande utilidade e vai nos permitir interpretar a igualdade de acima como uma igualdade cohomológica. Seja  $\rho^* : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{e})$  a aplicação dada por

$$\rho^*(X)T = [\rho(X), T]$$

$\rho^*$  é realmente uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{e}$ , pois é a restrição a  $\mathfrak{e}$  da composta da representação adjunta de  $gl(V)$  pela representação  $\rho$ . Esta restrição é possível devido a que  $\mathfrak{e}$  é invariante pelas adjuntas de  $\rho(X)$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , já que a imagem da aplicação

$$\rho(X)T - T\rho(X)$$

é um subespaço contido em  $W$ , o e núcleo dessa aplicação contem  $W$ , pois este subespaço é invariante por  $\sigma(X)$ .

**Proposição 3.3.** *Com as notações acima temos que se  $H^1(\mathfrak{g}, \rho^*) = 0$  então todo subespaço invariante  $W$  admite subespaço invariante complementar.*

*Demonstração.* A igualdade

$$[\rho(X), T] = [\rho(X), -P_0]$$

se interpreta assim: o primeiro membro não é nada mais nada menos que  $\rho^*(X)T$ , isto é,  $dT$ . Já o segundo membro é  $f(X)$  onde  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{e}$  é dada por  $f(X) = [\rho(X), -P_0]$ . Certamente essa  $f$  é linear e pertence a  $A_1$ . Mais do que isso  $f$  é um cociclo pois, pela identidade de Jacobi em  $gl(\mathfrak{e})$ , temos que:

$$\begin{aligned} df(X, Y) &= \rho^*f(Y) - \rho^*(Y)f(X) - f[X, Y] \\ &= [\rho(X), [\rho(Y), -P_0]] - [\rho(Y), [\rho(X), -P_0]] - [\rho([X, Y]), -P_0] \\ &= [\rho(X), [\rho(Y), -P_0]] - [\rho(Y), [\rho(X), -P_0]] - [[\sigma(X), \sigma(Y)], -P_0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

E dizer, o subespaço complementar associado a  $P$  é invariante se a cofronteira  $dT$  coincide com o cociclo  $f(X) = [\sigma(X), -P_0]$ . É claro que se  $H^1(\mathfrak{g}, \sigma^*) = 0$  esta condição se satisfaz.  $\square$

Encerramos esta seção mencionando que existe uma relação bastante estrita entre a cohomologia de álgebras de Lie, um conceito algébrico, e a cohomologia de grupos de Lie (um conceito topológico): se um grupo de Lie é compacto então sua cohomologia de De Rham coincide com a cohomologia de sua álgebra de Lie na representação trivial ( $\rho = 0$  em dimensão um). O leitor pode ver uma demonstração desse fato em [9].

### 3.2

#### Lema de Whitehead

No seguinte teorema vamos a mostrar que se  $\mathfrak{g}$  é semi-simples, então, para todas suas representações de dimensão finita vale  $H^1 = 0$ . Este resultado se conhece na literatura como primeiro lema de Whitehead. Isso com a proposição precedente garante o teorema de Weyl. Antes disso precisamos do seguinte lema.

**Lema 3.4.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra semi-simples e  $\rho$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ . Então*

$$V = \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker \rho(X) + \sum_{X \in \mathfrak{g}} \operatorname{im} \rho(X)$$

*Demonstração.* Ver [2]. □

**Teorema 3.5.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita e  $\rho$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$  também de dimensão finita. Então  $H^1(\mathfrak{g}, \rho)$  se anula.*

*Demonstração.* Seja  $\rho_0$  a representação canônica de  $\mathfrak{g}$  em  $A^1$ . E dizer para  $f \in A^1, X \in \mathfrak{g}$ ,  $\rho_0(X)f$  é dada por

$$(\rho_0(X)f)(Y) = \rho(X)f(Y) - f[X, Y]$$

Nosso objetivo é mostrar que  $C^1 = F^1$ , sendo que esses dois espaços são subespaços de  $A_1$ , isto é, do espaço da representação de  $\rho_0$ . Seja  $f \in C^1$ . Escrevendo  $d_1 f$  como  $df$  temos por definição que

$$(df)(X, Y) = \rho(X)f(Y) - \rho(Y)f(X) - f([X, Y])$$

Logo se  $f \in C^1$  temos que vale:

$$(df)(X, Y) = \rho(X)f(Y) - \rho(Y)f(X) - f([X, Y]) = 0$$

e daí temos que

$$\rho(Y)f(X) = \rho(X)f(Y) - f([X, Y]) = \rho_0(X)f(Y)$$

de onde se tira que

$$\rho_0(X)f = d_0(f(X))$$

Isso quer dizer que  $\rho_0(X)f$  é uma cofronteira. Temos então que  $\rho_0(X)C^1 \in F^1$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ . Como  $F^1 \in C^1$  isso mostra que  $C^1$  é invariante por  $\rho_0$ . Vamos a denotar por  $\bar{\rho}$  a restrição de  $\rho_0$  a  $C^1$ . O fato de que  $\rho_0(X)C^1 \in F^1$  mostra que

$$\sum_{X \in \mathfrak{g}} \text{im} \bar{\rho}(X) \subset F^1$$

Por outro lado temos que pelo lema 3.4, para qualquer representação de uma álgebra semisimples, a soma das imagens dos elementos de  $\mathfrak{g}$  complementa a interseção de seus núcleos. Em particular para  $\bar{\rho}$  temos

$$C^1 = \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker \bar{\rho}(X) \oplus \sum_{X \in \mathfrak{g}} \text{im} \bar{\rho}(X)$$

Para mostrar que  $C^1 = F^1$  é suficiente mostrar que  $\bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker \bar{\rho}(X) = 0$  pois o segundo termo do segundo membro está em  $F^1$ . Temos que

$$\ker \bar{\rho}(X) := \{f \in C^1 : \rho_0(X)f(Y) = 0, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}$$

Logo seja  $f \in \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker \bar{\rho}(X)$ . Temos que  $\rho_0(X)(Y) = 0$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Então temos que  $\rho_0(X)f(Y) = 0$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , e dizer  $\rho(Y)f(X) = 0$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Invertendo as posições de  $X$  e  $Y$ , isso implica que  $f[X, Y] = 0$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . E dizer,  $f$  se anula no derivado  $\mathfrak{g}'$  de  $\mathfrak{g}$ . Mas, como  $\mathfrak{g}$  é semi-simples, segue do corolário 2.22 que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$  e logo temos  $f = 0$ . E dizer  $\bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \ker \bar{\rho}(X) = 0$ , concluindo que  $H^1(\mathfrak{g}, \rho) = 0$ .  $\square$

Este ultimo resultado se conhece na literatura como primeiro lema de Whitehead.

### 3.3

#### Teorema de Weyl

**Teorema 3.6.** *As representações finitas de álgebras semi-simples são completamente redutíveis.*

*Demonstração.* Seja  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V)$  representação finita de  $\mathfrak{g}$ . Segue do teorema anterior e da proposição 3.3 que todo subespaço invariante  $W$  admite subespaço complementar invariante. Logo pela proposição 2.2 temos que a representação é completamente redutível.  $\square$

Para uma demonstração alternativa de teorema de Weyl, sem usar cohomologia, pode se ver [1] ou [3].

Vale dizer que a demonstração original de Weyl se reduzia ao caso de álgebras complexas, utilizando o chamado truque unitario de Weyl, que associa a uma álgebra semi-simples complexa um grupo de Lie compacto. A demonstração cohomologica, no entanto, não se restringe ao corpo dos complexos.

## 4

### Subálgebras de Cartan

#### 4.1

##### Subálgebras de Cartan e elementos regulares

Um conceito verdadeiramente onipresente no estudo das álgebras de Lie é o conceito de subálgebra de Cartan.

**Definição 4.1.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Uma subálgebra  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  é dita subálgebra de Cartan se satisfaz as seguintes condições:

1.  $\mathfrak{h}$  é nilpotente.
2. o normalizador de  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{g}$  coincide com  $\mathfrak{h}$ . Esta condição é equivalente a seguinte condição: se  $[X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$  então  $X \in \mathfrak{h}$ .

Mais na frente vamos ver que uma subálgebra é de Cartan se e só se  $\mathfrak{h}$  é abeliana, todo elemento de  $\mathfrak{h}$  é semi-simples e  $\mathfrak{h}$  é maximal com estas propriedades, mas neste capítulo usaremos a primeira caracterização.

A continuação vamos a introduzir a definição de elemento regular e analisar sua ligação com as subálgebras de Cartan. Esta ligação é feita da seguinte forma: o autoespaço generalizado associado ao autovalor nulo de um elemento regular é uma subálgebra de Cartan e, reciprocamente, toda subálgebra de Cartan é dessa maneira.

**Definição 4.2.** O polinômio característico de  $ad(X)$  denotado por  $p_x$  é da forma

$$p_x(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \dots + p_1(X)\lambda + p_0(X)$$

onde  $n = \dim(\mathfrak{g})$  e cada  $p_i(\cdot)$  é um polinômio de grau  $n - i$  em  $X$ , já que os coeficientes do polinômio característico são polinômios no espaço das

transformações lineares e  $ad$  é linear em  $X$ . Em geral esses coeficientes. O posto de uma álgebra de Lie de dimensão finita é o menor índice  $i$  em que  $p_i$  não é identicamente nulo, onde  $p_i$  denota, como acima, os coeficientes dos polinômios característicos. Um elemento  $X \in \mathfrak{g}$  é dito *regular* se  $p_i(X) = 0$  onde  $i$  é o posto de  $\mathfrak{g}$ .

**Teorema 4.1.** *Seja  $X \in \mathfrak{g}$  e denote por  $\mathfrak{g}_0(X)$  o autoespaço generalizado associado ao autovalor nulo na decomposição primaria*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(X) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k}$$

*de  $ad(X)$  com  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  autovalores não nulos. Se  $X$  é regular então  $\mathfrak{g}_0(X)$  é subálgebra de Cartan.*

*Demonstração.* Dividimos a demonstração em tres passos:

1.  $\mathfrak{g}_0(X)$  é subálgebra, pois pela proposição 2.24, em geral  $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$
2. Vamos a mostrar que  $\mathfrak{g}_0(X)$  coincide com seu normalizador. Tome  $Y \notin \mathfrak{g}_0(X)$  e escreva

$$Y = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_k$$

com  $Y_0 \in \mathfrak{g}_0(X)$ ,  $Y_i \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ .

Certamente algum  $Y_i$  é não nulo. Como os subespaços  $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$  são invariantes por  $ad(X)$ , a decomposição correspondente para  $[X, Y]$  é dada por

$$[X, Y] = [X, Y_0] + [X, Y_1] + \cdots + [X, Y_k]$$

o que mostra que  $[X, Y] \notin \mathfrak{g}_0(X)$ , pois a restrição de  $ad(X)$  a cada  $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$  é inversível ja que esses autovalores são diferentes de zero e portanto  $[X, Y_i] \neq 0$  para algum  $i = 1, \dots, k$ . Como  $X \in \mathfrak{g}_0(X)$  temos que  $Y \notin \mathfrak{g}_0(X)$  não normaliza  $\mathfrak{g}_0(X)$  e logo  $\mathfrak{g}_0(X)$  coincide com seu normalizador.

3. Agora vamos a mostrar que  $\mathfrak{g}_0(X)$  é nilpotente. Para isso, usaremos o fato de  $X$  ser regular. A ideia é mostrar que para  $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$ ,  $ad(Y)$  restrita a  $\mathfrak{g}_0(X)$  é nilpotente a aplicar ao teorema de Engel. Isso, pos sua vez, se garante mostrando que o polinômio característico de  $ad(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$  é da forma  $\lambda^r$  onde  $r$  é a dimensão de  $\mathfrak{g}_0(X)$ . Observe que  $ad(X)|_{\mathfrak{g}_0}$  é nilpotente, pois este é o autoespaço generalizado associado ao autovalor nulo. Assim, denote por  $\pi_0$  o polinômio característico de  $ad(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$  e



suponha, por absurdo, que este polinômio não seja da forma  $\lambda^r$ . Então temos

$$\pi_0(\lambda) = \lambda^r + \cdots + q_{r-i}\lambda^{r-i}$$

com  $i > 0$  e  $q_{r-i}(Y) \neq 0$ . Isso garante que  $q_{r-i}$  não é um polinômio identicamente nulo em  $\mathfrak{g}_0(X)$ . Como os subespaços  $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$  são invariantes por  $ad(Y)$  (pois  $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_{\lambda_i}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ ), temos que o polinômio característico de  $ad(Y)$  é dado por

$$p_Y(\lambda) = \pi_0\pi_1 \dots \pi_k$$

com  $\pi_i$  o polinômio característico de  $ad(Y)|_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}}$ . O termo constante de  $\pi_i$  é dado por  $\det(ad(Y)|_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})$ . Agora, a aplicação  $d_i(Z) := \det(ad(Z)|_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})$  é um polinômio em  $\mathfrak{g}_0(X)$  e não é identicamente nulo pois  $ad(X)|_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}}$  é inversível, pois  $\lambda_i \neq 0$ . Além disso, o termo de menor grau do polinômio  $p_Y$  tem por coeficiente o polinômio

$$q_{r-i}(Y)d_1(Y) \dots d_k(Y)$$

que não é um polinômio identicamente nulo em  $Y$  como o é cada um dos seus fatores. Mas isso contradiz o fato de  $X$  ser regular, pois esse termo de menor grau se anula em  $X$  já que  $q_{r-i}$  se anula em  $X$ , pois por definição  $ad(X)$  restrita a  $\mathfrak{g}_0$  é nilpotente. Temos então que o polinômio característico de  $ad(Y)|_{\mathfrak{g}(X)}$  é da forma  $\lambda^r$  e logo  $ad(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$  é nilpotente para todo  $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$  e, pelo teorema de Engel, temos que  $\mathfrak{g}_0(X)$  é nilpotente.

□

Um corolário imediato é o seguinte:

**Corolário 4.2.** *Existem subálgebras de Cartan.*

*Demonstração.* Como os elementos regulares são elementos que não anulam um polinômio não nulo, não há dúvida que eles existem. □

**Corolário 4.3.** *Se  $\mathfrak{h}$  é subálgebra de Cartan e  $X \in \mathfrak{h}$  é elemento regular temos que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$ . Em outras palavras,  $\mathfrak{g}_0(X)$  é a única subálgebra de Cartan que contém  $X$  se  $X$  é elemento regular.*

*Demonstração.* Como  $\mathfrak{h}$  é subálgebra de Cartan, ela é nilpotente e, portanto,  $ad(X)|_{\mathfrak{h}}$  é nilpotente, e daí que,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0(X)$ . Mas  $\mathfrak{g}_0(X)$  é nilpotente o que implica que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$  já que  $\mathfrak{h}$  é seu próprio normalizador. □

O próximo objetivo vai ser mostrar a recíproca do anterior teorema, isto é, que se  $\mathfrak{h}$  é subálgebra de Cartan então  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$  para algum elemento regular  $X$ . Se mostrarmos que dada uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  existe um elemento regular  $X \in \mathfrak{h}$  então temos o resultado desejado. Para isso são necessários alguns resultados preliminares:

**Proposição 4.4.** *Seja  $\mathfrak{g}$  álgebra de Lie nilpotente sobre um corpo algebricamente fechado, e seja  $\rho$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ . Então existem funcionais lineares  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  tal que se*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\}$$

então  $V_{\lambda_i}$  é  $\mathfrak{g}$ -invariante,  $i = 1, \dots, s$  e

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$$

Os funcionais  $\lambda_i$  são chamados de pesos e os espaços  $V_{\lambda_i}$  são os espaços pesos associados.

**Lema 4.5.** *Seja  $\mathfrak{h}$  subálgebra de Cartan e seja  $\rho$  a representação de  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  induzida pela representação adjunta de  $\mathfrak{g}$ . Então se  $X \in \mathfrak{h}$ , temos que  $\mathfrak{g}_0(X) = \mathfrak{h}$  se e só se  $\rho(X)$  é inversível.*

*Demonstração.* De fato,  $\rho(X)$  é inversível se e só se  $\ker \rho(X) = 0$  o que ocorre se e só se  $\mathfrak{g}_0(X) \subset \mathfrak{h}$  já que  $\text{ad}(X)$  é nilpotente em  $\mathfrak{g}_0(X)$  e  $\rho(X)$  é induzida por  $\text{ad}(X)$ . Como  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}_0(X)$  para todo  $X \in \mathfrak{h}$ , tem-se o lema.  $\square$

**Lema 4.6.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma subálgebra de Cartan. Então existe  $X \in \mathfrak{h}$  tal que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$*

*Demonstração.* Considera-se como anteriormente a representação de  $\mathfrak{h}$  no espaço quociente  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  dada por

$$\rho(X)(Y + \mathfrak{h}) = [X, Y] + \mathfrak{h}$$

Tomando a extensão dessa expressão ao fecho algébrico do corpo base se necessário e considerando que  $\mathfrak{h}$  é nilpotente temos que pela proposição 4.4 existe uma decomposição em subespaços peso. Como  $\mathfrak{h}$  coincide com seu normalizador, temos que nenhum desses pesos se anulam. De fato, o anulamento de algum dos pesos da extensão implicaria a existência de um  $v = Y + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  tal que  $\rho(X)v = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{h}$ , o que significa que existe um  $Y \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$  com  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$  para todo  $X \in \mathfrak{h}$ , contradizendo o fato de  $\mathfrak{h}$  ser subálgebra de Cartan. Temos então que existe  $X \in \mathfrak{h}$  que não se anula em

nenhum dos pesos, o que significa que  $\rho(X)$  é inversível. Então para esse  $X$ , o lema 4.5 garante que  $g_0(X) = \mathfrak{h}$ .  $\square$

**Teorema 4.7.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie real e  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  uma subálgebra de Cartan. Então existe um elemento regular em  $\mathfrak{h}$*

*Demonstração.* Seja  $\phi$  um automorfismo de  $\mathfrak{g}$ . Então, para  $X \in \mathfrak{g}$ , como pela definição de automorfismo vale  $\phi[X, \phi^{-1}(Y)] = [\phi(X), Y]$  para todo  $Y \in \mathfrak{g}$ , tem-se a conjugação

$$ad(\phi(X)) = \phi \circ ad(X) \circ \phi^{-1}$$

Portanto  $ad(\phi(X))$  e  $ad(X)$  tem o mesmo polinômio característico e daí que  $X$  é regular se e só se  $\phi(X)$  é regular. Então a ideia é buscar um automorfismo  $\phi$  e um elemento  $X \in \mathfrak{h}$  tal que  $\phi(X)$  seja regular. Para isso, considera-se a aplicação  $\psi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  dada por

$$\psi(X, Y) = e^{ad(Y)}X$$

A aplicação linear  $e^{ad(Y)}$  é um automorfismo de  $\mathfrak{g}$  pois  $ad(Y)$  é uma derivação. Por outro lado, o conjunto dos elementos regulares de  $\mathfrak{g}$  é aberto e denso em  $\mathfrak{g}$  já que é o conjunto dos pontos onde um polinômio não se anula. Então, é suficiente mostrar que a imagem da aplicação contém um aberto, pois nesse caso a imagem intersecciona o conjunto de elementos regulares e logo existe um  $X \in \mathfrak{h}$  que é conjugado a um elemento regular e, portanto, é regular. Agora,  $\psi$  é uma aplicação diferenciável. Assim, para mostrar que sua imagem contém um aberto é suficiente, pelo teorema da Função Implícita, mostrar que sua diferencial  $d\psi_{(X,Y)}$  tem posto máximo para algum  $(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ . Tomando  $Z \in \mathfrak{g}$ ,  $W \in \mathfrak{h}$  e  $Y = 0$ , temos

$$d\psi_{(0,X)}(Z, W) = \frac{d}{dt} e^{ad(tZ)}(X + tW)|_{t=0} = -ad(X)Z + W$$

Agora, pelo lema 4.6 podemos escolher  $X \in \mathfrak{h}$  tal que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$ . Como a transformação linear induzida por  $ad(X)$  em  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  é inversível (pelo lema 4.5, a imagem de  $ad(X)$  complementa  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{g}$ ). Na fórmula acima  $Z$  e  $W$  são arbitrários, então se  $X$  é tal que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$  temos que  $d\psi_{(0,X)}$  é sobrejetora.  $\square$

É possível estender de maneira rápida o mesmo resultado para álgebras de Lie complexas. De fato, dada uma álgebra de Lie complexa  $\mathfrak{g}$  sua realificada  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  é a álgebra cujo espaço vetorial subjacente é o espaço vetorial real obtido de  $\mathfrak{g}$  restringindo os escalares a os reais. Agora, o fato de uma subálgebra  $\mathfrak{h}$  ser de Cartan ou não, depende apenas do colchete em  $\mathfrak{g}$  e não dos escalares que se tome. Assim, uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  é também, quando

considerada como subespaço vetorial real, uma subálgebra de Cartan, com dimensão duplicada, de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ . Aplicando então o teorema 4.7 para as álgebras reais, temos que  $\mathfrak{h}$  contem um elemento regular para  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ . Por outro lado, uma transformação linear  $T$  de um espaço vetorial complexo, é também linear sobre  $\mathbb{R}$  no realificado do espaço. O polinomio característico de  $T$ , considerada como transformação linear sobre  $\mathbb{C}$ , é da forma

$$P(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} \cdots (z - \lambda_s)^{k_s}$$

com  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  os autovalores de  $T$ . Já ao considerar  $T$  como transformação linear real, seus autovalores passam a ser  $\lambda_j, \overline{\lambda_j}, j = 1, \dots, s$ , e o polinomio característico fica sendo

$$Q(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} (x - \overline{\lambda_1})^{k_s} \cdots (x - \lambda_s)^{k_s} (x - \overline{\lambda_s})^{k_s}$$

cujo grau é o dobro do grau de  $P$ . Por essa relação entre  $P$  e  $Q$ , vê-se que a multiplicidade de uma raiz real de  $Q$  é o dobro dessa multiplicidade como raiz de  $P$ . Em particular, isso ocorre com o autovalor nulo de  $T$ . Aplicando esse fato a os elementos regulares de  $\mathfrak{g}$  temos que o posto de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  é o dobro do posto de  $\mathfrak{g}$  e que  $X \in \mathfrak{g}$  é regular se e só for regular para  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ . Temos então que o teorema 4.7 vale também para álgebras de Lie complexas.

## 4.2

### Conjugação de subálgebras de Cartan

O objetivo sera mostrar que em  $\mathbb{C}$  então duas subálgebras de Cartan são obtidas uma da outra por um automorfismo da álgebra, fato que no futuro vai ser essencial para mostrar que os diagramas de Dynkin provenientes de duas subálgebras diferentes são iguais. Não e difícil ver que se  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é um automorfismo de  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Cartan então  $\phi(\mathfrak{h})$  é subálgebra de Cartan.

**Definição 4.3.** Duas subálgebras de Cartan são ditas *conjugadas* se uma e imagem de outra por um automorfismo de  $\mathfrak{g}$ .

Como a inversa e a composta de automorfismos são automorfismos temos que a relação de conjugação no conjunto das subálgebras de Cartan e uma relação de equivalencia. Essa relação de equivalencia no conjunto das subálgebras de Cartan passa ao conjunto dos elementos regulares pelo teorema 4.1 da seguinte forma: denote por  $\overline{\mathfrak{g}}$  o conjunto dos elementos regulares de  $\mathfrak{g}$ . Para  $X \in \overline{\mathfrak{g}}$ ,  $\mathfrak{g}_0(X)$  e uma subálgebra de Cartan. Dessa forma define-se em

$\bar{g}$  a relação  $X \sim Y$  se  $\mathfrak{g}_0(X)$  é conjugada de  $\mathfrak{g}_0(Y)$ . Logo essa relação em  $\bar{g}$  é uma relação de equivalencia.

As classes de equivalencia  $\sim$  são invariante por automorfismos, isto é,  $X \sim Y$  caso um deles seja imagem de outro por um automorfismo de  $\mathfrak{g}$ . De fato se  $Y = \phi(X)$ , então  $ad(Y) = \phi \circ ad(X) \circ \phi^{-1}$  e, portanto,  $\mathfrak{g}_0(X) = \phi(\mathfrak{g}_0)(X)$  mostrando que  $X \sim Y$ . No entanto, em geral, pode se ter que  $X \sim Y$  sem que eles sejam levados um no outro por automorfismos de  $\mathfrak{g}$ .

Felizmente, como vamos a mostrar a continuação, no caso de álgebras de Lie complexas, existe uma única classe de equivalencia, isto é, as subálgebras de Cartan são conjugadas entre si. A verdade isso vale para toda álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado é pode ser mostrado mediante uma abordagem algebrica, como o leitor pode ver em ver [8]. No caso de álgebras de Lie complexas vamos a dar uma demonstração por intermédio do calculo diferencial

**Teorema 4.8.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{R}$  e seja  $\bar{g}$  o subconjunto, aberto, e denso dos elementos regulares de  $\mathfrak{g}$ . As componentes conexas de  $\bar{g}$  são abertos em  $\mathfrak{g}$ . Tome  $X$  e  $Y$  numa mesma componente conexa, então  $X \sim Y$ .*

*Demonstração.* O primeiro passo consiste em mostrar em que se  $X$  é um elemento regular, então sua classe de equivalencia é um aberto que o contém. Por isso, se considera a aplicação

$$\psi(Y_1, Y_2) = e^{ad(Y_1)}Y_2$$

com  $Y_1 \in \mathfrak{g}$  e  $Y_2 \in \mathfrak{g}_0(X)$ . Como  $\mathfrak{g}_0(X)$  é subálgebra de Cartan, a demonstração feita no teorema 4.7 pode ser aplicada a  $X$  e  $\mathfrak{g}_0$  para concluir que  $d\psi_{(0,X)}$  é sobrejetora. Logo pelo teorema da função implícita temos que existe vizinhança  $U$  de  $X = \psi(0, X)$  tal que todo  $Z$  e da forma  $\psi(Y_1, Y_2)$  com  $Y_1 \in U_1$  e  $Y_2 \in U_2$ , sendo  $U_1$  vizinhança na origem de  $\mathfrak{g}$  e  $U_2$  vizinhança de  $X$  em  $\mathfrak{g}_0(X)$ . Pode se assumir  $U_2 \subset \bar{g}$ . Pelo corolário 4.3 temos que existe uma única subálgebra de Cartan contendo um elemento regular. Com isso temos que  $\mathfrak{g}_0(Y_2) = \mathfrak{g}_0(X)$  pois como  $U_2 \subset \bar{g}$  e  $Y_2 \in U_2$  temos que  $Y_2$  é regular e então  $\mathfrak{g}_0(Y_2)$  é uma subálgebra de Cartan que contem  $Y_2$ , que por sua vez esta na subálgebra de Cartan  $\mathfrak{g}_0(X)$ . Logo necessariamente  $\mathfrak{g}_0(Y_2) = \mathfrak{g}_0(X)$ . Dessa forma

$$\mathfrak{g}_0(\psi(Y_1, Y_2)) = e^{ad(Y_1)}\mathfrak{g}_0(Y_2) = e^{ad(Y_1)}\mathfrak{g}_0(X)$$

e, portanto, para todo  $Z$  em uma vizinhança de  $X$  vale  $Z \sim X$ . Isso mostra que as classes de equivalencia de  $\sim$  são abertas. Como as classes de equivalência particionam  $\bar{g}$  elas são tanto abertas quanto fechadas, e por isso,

são uniões de componentes conexas de  $\bar{\mathfrak{g}}$  e logo as componentes conexas de  $\bar{\mathfrak{g}}$  estão contidas numa mesma classe de equivalência.  $\square$

Temos então que a quantidade de classes de equivalência é no máximo o numero de componentes conexas de  $\bar{\mathfrak{g}}$ . Esse numero é finito, pois  $\bar{\mathfrak{g}}$  é o conjunto dos pontos que não anulam um polinomio não nulo, e um conjunto desse tipo tem quantidade finita de componentes conexas. No caso particular das álgebras complexas foi visto que se pode tomar a realificação  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  de  $\mathfrak{g}$  sem que se alterem as subálgebras de Cartan nem os elementos regulares. Mas, nem por isso, o conjunto dos elementos regulares deixa de ser o conjunto dos pontos que não anulam um polinomio com coeficientes complexos num espaço vetorial complexo. Para esses polinimios o complementar de seus zeros é conexo, como mostra a seguinte proposição.

**Proposição 4.9.** *Seja  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  um polinomio que não é identicamente nulo. Então*

$$C = \{v \in \mathbb{C}^n : p(v) \neq 0\}$$

*é conexo.*

*Demonstração.* A prova é por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , o resultado vale, pois o conjunto e raízes de um polinomio é finito e, portanto, seu complementar em  $\mathbb{C}$  é conexo. Para  $n \geq 2$  sejam  $z = (z_1, \dots, z_n)$  e  $w = (w_1, \dots, w_n)$  com  $p(z) \neq 0 \neq p(w)$ . Fixando as ultimas coordenadas, tem-se os dois polinomios em  $\mathbb{C}^{n-1}$

$$q_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = p(x_1, \dots, x_{n-1}, z_n)$$

e

$$q_2(x_1, \dots, x_{n-1}) = p(x_1, \dots, x_{n-1}, w_n)$$

Esses polinomios não são identicamente nulos pelo fato de  $p$  não se anular em  $z$  e em  $w$ . Como o conjunto dos elementos que não se anulam um polinomio não nulo é aberto e denso, existe  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$  tal que  $q_1(x^0) \neq q_2(x^0)$ . Pelo passo de indução  $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, z_n)$  e  $z$  estão numa mesma componente conexa de  $C$  pois  $x^0$  e  $(z_1, \dots, z_{n-1})$  não anulam  $q_1$ . Da mesma forma,  $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, w_n)$  e  $w$  estão numa mesma componente conexa de  $C$ . Agora, tome o polinomio de uma variável

$$r(u) = p(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, u)$$

Este também é um polinomio não nulo e o mesmo argumento mostra que os pontos  $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, z_n)$  e  $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, w_n)$  estão numa mesma componente

conexa de  $C$ . Juntando tudo, se conclui que  $z$  e  $w$  estão numa mesma componente conexa de  $C$  e, portanto, que  $C$  é conexo.  $\square$

Temos então o resultado buscado:

**Teorema 4.10.** *As subálgebras de Cartan de álgebras de Lie complexas são conjugadas entre si.*

*Demonstração.* Segue do teorema 4.8 e da proposição 4.9.  $\square$

## 5

### Estrutura de Álgebras de Lie semisimples

#### 5.1

##### Representações de $sl(2, \mathbb{C})$

Um dos fatos principais sobre as álgebras de Lie semi-simples sobre corpos algebricamente fechados é que toda raiz da representação adjunta de uma subálgebra de Cartan está associada a uma subálgebra de dimensão três isomorfa a  $sl(2, \mathbb{K})$ . A representação adjunta dessa subálgebra na álgebra desempenha um rol fundamental na compreensão das raízes e dos espaços de raízes associados à subálgebra de Cartan. Por isso é preciso um estudo das representações de  $sl(2, \mathbb{K})$ . Vamos a trabalhar sobre o corpo  $\mathbb{C}$  dos complexos, mas os resultados valem para todo corpo  $\mathbb{K}$  algebricamente fechado.

Começamos construindo uma família de representações irreducíveis de  $sl(2, \mathbb{C})$ . Tomamos a seguinte base de  $sl(2, \mathbb{C})$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uma observação importante é que esta álgebra é simples (em particular semi-simples)

**Lema 5.1.**  $sl(2)$  é simples

*Demonstração.* Ver [4] ou [2]. □

Considere o espaço vetorial  $\mathbb{C}[X, Y]$  de polinômios em duas variáveis  $X$  e  $Y$  com coeficientes complexos. Para cada inteiro  $d \geq 0$ , seja  $V_d$  o subespaço de polinômios homogêneos em  $X$  e  $Y$  de grau  $d$ . Assim,  $V_0$  é o espaço de dimensão 1 de polinômios constantes, e, para  $d \geq 1$  o espaço  $V_d$  tem uma base de monômios  $\{X^d, X^{d-1}Y, \dots, XY^{d-1}, Y^d\}$ . Assim  $V_d$  tem dimensão  $d + 1$

Agora vamos a ver que  $V_d$  é um  $sl(2, \mathbb{C})$  – módulo especificando um homomorfismo de álgebras de Lie  $\varphi : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(V_d)$  Desde que  $sl(2, \mathbb{C})$  é



gerado por  $E, F, G$ , o mapa  $\varphi$  é determinado por uma vez que especificamos  $\varphi(E)$ ,  $\varphi(F)$  e  $\varphi(H)$ . Vamos a definir

$$\varphi(E) := X \frac{\partial}{\partial Y}$$

e dizer,  $\varphi(E)$  é o mapa linear que diferencia o polinomio em relação a  $Y$  e multiplica ele por  $X$ . Então grado do polinomio e preservado. Analogamente definimos

$$\varphi(F) := Y \frac{\partial}{\partial X}$$

Finalmente definimos

$$\varphi(H) := X \frac{\partial}{\partial X} - Y \frac{\partial}{\partial Y}$$

Note que

$$\varphi(H)(X^a Y^b) = (a - b)X^a Y^b$$

**Teorema 5.2.** *Com as definições feitas acima temos que  $\varphi : sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow gl(V_d)$  é uma representação de  $sl(2, \mathbb{C})$*

*Demonstração.* Por construção  $\varphi$  é linear. Temos que provar que  $\varphi$  preserva os colchetes de Lie. Por linearidade e suficiente provar isso para os elementos da base de  $sl(2, \mathbb{C})$

1. Primeramente mostramos que  $[\varphi(E), \varphi(F)] = \varphi([E, F]) = \varphi(H)$

$$\begin{aligned} [\varphi(E), \varphi(F)](X^a Y^b) &= \varphi(E)(\varphi(F)(X^a Y^b)) - \varphi(F)(\varphi(E)(X^a Y^b)) \\ &= \varphi(E)(aX^{a-1}Y^{b+1}) - \varphi(F)(bX^{a+1}Y^{b-1}) \\ &= a(b+1)X^a Y^b - b(a+1)X^a Y^b \\ &= (a-b)X^a Y^b \\ &= \varphi(H)(X^a Y^b) \\ &= \varphi([E, F])(X^a Y^b) \end{aligned}$$

Calculamos separadamente a ação em  $X_d$

$$\begin{aligned} [\varphi(E), \varphi(F)](X^d) &= \varphi(E)(\varphi(F)(X^d)) - \varphi(F)(\varphi(E)(X^d)) \\ &= \varphi(E)(dX^{d-1}Y) - \varphi(F)(0) \\ &= dX^d \\ &= \varphi(H)(X^d) \end{aligned}$$

Analogamente com  $Y_d$ .

2. Vamos a provar que  $[\varphi(H), \varphi(E)] = \varphi([H, E]) = \varphi(2E) = 2\varphi(E)$

$$\begin{aligned}
 [\varphi(H), \varphi(E)](X^a Y^b) &= \varphi(H)(\varphi(E)(X^a Y^b)) - \varphi(E)(\varphi(H)(X^a Y^b)) \\
 &= \varphi(H)(bX^{a+1}Y^{b-1}) - \varphi(E)((a-b)X^a Y^b) \\
 &= b((a+1) - (b-1))X^{a+1}Y^{b-1} - (a-b)bX^{a+1}Y^{b-1} \\
 &= (ab - b^2 + 2b)X^{a+1}Y^{b-1} - (ab + b^2)X^{a+1}Y^{b-1} \\
 &= 2bX^{a+1}Y^{b-1} \\
 &= 2\varphi(E)(X^a Y^b)
 \end{aligned}$$

Se  $a = 0$  ou  $b = 0$  a relação também vale e temos que  $[\varphi(H), \varphi(E)] = \varphi([H, E]) = \varphi(2E)$

3. Resta mostrar que  $[\varphi(H), \varphi(F)] = -2\varphi(F)$ .

$$\begin{aligned}
 [\varphi(H), \varphi(F)](X^a Y^b) &= \varphi(H)\varphi(F)(X^a Y^b) - \varphi(F)\varphi(H)(X^a Y^b) \\
 &= \varphi(H)(aX^{a-1}Y^{b+1}) - \varphi(F)((a-b)X^a Y^b) \\
 &= a((a-1) - (b+1))X^{a-1}Y^{b+1} - a(a-b)X^{a-1}Y^{b+1} \\
 &= -2aX^{a-1}Y^{b+1} \\
 &= -2\varphi(F)(X^a Y^b) \\
 &= \varphi(-2F) \\
 &= \varphi([H, F])
 \end{aligned}$$

Se  $a = 0$  ou  $b = 0$  a relação também vale.

□

Pelo teorema anterior temos que a matriz de  $\varphi(E)$  em relação a base  $\{X^d, X^{d-1}Y, \dots, XY^{d-1}, Y^d\}$  é

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & d \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{bmatrix}$$

a matriz de  $\varphi(F)$  é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (d-1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e a matriz de  $\varphi(H)$  é diagonal

$$\begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -d+2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -d \end{bmatrix}$$

**Lema 5.3.** *O  $sl(2, \mathbb{C})$  – submódulo de  $V_d$  gerado por qualquer elemento particular  $X^a Y^b$  contém todos os elementos e logo é  $V_d$*

*Demonstração.* Segue de visualizar a ação de  $H, E, F$  em cada elemento  $X^a Y^b$  da base.  $\square$

Com isso se mostra o seguinte teorema

**Teorema 5.4.** *O  $sl(2, \mathbb{C})$  – módulo  $V_d$  é irredutível.*

*Demonstração.* Suponha que  $U$  seja um  $sl(2, \mathbb{C})$ -submódulo de  $V_d$ . Logo  $Hu \in U$  para todo  $u \in U$ . Como  $H$  atua diagonalmente em  $V_d$  temos que  $H$  atua diagonalmente em  $U$ , e logo temos um autovetor de  $H$  que se encontra em  $U$ . Como os autoespaços de  $H$  são de dimensão 1 e cada autoespaço é gerado por um monômio  $X^a Y^b$ , temos que o submódulo  $U$  contém um monômio. Então, pelo lema anterior,  $U$  contém uma base de  $V_d$ . Logo  $U = V_d$ .  $\square$

Nosso próximo objetivo é provar que todo  $sl(2, \mathbb{C})$  – módulo é isomorfo a um dos  $V_d$ . Nossa estratégia vai ser analisar os autovetores e autovalores de  $H$ . Para simplificar a notação vamos escrever  $E^2 v$  em lugar de  $E(Ev)$ .

**Lema 5.5.** *Suponha que  $V$  é um  $sl(2, \mathbb{C})$  – módulo e  $v \in V$  é um autovetor de  $H$  com autovalor  $\lambda$  então:*

1.  $Ev = 0$  ou  $Ev$  é um autovetor de  $H$  com autovalor  $\lambda + 2$
2.  $Fv = 0$  ou  $Fv$  é um autovetor de  $H$  com autovalor  $\lambda - 2$

*Demonstração.* 1. Se  $V$  é uma representação de  $sl(2, \mathbb{C})$  temos que, como  $[H, E] = 2E$ , então

$$H(Ev) = E(Hv) + [H, E]v = E(\lambda v) + 2Ev = (\lambda + 2)Ev$$

2.  $V$  é uma representação de  $sl(2, \mathbb{C})$  temos que, como  $[H, F] = -2F$  então

$$H(Fv) = F(Hv) + [H, F]v = F(\lambda v) - 2Fv = (\lambda - 2)Fv$$

□

**Lema 5.6.** *Seja  $V$  um  $sl(2, \mathbb{C})$  – módulo. Logo  $V$  contém um autovetor  $w$  de  $H$  tal que  $EW = 0$*

*Demonstração.* Como  $\mathbb{C}$  é um corpo fechado temos que o mapa  $H : V \rightarrow V$  tem ao menos um autovetor. Seja então  $Hv = \lambda v$ . Considere os vetores

$$v, Ev, E^2v, \dots$$

Se todos eles são diferentes de zero, então pelo lema anterior eles formam uma sequência infinita de autovetores com diferentes autovalores, logo formam uma sequência de autovetores linearmente independentes, o que é um absurdo pois  $V$  tem dimensão finita. Logo existe  $k \geq 0$  tal que  $E^k v \neq 0$  e  $E^{k+1} v = 0$ . Se tomamos  $w = E^k v$  então temos  $Hw = (\lambda + 2)w$  e  $EW = 0$ . □

**Teorema 5.7.** *Se  $V$  é um  $sl(2, \mathbb{C})$  – módulo irredutível, então  $V$  é isomorfo a um dos módulos  $V_d$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 5.6 temos que existe um autovetor de  $H$  tal que  $Ev = 0$ . Suponha que  $Hw = \lambda w$ . Seja então a sequência de vetores

$$w, Fw, F^2w, \dots$$

Então, como antes, existe  $d \geq 0$  tal que  $F^d w \neq 0$  e  $F^{d+1} w = 0$ . Vamos a dividir a prova em três passos

1. Afirmamos que os vetores  $w, Fw, \dots, F^d w$  formam uma base de um submódulo de  $V$ . Eles são linearmente independentes pois são autovetores de  $H$  com diferentes autovalores. Por construção, o espaço gerado por  $w, Fw, \dots, F^d w$  é invariante por  $H$  e  $F$ . Para mostrar que é invariante por  $E$  vamos a provar por indução em  $k$  que

$$E(F^k w) \in \text{span}\{F^j w, 0 \leq j \leq k\}$$

Se  $k = 0$  logo  $EW = 0$ . Temos

$$\begin{aligned} E(F^k w) &= EF(F^{k-1}w) \\ &= (FE + [E, F])(F^{k-1}w) \\ &= (FE + H)(F^{k-1}w) \\ &= F(E(F^{k-1}w) + H(F^{k-1}w)) \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que  $E(F^{k-1}w) \in \text{span}\{F^j w, j < k-1\}$  e logo temos que  $F(E(F^{k-1}w)) \in \text{span}\{F^j w, j < k\}$ . Por outro lado  $H(F^{k-1}w)$  é um múltiplo escalar de  $F^{k-1}w$ . Assim temos que os vetores  $w, Fw, \dots, F^d w$  formam uma base de um submódulo de  $V$ . Como  $V$  é irredutível temos que o submódulo gerado por  $F^k w$  para  $0 \leq k \leq d$  é igual a  $V$ .

2. Em este passo vamos a mostrar que  $\lambda = d$ . A matriz de  $H$  em relação a  $w, Fw, \dots, F^d w$  é diagonal pois e o traço de matriz e

$$\lambda + (\lambda - 2) + \dots + (\lambda - 2d) = (d+1)\lambda - (d+1)d$$

Como  $[E, F] = H$ , a matriz de  $H$  é igual ao comutador das matrizes de  $E$  e  $F$ , logo seu traço é zero e então  $\lambda = d$ .

3. Agora vamos a explicitar um isomorfismo  $V \simeq V_d$ . Como vimos acima  $V$  tem base  $\{w, Fw, \dots, F^d w\}$ . Por outro lado  $V_d$  tem como base

$$\{X^d, FX^d, \dots, F^d X^d\}$$

onde  $F^k X^d$  denota um múltiplo escalar de  $X^{d-k} Y^k$ . Ainda mais, o autovalor de  $H$  em  $F^k w$  é o mesmo que o autovalor de  $H$  em  $F^k X^d$ . Para ter um homeomorfismo, devemos ter um mapa que leve autovetores de  $H$  em autovetores de  $H$  para o mesmo autovalor. Definimos  $\psi : V \rightarrow V_d$  como

$$\psi(F^k w) := F^k X^d.$$

Vamos a mostrar que  $\psi(Xv) = X\psi(v)$  para todo  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . É claro que é suficiente mostrar isso para os elementos  $E, F, H$  da base de  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ :

- $\psi$  comuta com a ação de  $F$  pois  $\psi(F^k w) = F^k X^d$  e logo

$$\psi(F(F^k w)) = \psi(F^{k+1} w) = F^{k+1} X^d = F(F^k X^d) = F\psi(F^k w)$$

- $\psi$  comuta com a ação de  $H$  pois

$$\psi(HF^k w) = \psi((\lambda - 2k)F^k w) = (\lambda - 2k)\psi(F^k w) = H\psi(F^k w)$$

- Resta mostrar que  $\psi$  comuta com a ação de  $E$ . Vamos a usar indução em  $k$ . Para  $k = 0$  temos  $\psi(Ew) = \psi(0) = 0$  e  $E\psi(w) = \varphi(E)X^d = 0$  pois por definição  $\varphi(E) := X \frac{\partial}{\partial Y}$ . Agora, assumindo que vale para  $k = k - 1$  temos (usando o passo indutivo e a comutatividade em relação a  $H$  e  $F$ ) que:

$$\begin{aligned} \psi(E(F^k w)) &= \psi((FE + H)(F^{k-1} w)) \\ &= \psi(F(E(F^{k-1} w))) + \psi(H(F^{k-1} w)) \\ &= F(\psi(E(F^{k-1} w))) + H(\psi(F^{k-1} w)) \\ &= F(E(\psi(F^{k-1} w)) + H(\psi(F^{k-1} w))) \\ &= (FE + H)(\psi(F^{k-1} w)) \\ &= EF(\psi(F^{k-1} w)) \\ &= E(F(\psi(F^{k-1} w))) \\ &= E(\psi(F^k w)) \end{aligned}$$

□

Este teorema tem um importante corolário, cuja demonstração esta contida na prova do teorema precedente:

**Corolário 5.8.** *Se  $V$  é uma representação de dimensão finita de  $sl(2, (C))$  e  $w \in V$  um autovetor de  $H$  tal que  $EW = 0$  logo  $Hw = dw$  para algum inteiro não negativo  $d$  e o submódulo de  $V$  gerado por  $w$  é isomorfo a  $V_d$*

*Demonstração.* Pela primeira parte da demonstração do teorema temos que para algum  $d \geq 0$  os vetores  $w, Fw, F^2w, \dots, F^d w$  geram um submódulo de  $V$ . Logo pelos passos segundo e terceiro temos o resultado. □

## 5.2

### Decomposição de Álgebras de Lie semi-simples

**Teorema 5.9.** *Seja  $\mathfrak{h}$  subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Então*

1. *A forma de Killing restrita a  $\mathfrak{h}$  é não degenerada.*
2.  *$\mathfrak{h}$  é abeliano.*
3.  *$\mathfrak{h}$  é seu proprio centralizador.*

4. todo elemento de  $\mathfrak{h}$  é semi-simples.

*Demonstração.* 1. Sabemos que existe um elemento regular  $X \in \mathfrak{h}$  tal que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$  na decomposição primaria de  $ad(X)$  dada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(X) \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_k}$$

com  $\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{W \in \mathfrak{g} : (ad(X) - \lambda_i)^n(W) = 0, n \geq 1\}$  sejam  $Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$  e  $Z \in \mathfrak{g}_{\lambda_j}$ . Logo  $(ad(X) - \lambda_i)^n(Y) = 0$  e  $(ad(X) - \lambda_j)^m(Z) = 0$  para  $n$  e  $m$  inteiros. Pode se mostrar por indução em  $m + n$  que

$$\lambda_i \langle Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle = -\lambda_j \langle Y, Z \rangle$$

dai segue que  $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$  e  $\mathfrak{g}_{\lambda_j}$  são ortogonais em relação a forma de Killing. Em particular  $\mathfrak{h}$  é ortogonal a todo  $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$  em relação a forma de Killing. Então a forma de Killing restrita a  $\mathfrak{h}$  é não degenerada pois caso contrario a forma de Killing de  $\mathfrak{g}$  seria degenerada.

2. Sabemos que  $\mathfrak{h}$  é nilpotente, logo solúvel. Seja a representação adjunta  $ad : \mathfrak{h} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ . Temos então que  $ad(\mathfrak{h})$  é solúvel. Logo, pelo critério de Cartan temos que  $traço(XY) = 0$  para todo  $X \in [ad(\mathfrak{h}), ad(\mathfrak{h})] = ad([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])$  e  $Y \in ad(\mathfrak{h})$ . Em outras palavras  $\mathfrak{h}$  é ortogonal a  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$  pois  $\langle [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}], \mathfrak{h} \rangle = 0$ . Mas pelo primeiro item a forma de Killing restrita a  $\mathfrak{h}$  é não degenerada, o que implica  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$ . E dizer  $\mathfrak{h}$  é abeliana.
3. Como  $\mathfrak{h}$  é abeliana, esta contida em seu proprio centralizador  $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ , que certamente esta contido no normalizador  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ . Como por definição de subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  segue que  $\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ .
4. Seja  $X \in \mathfrak{h}$ . Seja a decomposição abstrata de Jordan  $X = X_S + X_N$ . Seja  $Y \in \mathfrak{h}$ . Como  $\mathfrak{h}$  é abeliana,  $X$  comuta com  $Y$  e pelo teorema 2.26 temos que  $X$  comuta com  $X_S$  e  $X_N$ . Logo temos  $X_S, X_N \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ . Como  $ad(X_N)$  é nilpotente e  $Y$  comuta com  $X_N$  temos que  $ad(Y) \circ ad(X_N)$  é nilpotente, e então  $\langle Y, X_N \rangle = traço(ad(X) \circ ad(X_N)) = 0$  e  $X_N$  é ortogonal a todo elemento  $Y \in \mathfrak{h}$ . Logo pela não degenerescencia de  $\mathfrak{h}$  temos que  $X_N = 0$ .

□

**Corolário 5.10.**  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra abeliana maximal de  $\mathfrak{g}$ .

*Demonstração.* Segue do item 3.

□

Temos então que se  $\mathfrak{h}$  é subálgebra de Cartan então  $\mathfrak{h}$  é subálgebra maximal abeliana e todo elemento de  $\mathfrak{h}$  é semi-simples. Um fato interessante é recíproca também e certa:

**Teorema 5.11.** *Se  $\mathfrak{h}$  é subálgebra abeliana maximal e todo elemento de  $\mathfrak{h}$  é semi-simples então  $\mathfrak{h}$  é subálgebra de Cartan.*

*Demonstração.* Ver [3]. □

Temos então que se  $\mathfrak{h}$  é subálgebra de Cartan, então  $ad(H)$  é diagonalizável para todo  $H \in \mathfrak{h}$ . Ainda mais, como esses mapas são comutativos, temos que  $\mathfrak{g}$  admite uma base de autovetores comuns para os elementos de  $ad(\mathfrak{h})$ . Dado um autovetor comum  $X \in \mathfrak{g}$ , os autovalores são dados pelo "peso" associado  $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ , definido por

$$(ad(H))(X) = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}$$

Os pesos são elementos do espaço dual  $\mathfrak{h}^*$ . Para cada  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  seja

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

$\mathfrak{g}_\alpha$  denota o correspondente espaço peso. Um destes espaços peso é o espaço peso associado a zero.

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = 0, \forall H \in \mathfrak{h}\} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$$

Logo podemos decompor  $\mathfrak{g}$  na soma direta de espaços peso pela ação adjunta de  $\mathfrak{h}$ .

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$$

sendo  $\Pi$  o conjunto de  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  diferentes de zero e tal que  $\mathfrak{g}_\alpha$  é diferentes de zero.

**Lema 5.12.** *Suponha que  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ . Então*

1.  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$
2. Se  $\alpha + \beta \neq 0$  logo  $\langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta \rangle = 0$

*Demonstração.* 1. Seja  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  e  $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ . Devemos mostrar que  $[X, Y]$ , se for diferente de zero, é um autovetor para todo  $H \in \mathfrak{h}$  com autovalor



$\alpha(H) + \beta(H)$ . Usando a identidade de Jacobi temos que

$$\begin{aligned} [H, [X, Y]] &= [H, X].Y + [X, [H, Y]] \\ &= [\alpha(H)X, Y] + [X, \beta(H)Y] \\ &= \alpha(H)[X, Y] + \beta(H)[X, Y] \\ &= (\alpha + \beta)[X, Y] \end{aligned}$$

2. Como  $\alpha + \beta \neq 0$ , existe um  $H \in \mathfrak{h}$  tal que  $(\alpha + \beta)(H) \neq 0$ . Logo, para todo  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ , temos, usando a associatividade da forma de Killing, que

$$\begin{aligned} \alpha(H)\langle X, Y \rangle &= \langle [H, X], Y \rangle \\ &= -\langle [X, H], Y \rangle \\ &= -\langle X, [H, Y] \rangle \\ &= -\beta(H)\beta\langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

e logo

$$(\alpha + \beta)(H)\langle X, Y \rangle = 0$$

Como  $(\alpha + \beta)(H) \neq 0$  deve ser  $\langle X, Y \rangle = 0$ .

□

Sabemos também que a restrição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $\mathfrak{h}$  e não degenerada.

**Lema 5.13.** *Seja  $\mathfrak{g}$  álgebra de Lie complexa de dimensão 3 tal que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ . Então  $\mathfrak{g} \simeq sl(2, \mathbb{C})$ .*

*Demonstração.* Ver [1].

□

**Proposição 5.14.** *Seja  $\alpha \in \Pi$  e seja  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ . Logo  $-\alpha$  é raiz e existe  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tal que  $sl(\alpha) := span\{X, Y, [X, Y]\}$  e uma subálgebra de  $\mathfrak{g}$  isomorfa a  $sl(2, \mathbb{C})$ .*

*Demonstração.* Primeiramente afirmamos que existe  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tal que  $\langle X, Y \rangle \neq 0$  e  $[X, Y] \neq 0$ . Como a forma de Killing é não degenerada, existe  $W \in \mathfrak{g}$  tal que  $\langle X, W \rangle \neq 0$ . Podemos escrever  $W = Y_0 + \sum_{\beta \in \Pi} Y_\beta$ , com  $Y_0 \in \mathfrak{h}$  e  $Y_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ . Quando se expande  $\langle X, W \rangle$  temos pelo segundo item do lema 5.12 que o único jeito de um termo diferente de zero ocorrer é se  $-\alpha$  é uma raiz e  $Y_\alpha \neq 0$ , logo tomamos  $Y = Y_\alpha$ . Como  $\alpha \neq 0$  existe  $K \in \mathfrak{h}$  tal que  $\alpha(K) \neq 0$ . Para este  $K$  temos

$$\langle K, [X, Y] \rangle = \langle [K, X], Y \rangle = \alpha(K)\langle X, Y \rangle \neq 0$$

e logo  $[X, Y] \neq 0$ . Vamos a denotar  $sl(\alpha)$  por  $\mathfrak{s}$  para simplificar a notação. Temos  $\mathfrak{s} = span\{X, Y, [X, Y]\}$ . Pelo primeiro item do lema 5.12 temos

que  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ . Como  $X$  e  $Y$  são autovalores simultaneos de todos os elementos de  $\text{ad}(\mathfrak{h})$ , e em particular de  $\text{ad}([X, Y])$ , temos que  $\mathfrak{s}$  é uma subálgebra de  $\mathfrak{g}$ . Resta mostrar que  $\mathfrak{s}$  é isomorfa a  $sl(2, \mathbb{C})$ . Seja  $H_1 = [X, Y]$ . Afirmamos que  $\alpha(H_1) \neq 0$ . Caso contrario  $[H_1, X] = \alpha(H_1)X = 0$  e, similarmente  $[H_1, Y] = -\alpha(H_1)Y = 0$ , logo  $\text{ad}(H_1) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  comuta com  $\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  e com  $\text{ad}(Y) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Logo, pela proposição 2.9 temos que  $\text{ad}(H_1) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é um mapa nilpotente. Por outro lado, como  $\mathfrak{h}$  é subálgebra de Cartan, temos que  $H_1$  é semi-simples. Mas o único elemento de  $\mathfrak{g}$  que é simultaneamente semi-simples e nilpotente é 0. Logo temos  $H_1 = 0$ , o que é uma contradição. Logo, temos que  $\mathfrak{s}$  é uma álgebra de Lie complexa de dimensão tres com  $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$  e então pelo lema 5.13 temos que  $\mathfrak{s}$  é isomorfa a  $sl(2, \mathbb{C})$ .  $\square$

**Lema 5.15.** Para cada  $\alpha \in \Pi$ ,  $sl(\alpha)$  tem base  $\{E_\alpha, F_\alpha, H'_\alpha\}$  tal que  $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ,  $H'_\alpha \in \mathfrak{h}$  e  $\alpha(H'_\alpha) = 2$ .

*Demonstração.* Com a notação usada no lema anterior tomamos  $E_\alpha = X$  e  $F_\alpha = \lambda Y$  com  $\lambda = \frac{2}{\alpha(H_1)}$  e escrevemos  $H'_\alpha = [E_\alpha, F_\alpha]$ . Temos então

$$H'_\alpha = [E_\alpha, F_\alpha] = [X, \lambda Y] = \lambda[X, Y] = \lambda H_1 = \frac{2H_1}{\alpha(H_1)}$$

e logo temos que

$$\alpha(H'_\alpha) = \frac{2\alpha(H_1)}{\alpha(H_1)} = 2$$

$\square$

**Lema 5.16.** O mapa  $\phi : sl(\alpha) \rightarrow sl(2, \mathbb{C})$  definido por  $\phi(E_\alpha) = E$ ,  $\phi(F_\alpha) = F$ ,  $\phi(H'_\alpha) = H$  é um isomorfismo de álgebras de Lie.

*Demonstração.* Segue do lema anterior.  $\square$

A continuação vamos a usar a forma de Killing para definir um isomorfismo entre  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}^*$ . Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma forma bilinear, ela define uma aplicação  $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$  dada por

$$H \mapsto \alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle$$

Como a restrição da forma de Killing a  $\mathfrak{h}$  é não degenerada, essa aplicação é um isomorfismo entre  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}^*$ . Para  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , sua imagem pela inversa desse isomorfismo será denotada por  $H_\alpha$ , isto é,  $H_\alpha$  é definido pela igualdade

$$\langle H_\alpha, H \rangle = \alpha(H)$$

para todo  $H \in \mathfrak{h}$ . Usando esse isomorfismo, pode-se definir a forma de Killing em  $\mathfrak{h}^*$  assim:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha)$$

com  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$

Uma propriedade muito importante de este isomorfismo é dada pelo seguinte lema:

**Lema 5.17.** *Seja  $\alpha \in \Pi$ . Se  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  e  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  então  $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha$*

*Demonstração.* Temos  $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ . Seja  $H \in \mathfrak{h}$  arbitrário. Então

$$\langle H, [X, Y] \rangle = \langle [H, X], Y \rangle = \alpha(H) \langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle \langle H, H_\alpha \rangle = \langle H, \langle X, Y \rangle H_\alpha \rangle$$

como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  não é degenerada e  $H$  é arbitrário temos que  $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha$   $\square$

Agora estamos em condições de aplicar os resultados sobre as representações de  $sl(2, \mathbb{C})$ . Seja  $\alpha$  uma raiz. Podemos interpretar  $\mathfrak{g}$  como um  $sl(\alpha)$  – módulo usando a representação adjunta. Se  $A \in sl(\alpha)$  e  $Y \in \mathfrak{g}$  então a ação é dada por

$$A.Y = (adA)Y = [A, Y]$$

Os  $sl(\alpha)$  – submódulos de  $\mathfrak{g}$  são precisamente os subespaços vetoriais  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $[S, M] \in \mathfrak{m}$  para todo  $S \in sl(\alpha)$  e para todo  $M \in \mathfrak{m}$ . Claro que é suficiente provar isso quando  $S$  é um dos elementos  $H_\alpha, E_\alpha, F_\alpha$ .

No seguinte lema faz sua aparição o teorema de Weyl:

**Lema 5.18.** *Se  $\mathfrak{m}$  é um  $sl(\alpha)$  – submódulo de  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}$  é semisimples, então os autovalores de  $H_\alpha$  atuando em  $\mathfrak{m}$  são inteiros.*

*Demonstração.* Pelo teorema de Weyl,  $\mathfrak{m}$  pode ser decomposto em soma direta de  $sl(\alpha)$  – módulos irreducíveis. Temos que  $sl(\alpha) \simeq sl(2, \mathbb{C})$ . Para  $sl(2, \mathbb{C})$  – módulos o resultado segue do corolário 5.8.  $\square$

Vamos ver dois exemplos muito úteis:

- Seja  $\mathfrak{u} = \mathfrak{h} + sl(\alpha)$ . Seja  $k := \ker(\alpha) \in \mathfrak{h}$ . Temos que  $\dim(\mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{h}) - 1$  (sabemos que  $\dim(\alpha) = 1$  pois  $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ ). Como  $\mathfrak{g}$  é abeliano temos  $[H'_\alpha, X] = 0$  para todo  $X \in k$ . Logo temos

$$[E_\alpha, X] = -[X, E_\alpha] = -\alpha(X)E_\alpha = 0$$

e similarmente  $[F_\alpha, X] = 0$ . Logo, todo elemento de  $sl(\alpha)$  atua trivialmente em  $k$ . Segue que  $k \oplus sl(\alpha)$  é uma decomposição de  $\mathfrak{u}$  em  $sl(\alpha)$  – módulos.

- Se  $\beta \in \Pi$  ou  $\beta = 0$ , seja  $\mathfrak{m} := \bigoplus_c \mathfrak{g}_{\beta+c\alpha}$  onde a soma é sobre  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $\beta + c\alpha \in \Pi$ . Segue pelo primeiro item do lema 5.12 que  $\mathfrak{m}$  é um  $sl(\alpha)$  – submódulo de  $\mathfrak{g}$ . A análise deste módulo vai ser muito importante a continuação.

**Proposição 5.19.** *Seja  $\alpha \in \Pi$ . Os espaços de raízes  $\mathfrak{g}_\alpha$  tem dimensão 1 e os únicos múltiplos de  $\alpha$  que pertencem a  $\Pi$  são  $\pm\alpha$*

*Demonstração.* Se  $c\alpha$  é raiz então temos que  $H'_\alpha$  tem  $c\alpha(H'_\alpha) = 2c$  como autovalor, pois  $\alpha(H'_\alpha) = 2$ . Como os autovalores de  $H'_\alpha$  são inteiros, temos que  $c \in \mathbb{Z}$  ou  $c \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . Para descartar os valores não desejados de  $c$ , consideramos o módulo

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{c\alpha}$$

Seja  $k := \ker(\alpha) \in \mathfrak{h}$ . Pelo exemplo anterior temos que  $k \oplus \mathfrak{sl}(\alpha)$  é um submódulo de  $\mathfrak{m}$ . Pelo teorema de Weyl, módulos de  $\mathfrak{sl}(\alpha)$  são completamente reducíveis, por isso podemos escrever

$$\mathfrak{m} = k \oplus \mathfrak{sl}(\alpha) \oplus \mathfrak{w}$$

onde  $\mathfrak{w}$  é um submódulo complementar. Se alguma das conclusões da proposição fosse falsa, então teríamos  $\mathfrak{w} \neq 0$ . Vamos a provar que isso constitui um absurdo. Suponhamos então  $\mathfrak{w} \neq 0$ . Seja então  $\mathfrak{z}$  um submódulo irredutível de  $\mathfrak{w}$ . Pelo teorema 5.7 temos que  $\mathfrak{z} \simeq V_s$ . Se  $s$  é par segue pelo lema 5.5 que  $\mathfrak{z}$  contem um autovetor de  $H'_\alpha$  com autovetor igual a zero. Seja  $v$  este autovetor. Temos então que  $\alpha(v) = 0$ , e dizer  $v \in k$ . Mas  $k \cap \mathfrak{z} = 0$ , então temos uma contradição. Antes de analisar o caso em que  $s$  é ímpar, vamos a ver outra consequencia de este argumento. Suponha que  $2\alpha \in \Pi$ . Logo  $H'_\alpha$  tem  $2\alpha(H'_\alpha) = 4$  como autovalor. Como os autovalores de  $H'_\alpha$  em  $k \oplus \mathfrak{sl}(\alpha)$  são 0 e  $\pm 2$ , o único modo em que isto pode acontecer e se  $\mathfrak{w}$  contem um submódulo irredutível isomorfo a  $V_s$  com  $s$  par, o que mostramos que é impossível. Suponhamos agora que  $s$  é ímpar. Logo  $V$  deve conter um autovetor de  $H'_\alpha$  com, autovalor 1. Como  $\alpha(H'_\alpha) = 2$  isso implica que  $\frac{1}{2}\alpha$  é raiz. Logo  $\alpha$  e  $\frac{1}{2}\alpha$  são raízes, mas isso implica, como no anterior paragrafo, que existe submódulo  $V_s$  de  $w$  com  $s$  par, o que é uma contradição.  $\square$

**Proposição 5.20.** *Suponha que  $\alpha, \beta \in \Pi$  e  $\beta \neq \pm\alpha$ . Então temos que*

1.  $\beta(H'_\alpha) \in \mathbb{Z}$
2. *Existem inteiros  $p, q$  tal que  $\beta + k\alpha \in \Pi$  se e só se  $k \in \mathbb{Z}$  e  $-p \leq k \leq q$ . Ainda mais,  $p - q = \beta(H'_\alpha)$*
3. *Se  $\alpha + \beta \in \Pi$  então  $[E_\alpha, E_\beta]$  é um múltiplo escalar diferente de zero de  $E_{\alpha+\beta}$*
4.  $\beta - \beta(H'_\alpha)\alpha \in \Pi$

*Demonstração.* 1. Seja  $\mathfrak{m} := \bigoplus_k \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$ . Como  $\beta(H'_\alpha)$  é o autovalor de  $H'_\alpha$  atuando em  $\mathfrak{g}_\beta$ , logo tem que ser inteiro.

2. Sabemos que se  $\beta+k\alpha$  é raiz então  $\dim(\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}) = 1$ . Logo, os autoespaços de  $\text{ad}(H'_\alpha)$  em  $\mathfrak{m}$  são de dimensão 1 e, como  $(\beta+k\alpha)(H'_\alpha) = \beta(H'_\alpha) + 2k$ , os autovalores de  $\text{ad}(H'_\alpha)$  são todos pares ou todos ímpares. Então pelo estudo feito das representações de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  temos que  $\mathfrak{m}$  é um  $\mathfrak{sl}(\alpha)$  – *submódulo* irredutível. Suponhamos que  $\mathfrak{m} \simeq V_d$ . Em  $V_d$  o elemento  $H'_\alpha$  atua diagonalmente com autovalores

$$\{d, d-2, \dots, -d\}$$

Mas temos que em  $\mathfrak{m}$ ,  $H'_\alpha$  atua diagonalmente com autovalores dados por

$$\{\beta(H'_\alpha) + 2k : \beta + k\alpha \in \Pi\}$$

Igualando esses conjuntos e definindo  $p$  e  $q$  pelas igualdades  $d = \beta(H'_\alpha) + 2q$  e  $-d = \beta(H'_\alpha) - 2p$  temos que  $\beta + k\alpha \in \Pi$  se e só se  $k \in \mathbb{Z}$  e  $-p \leq k \leq q$ . Por outro lado temos  $p = \frac{d+\beta(H'_\alpha)}{2}$  e  $q = \frac{d-\beta(H'_\alpha)}{2}$  e restando temos  $p - q = \beta(H'_\alpha)$ .

3. Suponha que  $Z \in \mathfrak{g}_\beta$ , logo  $Z$  pertence ao  $H'_\alpha$  – *autoespaço* onde  $H'_\alpha$  atua como  $\beta(H'_\alpha)$ . Suponhamos que  $\text{ad}(E_\alpha)E_\beta = [E_\alpha, E_\beta] = 0$ . Então  $E_\beta$  é um vetor de peso máximo na representação irredutível  $M \simeq V_d$  com peso máximo  $\beta(H'_\alpha)$ . Mas por outro lado, se  $\alpha + \beta$  é raiz temos que  $H_\alpha$  atua no espaço raiz associado como  $(\alpha + \beta)(H'_\alpha) = \beta(H_\alpha) + 2$ . Logo  $E_\beta$  não está no espaço de peso máximo da representação irredutível  $M$  e temos que  $\text{ad}(E_\alpha)E_\beta \neq 0$ .

4. Segue do item dois pois temos que

$$\beta - \beta(H'_\alpha)\alpha = \beta - (p - q)\alpha$$

$$\text{e } -p \leq k \leq q$$

□

**Lema 5.21.** *Sejam  $\alpha, \beta \in \Pi$ . Então*

$$1. H_\alpha = \frac{H'_\alpha}{\langle E_\alpha, F_\alpha \rangle} \text{ e } H'_\alpha = \frac{2H_\alpha}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}$$

$$2. \langle H_\alpha, H_\alpha \rangle \langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle = 4$$

*Demonstração.* Temos que

1. A expressão para  $H_\alpha$  segue do lema 5.17 aplicado a  $X = E_\alpha$  e  $Y = F_\alpha$ .  
Como  $\alpha(H'_\alpha) = 2$  segue que

$$2 = \langle H_\alpha, H'_\alpha \rangle = \langle H_\alpha, (\langle E_\alpha, F_\alpha \rangle) H_\alpha \rangle$$

o que implica que

$$\langle E_\alpha, F_\alpha \rangle \langle H_\alpha, H_\alpha \rangle = 2$$

e substituindo  $\langle E_\alpha, F_\alpha \rangle = \frac{H'_\alpha}{H_\alpha}$  temos

$$H'_\alpha = \frac{2H_\alpha}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}$$

2.

$$\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle = \left\langle \frac{2H_\alpha}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}, \frac{2H_\alpha}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle} \right\rangle = \frac{4}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}$$

□

**Corolário 5.22.** Se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes, então  $\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle \in \mathbb{Z}$  e  $\langle H_\alpha, H_\beta \rangle \in \mathbb{Q}$

*Demonstração.* Usando a decomposição em espaços de raízes para computar  $\text{traço}(ad(H'_\alpha) \circ ad(H'_\beta))$  temos

$$\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle = \sum_{\gamma \in \Pi} \gamma(H'_\alpha) \gamma(H'_\beta)$$

Como os autovalores de  $H'_\alpha$  e  $H'_\beta$  são inteiros, temos que  $\langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle \in \mathbb{Z}$ . Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \langle H_\alpha, H_\beta \rangle &= \left\langle \frac{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle H'_\alpha}{2}, \frac{\langle H_\beta, H_\beta \rangle H'_\beta}{2} \right\rangle \\ &= \frac{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle \langle H_\beta, H_\beta \rangle}{4} \langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

□

**Lema 5.23.** Para toda raiz  $\alpha \in \Pi$  vale

$$\beta(H'_\alpha) = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

*Demonstração.*

$$\beta(H'_\alpha) = \langle H_\beta, H'_\alpha \rangle = \left\langle H_\beta, \frac{2H_\alpha}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle} \right\rangle = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

□

**Definição 5.1.** A sequencia

$$\dots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots$$

e denominada uma  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta$ .

Pelo segundo item da proposição 5.20 podemos saber quais elementos dessa sequencia são raízes, pois sabemos que existem inteiros  $p, q$  tal que  $\beta + k\alpha \in \Pi$  se e só se  $k \in \mathbb{Z}$  e  $-p \leq k \leq q$  e tal que  $p - q = \beta(H'_\alpha)$ . Por outro lado pelo lema 5.23 temos que  $\beta(H'_\alpha) = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$ .

Podemos então dar as seguintes definições:

**Definição 5.2.** A formula  $p - q = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$  e dita formula de Killing.

**Definição 5.3.** O número inteiro

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$$

é dito numero de Killing de associado as raízes  $\alpha$  e  $\beta$ .

### 5.3

#### Sistema simples de raízes

**Proposição 5.24.** Seja  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$  o espaço

$$\mathfrak{h}_\mathbb{Q} = \{a_1 H_{\alpha_1} + \dots + a_k H_{\alpha_k} : a_i \in \mathbb{Q}, \alpha_i \in \Pi\}$$

então  $\dim(\mathfrak{h}_\mathbb{Q}) = \dim(\mathfrak{h})$

*Demonstração.* Ver [1]. □

**Proposição 5.25.** A forma de Killing restrita a  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$  é um produto interno

*Demonstração.* Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma forma bilinear simétrica, só falta mostrar que é positiva definida. Seja  $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ . Então temos

$$\langle H, H \rangle = \text{traço}(ad(H)^2) = \sum_{\alpha \in \Pi} \alpha(H)^2 = \sum_{\alpha \in \Pi} \langle H_\alpha, H \rangle^2$$

e, portanto,  $\langle H, H \rangle \geq 0$ . Além do mais,  $\langle H, H \rangle = 0$  se e só se  $\langle H_\alpha, H \rangle = 0$  para todo  $\alpha \in \Pi$ , o que ocorre se e só se  $H = 0$ , pois  $\Pi$  gera  $\mathfrak{h}^*$  □

A construção do espaço racional pode ser feita também no dual  $\mathfrak{h}^*$  de  $\mathfrak{h}$  e, procedendo como na discussão acima, mostra-se que o subespaço racional  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$

gerado pelas raízes tem a mesma dimensão de  $\mathfrak{h}$  e se identifica com o dual de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ . Analogamente, a forma de Killing é um produto interno em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ .

Alem disso, como  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$  é um espaço vetorial racional, ele pode ser estendido a um espaço vetorial  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , da mesma dimensão, sobre o corpo dos reais.

Observamos que o produto interno em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$  definido pela forma de Killing pode ser estendido a um produto interno em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ . A classificação das álgebras semi-simples(ou melhor, simples) vai ser feita em cima da geometria das raízes em relação a esse produto interno. A classificação é possível porque essa geometria é bastante rígida, como será exposto a seguir.

**Definição 5.4.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Q}$  e  $\{v_1, \dots, v_l\}$  uma base ordenada de  $V$ . Sejam  $v, w \in V$  escritos em coordenadas como

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_l v_l$$

$$w = b_1 v_1 + \dots + b_l v_l$$

A ordem lexicográfica em  $V$  em relação a essa base é definida como  $v \leq w$  se  $v = w$  ou se  $a_i \leq b_i$  onde  $i$  é o primeiro índice em que as coordenadas de  $v$  e  $w$  são diferentes. Quando  $V$  é munido de um produto interno, a ordem lexicográfica em  $V$  satisfaz a propriedade enunciada no seguinte lema, que será utilizada para construir sistemas simples de raízes.

**Lema 5.26.** *Tomando a ordem lexicográfica dada pela base ordenada  $\{v_1, \dots, v_l\}$ , seja  $\{w_1, \dots, w_m\}$  um subconjunto de  $V$  satisfazendo*

1.  $w_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$
2.  $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$  para  $i \neq j$

*Então  $\{w_1, \dots, w_m\}$  é linearmente independente.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que, por exemplo

$$w_m = a_1 w_1 + \dots + a_{m-1} w_{m-1}$$

Se todos os coeficientes são  $\leq 0$  então  $w_m \leq 0$  pois  $w_i > 0$  e, portanto,  $a_i w_i \leq 0$  se  $a_i \leq 0$ . Portanto, ao menos um dos coeficientes é positivo. Seja a decomposição

$$w = w^+ + w^-$$

onde  $w^+$  é a soma dos elementos na combinação acima em que os coeficientes são positivos e  $w^-$  a soma daqueles em que os coeficientes são negativos. Então  $w^+ \neq 0$ . No entanto



$$\langle w_m, w^+ \rangle = a_i \sum_i \langle w_m, w_i \rangle \leq 0$$

pois nessa soma os coeficientes  $a_i$  (que aparecem em  $w^+$ ) são  $> 0$  e  $\langle w_m, w_i \rangle \leq 0$  pela segunda hipótese. Por outro lado

$$\langle w_m, w^+ \rangle = \langle w_+ + w_-, w^+ \rangle = |w^+|^2 + \langle w^-, w^+ \rangle$$

O ultimo termo desta expressão é estritamente positivo, pois  $|w^+|^2 > 0$  e  $\langle w^-, w^+ \rangle \geq 0$  já que se  $w^+ = \sum b_i w_i$  e  $w^- = \sum c_j w_j$ , então

$$\langle w^-, w^+ \rangle = \sum b_i c_j \langle w_i, w_j \rangle$$

e  $b_i > 0$ ,  $c_j \leq 0$  e  $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$ . Essa contradição mostra que o conjunto é linearmente independente. □

A partir de agora fixa-se uma ordem lexicografica dada por uma base de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ .

**Definição 5.5.** Uma raiz  $\alpha \in \Pi$  é simples-em relação a ordem fixada-se

1.  $\alpha > 0$
2. Não existem  $\beta, \gamma \in \Pi$  tal que  $\beta$  e  $\gamma$  são positivas e

$$\alpha = \beta + \gamma$$

Vamos a denotar por  $\Sigma$  o conjunto das raízes simples. O objetivo dos seguintes lemas é mostrar que  $\Sigma$  forma uma base de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ . O primeiro passo é mostrar que  $\Sigma$  é não vazio.

**Lema 5.27.**  $\Sigma \neq \emptyset$

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  uma raiz positiva minimal, isto é, tal que não existe  $\beta \in \Pi$  com  $\beta > 0$  e  $\beta < \alpha$ . A existência de uma raiz deste tipo vem de que  $-\gamma \in \Pi$  se  $\gamma \in \Pi$  e, portanto, existem raízes positivas minimais. Uma raiz  $\alpha$  satisfazendo essas propriedades é simples. De fato, se  $\alpha = \beta + \gamma$  com  $\beta, \gamma > 0$  e  $\beta, \gamma \in \Pi$  então  $\alpha > \beta > 0$  pois  $\gamma > 0$  contradizendo a escolha de  $\alpha$ . □

**Lema 5.28.**  $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$  se  $\alpha, \beta \in \Sigma$  e  $\alpha \neq \beta$ .

*Demonstração.* Observamos que se  $\alpha \neq \beta$  são raízes simples, então  $\beta - \alpha \notin \Pi$ . Isso porque se  $\beta - \alpha$  fosse raiz, então teríamos

1.  $\beta - \alpha \leq 0$ , pois  $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$  e  $\beta$  é simples.
2.  $\beta - \alpha \geq 0$  pois  $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$  e  $\alpha$  é simples.

o que é uma contradição. Portanto, na  $\alpha$ -sequência iniciada em  $\beta$ ,  $p = 0$ . Pela fórmula de Killing temos

$$0 \geq -q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

e daí que  $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$  se  $\alpha \neq \beta$  são raízes simples.

□

**Lema 5.29.**  $\Sigma$  é linearmente independente.

*Demonstração.* Segue do lema anterior e do lema 5.26

□

Daqui em diante escreveremos o conjunto das raízes simples como

$$\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$$

**Lema 5.30.** Seja  $\beta \in \Pi$  com  $\beta > 0$ . Então,  $\beta$  se escreve de maneira única como

$$\beta = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$$

com  $n_1, \dots, n_l$  inteiros  $\geq 0$ . Em particular,  $\Sigma$  gera  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$

*Demonstração.* Se  $\beta$  é simples, temos  $\beta = \alpha_i$  para algum  $i$ . Caso contrário, existem raízes positivas  $\beta_1$  e  $\beta_2$  tal que  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  e essa soma fornece a decomposição para  $\beta$  se  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são simples. Se uma dessas raízes não é simples, ela pode ser decomposta como soma de raízes positivas (por exemplo  $\beta_1 = \gamma_1 + \gamma_2$  com  $\gamma_1, \gamma_2$  raízes positivas) e assim sucessivamente. Como em cada decomposição obtem-se raízes estritamente menores as anteriores, esse processo termina em raízes para as quais não existe nenhuma raiz positiva menos que as mesmas. Essas raízes são simples, como foi mostrado no lema 5.27. Dessa forma,  $\beta$  se escreve como soma (com possíveis repetições) de raízes simples, isto é,  $\beta$  é combinação linear com coeficientes inteiros  $\geq 0$ , como no enunciado.

□

**Corolário 5.31.** 1. Seja  $\gamma$  uma raiz positiva que não é simples. Então existe  $\alpha \in \Sigma$  tal que  $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$  e  $\gamma - \alpha$  é raiz positiva.

2. Toda raiz positiva  $\gamma$  pode ser escrita como

$$\gamma = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}$$

com  $\alpha_{i_j}$  raiz simples de tal maneira que as somas parciais

$$\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s}$$

com  $s = 1, \dots, k$  raízes.

*Demonstração.* Ver [6]. □

Resumindo temos que se

$$\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$$

é o conjunto das raízes simples em relação a uma ordem lexicográfica, então

1.  $\Sigma$  é uma base de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$
2. toda raiz  $\beta$  pode ser escrita como

$$\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$$

com coeficientes inteiros do mesmo sinal.

## 5.4

### Matrizes de Cartan

Foi mostrado que se tivermos um sistema simples de raízes  $\Sigma$  então todas as possíveis raízes de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  são combinações lineares com coeficientes inteiros todos positivos ou todos negativos. A continuação vamos a determinar quando uma soma de elementos de  $\Sigma$  é raiz. Isso será feito utilizando a formula de Killing. Antes disso vamos a introduzir uma importante definição, que será útil em futuras demonstrações.

**Definição 5.6.** Seja  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  um sistema simples fixado. Seja  $\beta$  uma raiz positiva tal que

$$\beta = m_1\alpha_1 + \cdots + m_l\alpha_l$$

então o numero positivo  $m_1 + \cdots + m_l$  é denominado *altura* de  $\beta$ .

As raízes de altura um são as proprias raízes simples. As raízes de altura dois são da forma  $\alpha_i + \alpha_j$ , com  $i \neq j$ . Para saber se  $\alpha_i + \alpha_j$  é realmente raiz temos que analisar a  $\alpha_i$  - *sequencia* iniciada em  $\alpha_j$

$$\alpha_j - p\alpha_i, \dots, \alpha_j + q\alpha_i$$

Como  $\alpha_j - \alpha_i$  não é raiz (pois todos os coeficientes de uma raiz tem o mesmo sinal) sabemos que  $p = 0$ . Logo pela formula de Killing temos que

$$-q = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$$

Assim temos

$$q > 0 \Leftrightarrow \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0$$

portanto

$$\alpha_i + \alpha_j \in \Pi \Leftrightarrow \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0$$

Logo, para encontrarmos as raízes de altura dois, basta olhar os valores de  $\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0$ .

Seja agora  $\beta$  uma raiz de altura 3. Pelo corolário 5.31  $\beta = \alpha + \alpha_j$  com  $\alpha$  de altura dois e  $\alpha_k \in \Sigma$ , isto é,

$$\beta = \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$$

com  $i \neq j$ . A formula de Killing para a  $\alpha_k$  - *sequencia* iniciada em  $\alpha_i + \alpha_j$  e dada por

$$p - q = \frac{2\langle \alpha_i + \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}$$

Com isso existem as seguintes possibilidades

1.  $i \neq k \neq j$  Neste caso,  $p = 0$  pois  $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k$  não é raiz pois é uma combinação linear onde aparecem coeficientes negativos e positivos. Dai que partindo de  $\alpha_i + \alpha_j \in \Pi^+$ , os valores de  $k$  para os quais  $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$  é raiz positiva são aqueles em que

$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0$$

e

$$\frac{2\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0$$

2.  $k = i$  ou  $k = j$ . Por exemplo,  $k = j$ . Neste caso, a  $\alpha_k$  - *sequencia* iniciada em  $\alpha_i + \alpha_j$  faz parte da  $\alpha_j$  - *sequencia* iniciada em  $\alpha_i$ . Como  $\alpha_i - \alpha_j$  não é raiz, para decidir se  $\alpha_i + 2\alpha_j$  é raiz, basta olhar

$$\frac{2\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}$$

Em cada um desses casos os números de Killing correspondentes as raízes simples determinam as raízes de altura três.

Em geral se procede da mesma forma, por indução na altura. Pelo corolário 5.31 as raízes de altura  $n + 1$  são da forma  $\alpha + \alpha_k$  com  $\alpha_k$  raiz de altura  $n$  e  $\alpha_k$  raiz simples. A formula de Killing mostra quais dessas somas são raízes: a  $\alpha_k$ -sequencia iniciada em  $\alpha$  é dada por  $p$  e  $q$  com

$$p - q = \frac{2\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}$$

Por indução,  $p$  é conhecido, pois  $\alpha - \alpha_k, \alpha - 2\alpha_k, \dots$  se são raízes são positivas e de altura menor que  $n$ . Se

$$\alpha = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$$

então

$$\frac{2\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = n_1 \frac{2\langle \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} + \dots + n_l \frac{2\langle \alpha, \alpha_l \rangle}{\langle \alpha_l, \alpha_l \rangle}$$

e novamente  $q$  (e, portanto o fato de  $\alpha + \alpha_k$  ser ou não ser raiz) é encontrado a partir dos números de Killing correspondentes aos elementos de  $\Sigma$ .

Então, pela discussão feita acima temos que os números de Killing associados a os elementos do sistema simples de raízes determinam todas as raízes de uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$  e, consequentemente, toda a estrutura da álgebra semi-simples  $\mathfrak{g}$ .

**Definição 5.7.** Os números de Killing associados as raízes simples são colocados em forma de matriz  $l \times l$  como

$$C = \left( \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right)_{i,j}$$

Esta matriz é dita *Matriz de Cartan* do sistema simples de raízes. A proxima proposição mostra que as possibilidades para os elementos fora da diagonal são bastante restritas.

Como a forma de Killing restrita a  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$  é um produto interno, podemos falar de angulos entre os elementos de  $\Pi$ , pois  $\langle \alpha, \beta \rangle := \langle H_{\alpha}, H_{\beta} \rangle = |H_{\alpha}| |H_{\beta}| \cos(\varphi)$

**Proposição 5.32.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  raízes.*

1. Se  $\varphi$  denota o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$  (ou entre  $H_\alpha$  e  $H_\beta$ ) então

$$\cos(\varphi) = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2}$$

isto é,  $\varphi = k\frac{\pi}{6}$  ou  $\varphi = k\frac{\pi}{4}$

2. Os possíveis valores para os números de Killing são

$$\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

*Demonstração.* 1. Temos  $\langle\alpha, \beta\rangle^2 = \langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle\cos^2(\varphi)$ . Logo

$$\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle} = 4\cos^2(\varphi)$$

Como  $0 \leq \cos^2(\varphi) \leq 1$  e os termos do lado esquerdo da equação são inteiros, então

$$4\cos^2(\varphi) = 0, 1, 2, 3, 4$$

e portanto

$$\cos(\varphi) = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2}$$

2. Pelo item anterior

$$\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle} = 0, 1, 2, 3, 4$$

isso implica que

$$\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$

Se supormos que

$$\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = \pm 4$$

então  $\cos(\varphi) = \pm 1$ . Logo  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$  e  $\alpha$  seria múltiplo de  $\beta$ , ou seja  $\alpha = \pm\beta$  e assim

$$\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = \pm 4$$

o que é uma contradição.

□

Observamos que se  $\varphi$  é o ângulo entre as raízes simples  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  então

- $\varphi = 0$  se  $\alpha_i = \alpha_j$
- $\varphi = 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$  se  $\alpha_i \neq \alpha_j$

**Proposição 5.33.** *Seja  $C = (c_{ij})$  a matriz de Cartan de um sistema simples de raízes. Então*

1.  $c_{ii} = 2$  para todo  $i$
2.  $c_{ij} = 0, -1, -2$  ou  $-3$  para  $i \neq j$
3.  $c_{ji} = -1$  se  $c_{ij} = -2$  ou  $-3$
4.  $c_{ij} = 0$  se e somente se  $c_{ji} = 0$

*Demonstração.* Ver [1].

□

## 6

### Diagramas de Dynkin

#### 6.1

##### Diagramas de Dynkin

O diagrama de Dynkin é um grafo muito útil que contém as mesmas informações que a matriz de Cartan. Ele é definido a partir de um sistema simples de raízes fixado

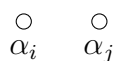
$$\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$$

O diagrama contém  $l$  pontos (vértices) representando cada uma das raízes. Os vértices são ligados (ou não) por um, dois ou três segmentos (arestas) de acordo com as seguintes instruções:

1. Se

$$\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = 0$$

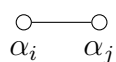
não existe ligação:



2. Se

$$\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -1$$

então  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  são ligadas por um segmento:



Neste caso o ângulo  $\varphi$  entre as raízes é  $120^\circ$  pois  $4\cos^2(\varphi) = -1$  implica  $\cos(\varphi) = -\frac{1}{2}$ .



3. Se  $\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$  ou  $\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$  é  $-2$  (respetivamente  $-3$ ) então os vertices são ligados por  $2$  (respetivamente  $3$ ) elementos



Neste caso o ângulo  $\varphi$  entre as raízes é  $135^\circ$  (respetivamente  $150^\circ$ ) pois  $4\cos^2(\varphi) = 2$  implica  $\cos(\varphi) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  (respetivamente  $4\cos^2(\varphi) = 3$  implica  $\cos(\varphi) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ).

A ideia do diagrama de Dynkin e poder utiliza-lo para poder obter a matriz de Cartan correspondente. No entanto quando a ligação é feita por dois ou tres segmentos, não fica claro qual direção das entradas

$$c_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$$

ou

$$c_{ji} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

da matriz de Cartan e  $-2$  ou  $-3$ . Para distinguir isso, orienta-se a ligação na direção da raiz  $\alpha_j$  se  $c_{ji} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$  é  $-2$  ou  $-3$



e orienta-se isso, orienta-se a ligação na direção da raiz  $\alpha_i$  se  $c_{ji} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$  é  $-2$  ou  $-3$ .

A direção convencionada para a ligação esta associada ao comprimento relativo das raízes. De fato, o cociente entre os números de Killing correspondentes é

$$\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}.$$

Temos então que a direção de uma ligação múltipla foi escolhida de tal forma que aponta para a raiz de menor comprimento entre as duas raízes da ligação.

## 6.2

## Classificação dos diagramas

Nosso objetivo agora vai ser encontrar todos os possíveis diagramas de Dynkin. Estes que foram construídos a partir de sistemas simples de raízes, que em última instância, são bases de espaços vetoriais racionais com produto interno. A maneira como se associa um diagrama a uma base dependeu apenas da estrutura geométrica da base. Então, os diagramas podem ser considerados sem fazer alusão aos sistemas de raízes. Assim, encontrar todos os diagramas significa encontrar todas as bases de  $\mathbb{Q}^l$  cujos elementos formam entre si ângulos de  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$  ou  $150^\circ$  e tal que os quadrados dos comprimentos relativos entre dois vetores da base que formam um ângulo de  $135^\circ$  ou  $150^\circ$  seja dois ou três, respectivamente. Vamos a considerar, em primeiro lugar, apenas os ângulos entre os elementos da base, deixando de lado seus comprimentos. Em termos dos diagramas, isso significa considerar apenas a quantidade de arestas entre os vértices, sem se preocupar com suas orientações. Dessa forma serão encontradas as bases

$$\{u_1, \dots, u_l\}$$

de  $\mathbb{Q}^l$  normalizadas ( $|u_i| = 1$  para todo  $i$ ) em que os ângulos entre seus elementos são  $90^\circ, 120^\circ, 135^\circ$  ou  $150^\circ$ . Para uma base normalizada, o cosseno do ângulo entre dois elementos  $u_i, u_j$  é dado por  $\langle u_i, u_j \rangle$  e, portanto, esse produto interno assume apenas os valores  $0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Lema 6.1.** *Ao retirar de um diagrama alguns vértices juntamente com todas as arestas incidentes nesses vértices, o que se obtém ainda é um diagrama.*

*Demonstração.* De fato, o processo de retirar os vértices e as arestas incidentes significa, em termos da base associada, que se retiram os elementos da base que correspondem a os vértices retirados. Dessa forma, o diagrama que fica está associado ao conjunto de vetores linearmente independentes restantes.  $\square$

**Lema 6.2.** *Num diagrama com  $l$  vértices, a quantidade de pares conectados, isto é, que não são ortogonais, é  $< l$ .*

*Demonstração.* Suponha que o diagrama é dado pela base

$$\{u_1, \dots, u_l\}$$

com  $|u_i| = 1$ . Um par  $(u_i, u_j)$  é conectado se  $\langle u_i, u_j \rangle < 0$ .

Seja

$$u = u_1 + \cdots + u_l$$

Então  $u \neq 0$  e

$$0 < |u|^2 = \langle \sum_i u_i, \sum_j u_j \rangle = \sum_{l=1}^l |u_l|^2 - i + 2 \sum_{i < j} \langle u_i, u_j \rangle = l + \sum_{i < j} 2 \langle u_i, u_j \rangle$$

e, portanto

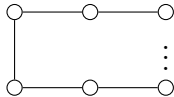
$$\sum_{i < j} -2 \langle u_i, u_j \rangle < l$$

Seja  $\varphi_{ij}$  o ângulo entre  $u_i$  e  $u_j$ . Então temos que  $\cos(\varphi_{ij}) = \langle u_i, u_j \rangle$ . Pelos possíveis valores  $\varphi_{ij}$ , tem-se que

$$-2 \langle u_i, u_j \rangle = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$$

e daí que  $-2 \langle u_i, u_j \rangle \geq 1$  se  $\langle u_i, u_j \rangle \neq 0$ . Pela desigualdade acima tem-se então que a quantidade de pares que não são ortogonais é menor que  $l$ . Como essa quantidade coincide com a de pares ligados, isso mostra o lema.  $\square$

Com estes primeiros lemas, podemos retirar alguns grafos que não são diagramas, os ciclos. Um ciclo é um pedaço de diagrama que se fecha. Por exemplo:



**Lema 6.3.** *Um diagrama não contém ciclos.*

*Demonstração.* Um ciclo contido num diagrama também é um diagrama, pois ao retirar do diagrama original os vértices não contidos no ciclo juntamente com as arestas incidentes nele, obtém-se o ciclo. No entanto pelo lema anterior, um ciclo não é um diagrama de Dynkin, pois os pares de elementos ligados num ciclo de  $l$  elementos é exatamente  $l$ .  $\square$

**Lema 6.4.** *A quantidade de arestas incidentes a um vértice de um diagrama é  $\leq 3$*

*Demonstração.* Sejam  $u$  um vértice e  $v_1, \dots, v_k$  os vértices que se ligam a  $u$ . O número de arestas ligando  $v_i$  a  $u$  é

$$\frac{2 \langle v_i, u \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \frac{2 \langle v_i, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = 4 \langle v_i, u \rangle$$

Pois a base é normalizada. Dai o numero de arestas incidentes a  $u$  é dado por

$$4\langle v_i, u \rangle^2 + \cdots + 4\langle v_k, u \rangle^2$$

Esse numero é estritamente menor que 4. De fato, sejam  $U$  e  $V$  os espaços gerados por  $\{u, v_1, \dots, v_k\}$  e  $\{v_1, \dots, v_k\}$ , respectivamente. O complementar ortogonal a  $V$  dentro de  $U$  é de dimensão um, pois  $\{u, v_1, \dots, v_k\}$  é linearmente independente. Seja  $w$  com  $|w| = 1$  um gerador desse complementar ortogonal. Tem-se

$$\langle u, w \rangle \neq 0$$

pois  $u \notin V$ . Além do mais  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  para todo  $i, j = 1, \dots, k$  pois, caso contrario, algum  $v_i$  seria ligado a algum  $v_j$  e, como ambos são ligados a  $u$ , o diagrama conteria ciclos. Portanto  $\{w, v_1, \dots, v_k\}$  é uma base ortonormal de  $U$ . Dai que

$$u = \langle u, w \rangle w + \langle u, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_k \rangle v_k$$

e

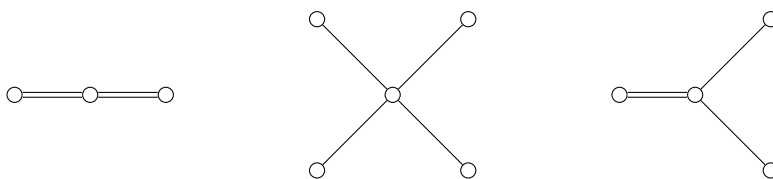
$$|u|^2 = \langle u, w \rangle^2 + \langle u, v_1 \rangle^2 + \cdots + \langle u, v_k \rangle^2 = 1$$

de onde se conclui que

$$\langle u, v_1 \rangle^2 + \cdots + \langle u, v_k \rangle^2 < 1$$

□

Este lema mostra que ligações do tipo



não ocorrem em um diagrama, já que em cada uma delas existem quatro arestas incidentes em um único vértice. O lema mostra também que a única possibilidade para o diagrama de Dynkin conter uma ligação simples é dada pelo seguinte diagrama com apenas dois vértices

$$G_2 \quad \text{---} \text{---} \text{---}$$

**Definição 6.1.** Uma cadeia simples é um pedaço de diagrama do tipo



isto é, um diagrama em que os vertices são ligados sucessivamente por apenas uma aresta.

**Lema 6.5.** *Suponha que um diagrama contém uma cadeia simples. Então, contraindo a cadeia simples a um vértice e mantendo a esse vertice as ligações com a cadeia simples, que se obtém é ainda um diagrama.*

*Demonstração.* Sejam  $\{v_1, \dots, v_k\}$  o conjunto de vértices correspondentes a cadeia simples  $\{u_1, \dots, u_r\}$  seu complementar na base que define o diagrama. Seja também

$$v = v_1 + \dots + v_k.$$

Então,  $\{v, u_1, \dots, u_r\}$  é uma base cujo diagrama é obtido por contração da cadeia simples, como no enunciado. De fato, tem-se em primeiro lugar, que

$$\langle v, v \rangle = \left\langle \sum_i v_i, \sum_j v_j \right\rangle = \sum_i |v_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \langle v_i, v_j \rangle = k + 2 \sum_{i < j \leq k} \langle v_i, v_j \rangle$$

e, como os vertices  $v_i$  formam uma cadeia simples

$$|v|^2 = k + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_i, v_{i+1} \rangle$$

Agora, o ângulo entre  $v_i$  e  $v_{i+1}$  é de  $120^\circ$  pois existe apenas um segmento ligando-os. Portanto  $2\langle v_i, v_{i+1} \rangle = -1$  e daí que a igualdade acima mostra que

$$|v|^2 = k(k-1) = 1$$

Para ver a ligação de  $v$  com os vértices fora da cadeia simples, o que se observa é que um vértice  $u_i$  se liga no máximo a um  $v_j$ , já que num diagrama não existem ciclos. Isso significa que cada  $u_i$  não é ortogonal a no máximo um dos vértices  $v_j$ . Daí que dado  $i$ ,

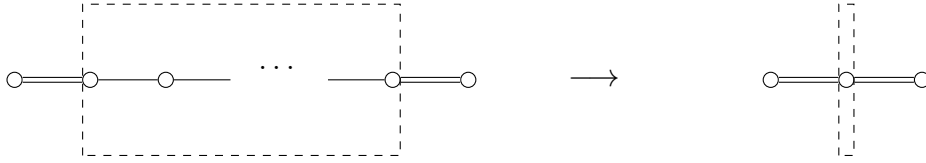
$$\langle v, u_i \rangle = \langle v_j, u_i \rangle$$

para algum  $v_j$ . Isso mostra que no conjunto linearmente independente

$$\{v, u_1, \dots, u_r\}$$

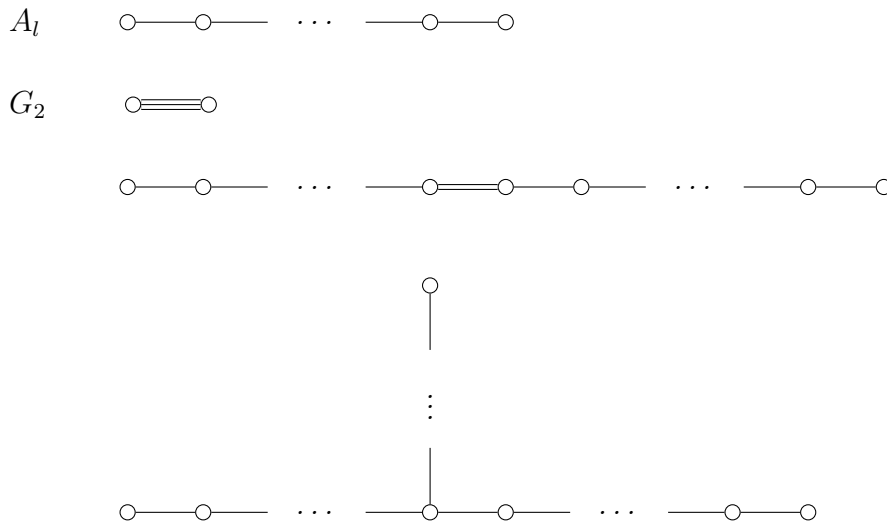
os ângulos entre os elementos estão de acordo com os requeridos para definir um diagrama. Além do mais, o fato de que o ângulo entre  $v$  e cada  $u_1$  coincide com o ângulo entre algum  $v_j$  e  $u_i$  implica que o diagrama definido por esse conjunto é exatamente o diagrama obtido do original por contração de  $\{v_1, \dots, v_k\}$  a  $v$ .  $\square$

Um exemplo da contração descrita no enunciado é

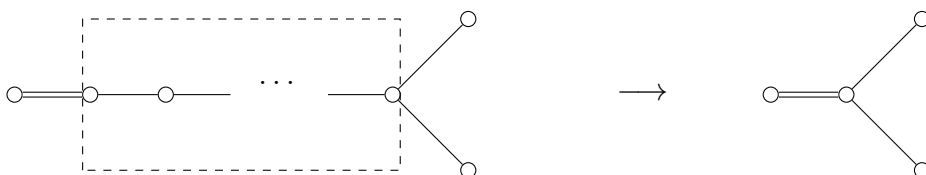


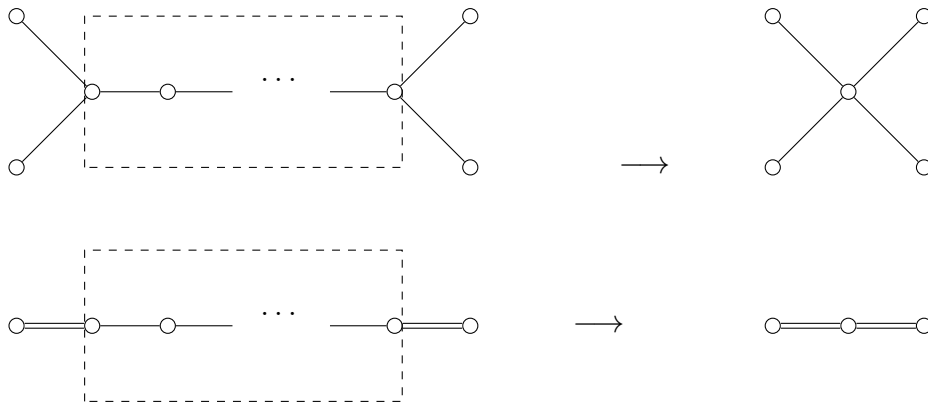
Com isso, temos a seguinte "classificação preliminar" dos diagramas de Dynkin.

**Proposição 6.6.** *Os únicos diagramas conexos (não orientados) possíveis, são os seguintes*



*Demonstração.* O primeiro dos diagramas acima (o caso da cadeia simples) é o único que não apresenta ligações múltiplas (ligações com duas ou três arestas entre os vértices sucessivos) ou bifurcações (vértices ligados a mais de dois vértices distintos). Já o segundo dos diagramas é o único que apresenta ligações triplas. Agora, se um diagrama apresenta uma ligação dupla ou uma bifurcação, então, a partir de uma das extremidades da ligação dupla ou do ponto de bifurcação, inicia-se uma cadeia simples. Se ao final dessa cadeia simples existe uma ligação dupla ou uma bifurcação, pode-se realizar uma das seguintes contrações





Como os resultados obtidos não estão contidos em diagramas, conclui-se que se um diagrama esta contem uma ligação dupla ele não contem uma bifurcação nem outra ligação dupla. Da mesma forma, um diagrama que contem uma bifurcação não contem uma ligação dupla nem outra bifurcação. Portanto, se um diagrama não é uma cadeia simples e não contém uma ligação tripla, ele é como o terceiro diagrama do enunciado(se contiver uma ligação dupla) ou como o quarto(se contiver uma bifurcação). Essa afirmação conclui a demonstração da proposição.

□

A continuação e feita a análise de quais são os possíveis diagramas que contem ligações duplas ou bifurcações.

**Proposição 6.7.** *Os possíveis diagramas que contem ligações duplas são*

$$BC_l \quad \circ - \circ - \dots - \circ = \circ \quad (l - \text{vértices}, l \geq 2)$$

$$F_4 \quad \circ - \circ = \circ - \circ \quad (4 \text{ vértices})$$

*Demonstração.* Existem inteiros  $p, q \geq 1$  tal que o diagrama se escreve como

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ & - & \circ & = & \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ & - & \circ \\ u_1 & & u_2 & & & & u_{p-1} & & u_p & & v_q & & v_{q-1} & & & & v_2 & & v_1 \end{array}$$

Será mostrado que  $q = 1$  ou  $q = 2$  e que para  $q = 1$  não existe restrição a  $p$  enquanto que para  $q = 2$  se tem necessariamente  $p = 1$  ou  $2$ . Essas duas possibilidades fornecem os dois diagramas do enunciado. O truque todo está em tomar

$$u = \sum_i^p i u_i$$

e

$$v = \sum_{i=1}^q i v_i$$

e aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwartz e esses dois vetores. Tem-se

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^p i u_i, \sum_{j=1}^p j u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p i^2 |u_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \langle i u_i, j u_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1)\end{aligned}$$

pois  $|u_1|^2 = 1$  e  $2\langle u_i, u_{i+1} \rangle = -1$ , já que o ângulo é  $120^\circ$ . Essa igualdade pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}|u|^2 &= \sum_{i=1}^p i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} (i^2 + 1) \\ &= p^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i \\ &= p^2 - \frac{p(p-1)}{2} \\ &= \frac{p^2 + p}{2}\end{aligned}$$

isto é

$$|u|^2 + \frac{p(p+1)}{2}$$

da mesma forma

$$|v|^2 = \frac{q(q+1)}{2}$$

Por outro lado

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p i u_i, \sum_{j=1}^q j v_j \right\rangle = \langle p u_p, q v_q \rangle = pq \langle u_p, v_q \rangle$$

pois  $u_i$  é ortogonal a  $v_j$  se  $i < p$  ou  $j < q$ . Como a ligação entre  $u_p$  e  $v_q$  é dupla,  $\langle u_p, v_q \rangle^2 = \frac{1}{2}$  e daí que

$$\langle u, v \rangle^2 = \frac{1}{2} p^2 q^2$$

A desigualdade de Cauchy-Schwartz aplicada a  $u$  e  $v$  fornece, então,

$$\frac{1}{2} p^2 q^2 < \frac{p(q+1)}{2} \frac{q(q+1)}{2}$$

Essa desigualdade é escrita, pois  $u$  e  $v$  são linearmente independentes, já que  $u$  pertence ao espaço gerado por  $\{u_1, \dots, u_p\}$  e  $v$  ao espaço gerado por  $\{v_1, \dots, v_q\}$ . Tem-se então que



$$pq - p - q + 1 < 2$$

isto é

$$(p-1)(q-1) < 2$$

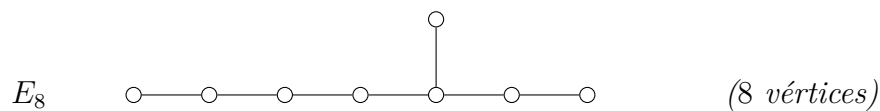
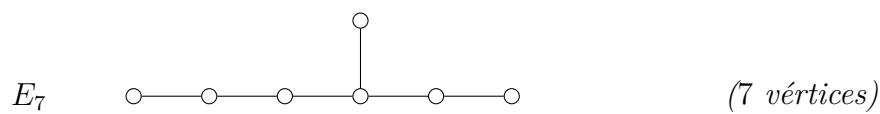
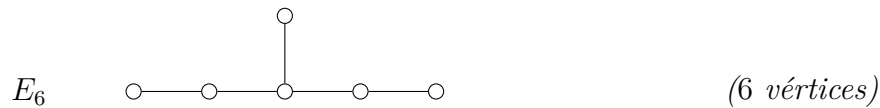
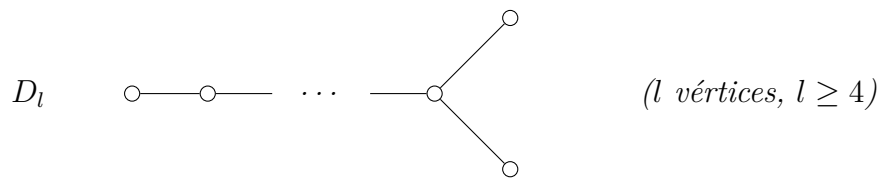
Agora, consideran-se os diferentes casos

1.  $q = 1$ . Então, não existe restrição a  $p$ .
2.  $q = 2$ . Então  $p - 1 < 2$ , isto é,  $p = 1$  ou  $p = 2$ .
3.  $q \geq 3$ . Então,  $q - 1 \geq 2$  e, portanto,  $p = 1$ . Invertendo os papéis entre  $p$  e  $q$  este caso é o mesmo que o primeiro caso.

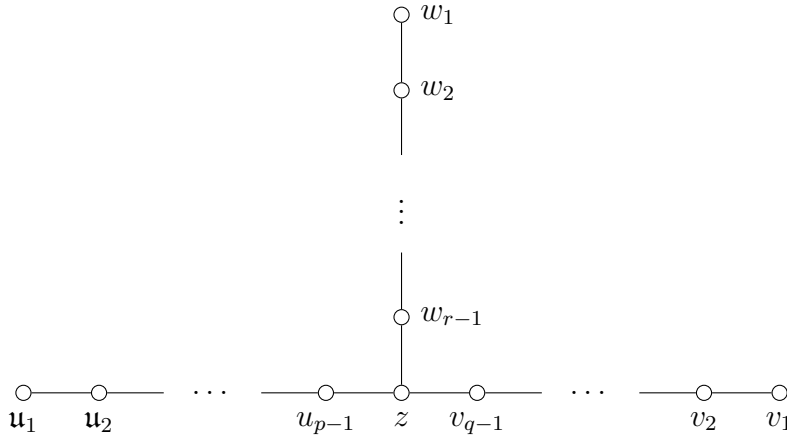
Assim, todos os casos estão cobertos.

□

**Proposição 6.8.** *Os possíveis diagramas que admitem bifurcação são*



*Demonstração.* Para inteiros  $p, q, r > 1$  o diagrama pode ser escrito como



A partir daí define-se

$$u = \sum_{i=1}^{p-1} i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{q-1} i v_i \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^{r-1} i w_i,$$

que são dois a dois ortogonais, pois pertencem a espaços gerados por vetores mutuamente ortogonais. Da mesma forma que na proposição anterior,

$$|u|^2 = \frac{p(p-1)}{2}, \quad |v|^2 = \frac{q(q-1)}{2} \quad \text{e} \quad |w|^2 = \frac{r(r-1)}{2}.$$

A relação desejada entre  $p$ ,  $q$  e  $r$  vai aparecer ao olhar os ângulos que  $u$ ,  $v$  e  $w$  formam com  $z$ . Sejam  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  esses ângulos. Como  $|z| = 1$  e  $u$ ,  $v$ ,  $w$  são ortogonais dois a dois, a norma da projeção ortogonal de  $z$  sobre o espaço  $V$  gerado por  $\{u, v, w\}$  é  $\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_3)$ . No entanto,  $z \notin V$  pois  $\{u, v, w\}$  está contido no espaço gerado por  $\{u_i, v_i, w_i\}$  o que não ocorre em  $z$ . Daí que

$$\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_3) < 1$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \langle u, z \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{p-1} i u_i, z \right\rangle \\ &= \langle (p-1) u_{p-1}, z \rangle \\ &= \frac{1-p}{2} \end{aligned}$$

pois  $u_i$  é ortogonal a  $z$  se  $i < p-1$  e  $u_{p-1}$  forma um ângulo de  $120^\circ$  com  $z$ . Juntando esta igualdade com a expressão acima para  $|u|^2$ , tem-se que

$$\cos^2(\varphi_1) = \frac{\frac{(p-1)^2}{4}}{\frac{p(p-1)}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

Da mesma forma

$$\cos^2(\varphi_1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

e

$$\cos^2(\varphi_3) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

A partir destas expressões para os cossenos e da desigualdade acima, obtém-se então que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

Essa desigualdade estabelece as restrições necessárias aos diagramas com bifurcações. Para descrever estas restrições, supõe-se, sem perda de generalidade que  $p \geq q \geq r \geq 1$  Existem os casos

1.  $r = 2$

(a)  $q = 2$ . Então

$$\frac{1}{p} > 0$$

e não a restrição a  $p$ . Os diagramas são como  $D_l$  do enunciado.

(b)  $q = 3$ . Então

$$\frac{1}{p} + \frac{5}{6} > 1$$

e  $p < 6$ , isto é,  $p = 3, 4$  ou  $5$  que dão origem a os diagramas com  $E_6, E_7$  E  $E_8$  que aparecem no enunciado.

(c)  $q \geq 4$ . Então

$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} + \frac{3}{4}$$

e daí que  $p < 4$ , o que contradiz a hipótese de que  $p \geq q$ . Portanto, não existem diagramas com esses valores de  $q$  e  $r$

2.  $r \geq 3$ . Como  $q \geq r \geq 3$ , tem-se

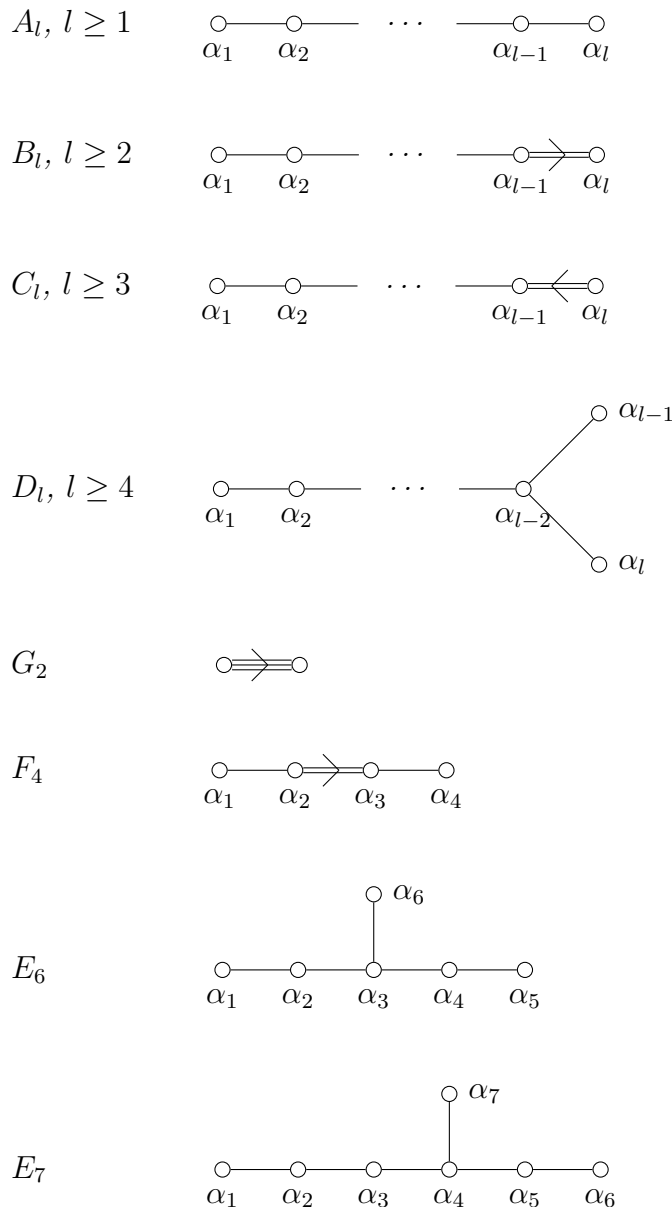
$$1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{2}{3}$$

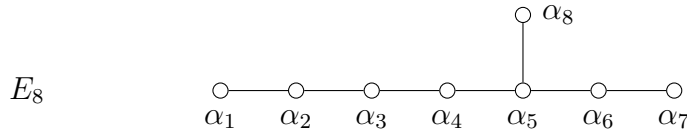
e  $p \leq 3$ , contradizendo a hipótese de que  $p \geq q$ . Portanto não existem diagramas quando  $r \geq 3$

□

Ficam assim determinados todos os diagramas provenientes de bases normalizadas, isto é, aqueles que não são dirigidos. A partir daí fica fácil encontrar quais são os diagramas dirigidos, pois entre os diagramas acima, os únicos que apresentam ligações múltiplas são  $G_2$ ,  $F_4$ ,  $B_l$  e  $C_l$  e é possível ver diretamente quais são as formas de se colocar uma direção nessas ligações. Nos casos  $G_2$  e  $F_4$  é indiferente qual a direção que se tome, pois o diagrama é simétrico em relação à ligação múltipla. O mesmo ocorre com  $B_2$  e  $C_2$ . Já para os diagramas  $B_l$ ,  $C_l$ , existem dois diagramas dirigidos possíveis se  $l \geq 3$ . Com isso, a classificação dos diagramas de Dynkin está concluída e temos o seguinte teorema:

**Teorema 6.9.** *Os diagramas de Dynkin conexos são*





### 6.3

#### Realizações dos diagramas

Falta verificar que os diagramas são de fato diagramas de Dynkin, isto é, são definidos a partir de bases de  $\mathbb{Q}^l$ . Vamos a apresentar explicitamente bases de  $\mathbb{Q}^l$  que são associadas a esses diagramas.

$A_l$  Em  $\mathbb{Q}^{l+1}$  seja  $E_l$  o espaço de dimensão  $l$  dado por

$$E_l = \{(x_1, \dots, x_{l+1}) : x_1 + \dots + x_{l+1} = 0\}$$

O conjunto

$$\Sigma_l = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_l - e_{l-1}\}$$

é uma base de  $E_l$ . Todos os elementos de  $\Sigma_l$  tem comprimento  $\sqrt{2}$  e o ângulo entre os elementos sucessivos de  $\Sigma_l$  é  $120^\circ$ , enquanto quaisquer outros pares de elementos são ortogonais. Por isso  $A_l$ ,  $l \geq 1$ , é o diagrama de  $\Sigma_l$ .

$B_l$  Em  $\mathbb{Q}^l$ , seja

$$\Sigma_l = \{e_1 - e_2, \dots, e_{l-1} - e_l, e_l\}$$

Então, temos que  $\Sigma_l$  é uma base de  $\mathbb{Q}^l$  e os primeiros  $l - 1$  elementos de  $\Sigma_l$  tem o mesmo padrão de comprimentos e ângulos que  $A_{l-1}$ . Além do mais

$$|e_{l-1} - e_l|^2 = 2 = 2 |e_l|^2$$

e o ângulo entre  $e_{l-1} - e_l$  e  $e_l$  é de  $135^\circ$ . Por isso o diagrama correspondente é  $B - l$ .

$C_l$  Da mesma forma que no caso anterior, verifica-se que a base

$$\Sigma_l = \{e_1 - e_2, \dots, e_{l-1} - e_l, 2e_l\}$$

de  $\mathbb{Q}^l$  é uma realização de  $C_l$ .

$D_l$  Uma realização é dada pela base

$$\Sigma_l = \{e_1 - e_2, \dots, e_{l-2} - e_{l-1}, e_{l-1} - e_l, e_{l-1} + e_l\}$$

de  $\mathbb{Q}^l$ ,  $l \geq 4$ . O vértice de bifurcação é  $e_{l-2} - e_{l-1}$  que forma um ângulo de  $120^\circ$  com  $e_i - e_{i+1}$ ,  $i = l-3, l-1$  com  $e_{l-1} + e_l$ ;

$G_2$  Tome em  $\mathbb{Q}^3$  o subespaço de dimensão dois gerado pelo par de vetores  $(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$  e  $(-\frac{1}{18}, -\frac{1}{18}, \frac{2}{18})$

$F_4$  Esse diagrama é realizado pela base  $\mathbb{Q}^4$  dada por

$$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3, \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4)\}$$

em que o comprimento dos elementos maiores é  $\sqrt{2}$  e dos menores é 1 e a ligação dupla é feita entre  $e_2 - e_3$  e  $e_3$ ;

$E_6, E_7$  e  $E_8$  Uma realização de  $E_8$  é a base do subespaço

$$E_8 = \{(x_1, \dots, x_9) \in \mathbb{Q}^9 : x_1 + \dots + x_9 = 0\}$$

de  $\mathbb{Q}^9$  dada por  $\Sigma_8 = \{e_2 - e_3, e_3 - e_4, \dots, e_8 - e_9, v\}$  onde  $v$  é a projeção ortogonal de  $-(e_2 + e_3 + e_4)$  sobre  $E_8$ , que é

$$v = -\frac{2}{3}(e_2 + e_3 + e_4) + \frac{1}{3}(e_1 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8 + e_9)$$

O vertice da bifurcação é dado por  $e_4 - e_5$  que se liga a  $v$  e a  $e_5 - e_6$  e o lado maior da base do diagrama começa em  $e_8 - e_9$ . de  $E_8$  e, portanto, são realizados retirando os primeiros vértices de  $E_8$  que são  $e_8 - e_9$ . Os diagramas de  $E_7$  e  $E_6$  são subdiagramas de  $E_8$  e, portanto, são realizados retirando os primeiros vértices de  $E_8$ , que são  $e_8 - e_9$  e  $e_7 - e_8$ .

## 6.4

### Álgebras isomorfas

Uma álgebra semi-simples da origem a uma matriz de Cartan, que por sua vez da origem a um diagrama de Dynkin. Na construção foram feitas duas escolhas na álgebra. Primeiro foi escolhida uma subálgebra de Cartan e logo um sistema simples de raízes da subálgebra. Para garantir que um diagrama é determinado a partir de uma álgebra semisimples, é necessário verificar que todos os sistemas simples em todas as subálgebras de Cartan de uma álgebra

dada tem o mesmo diagrama de Dynkin. Para isso é necesario mostrar os seguintes fatos:

1. Se  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são sistemas simples de raízes para uma mesma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ , então os diagramas a eles associados coincidem. Vamos a mostrar isso mais a frente, quando falemos de grupos de Weyl.
2. Os diagramas associados a duas subálgebras de Cartan coincidem.
3. os diagramas associados a  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  coincidem se essas álgebras são isomorfas.

Na direção contrária é preciso verificar que cada um dos diagramas é o diagrama de Dynkin de uma álgebra de Lie semi-simples. Nos não vamos a mostrar isso rigorosamente no presente trabalho para as chamadas álgebras clássicas. Para o resto vamos a indicar a ideia de algumas possíveis construções e referenciar elas.

Finalmente é necesario mostrar que se  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  tem o mesmo diagrama, então são isomorfas.

**Teorema 6.10.** *Os diagramas associados a subálgebras de Cartan coincidem.*

*Demonstração.* Sejam  $\mathfrak{h}_1$  e  $\mathfrak{h}_2$  duas subálgebras de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Então sabemos que existe um automorfismo  $\phi$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ . Sejam então  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  os conjuntos de raízes de  $\mathfrak{h}_1$  e  $\mathfrak{h}_2$  respetivamente. Tomando  $\alpha \in \Pi_1$ , existe, por definição,  $X \neq 0$  tal que

$$[H, X] = \alpha(H)X$$

para todo  $H \in \mathfrak{h}_1$ . Aplicando  $\phi$  a esta igualdade e usando o fato de que  $\phi$  é automorfismo, chega-se a

$$[H, \phi(X)] = \alpha(\phi^{-1}(H))\phi(X)$$

para todo  $H \in \mathfrak{h}_2$ . Isso mostra que  $\phi^*\alpha = \alpha \circ \phi^{-1}$  é uma raiz para  $\mathfrak{h}_2$  e daí  $\phi^*(\Pi_1) \subset \Pi_2$ . Mas  $\phi$  é automorfismo e tanto  $\Pi_1$  quanto  $\Pi_2$  são finitos, portanto,  $\phi^*(\Pi_1) = \Pi_2$ . Tomando então um sistema simples  $\Sigma_1 \subset \Pi_1$ , os elementos de  $\Pi_1$  são combinações lineares de  $\Sigma_1$  com coeficientes inteiros, todos eles com o mesmo sinal. Aplicando  $\phi^*$  a essas combinações lineares, vê-se que o mesmo ocorre com  $\Pi_2$  e  $\phi^*(\Sigma_1)$ . Daí que  $\phi^*(\Sigma_1)$  é um sistema simples para  $\mathfrak{h}_2$ . Por outro lado, a forma de Killing é invariante por  $\phi$  e  $\phi$  é uma isometria entre as formas de Killing em  $\mathfrak{h}_1^*$  e  $\mathfrak{h}_2^*$ . Portanto,  $\Sigma_1$  e  $\phi^*(\Sigma_1)$  tem o mesmo diagrama.  $\square$

Para verificar que duas álgebras isomorfas definem um mesmo diagrama o procedimento é como na demonstração anterior: um isomorfismo entre duas

álgebras aplica subálgebras de Cartan em subálgebras de Cartan e é uma isometria entre as formas de Killing das álgebras.

Antes de provar que se  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  são isomorfas se tem o mesmo diagrama, é conveniente discutir a relação entre as componentes conexas dos diagramas e a decomposição da álgebra semi-simples em componentes simples.

**Proposição 6.11.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples e seja*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$$

*sua decomposição em componentes simples. Então o diagrama de  $\mathfrak{g}$  se decompõe na união disjunta dos diagramas de  $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_s$  que não estão ligadas entre si*

*Demonstração.* Tome subálgebras de Cartan  $\mathfrak{h}_i$  de  $\mathfrak{g}_i$ . Então

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_s$$

é uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Além do mais, se  $\Pi_i$  denota o conjunto de raízes de  $\mathfrak{g}_i$  em relação a  $\mathfrak{h}_i$ , então  $\alpha \in \Pi_i$  pode ser estendido a um funcional linear em  $\mathfrak{h}$ , colocando  $\alpha(h_j) = 0$  para  $j \neq i$ . Por essas extensões,  $\Pi = \Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_s$  fica sendo o conjunto de raízes de  $\mathfrak{g}$  em relação a  $\mathfrak{h}$ . Por outro lado as componentes simples de  $\mathfrak{g}$  são duas a duas ortogonais em relação á forma de Killing e certamente essa mesma relação subsiste com as subálgebras de Cartan  $\mathfrak{h}_i \in \mathfrak{g}_i$ . Temos então que  $H_\alpha \in \mathfrak{h}_i$  se  $\alpha \in \Pi_i$  e  $H_\alpha$  coincide com o dual de  $\alpha$  em relação a forma de Killing de  $\mathfrak{g}_i$ . Dessa forma temos que  $\langle H_\alpha, H_\beta \rangle = 0$  se  $\alpha \in \Pi_i$  e  $\beta \in \Pi_j$ ,  $i \neq j$ . Isso mostra que no diagrama de  $\Pi$  as partes correspondentes a  $\Pi_i$  e  $\Pi_j$  não são ligadas.  $\square$

A continuação vamos a mostrar que os diagramas das álgebras de Lie simples são conexos. Antes disso precisamos do seguinte lema

**Lema 6.12.** *Seja  $\mathfrak{h}$  uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  e seja  $\Sigma$  um sistema simples de raízes de  $\mathfrak{g}$ . Suponha que  $\Sigma$  se descomponha como uma união disjunta  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  com  $\Sigma_1 \neq 0 \neq \Sigma_2$  e tal que  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$  se  $\alpha \in \Sigma_1$  e  $\beta \in \Sigma_2$ . Sejam  $\mathfrak{h}_1^*$  e  $\mathfrak{h}_2^*$  os subespaços de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$  gerados por  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  respectivamente. Então  $\Pi \in \mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$  onde  $\Pi$  é o conjunto das raízes.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que existam raízes que não estão nem em  $\mathfrak{h}_1^*$  nem em  $\mathfrak{h}_2^*$ . Existem então raízes positivas em essas condições. Escolhemos uma raiz positiva  $\beta \notin \mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$  cuja altura seja mínima entre as raízes positivas que não estão em  $\mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$ . Essa raiz não é simples, pois, por construção  $\Sigma \in \mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$ . Então pelo corolário 5.31 existe uma raiz simples  $\alpha \in \Sigma$  tal que  $\beta - \alpha$  é raiz positiva. Como  $\beta$  tem altura mínima entre as raízes positivas que



não estão em  $\mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$  temos que  $\beta - \alpha \in \mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$ . Suponhamos, para fixar as ideias, que  $\beta - \alpha \in \mathfrak{h}_1^*$ . Então temos que  $\alpha \in \mathfrak{h}_2^*$ , pois se  $\alpha \in \mathfrak{h}_1^*$ , então teríamos  $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha \in \mathfrak{h}_1^*$  (mas nos escolhemos  $\beta \notin \mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$ ). A contradição surge ao ser examinada a  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta - \alpha$ . Como  $\beta$  é raiz positiva, sua expressão como combinação linear das raízes simples, mostra que  $\beta - 2\alpha$  é raiz negativa se e só se  $\beta = \alpha$ , o que não ocorre, pois  $\beta$  não é simples e  $\alpha$  sim. Por outro lado, temos que  $\beta - 2\alpha \notin \mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$ , já que se  $\beta - 2\alpha \in \mathfrak{h}_1^*$ , então  $\alpha = (\beta - \alpha) - (\beta - 2\alpha) \in \mathfrak{h}_1^*$  o que constitui um absurdo pois  $\alpha \in \mathfrak{h}_2^*$ . Analogamente se  $\beta - 2\alpha \in \mathfrak{h}_2^*$  então  $\beta - \alpha = (\beta - 2\alpha) + \alpha \in \mathfrak{h}_2^*$  mas  $\beta - \alpha \in \mathfrak{h}_1^*$ . Então temos que  $\beta - 2\alpha$  é raiz positiva e não está em  $\mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$ . Mas isso é um absurdo, pela escolha inicial de  $\beta$ . Logo  $\beta - 2\alpha$  não é raiz. Dai que a  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta - \alpha$  é da forma

$$\beta - \alpha, \beta, \dots$$

Temos então que  $p = 0$  e  $q \neq 0$  e então pela formula de Killing temos que

$$p - q = \frac{2\langle \beta - \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \neq 0$$

e logo temos que  $\langle \beta - \alpha, \alpha \rangle \neq 0$  o que contradiz o fato de  $\beta - \alpha \in \mathfrak{h}_1^*$  e  $\alpha \in \mathfrak{h}_2^*$ . □

**Proposição 6.13.** *Se  $\mathfrak{g}$  é simples, então seu diagrama é conexo.*

*Demonstração.* Seja  $\mathfrak{g}$  uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  e seja  $\Pi$  o conjunto de raízes correspondente a  $\Sigma$  um sistema simples. Suponha por absurdo que o diagrama associado não seja conexo. Isso significa que  $\Sigma$  se decompõe numa união disjunta de  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  com  $\Sigma_1 \neq \emptyset \neq \Sigma_2$  e  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$  se  $\alpha \in \Sigma_1$  e  $\beta \in \Sigma_2$ . Sejam  $\mathfrak{h}_1^*$  e  $\mathfrak{h}_2^*$  os subespaços de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$  gerados por  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  respectivamente. Como  $\Sigma$  é base,  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^* = \mathfrak{h}_1^* \oplus \mathfrak{h}_2^*$ . Definimos  $\Pi_i = \Pi \cap \mathfrak{h}_i^*$ ,  $i = 1, 2$ . Pelo lema anterior temos que  $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ . Definimos então

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i \oplus \sum_{\alpha \in \Pi_i} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

onde  $\mathfrak{h}_i$  é o subespaço de  $\mathfrak{g}$  gerado por  $H_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Pi_i$ . Vamos a mostrar a continuação que então  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  são ideais, contradizendo a hipótese de  $\mathfrak{g}$  ser simples. Sejam  $\alpha, \beta \in \Pi_1$ . Temos que  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \mathfrak{h}_1$  se  $\beta = -\alpha$  e  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  se  $\alpha + \beta$  é raiz. Nesse ultimo caso  $\alpha + \beta \in \Pi_1$ , o que mostra que  $\mathfrak{g}_1$  é subálgebra. Por outro lado, se  $\gamma \in \Pi_2$ , então  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\gamma}] = 0$  já que  $\alpha + \gamma \notin \mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$ . Além do

mais,  $\mathfrak{h}_2$  é o complementar ortogonal de  $\mathfrak{h}_1$  em  $\mathfrak{g}$  e logo  $[\mathfrak{h}_2, \mathfrak{g}_1] = 0$ . Assim  $\mathfrak{g}_1$  é um ideal, contradizendo a hipótese de que  $\mathfrak{g}$  é simples.  $\square$

A continuação enunciaremos uma serie de lemas que serão úteis para mostrar que  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  tem o mesmo diagrama se são isomorfas. Esses lemas oferecem informação sobre os colchetes de Lie entre os diferentes espaços de raízes  $\mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ , associados a uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ . Estes lemas também serão importantes no ultimo capítulo para saber quando um diagrama de Satake é admissível. Escolhemos de uma vez uma base de  $\mathfrak{g}$  formada por uma base de  $\mathfrak{h}$  e por  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  tal que

$$\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1$$

e definindo  $m_{\alpha,\beta}$  por

$$[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$$

**Lema 6.14.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  raízes e seja*

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha$$

*a  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta$ . Então*

$$[X_\alpha, [X_\alpha, X_\beta]] = q(p+1) \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} X_\beta$$

*Demonstração.* Ver [6].  $\square$

**Lema 6.15.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  raízes e seja*

$$\beta - q\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha$$

*a  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta$ , Então*

$$m_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,-\beta} = -q(p+1) \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2}$$

*Demonstração.* Pela definição de  $m_{\alpha,\beta}$ , temos que

$$\langle [X_\alpha, X_\beta], [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] \rangle = \langle m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}, m_{-\alpha,-\beta} X_{-(\alpha+\beta)} \rangle = m_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,-\beta}$$

Por outro lado, a anti-simetria de  $ad(X_{-\alpha})$  em relação à forma de Killing mostra que:

$$\langle [X_\alpha, X_\beta], [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] \rangle = -\langle [X_{-\alpha}, [X_\alpha, X_\beta]], X_{-\beta} \rangle$$

De onde segue, pelo lema anterior, que

$$m_{\alpha,\beta}m_{-\alpha,-\beta} = -q(p+1)\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}$$

□

**Lema 6.16.** *Sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  raízes e suponha que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ . Então*

$$m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha} = -m_{\alpha,\gamma}$$

*Demonstração.* As raízes são duas a duas linearmente independentes pois, pois os únicos múltiplos de uma raiz soa ela mesma e sua oposta. Aplicando a identidade de Jacobi a  $[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]]$  temos que

$$m_{\beta,\gamma}[X_\alpha, X_{\beta+\gamma}] = m_{\alpha,\beta}[X_{\alpha+\beta}, X_\gamma] + m_{\alpha,\gamma}[X_\beta, X_{\alpha+\gamma}]$$

Mas temos que por hipótese  $\beta + \gamma = -\alpha$ . Portanto  $[X_\alpha, X_{\beta+\gamma}] = H_\alpha$  pois  $\langle X_\delta, X_\delta \rangle = 1$  para toda raiz  $\delta$ . Substituindo da mesma forma  $\alpha + \beta$  e  $\alpha + \gamma$  no segundo membro da igualdade acima temos que

$$m_{\beta,\gamma}H_\alpha = m_{\alpha,\beta}H_\alpha = m_{\alpha,\beta}(H_\alpha + H_\beta) + m_{\alpha,\gamma}H_\beta$$

substituindo agora  $-\gamma = \alpha + \beta$  temos que

$$m_{\beta,\gamma}H_\alpha = m_{\alpha,\beta}(H_\alpha + H_\beta) + m_{\alpha,\gamma}H_\beta$$

Como  $\alpha$  e  $\beta$  são linearmente independentes temos então que

$$m_{\beta,\gamma} = m_{\alpha,\beta} = -m_{\alpha,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$$

□

**Lema 6.17.** *Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  raízes e suponha que nenhuma é oposta da outra. Suponha também que*

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

*Então*

$$m_{\alpha,\beta}m_{\gamma,\delta} + m_{\beta,\gamma}m_{\alpha,\delta} + m_{\gamma,\alpha}m_{\beta,\delta} = 0$$

*Demonstração.* Suponha em primeiro lugar que  $\beta + \gamma$  é raiz. Então, faz sentido

escrever  $m_{\alpha, \beta + \gamma}$  e vale a igualdade

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] = m_{\alpha, \beta + \gamma} m_{\beta, \gamma} X_{\alpha + \beta + \gamma} = m_{\alpha, \beta + \gamma} m_{\beta, \gamma} X_{-\delta}$$

pois  $-\delta = \alpha + \beta + \gamma$ . Pelo lema 6.16 aplicado as raízes  $\alpha$ ,  $(\beta + \gamma)$ ,  $\delta$ , temos  $m_{\alpha, \beta + \gamma} = m_{\delta, \alpha}$  que subsistuído na igualdade acima fornece

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] = -m_{\alpha, \beta} m_{\beta, \gamma} X_{-\delta}$$

Esta igualdade faz sentido e é válida mesmo que  $\beta + \gamma$  não seja raiz, pois, nesse caso, o primeiro membro se anula pelo fato de que  $m_{\beta, \gamma} = 0$ . Agora, aplicando a identidade de Jacobi ao primeiro membro da ultima igualdade, obtem-se a partir do segundo membro, fazendo permutações cíclicas de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , que

$$(m_{\alpha, \delta} m_{\beta, \gamma} + m_{\gamma, \delta} m_{\alpha, \beta} + m_{\beta, \delta} m_{\gamma, \alpha} X_{-\delta}) = 0$$

o que implica a igualdade do enunciado.  $\square$

**Teorema 6.18.** *Suponha que  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$  sejam álgebras simples e tome subálgebras de Cartan  $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_2$ . Denote por  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  os conjuntos de raízes correspondentes e sejam  $\mathfrak{h}_{1\mathbb{Q}}$  e  $\mathfrak{h}_{2\mathbb{Q}}$  os subespaços racionais gerados pelas raízes. Suponha que exista uma transformação linear (sobre os racionais) inversível  $\phi : \mathfrak{h}_{1\mathbb{Q}} \rightarrow \mathfrak{h}_{2\mathbb{Q}}$  tal que  $\phi(\Pi_1) = \Pi_2$ . Então,  $\phi$  se estende a um isomorfismo  $\tilde{\phi} : \mathfrak{g}^1 \rightarrow \mathfrak{g}^2$ .*

*Demonstração.* Primeiramente vamos a mostrar que  $\phi$  é uma isometria entre as formas de Killing de  $\mathfrak{h}_{1\mathbb{Q}}$  e de  $\mathfrak{h}_{2\mathbb{Q}}$ . Vamos a usar um resultado que provaremos no capítulo dedicado a os grupos de Weyl. Dito resultado (ver teorema 7.3) diz que  $\langle \alpha, \beta \rangle = c \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle$  para um escalar  $c \neq 0$ . Agora bem, como

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \sum_{\gamma \in \Pi_1} \gamma(H_\alpha) \gamma(H_\beta) \\ &= \sum_{\gamma \in \Pi_1} \langle \gamma, \alpha \rangle \langle \gamma, \beta \rangle \\ &= c^2 \sum_{\gamma \in \Pi_1} \langle \phi(\gamma), \phi(\alpha) \rangle \langle \phi(\gamma), \phi(\beta) \rangle \\ &= c^2 \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle \end{aligned}$$

conclui-se que  $c^2 = 1$  e, portanto,  $c = 1$  e  $\phi$  é uma isometria.

O procedimento para construir a extensão  $\tilde{\phi}$  é o seguinte: para cada  $\alpha \in \Pi^1$ , escolha  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha^1$  de tal forma que

$$\langle X_\alpha, X_\alpha \rangle = 1$$

Como acima, será usada a notação  $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}$ . Nosso objetivo é encontrar  $Y_{\phi(\alpha)} \in \mathfrak{g}_{\phi(\alpha)}^2$  tal que  $\langle Y_{\phi(\alpha)}, Y_{-\phi(\alpha)} \rangle = 1$  e

$$\langle Y_{\phi(\alpha)}, Y_{\phi(\beta)} \rangle = m_{\alpha,\beta} Y_{\phi(\alpha)+\phi(\beta)}$$

Feito isso o isomorfismo é dado pela igualdade das constantes de estrutura das bases  $\{X_\alpha\}$  e  $\{Y_{\phi(\alpha)}\}$ .

A definição de  $Y_{\phi(\alpha)}$  é feita por indução em relação a uma ordem em  $\Pi$ . Por isso é conveniente introduzir um sistema simples  $\Sigma \in \Pi$  com a ordem correspondente em  $\Pi$ .

Para simplificar a notação  $\phi(\alpha)$  será denotado por  $\alpha^*$ .

A construção de  $Y_{\alpha^*}$  é por indução sobre a altura de  $\alpha$  se  $\alpha \geq 0$  e pela relação  $\langle Y_{\alpha^*}, Y_{\alpha^*} \rangle = 1$  se  $\alpha \leq 0$ .

As raízes positivas de altura 1 são as raízes simples. Para essas raízes simples, escolha elementos não nulos arbitrários  $Y_{\alpha^*} \in \mathfrak{g}_{\alpha^*}^2$  e tome  $Y_{-\alpha^*}$  de forma que  $\langle Y_{\alpha^*}, Y_{\alpha^*} \rangle = 1$ .

Passando as raízes de altura  $n \geq 1$ , seja  $\Pi_n$  o conjunto de raízes  $\alpha$  tal que  $\alpha$  ou  $-\alpha$  é de altura  $\leq n$  dependendo se  $\alpha$  é positiva ou negativa. A hipótese de indução é que  $Y_{\alpha^*}$  está definido para toda raiz  $\alpha \in \Pi_{n-1}$  e se  $\beta, \gamma$  e  $\beta + \gamma$  estão em  $\Pi_{n-1}$  então

$$[Y_{\beta^*}, Y_{\gamma^*}] = m_{\beta,\gamma} Y_{\beta^*+\gamma^*}$$

Seja  $\delta$  uma raiz positiva de altura  $n$ . Para definir  $Y_{\delta^*}$  escolha uma decomposição  $\delta = \alpha + \beta$  com  $\alpha$  raiz simples e  $\beta$  raiz positiva. Como  $\alpha + \beta$  é raiz,  $m_{\alpha,\beta} \neq 0$  e, portanto, pode-se definir  $Y_{\delta^*}$  pela igualdade

$$m_{\alpha,\beta} Y_{\delta^*} = [Y_{\alpha^*}, Y_{\beta^*}]$$

e, a partir daí,  $Y_{-\delta^*}$  é dado por  $\langle Y_{\delta^*}, Y_{-\delta^*} \rangle = 1$ .

Uma vez definidos estes elementos pode-se escrever

$$[Y_{\gamma^*}, Y_{\delta^*}] = n_{\gamma,\delta} Y_{\gamma^*+\delta^*}$$

se  $\gamma, \delta$  e  $\gamma + \delta$  estão em  $\Pi_n$ .

Para concluir a demonstração do teorema falta mostrar que  $n_{\gamma,\delta} = m_{\gamma,\delta}$ . Tomando duas de essas raízes, devem-se considerar os seguintes casos:

1.  $\gamma, \delta$  e  $\gamma + \delta$  estão em  $\Pi_{n-1}$ . Então  $n_{\gamma,\delta} = m_{\gamma,\delta}$  pela hipótese de indução.

2.  $\gamma + \delta$  é uma raiz positiva de altura  $n$ ; Nesse caso,  $\gamma$  e  $\delta$  são raízes positivas, e portanto, estão em  $\Pi_{n-1}$ . Como foi definido acima  $\gamma + \delta = \alpha + \beta$  com  $\alpha$  raiz simples e

$$m_{\alpha,\beta} Y_{\gamma^*+\delta^*} = [Y_{\alpha^*}, Y_{\beta^*}]$$

Em vista desta igualdade, pode-se supor que  $\gamma$  e  $\delta$  são diferentes de  $\alpha$  e  $\beta$ . Dessa forma, o lema 6.17 se aplica as raízes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $-\gamma$  e  $-\delta$ , mostrando que

$$m_{\alpha,\beta} m_{-\gamma,-\delta} = -m_{\beta,-\gamma} m_{\alpha,-\delta} - m_{-\gamma,\alpha} m_{\beta,-\delta}$$

Da mesma forma o lema 6.17 se aplica às raízes  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  e  $-\delta^*$  fornecendo a igualdade

$$n_{\alpha,\beta} n_{-\gamma,-\delta} = -n_{\beta,-\gamma} n_{\alpha,-\delta} - n_{-\gamma,\alpha} n_{\beta,-\delta}$$

Os segundos membros das ultimas dois igualdades coincidem pela hipótese de indução, já que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são raízes positivas. Portanto

$$m_{\alpha,\beta} m_{-\gamma,-\delta} = n_{\alpha,\beta} n_{-\gamma,-\delta}$$

No entanto,  $m_{\alpha,\beta} = n_{\alpha,\beta} \neq 0$  pela definição de  $Y_{\gamma^*+\delta^*}$ . Portanto temos  $n_{-\gamma,-\delta} = m_{-\gamma,-\delta}$ . A partir desta igualdade, mostra-se que  $n_{-\alpha,-\beta} = m_{-\alpha,-\beta}$  usando o fato de que  $\phi$  é uma isometria. Tomando a  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta$ , o lema 6.15 garante que

$$m_{\alpha,\beta} m_{-\alpha,-\beta} = -q(p+1) \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2}$$

Por outro lado, a  $\alpha^*$ -sequencia iniciada em  $\beta^*$  tem os mesmos parâmetros  $p$  e  $q$  que a  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta$ , pois  $\phi$  aplica raízes em raízes. Daí que

$$n_{\alpha,\beta} n_{-\alpha,-\beta} = -q(p+1) \frac{\langle \alpha^*, \alpha^* \rangle}{2}$$

e, como  $\phi$  é isometria, segue-se que  $n_{-\alpha,-\beta} = m_{-\alpha,-\beta}$ , concluindo a demonstração desse caso.

3.  $\gamma + \delta$  é raiz negativa e  $-(\gamma + \delta)$  é de altura  $n$ . Então, a primeira parte da demonstração do caso anterior aplicada às raízes  $-\gamma$  e  $-\delta$  mostra que

$m_{\gamma,\delta} = n_{\gamma,\delta}$  (Em virtude da falta de simetria nas definições de  $X_{\gamma+\delta}$  e  $X_{-\gamma-\delta}$  o caso anterior não pode ser obtido por simetria a partir deste).

4. Uma das raízes  $\gamma$  ou  $\delta$  é de altura  $\pm n$ . Por exemplo, suponha que  $-\gamma$  é de altura  $n$ . Então,  $\delta$  é positiva pois  $\gamma + \delta \in \Pi_n$ . Dessa forma, as raízes  $\delta$  e  $-(\gamma + \delta)$ , cuja soma é  $-\gamma$ , estão nas condições do segundo caso. Por essa razão,  $n_{\delta,-\gamma-\delta} = m_{\delta,-\gamma-\delta}$ . Agora, aplicando o lema 6.16 com  $\gamma$ ,  $\delta$  e  $-(\gamma + \delta)$  tem-se então que  $m_{\delta,-\gamma-\delta} = m_{\gamma,\delta}$ . Aplicando o mesmo lema a  $\gamma^*$ ,  $\delta^*$  e  $-(\gamma^* + \delta^*)$ , chega-se a  $n_{\delta,-\gamma-\delta} = n_{\gamma,\delta}$ , mostrando a igualdade entre  $m_{\gamma,\delta}$  e  $n_{\gamma,\delta}$ .

Esses casos sobrem todas as possibilidades, concluindo a construção de uma base de  $\mathfrak{g}^2$  com as mesmas constantes de estrutura que a base dada de  $\mathfrak{g}^1$ . As álgebras são, portanto, isomorfas.  $\square$

Com este teorema fica mostrado que se duas álgebras tem sistemas simples com o mesmo diagrama, então elas são isomorfas, pois a transformação linear que associa os elementos correspondentes dos sistemas simples se estende a um isomorfismo das álgebras.

## 6.5

### Construção das álgebra de Lie clássicas

Resta verificar que de fato cada um dos diagramas corresponde a alguma álgebra simples. Vamos a construir álgebras de Lie de tipo  $A_l$ ,  $B_l$ ,  $C_l$  e  $D_l$ , as chamadas álgebras clássicas. A construção do resto das álgebras e mais sofisticada, só daremos algumas diretrizes ou possíveis referencias de leitura.

**Teorema 6.19.** *Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie das matrizes  $(l+1) \times (l+1)$  que tem traço zero,  $\mathfrak{sl}(l+1)$ . Então o diagrama associado a  $\mathfrak{g}$  é  $A_l$ .*

*Demonstração.* A subálgebra de Cartan é a subálgebra  $\mathfrak{h}$  das matrizes diagonais de traço zero. Seja  $E_{ij} := (a_{rs})_{r,s}$  a matriz  $(l+1) \times (l+1)$  cuja única entrada não nula é  $a_{ij} = 1$ . O conjunto das matrizes  $E_{ij}$  e  $E_{ii} - E_{jj}$ ,  $i \neq j$  é uma base de  $\mathfrak{sl}(l+1)$ . Dado  $H \in \mathfrak{h}$ , pode se escrever

$$H = \text{diag}\{a_1, \dots, a_{l+1}\}$$

com  $a_1 + \dots + a_{l+1} = 0$  e temos que

$$\text{ad}(H)(E_{ij}) = (a_i - a_j)(E_{ij})$$

Esta igualdade mostra que as raízes de  $\mathfrak{h}$  são os funcionais lineares  $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ ,  $i \neq j$  onde  $\lambda_i$  é dado por

$$\lambda_i : \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_{l+1}\} \mapsto a_i$$

e os espaços de raízes correspondentes são os subespaços unidimensionais gerador por  $E_{ij}$ ,  $i \neq j$ . E dizer, temos que

$$\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) : [H, X] = \alpha_{ij}(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}\} = \text{span}\{E_{ij}\}$$

Tomando  $H \in \mathfrak{h}$  temos que

$$\begin{aligned} \langle H, H \rangle &= \text{traço}(ad(H) \circ ad(H)) \\ &= \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 \\ &= 2 \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 \\ &= 2 \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) - 4 \sum_{i < j} a_i a_j \\ &= 2l \sum_{i=1}^{l+1} a_i^2 - 4 \sum_{i < j} a_i a_j \end{aligned}$$

Mas

$$-4 \sum_{i < j} a_i a_j = 2 \sum_{i=1}^{l+1} a_i^2$$

pois  $\sum_{i=1}^{l+1} a_i = 0$ . Portanto temos

$$\langle H, H \rangle = 2l \sum_{i=1}^{l+1} a_i^2 - 4 \sum_{i < j} a_i a_j = 2l \sum_{i=1}^{l+1} a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{l+1} a_i^2 = 2(l+1) \sum_{i=1}^{l+1} a_i^2$$

Então, considerando a fórmula de polarização temos que se  $H' = \text{diag}\{b_1, \dots, b_{l+1}\}$ , a formula de Killing restrita a  $\mathfrak{h}$  é

$$\langle H, H' \rangle = 2(l+1)(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{l+1} b_{l+1})$$

Então o dual  $H_{\alpha_{ij}}$  de  $\alpha_{ij}$  é dado por

$$H_{\alpha_{ij}} = \frac{1}{2(l+1)}(E_{ii} - E_{jj})$$

Temos então que os valores da forma da Killing nas raízes são os racionais



dados por

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle &= \langle H_{\alpha_{ij}}, H_{\alpha_{rs}} \rangle \\
 &= \left\langle \frac{1}{2(l+1)}(E_{ii} - E_{jj}), \frac{1}{2(l+1)}(E_{rr} - E_{ss}) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{4(l+1)}(\langle E_{ii}, E_{rr} \rangle - \langle E_{ii}, E_{ss} \rangle - \langle E_{jj}, E_{rr} \rangle + \langle E_{jj}, E_{ss} \rangle) \\
 &= \frac{1}{2(l+1)}(\delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}),
 \end{aligned}$$

onde  $\delta_{ij} = 1$  se  $i \neq j$  e zero caso contrario. Em particular temos que

$$\langle \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \rangle = \frac{1}{l+1} = \frac{1}{l+1}(\delta_{ii} - \delta_{ij} - \delta_{ji} + \delta_{jj}) = \frac{2}{2(l+1)} = \frac{1}{(l+1)}$$

Logo, o numero de Killing de duas raízes é

$$\frac{2\langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle}{\langle \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \rangle} = 2(l+1) \frac{1}{2(l+1)}((\delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}) = (\delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}))$$

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_l - \lambda_{l+1}\}$$

ou, na notação usada anteriormente

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{l,l+1}\}$$

Tomando os números de Killing associados a esse sistema simples de raízes temos que a matriz de Cartan associada é

$$A_l = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & -1 & . & . & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & & . & . & -1 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

E, dizer o diagrama de Dynkin associado é de tipo  $A_l$ . □

**Teorema 6.20.** *Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie das matrizes  $(2l+1) \times (2l+1)$  em dimensão ímpar que são anti-simétricas em relação a identidade,  $\mathfrak{so}(2l+1) =$*

$\{A \in \mathfrak{sl}(2l+1), A^t + A = 0\}$ . Então o diagrama associado a  $\mathfrak{g}$  é  $B_l$ .

*Demonstração.* Observamos primeiramente que  $\mathfrak{g}$  e a álgebra das matrizes de  $\mathfrak{sl}(2l+1)$  que são anti-simétricas em relação a forma quadrática não-degenerada, definida pela matriz identidade. Como o corpo de escalares é algebricamente fechado, duas formas quadráticas são equivalentes. Logo as álgebras de matrizes anti-simétricas em relação a formas quadráticas não-degeneradas distintas são isomorfas. De fato, sejam  $J_1$  e  $J_2$  matrizes simétricas que definem formas quadráticas equivalentes, ou seja, existe uma matriz inversível  $g$  tal que  $J_1 = g^t J_2 g$ . Sejam

$$\mathfrak{g}_i = \{A \in \mathfrak{sl}(2l+1) : A^t J_i + J_i A = 0\}.$$

Para  $i = 1, 2$ . Afirmamos que  $A \in \mathfrak{g}_2$  se e somente se  $g^{-1}Ag \in \mathfrak{g}_1$ . Vamos a provar essa afirmação:

$$\begin{aligned} (g^{-1}Ag)^t J_1 + J_1 (g^{-1}Ag) &= g^t A^t (g^{-1})^t J_1 + (J_1 g^{-1})Ag \\ &= g^t A^t (J_2 g) + (g^t J_2)Ag \\ &= g^t (A^t J_2 + J_2 A)g. \end{aligned}$$

Portanto, como  $g$  é invertível, temos  $(g^{-1}Ag)^t J_1 + J_1 (g^{-1}Ag) = 0$  se e somente se  $A^t J_2 + J_2 A = 0$ . Concluindo que  $g\mathfrak{g}_2g^{-1} = \mathfrak{g}_1$ , isto é, as álgebras são isomorfas. Logo,  $\mathfrak{so}(2l+1)$  é uma álgebra que pode ser realizada de varias maneiras, dependendo da escolha de forma quadrática. A forma escolhida para a nossa realização é dada pela matriz  $J$ ,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_l \\ 0 & 1_l & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $1_l$  é a matriz identidade  $l \times l$ . Essa matriz é simétrica e equivalente a matriz identidade  $(2l+1) \times (2l+1)$ , pois se

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i1_l & 1_l \\ 0 & 1_l & 1_l \end{bmatrix}$$

então temos que  $g^t I g = g^t g = J$ . Portanto,  $\mathfrak{so}(2l+1)$  é uma álgebra isomorfa a álgebra das matrizes anti-simétricas em relação a  $J$ . Escrevendo a matriz  $A$ ,  $(2l+1) \times (2l+1)$ , com blocos do mesmo tamanho que os blocos de  $J$  e usando

a condição  $A^t J + J 1 = 0$ . Calculamos que a matriz  $A$  tem forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{bmatrix}$$

com  $\beta$  e  $\gamma$  duas matrizes  $1 \times l$  e as demais matrizes  $l \times l$ ,  $b$  e  $c$  anti-simétricas e  $a$  matriz qualquer. Uma subálgebra de Cartan é das matrizes diagonais. As matrizes são da forma

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix}$$

com  $\Lambda$  uma matriz diagonal  $l \times l$  qualquer. Como no caso de  $A_l$ , define em  $\mathfrak{h}$  os funcionais  $\lambda_i : \Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_l\} \mapsto a_i$  para  $i = 1, \dots, l$ . Então os autovalores de  $H \in \mathfrak{h}$  são 0 e  $\pm\lambda_j(H)$ . Os possíveis valores que uma raiz assume em  $H$  são:  $\pm\lambda_j(H)$  e  $\pm\lambda_j(H) \pm \lambda_k(H)$ , para  $j, k = 1, \dots, l$ ,  $j \neq k$ . De fato,  $\pm 2\lambda_j(H)$  não é autovalor de  $\text{ad}(H)$ , pois as matrizes no auto-espaço correspondente teriam suas entradas não nulas ao longo das diagonais de  $c$  ou de  $b$ . Mas  $c$  e  $b$  são anti-simétricas e a diagonal de uma matriz antisimétrica é nula. Logo  $\pm\lambda_j$  não é raiz. Logo as raízes de essa subálgebra de Cartan e seus espaços de raízes correspondentes são:

- $\lambda_j$ , com  $j = 1, \dots, l$ , com o espaço das raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ -\gamma^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $\gamma = (0, \dots, x_j, \dots, 0)$ ,  $a = b = c = 0$  e  $\beta = 0$ .

- $-\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, l$  com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta^t & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $\beta = (0, \dots, b_j, \dots, 0)$ ,  $a - b - c = 0$  e  $\gamma = 0$ .

- $(\lambda_i - \lambda_j)$ ,  $i \neq j$ , com o espaço das raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a^t \end{bmatrix}$$

onde  $a$  é uma matriz  $l \times l$  cuja única entrada não nula é  $a_{ij}$ ,  $b = c = 0$  e  $\gamma = \beta = 0$

- $(\lambda_i + \lambda_j, i \neq j)$ , com o espaço das raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $b$  é uma matriz  $l \times l$  em que as únicas entradas não nulas são  $b_{ij}$  e  $b_{ji}$ ,  $a = c = 0$  e  $\gamma = \beta = 0$ .

- $-(\lambda_i + \lambda_j), i \neq j$ , com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $c$  é uma matriz  $l \times l$  em que as únicas entradas não nulas são  $c_{ij}$  e  $c_{ji}$ ,  $a = c = 0$ ,  $\gamma = \beta = 0$ .

Cada um desses espaços de raízes é de dimensão um e se para todo  $\alpha \in \Pi$ ,  $\alpha(H) = 0$  então  $H = 0$ . O conjunto gerador de raízes é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l\}$$

Esse conjunto  $\Sigma$  é um sistema simples de raízes, pois tem o mesmo numero de elementos que a dimensão de  $\mathfrak{h}$  e toda raiz pode ser escrita como combinação de elementos de  $\Sigma$  com coeficientes do mesmo sinal. De fato

$$\lambda_j = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + \lambda_l$$

Se  $i < j$  temos que

$$\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i + \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + 2(\lambda_{j+1} - \lambda_{j+1}) + \dots + 2\lambda_l$$

e

$$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)$$

que são as raízes positivas em  $\Pi$ . Finalmente vamos a mostrar que a expressão da forma de Killing restrita a  $\mathfrak{h}$ . Utilizaremos a mesma técnica, da formula de polarização, que relaciona uma forma quadrática com a forma bilinear

associada. Seja  $H \in \mathfrak{h}$ . Sabemos que  $H$  é da forma

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix}$$

com  $\Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_l\}$  uma matriz diagonal  $l \times l$ . A lista dada acima mostra que

$$\begin{aligned} \langle H, H \rangle &:= \text{traço}(ad(H)^2) = 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 + \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + 4 \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) \end{aligned}$$

Mas, como  $\sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) = 2(l+1) \sum_{i=1}^l a_i^2$ , temos que

$$\langle H, H \rangle = 2(2l+1) \sum_{i=1}^l a_i^2$$

Finalmente, pela fórmula de polarização, temos que se  $H'$  é dada da mesma forma por  $\Lambda'$  com

$$\Lambda' = \text{diag}\{a'_1, \dots, a'_l\}$$

vale

$$\langle H, H' \rangle = 2(2l+1) \sum_{i=1}^l a_i a'_i$$

Agora vamos a denotar por  $\Lambda_\alpha$ , a matriz diagonal que define  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ . Então

$$\Lambda_{\lambda_i} = \frac{1}{2(2l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\}$$

$$\Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{2(2l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\}$$

$$\Lambda_{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{1}{2(2l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 1_j, \dots, 0\}$$

Com essas expressões, encontramos os números de Killing associados as raízes. Note que

$$\langle \lambda_i - \lambda_j, \lambda_i - \lambda_j \rangle := \langle \Lambda_{\lambda_i - \lambda_j}, \Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} \rangle = \frac{2(2l+1)}{2(2l+1)2(2l+1)} 2 = \frac{1}{(2l-1)}$$

e

$$\langle \lambda_l, \lambda_l \rangle := \langle \Lambda_{\lambda_l}, \Lambda_{\lambda_l} \rangle = \frac{2(2l-1)}{2(2l-1)2(2l-1)} 1 = \frac{1}{2(2l-1)}$$

Portanto, os números de Killing são

$$\frac{2\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \rangle}{\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_i - \lambda_{i+1} \rangle} = 2 \left( \frac{\frac{-1}{2(2l+1)}}{\frac{1}{2l-1}} \right) = -1$$

para  $i = 1, \dots, l-1$ . Por outro lado temos que

$$2 \frac{\langle \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l \rangle}{\langle \lambda_l, \lambda_l \rangle} = 2 \left( \frac{\frac{-1}{2(2l-1)}}{\frac{1}{2(2l-1)}} \right) = -2.$$

Então temos que a matriz de Cartan é  $B_l$  e logo  $\mathfrak{so}(2l+1)$  é um representante das álgebras que tem diagrama de Dynkin de tipo  $B_l$ .  $\square$

**Teorema 6.21.** *Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie das matrizes  $2l \times 2l$  que são anti-simétricas em relação a  $J$ ,  $\mathfrak{sp}(l) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l), AJ + AJ^t = 0\}$ , onde  $J$  é uma matriz escrita em blocos  $l \times l$  como*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então o diagrama de Dynkin associado a  $\mathfrak{g}$  e  $C_l$

*Demonstração.* Essa álgebra é chamada álgebra simplectica. Escrevendo uma matriz de  $A$  em blocos  $l \times l$ ,  $A \in \mathfrak{sp}(l)$  se e somente se  $A$  é da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{bmatrix}$$

com  $\beta, \gamma$  matrizes simétricas. Novamente é fácil notar que a subálgebra  $\mathfrak{h}$  das matrizes diagonais em  $\mathfrak{sl}(l)$  é de Cartan. Os elementos são da forma

$$H = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix}$$

com  $\Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$  uma matriz diagonal  $l \times l$ . D mesma forma que na demonstração anterior, se  $\lambda_i$  é o funcional linear que toma a entrada  $a_i$ , então como um autovalor de  $\text{ad}(H)$  é a diferença de autovalores de  $H$ , as raízes são as diferenças  $\pm\lambda_i \pm \lambda_j$ . Agora, a diferença da construção anterior,  $\pm 2\lambda_i$  sim é uma raiz, pois se  $\beta$  e  $\gamma$  são matrizes simétricas, podendo então ter entradas não nulas na diagonal (o leitor vai ver mais na frente que esta diferença em relação a construção de  $B_l$  explica que existam mais formas reais de álgebras simples complexas de tipo  $C_l$  que formas reais de tipo  $B_l$ ). Dessa forma as raízes e seus espaços correspondentes são:

- $(\lambda_i - \lambda_j)$   $i \neq j$ , com espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha^t \end{bmatrix}$$

onde  $\alpha$  é uma matriz  $l \times l$  cuja única entrada não nula é  $i, j$  e  $\beta = \gamma = 0$ .

- $(\lambda_i + \lambda_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, l$ , com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $\beta$  é uma matriz  $l \times l$  com entradas não nulas em  $i, j$  e  $j, i$  e  $\alpha = \gamma = 0$ ;

- $-(\lambda_i + \lambda_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, l$ , com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Onde  $\gamma$  é uma matriz  $l \times l$  com entradas não nula apenas em  $i, j$  e  $j, i$  e  $\alpha = \beta = 0$ .

Um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$$

As raízes positivas são escritas como combinações lineares de elementos de  $\Sigma$  como

$$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)$$

se  $i < j$  e

$$\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i + \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + 2(\lambda_{l-1} - \lambda_l) + 2\lambda_l$$

se  $i \leq j$ ,  $i, j = 1, \dots, l$ .

Iremos a encontrar agora a forma de Killing em  $\mathfrak{h}$ . Seja  $H \in \mathfrak{h}$ . Então

temos que

$$\begin{aligned}
 \langle H, H \rangle &:= \text{traço}(ad(H)^2) = \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 + \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2 + 8 \sum_{i=1}^l a_i^2 \\
 &= 4 \sum_{i < j} a_i^2 + a_j^2 + 8 \sum_{i=1}^l a_i^2 \\
 &= 4(l-1) \sum i = 1^l a_i^2 + 8 \sum_{i=1}^l a_i^2 \\
 &= 4(l+1) \sum_{i=1}^l a_i
 \end{aligned}$$

Logo, como anteriormente, pela formula de polarização temos que se  $H' \in \mathfrak{h}$  é dado por  $\Lambda = \{a'_1, \dots, a'_l\}$  então

$$\langle H, H' \rangle = 4(l+1) \sum_{i=1}^l a_i a'_i$$

A partir dali as matrizes  $H_\alpha$  dadas por  $\Lambda_\alpha$  tem forma

$$\Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{4(l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\}$$

$$\Lambda_{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{1}{4(l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 1_j, \dots, 0\}$$

se  $i \neq j$ . E temos

$$\Lambda_{2\lambda_i} = \frac{1}{2(l+1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 0\}$$

Com estas expressões podemos obter os números de Killing. Note que

$$\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_i - \lambda_{i+1} \rangle = 4(l+1) \frac{2}{4(l+1)4(l+1)} = \frac{1}{2(l+1)}$$

e

$$\langle 2\lambda_l, 2\lambda_l \rangle = 4(l+1) \frac{4}{4(l+1)^2} = \frac{1}{(l+1)}$$

Logo, os números de Killing associados ao sistemas simples de raízes são

$$2 \frac{\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} \rangle}{\langle \lambda_i - \lambda_{i+1}, \lambda_i - \lambda_{i+1} \rangle} = 2 \left( \frac{\frac{-1}{4(l+1)}}{\frac{1}{2(l+1)}} \right) = -1$$

para  $i = 1, \dots, l-1$

Por outro lado temos



$$2 \frac{\langle \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l \rangle}{\langle \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} - \lambda_l \rangle} = -2$$

Então a matriz de Cartan de  $\mathfrak{g}$  e  $C_l$ .

□

**Teorema 6.22.** *Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie das matrizes de dimensão par que são antisimétricas em relação a identidade,  $so(2l) = \{A \in sl(2l), A + A^t = 0\}$ . Então o diagrama associado a  $\mathfrak{g}$  é  $D_l$*

*Demonstração.* Como no caso do diagrama  $B_l$  em que tínhamos essas matrizes, só que em dimensão ímpar, a álgebra  $\mathfrak{g}$  é isomorfa à álgebra das matrizes anti-simétricas em relação a uma matriz identidade ou de uma matriz que seja equivalente a identidade. Tome  $J$  a matriz escrita em blocos  $l \times l$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim a álgebra  $so(2l)$  é isomorfa a álgebra

$$\{A \in sl(2l) : AJ + JA^t = 0\}.$$

Para facilitar denotaremos também por  $so(2l)$ . Assim  $A \in so(2l)$  se e somente se

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix}$$

com  $\beta$  e  $\gamma$  matrizes  $l \times l$  e anti-simétricas. Novamente a subálgebra  $\mathfrak{h}$  das matrizes diagonais é de Cartan. Seus elementos se escrevem como

$$H = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}$$

onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal. As raízes de  $H$  são diferentes de autovalores de  $H$ . Aqui também  $2\lambda_i$  não é raiz pois  $\beta$  e  $\gamma$  são matrizes anti-simétricas. Logo as raízes e seus espaços correspondentes são dados por:

- $\lambda_i - \lambda_j, i \neq j$ , com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha^t \end{pmatrix}$$

onde  $\alpha$  é uma matriz  $l \times l$  cuja única entrada não nula é  $i, j$  e  $\beta = \gamma = 0$ .

- $\lambda_i + \lambda_j$ ,  $i \neq j$ , com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde  $\beta$  é uma matriz  $l \times l$  com entradas não nula apenas em  $i, j$  e  $j, i$ .  
 $\alpha = \gamma = 0$ .

- $-(\lambda_i + \lambda_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, l$ , com o espaço de raízes formado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

onde  $\gamma$  é uma matriz  $l \times l$  com entradas não nula apenas em  $i, j$  e  $j, i$ .  
 $\alpha = \beta = 0$ .

Um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$$

As raízes positivas são escritas como combinações lineares de elementos de  $\Sigma$  como

$$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)$$

se  $i < j$  e

$$\begin{aligned} \lambda_i + \lambda_j &= (\lambda_i - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{l-1}) + 2(\lambda_{l-1}) = \\ &[(\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)] + 2[(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1})] + \\ &[(\lambda_{l-1} - \lambda_l) + (\lambda_{l-1} - \lambda_l)], \end{aligned}$$

se  $i \neq j$ .

A forma de Cartan-Killing para  $H \in \mathfrak{h}$  é dada por

$$\langle H, H \rangle = \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 + \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2$$

ou ainda

$$\langle H, H \rangle = 4(l-1) \sum_{i=1}^l a_i^2$$

Concluimos que

$$\langle H, H' \rangle = 4(l-1) \sum_{i=1}^l a_i a'_i$$

Dada uma raiz  $\alpha$  o seu dual correspondente  $H_\alpha$ , dado por  $\Lambda_\alpha$ , é

$$\Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{4(l-1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\}, i \neq j,$$

$$\Lambda_{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{1}{4(l-1)} \text{diag}\{0, \dots, 1_i, \dots, 1_j, \dots, 0\}, i \neq j.$$

O vértice em que ocorre a bifurcação é dado pela raiz  $\lambda_{l-2} + \lambda_{l-1}$ , pois ele é ligado a três outros vértices, visto que

$$\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}, \lambda_{l-3} - \lambda_{l-2} = \frac{1}{2(l-1)},$$

$$\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}, \lambda_{l-1} - \lambda_l = \frac{1}{2(l-1)},$$

$$\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}, \lambda_{l-1} - \lambda_l = \frac{1}{(l-1)}.$$

É fácil verificar que os números de Killing das raízes são todos iguais a um. Portanto o diagrama associado a  $\mathfrak{g}$  é  $D_l$  □

Como dito, não vamos a construir aqui as álgebras não clássicas, mas vamos a indicar algumas diretrizes básicas da construção das álgebras de tipo  $E_6$ ,  $E_7$  e  $E_8$ , o leitor interessado na construção destas álgebras pode se dirigir a [5] ou [6]. Nessas referencias o leitor também pode achar construções de álgebras de tipo  $G_2$  e  $F_4$ . Estas ultimas subálgebras podem se construir também como a álgebra das derivações dos octonios e como a álgebra de derivações de uma álgebra de Jordan de dimensão 27(o leitor pode ver essas construções em [8]).

Seja  $V = \wedge^3 K^9$ , onde  $K$  é o corpo base correspondente. Pode se mostrar que a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de tipo  $E_8$  pode ser construída no espaço

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(9) \oplus V \oplus V^*$$

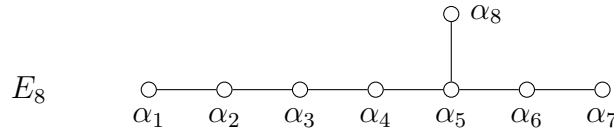
a subálgebra  $\mathfrak{h}$  das matrizes diagonais em  $\mathfrak{sl}(9)$  é uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  e denotando por  $\lambda_i$  o funcional

$$\lambda_i : \text{diag}\{a_1, \dots, a_9\} \mapsto a_i$$

as raízes de  $\mathfrak{h}$  são dadas por  $(\lambda_i - \lambda_j)$  com  $i \neq j$ ,  $(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$  com  $i < j < k$  e  $-(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$  com  $i < j < k$ . Um sistema de raízes simples é

$$\Sigma = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_8 - \lambda_9, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}$$

cujos diagrama é

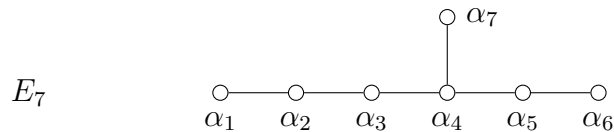


com  $\alpha_8 = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$ . A raiz  $\alpha_8$  se liga a  $\alpha_5 = \lambda_4 - \lambda_5$ , pois

$$-(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_4 - \lambda_5) = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5)$$

é a única soma entre as raízes simples, envolvendo  $\alpha_8$ , que é raiz. Na base do diagrama a ordem é dada por  $\alpha_1 = \lambda_8 - \lambda_9$  e  $\alpha_7 = \lambda_2 - \lambda_3$ .

O diagrama  $E_7$



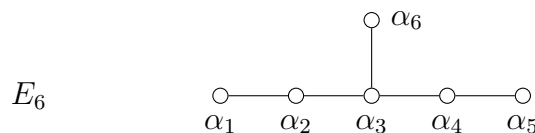
é obtido de  $E_8$  retirando a raiz mais à esquerda de sua base. Pela realização de  $E_8$  essa raiz é  $\lambda_8 - \lambda_9$ . Pode-se mostrar que então  $E_7$  é a subálgebra gerada pelos espaços de raízes associados a

$$\Sigma = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_7 - \lambda_8, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}.$$

e a  $-\Sigma_7$ . As raízes positivas são as raízes positivas de  $E - 8$  que são combinações lineares de elementos de  $\Sigma_7$ , as raízes positivas de  $E_7$  ficam sendo então:

- $(\lambda_i - \lambda_j); 2 \leq i \leq j \leq 8$
- $-(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k), 2 \leq i < j \leq 8$
- $\lambda_1 + \lambda_i + \lambda_9, 2 \leq i \leq 8$

Finalmente o diagrama  $E_6$



é realizado pela subálgebra de  $E_8$  cujo sistema simples de raízes é

$$\Sigma_6 = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_6 - \lambda_7, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}.$$

## 7

### Grupos de Weyl

#### 7.1

##### Sistema de raízes

Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$ . Dado um elemento não nulo  $\alpha \in E$ , uma *reflexão em relação a  $\alpha$*  é uma transformação linear inversível  $r : E \mapsto E$  que satisfaz

1.  $r(\alpha) = -\alpha$
2. O conjunto  $F_r = \{\beta \in E : r(\beta) = \beta\}$  dos pontos fixos de  $r$  é um hiperplano de  $E$ .

Podemos agora oferecer uma definição mais abrangente de sistema de raízes, que constitui uma generalização dos sistemas de raízes associados com subálgebras de Cartan, já estudados.

**Definição 7.1.** Um conjunto  $\Pi \in E$  é um sistema de raízes se satisfaz

1.  $\Pi$  é finito, gera  $E$  e não contém 0.
2. Para todo  $\alpha \in \Pi$  existe uma reflexão  $r_\alpha$  em relação a  $\alpha$  tal que  $r_\alpha(\Pi) = \Pi$ .
3. Para todos  $\alpha, \beta \in \Pi$ ,  $r_\alpha(\beta) - \beta$  é um múltiplo inteiro de  $\alpha$ .

**Definição 7.2.** Um sistema de raízes  $\Pi$  é dito reduzido se os únicos múltiplos de  $\alpha \in \Pi$  que são raízes são  $\alpha$  e  $-\alpha$ .

**Definição 7.3.** O *grupo de Weyl* de um sistema de raízes  $\Pi$  é o grupo gerado pelas reflexões  $r_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ . Este grupo será denotado por  $W$ .

O grupo de Weyl  $W$  é finito, pois como é gerado por transformações que deixam  $\Pi$  invariante, todo elemento de  $W$  deixa  $\Pi$  invariante e se um elemento de  $W$  é a identidade quando restrito a  $\Pi$ , então ele é a identidade de  $V$  pois  $\Pi$  gera  $V$ . Dessa forma, a restrição a  $\Pi$  define um homomorfismo injetor de  $W$  no grupo das bijeções de  $\Pi$ . Como  $\Pi$  é finito isso implica que  $W$  é finito.

**Proposição 7.1.** *Seja  $W$  um grupo finito de transformações lineares invertíveis de um espaço vetorial real  $E$ . Então existem em  $E$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  invariante por  $W$  no sentido em que todo  $w \in W$  é uma isometria do produto interno, isto é,  $\langle w\alpha, w\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$  para todo  $\alpha, \beta \in E$*

*Demonstração.* Seja  $(\cdot, \cdot)$  um produto interno arbitrário em  $E$  e defina

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{w \in W} (W\alpha, W\beta)$$

Então,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto interno pois  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$  se e só se

$$\sum_{w \in W} (W\alpha, W\beta) = 0$$

e isso ocorre se e só se  $\alpha = 0$  pois  $(\cdot, \cdot)$  é um produto interno. A invariância de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vem do fato de que na sua definição a soma é estendida a todo  $W$  e daí que se  $r \in W$ , então

$$\langle r\alpha, r\beta \rangle = \sum_{w \in W} ((wr)\alpha, (wr)\beta) = \sum_{w \in W} (w\alpha, w\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

o que nos mostra que os elementos de  $W$  são ortogonais em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  $\square$

Em termos do produto interno invariante, as reflexões  $r_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ , são reflexões em relação ao hiperplano  $\alpha^\perp$  ortogonal a  $\alpha$ . Isso porque  $\alpha^\perp$  é  $r_\alpha$ -invariante, pois  $r_\alpha$  é ortogonal e deixa invariante o subespaço gerado por  $\alpha$ . Dessa observação, segue de imediato que o hiperplano de pontos fixos de  $r_\alpha$  é exatamente  $\alpha^\perp$ . Como, além do mais,  $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$ ,  $r_\alpha$  é a própria reflexão ortogonal

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$$

O grupo de Weyl permite decompor  $E$  e o sistema de raízes em componentes da seguinte forma: seja  $F \subset E$  um subespaço invariante por  $W$ , isto é,  $wF = F$  para todo  $w \in W$ . Como os elementos de  $W$  são transformações ortogonais,  $F^\perp$  também é invariante por  $W$ . Usando esse fato reiteradamente,

obtem-se uma decomposição de  $E$  em subespaços dois a dois ortogonais

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

com  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  subespaço invariante por  $W$  e irredutível, no sentido em que não existem subespaços próprios não nulos  $F \subset E_i$  que sejam  $W$ -invariantes.

**Proposição 7.2.** *Dada a decomposição de  $E$  em subespaços invariantes e irredutíveis como acima, seja  $\Pi_i = \Pi \cap E_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Então,  $\Pi_i$  é um sistema de raízes em  $E_i$  e o grupo de Weyl de  $\Pi_i$  coincide com a restrição de  $W$  a  $E_i$ . Além do mais,  $\Pi = \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_k$ .*

*Demonstração.* Ver [1]. □

**Definição 7.4.** Um sistema de raízes é dito *irredutível* se ele não é união de dois subconjuntos disjuntos e ortogonais.

**Proposição 7.3.** *Um sistema  $\Pi$  é irredutível se e só se para qualquer par de raízes  $\alpha, \beta \in \Pi$  existe uma sequência de raízes  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  com  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \alpha_s$  e  $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, s-1$ .*

**Proposição 7.4.** *Sejam  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  sistemas de raízes em  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente, e seja  $\phi : E_1 \rightarrow E_2$  um isomorfismo que satisfaz  $\phi(\Pi_1) = \Pi_2$ . Tome produtos internos invariantes pelos correspondentes grupos de Weyl e suponha que  $\Pi_1$  seja irredutível. Então temos que*

$$\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$$

para  $\alpha, \beta \in \Pi$ , onde  $c$  é uma constante. Em particular, existem produtos internos invariantes em relação a os quais  $\phi$  é uma isometria. Além do mais

$$w_{\phi(\alpha)} = \phi w_\alpha \phi^{-1}$$

se  $\alpha \in \Pi_1$

*Demonstração.* A imagem por  $\phi$  da  $\beta$ -sequência iniciada em  $\alpha$  coincide com a  $\phi(\beta)$ -sequência iniciada em  $\phi(\alpha)$ . Portanto a fórmula de Killing garante que

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \frac{\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle}{\langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle}$$

Esta igualdade pode ser reescrita como

$$\langle \alpha, \beta \rangle = c_\beta \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle$$



onde

$$c_\beta = \frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \phi(\beta), \phi(\beta) \rangle}$$

A simetria entre  $\alpha$  e  $\beta$  mostra que  $c_\alpha = c_\beta$  se  $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ . Pela irreduzibilidade de  $\Pi_1$ ,  $c_\alpha$  independe de  $\alpha$ , mostrando a primeira parte da proposição. A conjugação entre as reflexões do grupo de Weyl segue da mesma maneira que no caso dos sistemas duais.  $\square$

## 7.2

### Câmaras de Weyl

Seja  $\Pi \in E$  um sistema de raízes. O conjunto

$$\overline{E} = \{\beta \in E : \langle \alpha, \beta \rangle \neq 0 \text{ para todo } \alpha \in \Pi\}$$

é aberto e denso pois o seu complementar é a união dos núcleos de um número finito de funcionais lineares não nulos.  $\overline{E}$  é o conjunto dos *elementos regulares* em  $E$ . As componentes conexas de  $E$  são cones convexos em  $E$ ; de fato seja  $C$  uma componente conexa. Se  $\beta \in C$  então  $\beta \in \overline{E}$  e, portanto, a semi-reta  $\mathbb{R}^+\beta \in \overline{E}$ . Como esta semi-reta é conexa,  $\mathbb{R}^+\beta \subset C$ . Além do mais o funcional linear  $\langle \alpha, \cdot \rangle$ ,  $\alpha \in \Pi$  não muda de sinal em  $C$  pois  $\{\beta : \langle \alpha, \beta \rangle = 0\}$  divide  $E$  em duas componentes conexas. Daí que se  $\beta_1, \beta_2 \in C$  então o segmento  $t\beta_1 + (1-t)\beta_2$ ,  $t \in [0, 1]$  pertence a  $\overline{E}$ . Como este segmento é conexo esta de fato em  $C$ .

**Definição 7.5.** Uma câmara de Weyl é uma componente conexa do conjunto dos elementos regulares.

**Proposição 7.5.** *Valem os seguintes fatos:*

1. *Seja  $C$  uma câmara de Weyl e defina*

$$\Pi^+(C) = \{\alpha \in \Pi : \langle \alpha, \beta \rangle > 0 \text{ para todo } \beta \in C\}$$

*então, existe uma ordem lexicográfica tal que  $\Pi^+(C)$  é o conjunto de raízes positivas em relação a essa ordem.*

2. *Seja  $\Sigma(C)$  o conjunto das raízes simples em  $\Pi^+(C)$ . Então*

$$C = \{\beta \in E : \langle \beta, \alpha \rangle > 0 \text{ para todo } \alpha \in \Sigma(C)\}$$

3. *Sejam  $C_1$  e  $C_2$  câmaras de Weyl. Então  $\Sigma(C_1) = \Sigma(C_2)$  se e só se  $C_1 = C_2$*

*Demonstração.* Temos que:

1. Seja  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$  uma base ordenada ortonormal de  $E$  tal que  $\gamma_1 \in C$ . Vamos a provar que em relação a ordem lexicográfica definida por essa base, o conjunto de raízes positivas é  $\Pi^+(C)$ . Se  $\alpha \in \Pi^+(C)$  então  $\alpha$  se escreve como

$$\alpha = \langle \alpha, \gamma_1 \rangle \gamma_1 + \dots + \langle \alpha, \gamma_l \rangle \gamma_l$$

com  $\langle \alpha, \gamma_1 \rangle > 0$  já que  $\gamma_1 \in C$ . Portanto,  $\alpha$  é positiva em relação a ordem lexicográfica. Reciprocamente, seja  $\alpha$  uma raiz positiva. Escrevendo  $\alpha$  como acima temos que  $\langle \alpha, \gamma_1 \rangle \neq 0$  pois  $\gamma_1$  é um elemento regular. Como  $\langle \alpha, \gamma_1 \rangle$  é o primeiro coeficiente não nulo na decomposição de  $\alpha$ , temos que  $\langle \alpha, \gamma_1 \rangle > 0$ . Dito isso, suponha por absurdo que exista  $\beta \in C$  tal que  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ . Então, a função de  $t$  dada por

$$\langle \alpha, t\gamma_1 + (1-t)\beta \rangle$$

e negativa em  $t = 0$  e positiva em  $t = 1$ . Portanto, ela se anula em algum valor de  $t \in [0, 1]$  o que constitui um absurdo, pois o segmento  $t\gamma_1 + (1-t)\beta$  esta contido em  $C$  e, portanto, é formado por elementos regulares.

2. Por um lado  $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$  se  $\beta \in C$  e  $\alpha \in \Sigma(C)$  pois  $\Sigma(C) \subset \Pi^+(C)$ . Reciprocamente, suponha que  $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$  para toda raiz simples  $\alpha$ . Então  $\langle \beta, \gamma \rangle$  para toda raiz  $\gamma \in \Pi^+(C)$ , pois essas raízes são combinações lineares com coeficientes  $\geq 0$  das raízes simples. Como  $\Pi = \Pi^+ \cup -\Pi^+$ ,  $\beta$  é elemento regular e portanto pertence a alguma câmara de Weyl. Tomando  $\beta' \in C$ , seja  $t\beta + (1-t)\beta'$ ,  $t \in [0, 1]$  o segmento que une a  $\beta$ . Para todo  $t$  nesse segmento

$$\langle t, t\beta + (1-t)\beta' \rangle > 0$$

para toda raiz positiva  $\gamma$ . Portanto, esse segmento esta contido em  $\overline{E}$  e daí que  $\beta$  e  $\beta'$  pertencem a mesma componente conexa do conjunto de elementos regulares, isto é  $\beta \in C$ .

3. Segue do anterior item.

□

**Teorema 7.6.** *Existe uma bijecção entre os sistemas simples de raízes e as câmaras de Weyl.*

*Demonstração.* Pela proposição anterior uma câmara de Weyl define um sistema simples de raízes. Vice-versa, dado um sistema simples  $\Sigma$  em  $\Pi$ , seja

$$C_\Sigma = \{\beta \in E : \langle \beta, \alpha \rangle > 0, \forall \alpha \in \Sigma\}$$

Então  $C_\Sigma$  é uma câmara de Weyl. De fato, da mesma forma que na demonstração anterior,  $C_\Sigma$  é um cone convexo contido no conjunto dos elementos regulares e, portanto, existe uma câmara de Weyl  $C'$  que o contém. Como tanto  $C_\Sigma$  quanto  $C'$  são cones, se  $C_\Sigma$  estiver contido propriamente em  $C'$  então algum elemento de sua fronteira está em  $C'$ . No entanto,  $\beta$  pertence à fronteira de  $C_\Sigma$  se e só  $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$  para alguma raiz simples  $\alpha$  e, portanto,  $\beta$  não é elemento regular. Então,  $C_\Sigma = C'$ . Temos então que  $C_{\Sigma(C)} = C$  e  $\Sigma(C_\Sigma) = \Sigma$ , o que estabelece a bijeção.  $\square$

**Proposição 7.7.** *O grupo de Weyl  $W$  age no conjunto dos sistemas simples de raízes.*

*Demonstração.* Seja  $\Sigma$  um sistema simples de raízes e seja  $\Pi^+$  o conjunto de raízes positivas correspondente. Como  $W$  deixa o sistema de raízes invariante, se  $w \in W$  então  $w(\Sigma) \in \Pi$  é uma base de  $E$  e  $\Pi = w(\Pi^+) \cup w(\Pi^-)$ . Além disso, os elementos de  $w(\Pi^+)$  se escrevem como combinações lineares de  $w(\Sigma)$  com coeficiente inteiros  $\geq 0$ . E dizer  $w(\Sigma)$  também é um sistema de raízes.  $\square$

**Proposição 7.8.** *O grupo de Weyl  $W$  age no conjunto das câmaras de Weyl.*

*Demonstração.* Se  $\beta$  não for regular então  $w(\beta)$  não é regular, pois se  $\beta$  não for regular então  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$  para alguma raiz  $\alpha$ , e como o produto interno é invariante temos  $\langle w(\alpha), w(\beta) \rangle = 0$ , mostrando que  $w(\beta)$  não é regular, pois  $w(\alpha)$  é raiz. Assim,  $w$  deixa invariante o conjunto de elementos não regulares e, portanto, o seu complementar  $\overline{E}$ . Seja então  $C$  uma câmara de Weyl. Temos então que, como  $w$  é contínua,  $w(C)$  é conexo e, portanto, esta contido numa câmara de Weyl  $C'$ . De forma simétrica,  $w^{-1}(C')$  é contida numa componente conexa de  $\overline{E}$ . Como por construção,  $w^{-1}(C')$  contém  $C$ , conclui-se que  $w(C) = C'$ . Temos então que o grupo de Weyl  $W$  age no conjunto das câmaras de Weyl.  $\square$

A ação de  $W$  nas câmaras e nos sistemas simples de raízes é equivalente no seguinte sentido:

**Proposição 7.9.** *Sejam  $w \in W$ ,  $\Sigma$  um sistema simples de raízes e  $C$  uma câmara de Weyl. Então*

$$w(\Sigma(C)) = \Sigma(w(C))$$

e

$$w(C_\Sigma) = C_{w(\Sigma)}$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que de fato o grupo de Weyl age transitivamente no conjunto das câmaras de Weyl. Para isso precisamos do seguinte lema:

**Lema 7.10.** *Seja  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  um sistema simples e  $\Pi^+$  o conjunto de raízes positivas correspondente. Então, para todo  $i, \dots, l$  temos*

$$\tau_{\alpha_i}(\alpha_i) = \alpha_i$$

e

$$r_{\alpha_i}(\Pi^+ - A_i) = \Pi^+ - A_i$$

onde  $A_i = \{\alpha_i\}$  ou  $\{\alpha_i, 2\alpha_i\}$  dependendo se  $2\alpha_i$  é ou não raiz. Portanto,  $\alpha_i$  e  $2\alpha_i$  são as únicas raízes positivas que são levadas em negativas pela reflexão  $\tau_{\alpha_i}$  definida por  $\alpha_i$ .

*Demonstração.* Ver [6]. □

**Proposição 7.11.** *O grupo de Weyl  $W$  é transitivo no conjunto das câmaras de Weyl (e, portanto, no sistema simples de raízes).*

*Demonstração.* Fixamos uma câmara de Weyl  $C_0$  e vamos a mostrar que, para qualquer outra câmara existe  $w \in W$  tal que  $w(C_0) = C_0$ . Denotaremos por  $\Pi_0^+$  e  $\Pi^+$  os conjuntos das raízes positivas associadas a  $C_0$  e  $C$ , e seus opostos por  $\Pi_0^-$  e  $\Pi^-$ . Os sistemas simples associados serão denotados por  $\Sigma_0$  e  $\Sigma$ . Seja então  $n(\Pi_+)$  o número de raízes em  $\Pi^- \cap \Pi_0^+$ . Vamos a proceder por indução sobre  $n(\Pi_+)$ . Procura-se  $w \in W$  tal que  $w(\Pi_0^+) = \Pi^+$ . Se  $n(\Pi_0^+) = 0$  então  $\Pi^- \cap \Pi_0^+ = \emptyset$  e  $\Pi^+ = \Pi_0^+$ . Portanto,  $w = 1$  satisfaz o que se pede. Assumindo, então, que  $n(\Pi^+) \geq 1$ , existe uma raiz simples  $\alpha \in \Sigma_0$  tal que  $\alpha \in \Pi^-$ , pois caso contrário,  $\Sigma_0 \in \Pi^+$  e os dois sistemas coincidem. Para fixar ideias suponha que, para essa raiz  $\alpha$ ,  $2\alpha$  não é raiz. Então

$$n(\tau_\alpha^{-1}\Pi^+) = n(\Pi^-) - 1$$

De fato, como  $\alpha \in \Pi^-$  temos

$$\Pi^- \cap \Pi_0^+ = ((\Pi_0^+ - \{\alpha\}) \cap \Pi^-) \cup \{\alpha\}$$

Portanto,  $n(\Pi^+)$  é um a mais que o número de elementos em  $(\Pi_0^+ - \alpha) \cap \Pi^-$ . Por outro lado,  $\tau_\alpha^{-1}\Pi^- = -\tau_\alpha^{-1}\Pi^+ = (\tau_\alpha^{-1}\Pi^+)^-$  e

$$\begin{aligned}
\Pi_0^+ \cap \tau_\alpha \Pi^- &= \tau_\alpha^{-1}(\tau_\alpha \Pi_0^+ \cap \Pi^-) \\
&= \tau_\alpha^{-1}(\tau_\alpha((\Pi_0^+ - \{\alpha\}) \cup \{\alpha\}) \cap \Pi^-) \\
&= \tau_\alpha^{-1}(((\Pi_0^+ - \{\alpha\}) \cup \{-\alpha\}) \cap \Pi^-) \\
&= \tau_\alpha^{-1}((\Pi_0^+ - \{\alpha\}) \cap \Pi^-)
\end{aligned}$$

pois  $\tau_\alpha(\Pi_0^+ - \{\alpha\}) = \Pi_0^+ - \{\alpha\}$  e  $\tau_\alpha(\alpha) = -\alpha$ . Como  $-\alpha \notin \Pi^-$ , pois  $\alpha \in \Pi^-$ ,

$$\Pi_0^+ \cap \tau_\alpha^{-1} \Pi^- = \tau_\alpha^{-1}((\Pi_0^+ - \{\alpha\}) \cap \Pi^-)$$

e, portanto,  $n(\tau_\alpha^{-1} \Pi^+)$  é igual ao numero de elementos em  $(\Pi^+ - \{\alpha\}) \cap \Pi^-$ , o que, justamente com o anterior, mostra que  $n(\tau_\alpha^{-1} \Pi^+) = n(\Pi^+) - 1$ , como foi anunciado. No caso em que  $2\alpha$  também é raiz, os mesmos argumentos mostram que

$$n(\tau_\alpha^{-1} \Pi^+) = n(\Pi^+) - 2$$

Em todo caso,  $n(\tau_\alpha^{-1} \Pi^+)$  é menor que  $n(\Pi^+)$ , existindo, portanto,  $w \in W$  tal que

$$\tau_\alpha^{-1} \Pi^+ = w \Pi_0^+$$

o que significa que  $\Pi^+ = \tau_\alpha w \Pi_0^+$ , que é o que se queria mostrar. □

Como consequência da transitividade do grupo de Weyl, temos o seguinte teorema:

**Teorema 7.12.** *Se  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são sistemas simples de raízes para uma mesma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  então os diagramas a eles associados coincidem.*

*Demonstração.* Segue do fato de que os diagramas dependem apenas da geometria das raízes simples (ângulos mútuos e comprimentos relativos) e os elementos do grupo de Weyl são transformações ortogonais em relação ao produto interno invariante. □

No grupo de Weyl existem elementos especiais que são obtidos da seguinte maneira: seja  $\Sigma$  um sistema simples de raízes cuja câmara de Weyl correspondente é  $C$ , então  $-\Sigma$  também é um sistema simples e a câmara de Weyl associada é  $-C$ . Assim, existe um único  $w_0 \in W$  tal que  $w_0(\Sigma) = -\Sigma$ . Essa igualdade implica que  $w_0^2(\Sigma) = \Sigma$  e daí que  $w_0$  é involutivo, e dizer  $w_0^2 = 1$ . Esse elemento é denominado *involução principal* em relação a  $\Sigma$ . Se  $\Sigma_1$  e outro sistema simples, então  $\Sigma_1 = w(\Sigma)$ ,  $w \in W$  e a involução principal em relação a

$\Sigma_1$  e  $ww_0w^{-1}$  e, portanto, as involuções principais da  $W$  são conjugadas entre si.

Na maioria dos sistemas de raízes a involução principal é  $-1$ . De fato se  $w_0$  denota a involução principal em relação a  $\Sigma$ , então  $-w_0$  é uma isometria que satisfaz  $-w_0(\Sigma) = \Sigma$ . Portanto, sua restrição a  $\Sigma$  define uma permutação dos vértices do diagrama correspondente. Essa permutação é um automorfismo de diagrama no sentido em que preserva a ligação entre os vértices, isto é, a ligação entre as raízes  $\alpha$  e  $\beta$  do diagrama coincide com a ligação entre  $-w_0\alpha$  e  $-w_0\beta$ , já que  $-w_0$  é ortogonal.

A existência de automorfismos de diagrama depende das simetrias dos mesmos. Nos diagramas  $B_l, C_l, F_4, E_7$  e  $E_8$  não existem simetrias, já que os primeiros tem raízes de comprimentos diferentes e, nos dois últimos, os comprimentos das cadeias a partir da bifurcação, são diferentes. Para esses diagramas o único automorfismo de diagrama é a identidade.

## 8.1

 $\rho$  – sistemas

**Definição 8.1.** Um sistema de raízes  $\Pi \in E$ , juntamente com uma transformação linear  $\sigma : E \rightarrow E$  involutiva ( $\sigma \neq 1$  e  $\sigma^2 = 1$ ) que deixa invariante o conjunto das raízes é denominado  $\sigma$  – sistema de raízes.

Para estudar os  $\sigma$ -sistemas é possível assumir, sem perda de generalidade, que o sistema de raízes  $\Pi$  é irredutível, uma vez que todos sistema de raízes se decompõe em componentes irredutíveis. Pode se assumir também que é reduzido.

Assumindo que o sistema é irredutível, uma transformação  $\sigma$  que deixa invariante o conjunto de raízes é uma isometria do produto interno invariante pelo grupo de Weyl, pois os números de Killing associados as raízes  $\alpha, \beta$  e  $\sigma\alpha, \sigma\beta$  coincidem, pois a imagem por  $\sigma$  da  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta$  é a  $\sigma\alpha$ -sequencia iniciada em  $\sigma\beta$ . Assim, procedendo como na demonstração do teorema 6.18 e considerando a irredutibilidade do sistema de raízes, mostra-se que  $\sigma$  é uma transformação ortogonal em relação ao produto interno e como consequência disso o conjunto

$$\{\beta \in E : \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \text{ para algum } \alpha \in \Pi\}$$

dos elementos não regulares é invariante por  $\sigma$ . Então o conjunto dos elementos regulares também é invariante e, por continuidade,  $\sigma$  permuta entre si as câmaras de Weyl.

**Teorema 8.1.** *A menos de multiplicação por um automorfismo de diagrama,  $\sigma$  é um elemento do grupo de Weyl  $W$ .*

*Demonstração.* Tomando uma câmara de Weyl  $C$  e o sistema simples  $\Sigma$  correspondente,  $\sigma(C)$  é uma câmara de Weyl e, portanto, existe um único

$w \in W$  tal que se  $\pi_\sigma := w\sigma$ , então  $\pi_\sigma(C) = C$ , isto é,  $\pi_\sigma(\Sigma) = \Sigma$  onde  $\Sigma$  é o sistema simples associado a  $C$ . Como tanto  $w$  quanto  $\sigma$  são ortogonais temos que  $\pi_\sigma$  é um automorfismo do diagrama determinado por  $\Sigma$  que depende exclusivamente de  $\sigma$ .  $\square$

Em termos do automorfismo  $\pi_\sigma$  se faz a seguinte distinção:

1.  $\sigma$  é interior se  $\pi_\sigma = 1$ , e dizer, se  $\sigma$  é um elemento do grupo de Weyl.
2.  $\sigma$  é exterior se  $\pi_\sigma \neq 1$ . E dizer,  $\sigma$  não pertence ao grupo de Weyl.

Como já mencionamos, os únicos diagramas irredutíveis que admitem automorfismos de diagrama não triviais são  $A_l, D_l$  e  $E_6$ .

Como por definição  $\sigma$  é involutiva temos que seus autovalores são  $\pm 1$  e logo  $E$  se decompõe como

$$E = E^+ \oplus E^-$$

onde  $E^+$  é o autoespaço associado ao autovalor 1 e  $E^-$  o auto-espaço associado ao autovalor  $-1$ . Além disso, o fato de  $\sigma$  ser ortogonal implica que  $E^-$  é o complemento ortogonal de  $E^+$ . Para  $\alpha \in E$  pode-se escrever então

$$\alpha = \frac{\alpha + \sigma\alpha}{2} + \frac{\alpha - \sigma\alpha}{2}$$

como soma de elementos de  $E^+$  e  $E^-$ . Como essa decomposição é única, as projeções ortogonais  $P^\pm$  sobre  $E^\pm$  são dadas, respectivamente, por

$$P^+\alpha = \frac{\alpha + \sigma\alpha}{2}$$

e

$$P^-\alpha = \frac{\alpha - \sigma\alpha}{2}$$

Nos vamos nos interessar pelos  $\sigma$ -sistemas normais.

**Definição 8.2.** Um  $\sigma$ -sistema de raízes é dito normal se para toda raiz  $\alpha \in \Pi$  temos que  $\alpha - \sigma\alpha$  não é raiz.

**Proposição 8.2.** Suponha que o  $\sigma$ -sistema de raízes  $\Pi$  seja normal e seja  $P^+$  a projeção ortogonal sobre  $E^+$ . Então  $P^+(\Pi) - 0$  é um sistema de raízes em  $E^+$ .

*Demonstração.* Para simplificar a notação  $P^+$  será denotado por  $P$ . O conjunto  $P(\Pi)$  é evidentemente finito e gera  $E^+$ , pois  $\Pi$  gera  $E$ . As reflexões associadas a os elementos de  $P^+(\Pi) - 0$  serão tomadas como sendo as reflexões ortogonais



em, relação ao producto interno restrito a  $E^+$ . Para  $P\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \in \Pi$  essa reflexão é dada por

$$\tau_{P\alpha}(\lambda) = \lambda - \frac{2\langle P\alpha, \lambda \rangle}{\langle P\alpha, P\alpha \rangle} P\alpha$$

Pela definição de sistema de raízes é necessario verificar que essas reflexões deixam  $P(\Pi)$  invariante e que os números de Killing

$$\frac{2\langle P\alpha, P\beta \rangle}{\langle P\alpha, P\alpha \rangle}$$

são inteiros. Para isso consideramos os seguintes tres casos:

1.  $P\alpha = \alpha$ , e dizer  $\sigma\alpha = \alpha$ . Nesse caso temos  $\alpha \in E^+$  e  $\langle P\alpha, P\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$  para todo  $\beta \in \Pi$ , pois  $\beta$  se escreve como  $P\beta - P^-\beta$  e  $P^-\beta$  é ortogonal a  $E^+$ . Então o número de Killing

$$\frac{2\langle P\alpha, P\beta \rangle}{\langle P\alpha, P\alpha \rangle} = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

é inteiro. Alem do mais

$$\tau_{P\alpha}(P\beta) = P\beta - \frac{2\langle P\alpha, P\beta \rangle}{\langle P\alpha, P\alpha \rangle} P\alpha = P\left(\beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha\right)$$

e, portanto,  $\tau_{P\alpha}$  invariante.

2.  $P\alpha \neq \alpha$  e  $\sigma\alpha$  é ortogonal a  $\alpha$ . Então temos

$$\langle P\alpha, P\alpha \rangle = \left\langle \frac{\alpha + \sigma\alpha}{2}, \frac{\alpha + \sigma\alpha}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{\alpha + \sigma\alpha}{2}, \alpha - P^-\alpha \right\rangle = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} = \frac{\langle \sigma\alpha, \sigma\alpha \rangle}{2}$$

onde a ultima igualdade vem do fato de  $\sigma$  ser isometria. Então temos que para  $\beta \in \Pi$  o numero de Killing associado a  $P\alpha$  e  $P\beta$  é

$$\frac{2\langle P\alpha, P\beta \rangle}{\langle P\alpha, P\alpha \rangle} = \frac{\langle \alpha + \sigma\alpha, \beta - P^-\beta \rangle}{\langle P\alpha, P\alpha \rangle} = \frac{\langle \alpha + \sigma\alpha, \beta \rangle}{\langle P\alpha, P\alpha \rangle} = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + \frac{2\langle \sigma\alpha, \beta \rangle}{\langle \sigma\alpha, \sigma\alpha \rangle}$$

e o ultimo membro de esta igualdade é inteiro por ser a soma de números de Killing de  $\Pi$ . Essa igualdade mostra também que a reflexão  $\tau_{P\alpha}$  é dada por

$$\tau_{P\alpha}(P\beta) = P\beta - \frac{\langle P\alpha, P\beta \rangle}{\langle P\alpha, P\alpha \rangle} P\alpha = P\left(\beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha - \frac{2\langle \sigma\alpha, \beta \rangle}{\langle \sigma\alpha, \sigma\alpha \rangle} \sigma\alpha\right)$$

Por outro lado a expressão no argumento  $P$  do segundo membro é  $\tau_\alpha \tau_{\sigma\alpha}(\beta)$  pois usando o fato de que  $\alpha$  e  $\sigma\alpha$  são ortogonais temos que

$$\tau_\alpha \tau_{\sigma\alpha}(\beta) = \tau_\alpha\left(\beta - \frac{2\langle\sigma\alpha, \beta\rangle}{\langle\sigma\alpha, \sigma\alpha\rangle}\right) = \beta - \frac{2\langle\sigma\alpha, \beta\rangle}{\langle\sigma\alpha, \sigma\alpha\rangle} - \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha$$

Isso mostra que  $\tau_{P\alpha} = P \circ \tau_\alpha \tau_{\sigma\alpha}$ . Portanto temos que  $\tau_{P\alpha}$  deixa  $P(\Pi)$  invariante.

3.  $P\alpha \neq \alpha$  e  $\sigma\alpha$  não é ortogonal a  $\alpha$ . Aqui vamos a usar o fato de que, por hipótese, o sistema é normal. Como é normal temos que  $\alpha - \sigma\alpha$  não é raiz. Logo seja a  $\alpha$ -*sequencia* iniciada em  $\sigma\alpha$

$$\sigma\alpha - p\alpha, \dots, \alpha - \sigma\alpha, \sigma\alpha, \sigma\alpha + \alpha, \dots, \sigma\alpha + q\alpha$$

temos então  $p = 0$  e então

$$p - q = -q = \frac{\langle\alpha, \sigma\alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} < 0$$

Isso implica que  $\langle\alpha, \sigma\alpha\rangle < 0$ . Mas como  $\alpha$  e  $\sigma\alpha$  são raízes com o mesmo comprimento, temos que o número de Killing correspondente é

$$\frac{2\langle\alpha, \sigma\alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = -1$$

Portanto  $2\langle\alpha, \sigma\alpha\rangle = -\langle\alpha, \alpha\rangle$  e logo temos que

$$\begin{aligned} \langle P\alpha, P\alpha \rangle &= \frac{1}{4}\langle\alpha, \alpha\rangle + \frac{1}{4}(2\langle\alpha, \sigma\alpha\rangle) + \frac{1}{4}\langle\sigma\alpha, \sigma\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle\alpha, \alpha\rangle - \frac{1}{4}\langle\alpha, \alpha\rangle + \frac{1}{4}\langle\sigma\alpha, \sigma\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle\sigma\alpha, \sigma\alpha\rangle \\ &= \langle\alpha, \alpha\rangle \end{aligned}$$

Considerando então que  $\langle\alpha, \sigma\beta\rangle = \langle\sigma^2\alpha, \sigma\beta\rangle = \langle\sigma\alpha, \beta\rangle$  e que  $\langle\sigma\alpha, \sigma\beta\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle$  temos que

$$\langle P\alpha, P\beta \rangle = \left\langle \frac{\alpha + \sigma\alpha}{2}, \frac{\beta + \sigma\beta}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\langle\alpha, \beta\rangle + \frac{1}{2}\langle\sigma\alpha, \beta\rangle$$

e logo temos que

$$\frac{2\langle P\alpha, P\beta \rangle}{\langle P\alpha, P\alpha \rangle} = \frac{4\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} + \frac{4\langle\sigma\alpha, \beta\rangle}{\langle\sigma\alpha, \sigma\alpha\rangle}$$

que é um inteiro.

Com essa expressão para o numero de Killing se mostra que

$$\tau_{P\alpha}(P\beta) = P(\tau_\alpha \tau_{\sigma\alpha} \tau_\alpha(\beta))$$

□

O sistema  $P^+(\Pi) - \{0\}$  em  $E^+$  é dito *sistema restrito* associado ao  $\sigma$ -sistema normal.

Sistemas simples para  $P^+(\Pi) - 0$  podem ser construídos a partir de sistemas simples em  $E$ , tomando uma ordem lexicográfica que seja compatível com sua ordem lexicográfica em  $E^+$ . Uma ordem dessas é definida por uma base

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$$

de  $E$ , cujos primeiros elementos estejam em  $E^+$  e os demais em  $E^-$ . Em relação a ordem lexicográfica dada por uma base desse tipo,  $\sigma$  é bem comportada no sentido em que se  $\sigma\beta \neq -\beta$  então  $\beta > 0$  se e só se  $\sigma\beta > 0$ . De fato, denotando por  $k$  a dimensão de  $E^+$ , se

$$\beta = a_1\gamma_1 + \dots + a_l\gamma_l$$

então

$$\sigma\beta = a_1\gamma_1 + \dots + a_k\gamma_k - a_{k+1}\gamma_{k+1} - \dots - a_l\gamma_l$$

Portanto, o primeiro coeficiente não nulo de  $\beta$  coincide com o de  $\sigma\beta$  caso  $\beta$  tenha componentes da direção dos  $k$  primeiros elementos da base.

Fixando uma ordem lexicográfica compatível, seja  $\Sigma$  o sistema simples de raízes correspondente. Esse sistema simples se divide nos subconjuntos

- $\Sigma_- = \Sigma \cap E^-$  das raízes simples em que  $\sigma\alpha = -\alpha$
- $\Sigma_+ = \Sigma - \Sigma_-$  das raízes simples  $\alpha$  que satisfazem  $\sigma\alpha \neq -\alpha$

Analogamente, seja  $\Pi_- = \Pi \cap E^-$ . Esse conjunto é a interseção de um sistema de raízes com um subespaço. Portanto, se  $\Pi_-$  não for vazio, ele é um sistema de raízes no subespaço que ele gera (que em geral, é menor que  $E_-$ ).

**Proposição 8.3.**  $\Sigma_-$  é um sistema simples de raízes em  $\Pi_-$

*Demonstração.* Como a ordem lexicográfica é adaptada a  $E^\pm$  os elementos de  $\Sigma_-$  são positivos em relação a essa ordem. Além disso,  $\alpha \in \Sigma_-$  não pode ser escrita como soma de duas raízes positivas de  $\Pi$ , em particular de  $\Pi_-$ , o que mostra que  $\Sigma_-$  está contido no conjunto de raízes simples de  $\Pi_-$ . Por outro lado, se  $\alpha \in \Pi_-$  é uma soma de raízes positivas,  $\alpha = \beta + \gamma$ , então  $\beta$  e  $\gamma$

são raízes em  $E^-$ . De fato,  $\sigma\alpha = \sigma\beta + \sigma\gamma < 0$  e se  $\beta$  ou  $\alpha$  não está em  $E_-$ , então  $\sigma\beta + \sigma\gamma$  é positiva definida pelo comentário feito acima. Isso mostra que ao escrever os elementos de  $\Pi_-$  como combinação linear de raízes simples só aparecem coordenadas não-nulas em  $\Sigma_-$ . Daí que  $\Sigma_-$  gera  $\Pi_-$ , mostrando que  $\Sigma_-$  é um sistema simples.  $\square$

Para analisar a ação de precisamos do seguinte lema sobre transformações lineares cujas matrizes são positivas, isto é, em que todas as entradas são positivas.

**Lema 8.4.** *Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz real  $n \times n$  inversível e suponha que  $a_{ij} \geq 0$  para todo  $i, j$ . Seja também*

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0\}$$

*O primeiro octante em  $\mathbb{R}^n$ . Tome  $v \in \mathbb{R}_+^n$  e suponha que duas o mais de suas coordenadas sejam estritamente positivas. Então,  $Av$  tem pelo menos duas coordenadas estritamente positivas, isto é,  $Av$  não pertence a um dos eixos coordenados.*

*Demonstração.* Ver [6].  $\square$

O importante corolário e o seguinte

**Corolário 8.5.** *Seja  $A$  matriz cujas entradas sejam  $\geq 0$  e suponha que  $A^2 = 1$ . Então  $A$  é uma matriz de permutação.*

*Demonstração.* Se  $e_i$  é um elemento da base canônica, aplicando o lema a  $v = Ae_i$  temos que se  $v$  tem pelo menos duas coordenadas não nulas, então o mesmo ocorre com  $Av$ . Mas  $Av = A^2e_i = e_i$ , portanto  $v$  pertence à base canônica e  $A$  é uma matriz de permutação.  $\square$

**Proposição 8.6.** *Seja*

$$\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_l\}$$

*com os primeiros  $s$  elementos em  $\Sigma_+$  e os restantes em  $\Sigma_-$ . Então existe uma permutação involutiva  $\pi$  de  $\{1, \dots, s\}$  tal que para  $1 \leq i \leq s$  vale*

$$\sigma\alpha_i = \alpha_{\pi(i)} + \sum_{j=s+1}^l n_j \alpha_j$$

*com  $n_j \geq 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $Z$  a matriz de  $\sigma$  na base  $\Sigma$ . Essa matriz se decompõe em blocos como

$$Z = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

com os blocos divididos de acordo com as decomposição de  $\Sigma$  em  $\Sigma_+$  e  $\Sigma_-$ . Como  $\sigma(\alpha) = -\alpha$  se  $\alpha \in \Sigma_-$  temos que  $D = -I$  e  $B = 0$ , isto é,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}$$

As matrizes  $A$  e  $C$  são positivas, pois se  $\alpha \in \Sigma_+$  então  $\sigma(\alpha) \leq 0$ . Mas  $\sigma$  é involutiva, o que implica que  $Z^2 = I$  e daí tem que ser  $A^2 = I$ . Então pelo corolário 8.5  $A$  é uma matriz de permutação. Juntando isso ao fato de que as entradas de  $C$  são  $\geq 0$  temos que

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_{\pi(i)} + \sum_{j=s+1}^l n_j \alpha_j$$

com  $n_j$  dado pelas entradas de  $C$  e sendo  $\pi$  a permutação associada a  $A$ , que é involutiva pois  $A^2 = I$ .

□

A continuação oferecemos um corolário desta proposição que será muito importante no momento de determinar os diagramas de Satake:

**Corolário 8.7.** *O autoespaço  $E^-$  é gerado por  $\Sigma_-$  e pelas diferenças  $\alpha_{\pi(i)} - \alpha_i$ ,  $\alpha_i \in \Sigma_+$*

*Demonstração.* Como  $P^-(\alpha) = \frac{\alpha - \sigma\alpha}{2}$  e  $P^-(\Sigma)$  gera  $E^-$ , este subespaço é gerado pelas diferenças  $\sigma(\alpha) - \alpha$ ,  $\alpha \in \Sigma$ . A proposição garante então que se  $\alpha_1 \in \Sigma_+$ , então

$$\sigma(\alpha_i) - \alpha_i = \alpha_{\pi(i)} - \alpha_i - \beta_i$$

com  $\beta_i \in \Sigma_i$ .

□

Agora vamos a caracterizar a permutação que aparece nessa proposição:

**Proposição 8.8.** *A permutação que aparece na anterior proposição é a permutação correspondente ao automorfismo de diagrama  $w_0\sigma = \pi_\sigma$  onde  $w_0$  é o único elemento do grupo de Weyl em que  $w_0\sigma(\Sigma) = \Sigma$ . Além do mais,  $w_0$  é a involução principal de  $\Sigma_-$*

*Demonstração.* Seja  $w_0$  a involução principal de  $\Pi_-$  em relação a  $\Sigma_-$ , e dizer,  $w_0$  é o único elemento do grupo de Weyl de  $\Pi_-$  tal que  $w_0(\Sigma_-) = -\Sigma_-$ . Como  $w_0$  é um produto de reflexões em relação a raízes em  $\Sigma_-$ , sua restrição a  $E^+$  é a identidade, portanto  $w_0(\Sigma)$  é um conjunto de raízes positivas. Mas este é um sistema simples em  $\Pi$  e logo temos, e daí que  $w_0\sigma(\Sigma) = \Sigma$  e logo  $w_0$  é um automorfismo do diagrama determinado por  $\Sigma$ . Além do mais, usando ainda o fato de que  $w_0$  é um produto de reflexões em relação a raízes de  $\Sigma_-$ , seu valor numa raiz simples  $\alpha_i \in \Sigma_-$  é da forma

$$w_0\alpha_i = \alpha_i + \gamma_i$$

com  $\gamma_i$  uma combinação de raízes em  $\Sigma_i$ , pois se  $\tau$  é uma reflexão que compõe  $w_0$ , então  $\tau\alpha_i = \alpha_i + \beta_i$  com  $\beta_i \in \Sigma_-$  e aplicações sucessivas dessas reflexões fornecem a igualdade. Dessa forma se as matrizes de  $\sigma$  e  $w_0$  em relação a base  $\Sigma$  são escritas em blocos, divididos de acordo com  $\Sigma_+$  e  $\Sigma_-$ , e temos:

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix}$$

$$w_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

então a matriz de  $w_0\sigma$  é

$$w_0\sigma = w_0 = \begin{pmatrix} aA & 0 \\ bA + Cc & -c \end{pmatrix}$$

Mas, como  $w_0\alpha_i = \alpha_i + \gamma_i$ , temos que  $a = I$  e, portanto,  $aA = A$ . Como  $w_0\sigma$  permuta os elementos de  $\Sigma$  sua matriz é uma matriz de permutação. Mas  $-c$  é uma matriz inversível, pois  $w_0\sigma$  é inversível. Assim nenhuma linha de  $-c$  se anula. Isso implica que  $bA + cC = 0$ , mostrando que  $w_0\sigma\alpha_i = \alpha_{\pi(i)}$   $\square$

Apenas os diagramas  $A_l$ ,  $D_l$  e  $E_6$  admitem automorfismos não triviais. Por isso, só nestes casos pode acontecer de a permutação não ser trivial.

Podemos agora mostrar que a projeção de  $\Sigma_+$  é um sistema simples do conjunto das raízes restritas.

**Proposição 8.9.** *Suponha que o  $\sigma$  – sistema de raízes seja normal. Então  $P^+(\Sigma_+)$  é o sistema simples de raízes de  $P^+(\Pi) - 0$  associado a ordem lexicográfica em  $E_+$*

*Demonstração.* Denotamos  $P^+ = P$ . Seja  $\alpha$  uma raiz tal que  $P\alpha > 0$ . Seque que  $\sigma\alpha \neq \alpha$  e logo  $\alpha > 0$ . Portanto,  $\alpha$  é uma combinação linear com coeficientes

inteiros  $\geq 0$  de  $\Sigma$ . Então  $P(\Sigma)$  é uma combinação linear semelhante de  $P(\Sigma)$ . Mas  $P(\Sigma) = P(\Sigma_+) \cup \{0\}$ , o que mostra que  $P(\Sigma_+)$  é um conjunto de raízes positivas que gera  $E^+$  e, portanto, contem o conjunto das raízes simples correspondentes. Por outro lado, seja  $\alpha_i \in \Sigma_+$  e suponhamos por absurdo que

$$P\alpha_i = P\beta + P\gamma$$

com  $P\beta, P\gamma > 0$ . Então,  $\beta$  e  $\gamma$ , assim como  $\sigma\beta$  e  $\sigma\gamma$  são positivas. Por outro lado

$$\sigma\alpha_i = \alpha_{\pi(i)} + \delta$$

com  $0 \leq \delta \in E^-$ . Pode se escrever  $\beta = \beta_+ - \beta_-$  e  $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$  com  $\beta_{\pm}, \gamma_{\pm}$  combinações lineares de  $\Sigma_{\pm}$ . Temos então que  $\sigma\beta = \sigma\beta_+ + \sigma\beta_- = \sigma\beta_+ - \beta_-$  e  $\sigma\gamma = \sigma\gamma_+ + \sigma\gamma_- = \sigma\gamma_+ - \gamma_-$ . Substituindo essas expressões temos que

$$P\alpha_i = \frac{\alpha_i + \sigma\alpha_i}{2} = \frac{\alpha_i + \alpha_{\pi(i)} + \delta}{2} = \frac{\beta_+ + \sigma\beta_+}{2} + \frac{\gamma_+ + \sigma\gamma_+}{2}$$

E dizer

$$\alpha_i + \alpha_{\pi(i)} + \delta = \beta_+ + \sigma\beta_+ + \gamma_+ + \sigma\gamma_+$$

Como as raízes são positivas, essa igualdade mostra que apenas uma das raízes  $\beta$  ou  $\gamma$  pode ter coordenada na direção de  $\alpha_i$  ou de  $\alpha_{\pi(i)}$ , e que a outra deve estar em  $E_-$ , contradizendo o fato de que suas projeções são positivas. Logo as raízes em  $P(\Sigma_+)$  são simples, concluindo a demonstração.  $\square$

## 8.2

### Diagramas de Satake e alguns lemas técnicos

Nosso objetivo é classificar os  $\sigma$ -sistemas normais. A ideia central da classificação vem do corolário 8.7 que garante que o auto-espço  $E^-$  é gerado por  $\Sigma_-$  e pelas diferenças  $\alpha_{\pi(i)} - \alpha_i$ , com  $\alpha_i \in \Sigma_+$ . Uma vez conhecido  $E^-$ ,  $\sigma$  queda completamente determinada, pois  $E^+$  é o complementar ortogonal de  $E^-$  e  $\sigma = \pm 1$  em  $E^{\pm 1}$ . Dessa forma, os dados  $\pi$  e  $\Sigma_-$  classificam os  $\sigma$ -sistemas normais.

**Definição 8.3.** Um *diagrama de Satake* é uma forma de codificar, através de um diagrama de Dynkin, o conjunto  $\Sigma_-$  e a permutação de  $\pi$  dos índices das raízes em  $\Sigma_+$ . Isto é feito marcando no diagrama de Dynkin, as raízes em  $\Sigma_-$  por um círculo cheio  $\bullet$  e indicando a permutação entre as demais raízes por flechas duplas  $\longleftrightarrow$

Um diagrama de Satake é dito *interior* se a permutação  $\pi$  é a identidade, e dizer se  $\sigma$  é um elemento do grupo de Weyl. O diagrama é dito *exterior* se

$\pi$  não é a identidade, é dizer, se  $\sigma$  não pertence ao grupo de Weyl. No que segue serão encontrados todos os diagramas de Satake provenientes de sistemas normais. Estes diagramas se conhecem como diagramas de Satake normais. As vezes são chamados também de diagramas normais.

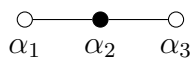
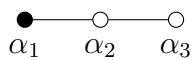
**Definição 8.4.** Um *subdiagrama invariante* é um subconjunto de um diagrama de Satake em que o subconjunto gerado pelas raízes correspondentes é invariante por  $\sigma$ .

Uma primeira observação imediata mas muito relevante é que um subdiagrama invariante da origem a um  $\sigma$  – *sistema* e se o diagrama original é normal, então o sistema definido pelo subdiagrama também é normal.

A continuação vamos a demonstrar uma serie de lemas que fornecem as tecnicas utilizadas para encontrar os diagramas de Satake analisando caso a caso os diagramas de Dynkin.

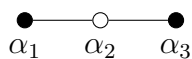
**Lema 8.10.** *Valem os seguintes fatos*

1. *Os diagramas*



*não são normais.*

2. *O diagrama*



*é normal.*

*Demonstração.* Temos que

1. No primeiro diagrama existe uma única raiz em  $\Sigma_-$  e como não existe ligação entre as raízes de  $\Sigma_+$  temos que  $\dim E^+ = 2$  e  $\dim E^- = 1$ . Logo  $\sigma$  é a reflexão em relação a  $\alpha_1$ , já que essa raiz está em  $\Sigma_-$ . Isso implica que esse diagrama não é normal pois temos

$$\sigma(\alpha_2) = \tau_{\alpha_1} \alpha_2 = \alpha_2 - \frac{2\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

e  $\sigma\alpha_2 - \alpha_2 = \alpha_1$  é raiz.

O segundo diagrama é análogo ao primeiro.



2. Em este diagrama temos que a involução correspondente é o produto de reflexões  $\sigma = \tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_3}$ , pois  $E^-$  é gerado pelas raízes  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$ . Esse é um diagrama normal, como pode ser visto calculando  $\sigma$  em cada uma das raízes. As raízes de  $A_3$  são da forma  $\lambda_i - \lambda_j$  com  $i \neq j$  e um sistema simples é dado por  $\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4\}$ . Temos então que

$$\sigma\alpha_2 = \tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_3} \alpha_2 = \tau_{\alpha_1}(\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

e logo temos que

$$\sigma\alpha_2 - \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4$$

segue que  $\sigma\alpha_2 - \alpha_2$  não é raiz.

Por outro lado como  $\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = 0$  temos que

$$\sigma\alpha_1 = (\tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_3})\alpha_1 = \tau_{\alpha_1}(\alpha_1 - \frac{2\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle} \alpha_3) = \tau_{\alpha_1}(\alpha_1) = \alpha_1 - 2\alpha_1 = -\alpha_1$$

e logo temos que  $\sigma\alpha_1 - \alpha_1 = -2\alpha_1$  que não é raiz.

Analogamente temos que  $\sigma\alpha_2 - \alpha_2 = -2\alpha_2$  que não é raiz.

Logo o diagrama é normal.

□

**Definição 8.5.** O *suporte* de uma raiz  $\alpha$  é o conjunto das raízes simples que aparecem (com coeficiente não nulo) na combinação linear de  $\alpha$

**Lema 8.11.** O suporte de toda raiz é um subconjunto conexo do diagrama de Dynkin.

*Demonstração.* Ver [6].

□

**Lema 8.12.** Considere um diagrama interior. Seja  $\alpha \in \Sigma_+$ . Então

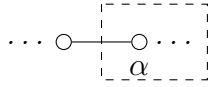
$$\sigma\alpha = \alpha + \gamma$$

onde  $\gamma$  é uma combinação linear das componentes conexas de  $\Sigma_-$  que se ligam a  $\alpha$ .

*Demonstração.* Como o diagrama é interior,  $\sigma\alpha = \alpha + \gamma$  com  $\gamma$  combinação linear de raízes em  $\Sigma_-$ . Como  $\sigma\alpha$  é raiz, seu suporte é conexo. Dai  $\gamma$  é combinação linear apenas de componentes conexas de  $\Sigma_-$  que se ligam a  $\alpha$ . □

O seguinte lema fornece condições para que um subdiagrama de um diagrama interior seja invariante.

**Lema 8.13.** *Um subdiagrama é invariante se as raízes de fora do subdiagrama que se ligam a ele estão em  $\Sigma_+$*



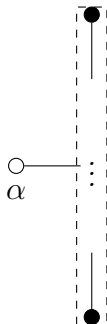
*Demonstração.* Basta verificar que  $\sigma\alpha$  pertence ao subespaço gerado pelas raízes do subdiagrama para  $\alpha \in \Sigma_+$  pois  $\sigma\beta = \beta$  se  $\beta \in \Sigma_-$ . Como o diagrama é interior,  $\sigma\alpha = \alpha + \gamma$  com  $\gamma$  combinação linear das componentes conexas de  $\Sigma_-$  que se ligam a  $\alpha$ . Mas estas componentes conexas estão conectadas ao subdiagrama, pois por hipótese, nenhuma raiz do subdiagrama esta ligada a uma raiz de  $\Sigma_-$  fora do mesmo.  $\square$

O próximo lema é muito importante na hora de classificar os diagramas de Satake interiores. Para esses diagramas sabemos que se  $\alpha \in \Sigma_+$ , então  $\sigma\alpha + \gamma$  onde  $\gamma$  é uma combinação linear das componentes conexas de  $\Sigma_-$  que se ligam a  $\alpha$ .

**Lema 8.14.** *Para  $\alpha \in \Sigma_+$ , seja*

$$\Sigma_-^c = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$$

*uma componente conexa de  $\Sigma_-$  que é ligada a  $\alpha$ . Essa componente conexa é um diagrama de Dynkin. Denote por  $C$  sua matriz de Cartan. Suponha que  $\alpha$  é ligada a  $\Sigma_-^c$  por uma ligação simples e seja  $j$  o índice da única raiz de  $\Sigma_-^c$  ligada a  $\alpha$ . Então os coeficientes de  $\gamma$  em relação a  $\Sigma_-^c$  são dados pelo dobro da  $j$  – esima coluna da inversa  $C^{-1}$  da matriz de Cartan.*



*Demonstração.* Sejam  $\Sigma_-^i$ ,  $i = 1, \dots, l$  as componentes conexas de  $\Sigma_-$  que se ligam a  $\alpha$ . Então  $\sigma\alpha$  se escreve como

$$\sigma\alpha = \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_l$$

com  $\gamma_i$  combinação linear das raízes em  $\Sigma_-^i$ . Nessa expressão  $\gamma_i$  é ortogonal a  $\gamma_j$  se  $i \neq j$ , por serem combinações lineares de componentes conexas distintas. Os coeficientes de  $\gamma_i$  em relação as raízes simples serão encontrados usando a condição de que  $\alpha + \sigma\alpha \in E_+$ , isto é,  $\sigma\alpha + \alpha$  é ortogonal a  $E_-$ . Observe que isso acontece se o só se  $\sigma\alpha + \alpha$  é ortogonal às componentes conexas  $\Sigma_-^i$ . De fato como o diagrama é interior,  $E_-$  é gerado por  $\Sigma_-$  e tanto  $\alpha$  quanto  $\sigma\alpha$  são ortogonais as componentes conexas de  $\Sigma_-$  que não estão ligadas a  $\alpha$ . Seja a componente conexa  $\Sigma_-^i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ . Então por lema 8.12 temos que

$$\sigma\alpha = \alpha + a_1\alpha_1 + \dots + a_k\alpha_k + \bar{\gamma}$$

com  $\bar{\gamma}$  uma combinação linear das componentes conexas de  $\Sigma_-$ , que se ligam a  $\alpha$ , diferentes de  $\Sigma_-^i$ . Com isso, temos que os coeficientes  $a_1, \dots, a_k$  são encontrados usando a condição de que

$$\beta = 2\alpha + a_1\alpha_1 + \dots + a_k\alpha_k$$

é ortogonal a  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Esta ortogonalidade se traduz num sistema equações lineares em  $a_1, \dots, a_k$  dado pelas igualdades

$$\frac{2\langle\beta, \alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle} = 0$$

com  $i = 1, \dots, k$

Seja  $\alpha_j$  a única raiz de  $\Sigma_-^i$  que se liga a  $\alpha$ . Então  $\frac{2\langle\alpha, \alpha_n\rangle}{\langle\alpha_n, \alpha_n\rangle} = -1$  se  $n = j$ , pois, por hipótese, a ligação entre  $\alpha_j$  e  $\alpha$  é simples, e 0, caso  $i \neq j$ . Portanto, o sistema linear é escrito como

$$Ca = 2b_j$$

onde  $C$  é a matriz de Cartan de  $\Sigma_-^i$  e  $b_j$  é a matriz coluna, cuja  $j$ -ésima entrada é 1 e as demais são nulas. A solução desse sistema é o dobro de  $j$ -ésima coluna de  $C^{-1}$ .

□

O interessante deste lema é que o dobro de algumas colunas de algumas dessas inversas de matrizes de Cartan não tem coeficientes inteiros e, portanto,

os diagramas correspondentes não podem aparecer como componente conexas de  $\Sigma_-$ , que se liga a uma raiz  $\alpha$  nas condições do lema. Exemplos onde isso acontece e que vão ser utilizados são

1.  $A_k$ ,  $k \geq 2$ . Nesse caso, na primeira entrada de  $C^{-1}$  aparece pelo menos uma entrada que é múltiplo de  $\frac{1}{k+1}$  cujo dobro não é inteiro.
2. No caso de  $D_k$ , na última coluna de  $C^{-1}$  aparecem as entradas  $\frac{(k-2)}{4}$  e  $\frac{k}{4}$ . Assim, se  $k$  é ímpar, o dobro dessa coluna não é formado por inteiros.
3. A primeira coluna de  $E_6$

### 8.3

#### Classificação dos diagramas de Satake normais

A continuação vamos a encontrar os diagramas de Satake normais para cada um dos diagramas de Dynkin. Para isso usaremos os lemas estudados na seção anterior. Também usaremos alguns fatos sobre a estrutura dos grupos de Weyl de alguns sistemas de raízes. Esses resultados que citaremos podem ser encontrados em [5].

##### *Diagramas de $A_l$*

O diagrama

$$A_l, l \geq 1 \quad \begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \cdots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{l-1} & & \alpha_l \end{array}$$

tem um automorfismo diferente da identidade. Dessa forma,  $\sigma$  pode ser interior ou exterior.

1.  $\sigma$  é interior. Neste caso, a permutação  $\pi$  entra as raízes de  $\Sigma_+$  é identidade, e portanto,  $E^-$  é gerado pelas raízes marcadas com círculos cheios. Além do mais,  $\sigma$  é um elemento do grupo de Weyl. O conjunto de raízes pode ser realizado como  $\lambda_i - \lambda_j$ ,  $1 \leq i, j \leq l+1$ ,  $i \neq j$  com sistema simples dado por  $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ . O grupo de Weyl é dado pelas permutações nos índices

$$w(\lambda_i - \lambda_j) = \lambda_{w(i)} - \lambda_{w(j)}$$

A condição para que  $\sigma = w$  seja normal é que

$$w(\lambda_i - \lambda_j) - (\lambda_i - \lambda_j) = \lambda_{w(i)} - \lambda_{w(j)} + \lambda_j - \lambda_i$$

não seja raiz para nenhum par  $i \neq j$ . O segundo membro de esta igualdade é uma raiz se e só se  $w$  fixa um dos índices e varia o outro. Assim, se  $w$  define um sistema normal e  $w(j) = j$  para algum índice então  $w(i) = i$  para todo índice e  $w$  é a identidade e então o diagrama de Satake é o próprio diagrama de Dynkin. Por outro lado se  $w(j) \neq j$  para todo  $j$  então  $w$  é necessariamente a seguinte permutação de ciclos disjuntos

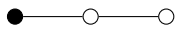
$$w = (1, 2)(3, 4) \cdots (l, l - 1)$$

De fato, como  $E^-$  é gerado por  $\Sigma_-$ , esse conjunto é não vazio. Além disso  $\alpha_1 \in \Sigma_-$ . De fato, suponha que  $\alpha_1 \notin \Sigma_-$  e seja  $k$  o primeiro índice tal que  $\alpha_k \in \Sigma_-$ . Então  $\alpha_{k+1} \notin \Sigma_-$ , pois se assim fosse a raiz  $\alpha_{k-1}$  estaria ligada ao primeiro elemento uma componente conexa de  $\Sigma_-$  cujo diagrama é  $A_l$ ,  $l \geq 2$  o que é absurdo pelo lema 8.14.

Portanto, pelo lema 8.13,  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  é um subdiagrama invariante. Mas, com essas condições,  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  não é um subdiagrama de Satake normal, pois a transformação involutiva associada  $\bar{\sigma}$  é a reflexão em relação ao seu único elemento em  $\Sigma_-$  dado por  $\alpha_k$  e essa reflexão satisfaz

$$\bar{\sigma}\alpha_{k-1} - \alpha_{k-1} = \tau_{\alpha_k}(\alpha_{k-1}) = \alpha_{k-1} - \frac{2\langle \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \alpha_k - \alpha_{k-1} = \alpha_k.$$

Temos então que  $\alpha_1 \in \Sigma_-$ . Logo  $\alpha_l \in \Sigma_-$ . Por simetria temos  $\alpha_l \in \Sigma_-$ . Juntando isso ao lema 8.10 que assegura que



não é diagrama normal, a única possibilidade que resta é o diagrama  $AI2$  abaixo



que certamente só ocorre quando  $l$  é ímpar. A involução que corresponde a esse diagrama é o elemento  $w$  do grupo de Weyl dado por

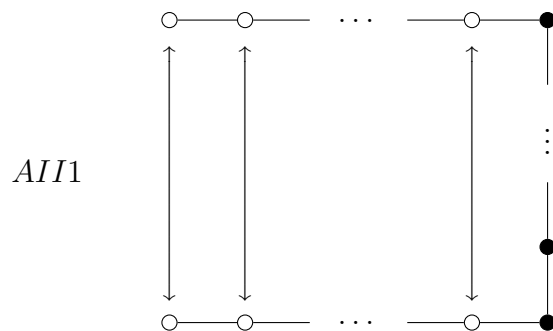
$$w = (1, 2)(3, 4) \cdots (l, l + 1)$$

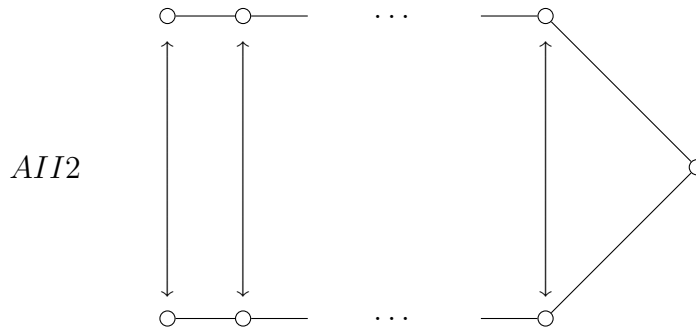
que é o produto das reflexões em relação as raízes simples que aparecem no diagrama numa posição ímpar.

2.  $\sigma$  e exterior. Neste caso existe  $w_0 \in W$  tal que  $w_0\sigma$  é automorfismo  $\pi$  do diagrama que permuta as raízes equidistantes de seu centro

$$\pi : \alpha_i \rightarrow \alpha_{l-i+1}$$

No diagrama de Satake essas raízes são ligadas entre si se elas não estiverem em  $\Sigma_-$ . Pela proposição 8.8,  $w_0 \in W_-$  é o único elemento do grupo de Weyl de  $\Sigma_-$  tal que  $w_0(\Sigma_-) = -\Sigma_-$ . Como tanto  $w_0$  quanto  $\sigma$  deixam  $\Sigma_-$  invariante, o mesmo acontece com  $\pi$  e, por isso,  $\Sigma_-$  é simétrico em relação ao centro do diagrama. O interessante é que  $\Sigma_-$  é conexo. De fato, se  $\Sigma_-$  contem mais de uma componente conexa, certamente uma delas não é simétrica em relação ao centro. Seja então  $\Gamma$  uma componente conexa de  $\Sigma_-$  que não é simétrica em relação ao centro. Como  $w_0\alpha = -\pi\alpha$  para  $\alpha \in \Sigma_-$  temos que  $w_0(\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$ . Mas isso não pode acontecer, pois os elementos do grupo de Weyl de um diagrama preservam as componentes conexas do mesmo. Então  $\Sigma_-$  é conexo. Temos então que os diagramas de Satake possíveis são da forma AII abaixo com o número de elementos em  $\Sigma_-$  variando de zero a  $l-2$ .





Esses diagramas são normais. De fato  $-\pi$  é o único elemento do grupo de Weyl  $W$  que leva  $\Sigma$  em  $-\Sigma$  e, portanto,  $\sigma = -w$  para algum  $w \in W$ . Usando a realização das raízes como  $\lambda_i - \lambda_j$ , os elementos de  $W$  são as permutações nos índices e a condição para que o sistema seja normal é que

$$w(\lambda_i - \lambda_j) - (\lambda_i + \lambda_j) = \lambda_{w(i)} - \lambda_{w(j)} - \lambda_i + \lambda_j$$

não seja raiz para nenhum par  $i \neq j$ . Essa condição é satisfeita por qualquer permutação que seja o produto disjunto de ciclos da forma  $(i, j)$ , pois para uma permutação dessas o segundo membro se anula. Por outro lado, como  $\sigma$  é involutiva, o mesmo ocorre com  $w$  e, portanto,  $\sigma = w$  é um produto de ciclos disjuntos, o que implica que  $\sigma$  é normal.

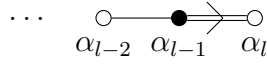
### Diagramas de $B_l$

O único automorfismo do diagrama

$$B_l, l \geq 2 \quad \begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \cdots & \text{---} & \circ \rightrightarrows \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{l-1} \quad \alpha_l \end{array}$$

é a identidade, pois a raiz  $\alpha_l$  tem tamanho diferente das demais. Dessa forma,  $\sigma$  é necessariamente um elemento do grupo de Weyl de  $B_l$  e nos diagramas de Satake não temos raízes ligadas por  $\longleftrightarrow$ . Para encontrar os diagramas de Satake, deve-se separar os casos em que  $\alpha_l$  está ou não em  $\Sigma_-$ .

1. Vamos a mostrar que se  $\alpha_l \notin \Sigma_-$ , então  $\Sigma_- = \emptyset$ . Suponhamos que  $\alpha_l \notin \Sigma_-$ , então pelo lema 8.13 temos que  $\Sigma - \{\alpha_l\}$  é invariante e seu diagrama é  $A_{l-1}$ . Então, pela análise anterior, as possibilidades para  $A_l$  mostram que  $\Sigma_- = \emptyset$  ou  $\alpha_{l-1} \in \Sigma_-$  e  $\alpha_{l-2} \in \Sigma_+$ , isto é o lado direito do diagrama é



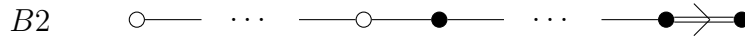
Portanto, pelo lema 8.13 temos que o  $\{\alpha_{l-1}, \alpha_l\}$  é um subdiagrama invariante. Mas este diagrama não é normal pois a aplicação involutiva  $\bar{\sigma}$  corresponde a reflexão em torno de  $\alpha_{l-1}$  e temos então que

$$\bar{\sigma}\alpha_l = \alpha_l - \frac{2\langle \alpha_l, \alpha_{l-1} \rangle}{\langle \alpha_{l-1}, \alpha_{l-1} \rangle} \alpha_{l-1} = \alpha_l + \alpha_{l-1}$$

e, portanto  $\bar{\sigma}\alpha_l - \alpha_l = \alpha_{l-1}$ .

Logo, se  $\alpha_l \notin \Sigma_-$  temos que o diagrama de Satake coincide com o diagrama de Dynkin.

2. Vamos a provar que se  $\alpha_l \in \Sigma_-$ , o diagrama de Satake é o seguinte diagrama  $B2$



onde  $1 \leq |\Sigma_-| \leq l - 1$

Para isso é suficiente verificar que  $\Sigma_-$  é um diagrama conexo. Suponha que a componente conexa de  $\alpha_l$  seja  $\{\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_l\}$ . Então,  $\alpha_j \notin \Sigma_-$  e, portanto,  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\}$  é invariante. O diagrama desse último conjunto é  $A_{j-1}$  e, pela classificação de  $A_l$  temos que, se ele contém raízes em  $\Sigma_-$ , então, ou ele está contido em  $\Sigma_-$  ou essas raízes aparecem alternadas com  $\alpha_1, \alpha_{j-1} \in \Sigma_-$ . O primeiro caso não pode acontecer, pois  $\alpha_j$  estaria ligada a uma componente conexa de  $\Sigma_-$  que é um  $A_l$ , mas pelo lema 8.14 isso não é possível. Já se as raízes aparecem alternadas, temos que  $\alpha_{j-2} \notin \Sigma_-$  se essa raiz existe. Assim, assumindo que  $\Sigma_-$  não é conexo, a contradição é dada pelo fato de que

$$\alpha = \alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_l$$

é uma raiz tal que  $\sigma\alpha - \alpha$  é raiz. De fato,  $j > 1$ , pois por hipótese,  $\Sigma_-$  não é conexo. Portanto,  $\alpha_{j-1}$  existe e está em  $\Sigma_-$ . Além do mais, dada uma matriz de Cartan  $B_l$  temos que os coeficientes da primeira coluna de sua inversa são todos iguais a 1, então pelo lema 8.14 temos que

$$\sigma\alpha_j = \alpha_{j-1} + \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_l)$$





Portanto  $\sigma$  pertence ao grupo de Weyl. As raízes  $C_l$  são dadas por  $\lambda_i - \lambda_j$ ,  $i \neq j$  e  $\lambda_i + \lambda_j$ . O grupo de Weyl coincide com o de  $B_l$ , é formado por permutações nos índices combinadas com mudanças de sinal nas coordenadas  $\lambda_j$ . Um sistema simples é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$$

Os diagramas de Satake são encontrados distinguindo os casos em que  $\alpha_l$  esta ou não em  $\Sigma_-$

1. Suponhamos  $\alpha_l \notin \Sigma_-$ . Se  $\alpha_{l-1} \notin \Sigma_-$  então  $\Sigma_- = \emptyset$ . De fato, nesse caso,  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{l-2}\}$  é uma cadeia simples e é invariante pelo lema 8.13. Portanto se fosse  $\Sigma \neq \emptyset$  teríamos (pela classificação de  $A_l$ ) que  $\alpha_{l-2} \in \Sigma_-$ , e logo teríamos o seguinte diagrama:



Logo a única componente conexa de  $\Sigma_-$  ligada a  $\alpha_{l-1}$  é uma componente trivial dada pela raiz  $\alpha_{l-2}$  e pelo lema 8.12 teríamos  $\sigma\alpha_{l-1} = \alpha_{l-1} + \alpha_{l-2}$ , e dizer teríamos que  $\sigma\alpha_{l-1} - \alpha_{l-1} = \alpha_{l-2}$  que é raiz, e logo o sistema não seria normal. Portanto se  $\alpha_{l-1} \notin \Sigma_-$  temos que  $\sigma = 1$  e o diagrama de Satake coincide com o Diagrama de Dynkin. Por outro lado, ao contrario de  $B_l$ , existe um diagrama normal em que  $\alpha_l \notin \Sigma_-$  e  $\alpha_{l-1} \in \Sigma_-$ , que é o seguinte



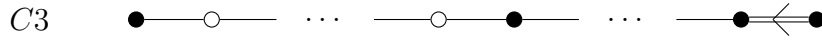
A diferença do caso de  $B_l$  neste diagrama temos que o subconjunto invariante  $\{\alpha_{l-1}, \alpha_l\}$  sim é normal, pois  $\alpha_{l-1}$  é menor que  $\alpha_l$  e temos então que, sendo  $\bar{\sigma}$  a aplicação involutiva, que é a reflexão em relação a  $\alpha_{l-1}$ , vale que

$$\bar{\sigma}\alpha_l = \alpha_l - \frac{2\langle\alpha_l, \alpha_{l-1}\rangle}{\langle\alpha_{l-1}, \alpha_{l-1}\rangle}\alpha_{l-1} = \alpha_l + 2\alpha_{l-1}$$

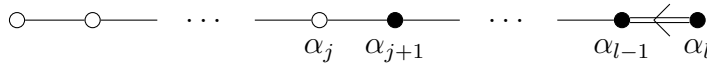
e, portanto,  $\bar{\sigma}\alpha_l - \alpha_l = 2\alpha_{l-1}$  não é raiz.

E claro, pela classificação dos diagramas  $A_l$  que o diagrama  $C2$  só ocorre quando  $l$  é par. Pode se verificar que  $\sigma\alpha - \alpha$  não é raiz para nenhuma raiz  $\alpha$ .

2. Se  $\alpha_l \in \Sigma_-$  vamos a mostrar que o diagrama de Satake só poder ser o seguinte diagrama  $C3$



Vamos a mostrar que  $\Sigma_-$  não pode ser conexo. Seja  $\{\alpha_{j+1}, \alpha \dots, \alpha_l\}$  a componente conexa de  $\alpha_l$  em  $\Sigma_-$  e suponha que  $\alpha_{j-1}$  e suponha que  $\alpha_{j-1} \notin \Sigma_-$ . E dizer, suponha que temos os seguinte diagrama



A primeira coluna da inversa de uma matriz de Cartan tipo  $C_l$  tem todas as entradas iguais a 1, com exceção da ultima que é igual a  $\frac{1}{2}$ . Então, considerando o lema 8.14 temos

$$\sigma\alpha_j = \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l$$

Então temos que

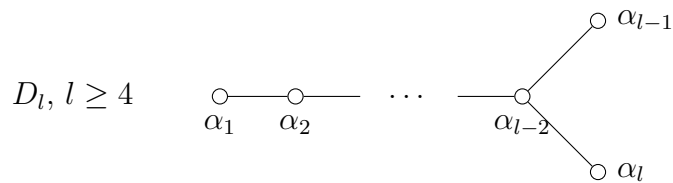
$$\sigma\alpha_j - \alpha_j = 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l = 2(\lambda_{j+1} - \lambda_l) + 2\lambda_l = 2\lambda_{j+1}$$

que é raiz de  $C_l$ . Logo se  $\alpha_{j-1} \notin \Sigma_-$  o diagrama não seria normal. Temos então que  $\alpha_{j-1} \in \Sigma_-$  se  $j \neq 1$  e daí, pelo lema 8.13 temos que  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\}$  é invariante. Isso mostra que o diagrama e como o indicado. Resta mostrar que de fato e normal. Se a componente conexa de  $\alpha_l$  termina em  $\alpha_{j+1}$  então  $j = 1$  ou  $j$  é par. Para esse diagrama temos que  $\sigma\alpha_i = -\alpha_i$  se  $i < j$  e  $i$  é ímpar ou se  $i > j$ , pois nesses casos  $\alpha_i \in \Sigma_-$ . Por outro lado, se  $i < j$  e  $i$  é par temos que as componentes conexas de  $\Sigma_-$  associadas a  $\alpha_i$  são triviais e logo temos, pelo lema 8.12, que  $\sigma\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1}$ . No caso de  $\alpha_j$  temos, pelos lemas 8.12 e 8.14, que

$$\sigma\alpha_j = \alpha_{j-1} + \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{l-1} + \alpha_l)$$

Escrevendo as raízes em termos de  $\lambda_i$  temos que  $\alpha_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$  e  $\sigma\alpha_j = \lambda_j + \lambda_{j+1}$  se  $j = 1$  e  $\sigma\alpha_j = \lambda_{j-1} + \lambda_j$  se  $j > 1$ . Logo o sistema é normal e  $\sigma$  e o elemento do grupo de Weyl dado por  $PS = SP$  onde  $S$  é a mudança de sinal  $S\lambda_i = -\lambda_i$ ,  $i > j$ ,  $P = 1$  se  $j = 1$  e  $P = (1, 2) \dots (j-1, j)$  se  $j > 1$ . Dessa expressão para  $\sigma$  se obtém que o diagrama e normal.

### Diagramas de $D_l$



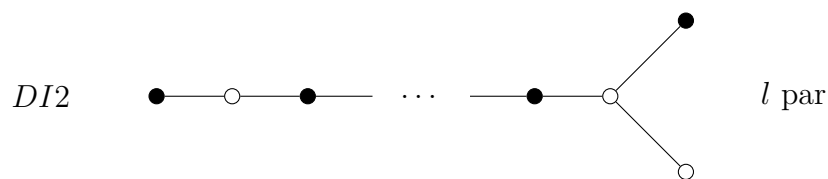
O diagrama  $D_l$  tem um automorfismo de diagrama que é a permutação entre  $\alpha_{l-1}$  e  $\alpha_l$  (para  $l = 4$  existem outros automorfismo que são equivalentes por simetria). Antes de determinar quais são os diagrama de Satake correspondentes vamos a enunciar sem demonstração o seguinte resultado:  $-1$  pertence ao grupo de Weyl de  $D_l$  se e somente se  $l$  é par.

Na análise dos diagramas de Satake deve-se distinguir então entre os casos interior e exteriores.

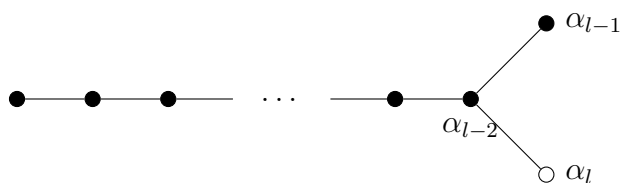
- Diagramas interiores

As possibilidades principais são dadas por  $\alpha_{l-1}$  e  $\alpha_l$  estarem ou não em  $\Sigma_-$

1. Suponha  $\alpha_l \notin \Sigma_-$ . Então, o complementar de  $\alpha_l$  é  $A_{l-1}$  e logo (pela análise já feita dos diagramas de  $A_l$  temos que os diagramas possíveis são o proprio diagrama de Dynkin e o diagrama  $DI_2$



A outra possibilidade seria o caso em que  $\Sigma_- = \Sigma - \alpha_l$ , e dizer, o caso



Mas essa possibilidade é descartada pelo lema 8.14, pois teríamos que  $\alpha_l$  estaria ligada a primeira raiz de um diagrama de tipo  $A_l$ . A transformação correspondente a  $DI2$  é

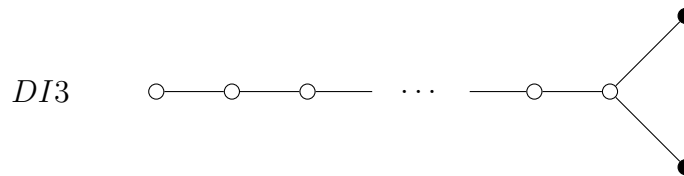
$$(1, 2)(3, 4) \dots (l-1, l)$$

que pertence ao grupo de Weyl. Para essa permutação  $\sigma\alpha - \alpha$  não é raiz para nenhuma raiz  $\alpha$ .

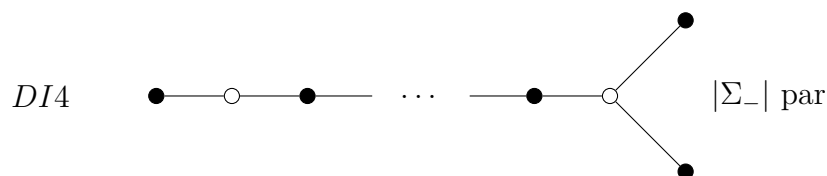
Este caso cobre também por simetria o caso em que  $\alpha_{l-1} \notin \Sigma_-$ .

2. Vamos a analisar os casos em que  $\alpha_{l-1}, \alpha_l \in \Sigma_-$ . Existem duas possibilidades

(a)  $\alpha_{l-2} \notin \Sigma_-$ . Então temos que  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{l-3}\}$  é invariante. Se esse conjunto não intercepta  $\Sigma_-$ , então o diagrama fica sendo  $DI3$



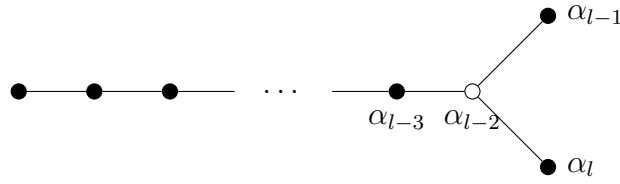
O diagrama é normal, com  $\sigma$  dada por  $\sigma(\lambda_{l-1}) = -\lambda_{l-1}$  e  $\sigma(\lambda_l) = -\lambda_l$  e com os demais  $\lambda_i$  fixos. Outra possibilidade (segundo a classificação de  $A_l$ ) é dada pelo diagrama  $DI4$



Em este diagrama  $\sigma$  é produto da permutação

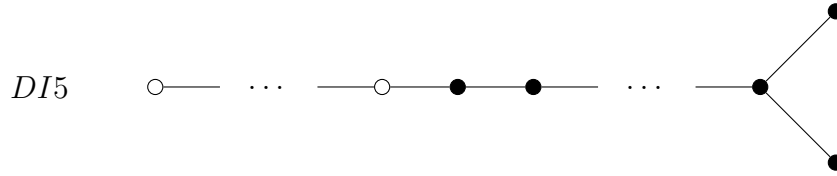
$$P = (1, 2)(3, 4) \dots (l-1, l)$$

por  $S$ , tal que  $S\lambda_{l-1} = -\lambda_{l-1}$ ,  $S\lambda_l = -\lambda_l$  e  $S\lambda_i = \lambda_i$  para os demais valores de  $i$ . Observamos que o caso em que  $\alpha_i \in \Sigma_-$  para todo  $i \leq l-3$ , e dizer

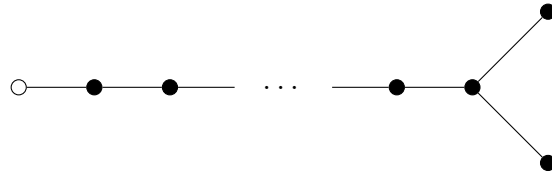


não é possível, pois  $\alpha_{l-2}$  estaria unida com uma componente conexa de  $\Sigma_-$  dada por um diagrama  $A_k$ . Temos que salientar que o diagrama *DI4* só ocorre se a ordem de  $\Sigma_-$  é par, pois a restrição de  $\sigma$  a  $\Sigma_-$  pertence ao grupo de Weyl desse diagrama e  $-1$  está no grupo de Weyl de  $D_l$  se e só se  $l$  é par.

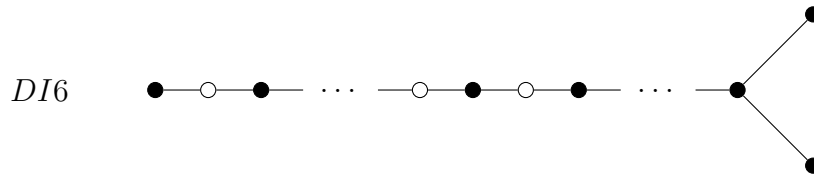
- (b)  $\alpha_{l-2} \in \Sigma_-$ . Temos duas possibilidades. Se  $\Sigma_-$  é conexo, então o diagrama é o seguinte



que está associado a  $\sigma = S$  com  $S\lambda_i = \lambda_i$  se  $i \leq j$  e  $S\lambda_i = -\lambda_i$  se  $i > j$  onde  $j$  é o maior índice em que  $\alpha_j \notin \Sigma_-$ . É claro que esta família *DI5* inclui o diagrama onde a única raiz que não está em  $\Sigma_-$  é  $\alpha_1$ , e dizer



Já se  $\Sigma_-$  não é conexo e  $\alpha_j$  é a maior raiz fora de  $\Sigma_-$  então temos que  $\{\alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{j-1}\}$  é um  $A_{j-1}$  invariante e a possibilidade é o seguinte diagrama



para o qual  $\sigma = PS = SP$  onde

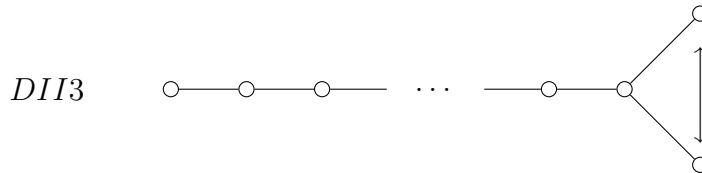
$$P = (1, 2)(3, 4) \dots (j-1, j)$$

e se  $S\lambda_i = \lambda_i$  se  $i \leq j$  e  $S\lambda_i = -\lambda_i$  se  $i > j$ . Para ser interior o diagrama *DI5* deve ter uma quantidade par de elementos em  $\Sigma_-$ . Já o diagrama *DI6* só é interior se  $l - j$  e  $j$  são pares. Neste caso  $l$  também é par. Mas estas restrições não devem ser consideradas pois se elas não ocorrem os diagramas continuam a ser normais só que exteriores.

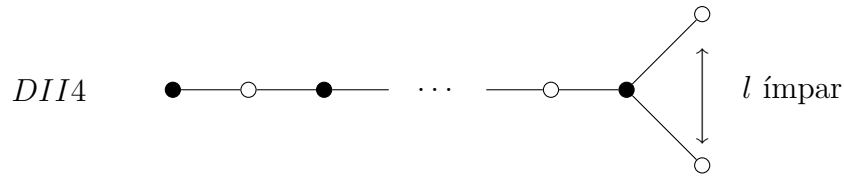
### • Caso exterior

Como o automorfismo do diagrama permuta as raízes  $\alpha_{l-1}$  e  $\alpha_l$  temos que elas pertencem ou não, simultaneamente, a  $\Sigma_-$ . Assim temos

1. Se  $\alpha_l, \alpha_{l-1} \in \Sigma_-$ , então  $\alpha_{l-2} \in \Sigma_-$ , pois, como foi visto, no diagrama  $A_3$  dado por  $\{\alpha_{l-2}, \alpha_{l-1}, \alpha_l\}$  o conjunto  $\Sigma_-$  deve ser conexo e simétrico em relação ao centro. Usando agora os mesmos argumentos do caso interno, em que essas três raízes estavam em  $\Sigma_-$ , temos que os diagramas que aparecem são os mesmos que já ocorreram naquele caso. Para o primeiro desses diagramas,  $\sigma$  é dado, como no caso interno, pelo produto de  $S$  por  $P$ . A diferença aqui é que  $\sigma$  não pertence ao grupo de Weyl e, portanto, esse diagrama só ocorre quando  $\Sigma_-$  tiver uma quantidade ímpar de elementos. Chamamos a este diagrama *DII1*. O mesmo comentário vale para *DII2*. Esses diagramas são exteriores ou interiores dependendo de  $l$  e da quantidade de raízes em  $\Sigma_-$ .
2. Se  $\alpha_{l-1}, \alpha_l \notin \Sigma_-$  então pelo lema 8.13 temos que o subdiagrama  $A_{l-2} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{l-2}\}$  é invariante. Temos então que uma das possibilidades é que  $A_{l-2}$  não tenha raízes de  $\Sigma_-$  e nesse caso temos o diagrama dado por



Para esse diagrama  $\sigma$  é o próprio automorfismo do diagrama, que é normal. Outra possibilidade (também, pela análise já feita dos diagramas de  $A_l$ ) é dada pelo diagrama *DII4* dado a continuação



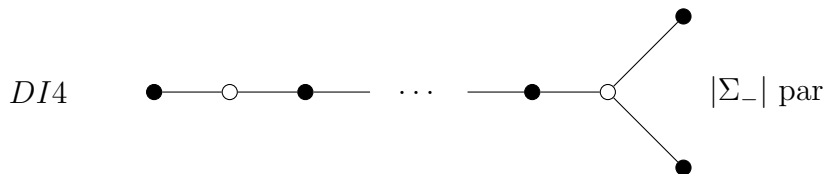
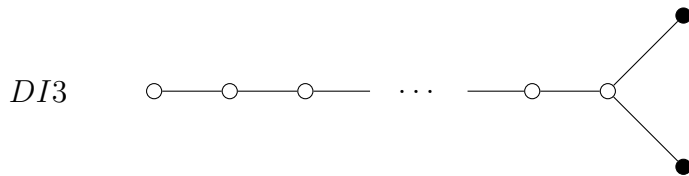
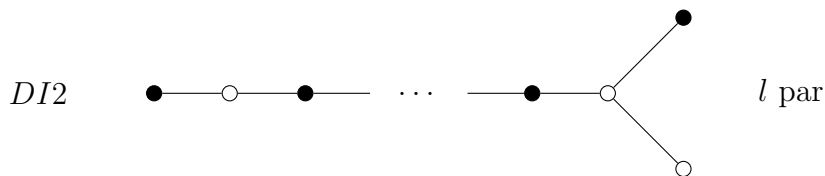
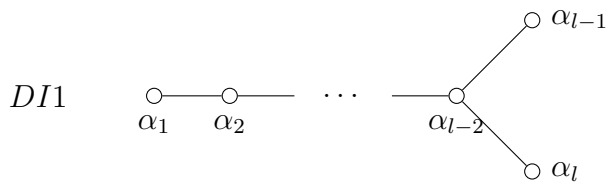
Como já vimos, este diagrama só ocorre se  $l$  é ímpar (pois nesse caso  $l-2$  é ímpar) e nesse caso temos que  $\sigma$  é o produto da permutação

$$P = (1, 2)(3, 4) \dots (l-2, l-1)$$

por  $S\lambda_l = -\lambda_l$ ,  $S\lambda_i = \lambda_i$ ,  $i < l$ . Aqui  $P$  pertence ao grupo de Weyl enquanto que  $S$  realiza o automorfismo do diagrama.

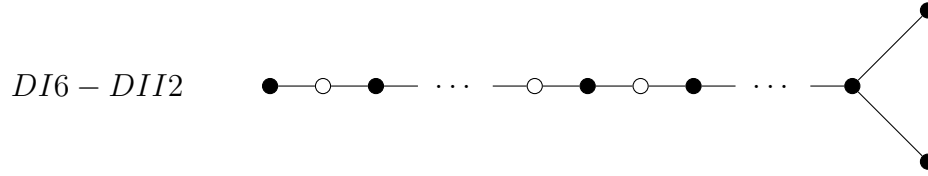
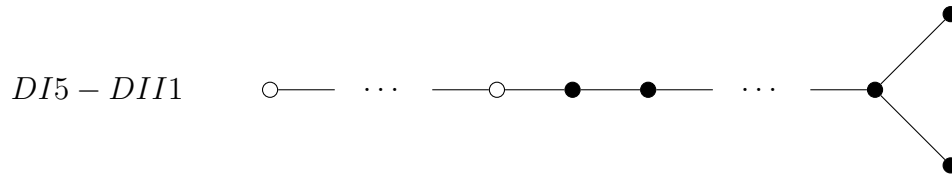
Recapitulando, os diagramas de Satake normais de  $D_l$  são:

### Interiores

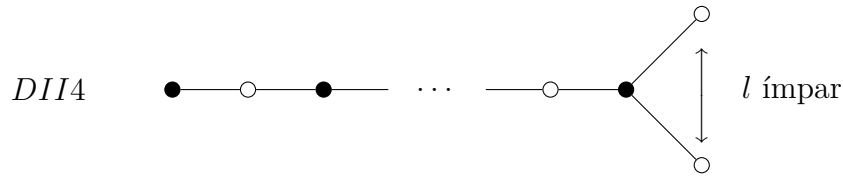
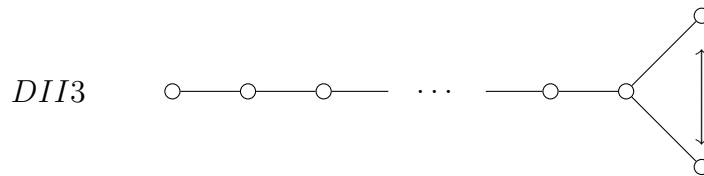


**Interiores e Exteriores** (dependendo da quantidade de raízes)



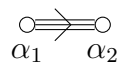


### Exteriores



### Diagramas de $G_2$

O único diagrama de Satake de  $G_2$  é o propio diagrama de Dynkin



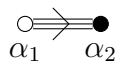
Pois, se, por exemplo,  $\alpha_2 \in \Sigma_-$  temos que  $\sigma = \tau_{\alpha_2}$  e logo

$$\sigma\alpha_1 = \tau_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1 - \frac{2\langle\alpha_2, \alpha_1\rangle}{\langle\alpha_2, \alpha_2\rangle}\alpha_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2$$

e logo temos que se tomamos a raiz  $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$

$$\sigma(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2$$

e dizer existe raiz  $\gamma$  tal que  $\sigma(\gamma) - \gamma$  é raiz. Então o diagrama



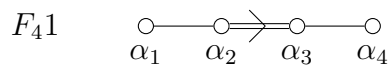
não é normal.

Analogamente, no caso em que  $\alpha_1 \in \Sigma_-$  o diagrama associado não é normal.

No resto do análise dos diagramas excepcionais serão eliminados aqueles que não são normais, sem mostrar que os restantes são de fato normais, mas isso pode se verificado como antes, pela realização dos diagramas.

### Diagramas de $F_4$

Alem do diagrama de Dynkin



O único diagrama de Satake de  $F_4$  é



Vamos a provar que os resto das possibilidades não oferecem diagramas normais

1.  $\alpha_4 \notin \Sigma_-$ .
  - (a) Se  $\alpha_3 \in \Sigma_-$ , então  $\alpha_2 \in \Sigma_-$ , pois, caso contrario, teriamos  $\{\alpha_3, \alpha_4\}$  invariante e não normal. Isso, por sua vez, implica que  $\alpha_1 \in \Sigma_-$ , pois caso contrario teriamos que  $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  é um diagrama  $C_3$  invariante e não normal. Temos assim o diagrama  $F_42$
  - (b) Se  $\alpha_3 \notin \Sigma_-$ . Nesse caso temos, pelo lema 8.13, que  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  é um  $B_3$  invariante que só é normal se  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma_-$ . Assim temos o diagrama de Dynkin  $F_41$ .
2.  $\alpha_4 \in \Sigma_-$ . Então, em nenhuma possibiidade o diagrama é normal. Temos

- (a)  $\alpha_1 \in \Sigma_-$ . Nesse caso  $\alpha_2 \in \Sigma_-$  ou  $\alpha_3 \in \Sigma_-$ . Se  $\alpha_3 \in \Sigma_+$  temos que  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  é um subdiagrama invariante não normal. Se  $\alpha_2 \in \Sigma_-$  temos pelo lema 8.13 que  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  é um  $A_2$  invariante, o que não é possível pelo lema 8.14. De fato a inversa de matriz  $A_2$  é

$$(A_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

e logo

$$\sigma\alpha_3 = \alpha_3 + \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{4}{3}\alpha_2 + \alpha_4$$

que não é raiz. O mesmo acontece com  $\sigma\alpha_2$  se  $\alpha_3 \in \Sigma_-$ .

- (b)  $\alpha_1 \notin \Sigma_-$ . Então  $\{\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2\}$  é um  $C_3$  invariante, e daí que esse conjunto está em  $\Sigma_-$  (pois  $\alpha_4 \in \Sigma_-$ ). A matriz de  $C_3$  é

$$C_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é

$$(C_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Mas se isso ocorre temos que  $\sigma\alpha_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$  e logo, tomando  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$  temos

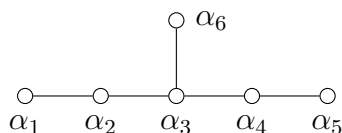
$$\sigma\alpha - \alpha = \alpha_2 + 2\alpha_3$$

e o diagrama não é normal.

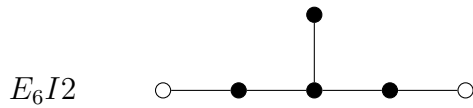
## Diagramas de $E_6$

### • Diagramas Internos

Os diagramas internos são o Diagrama de Dynkin



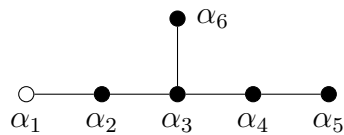
e o diagrama  $E_6I2$



Para ver isso, se consideram os casos em que  $\alpha_6$  esta ou não esta em  $\Sigma_-$ . Se  $\alpha_6 \notin \Sigma_-$  então, pelo lema 8.13, o complementar é um  $A_5$  invariante, e a única possibilidade é que apareça o diagrama de Dynkin. Por outro lado, se  $\alpha_6 \in \Sigma_-$  temos duas possibilidades:

1.  $\alpha_2 \notin \Sigma_-$ . Então temos que  $\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  é invariante e logo como é um  $A_l$  com  $l$  par e como a raiz  $\alpha_6 \in \Sigma_-$  temos que  $A_4 = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  esta contido em  $\Sigma_-$ . Mas isso é impossível, pois pelo lema 8.14 não pode estar ligado a uma componente conexa de  $\Sigma_-$  que é um  $A_4$ .
2.  $\alpha_2 \in \Sigma_-$ . Por simetria temos que  $\alpha_4 \in \Sigma_-$  necessariamente  $\alpha_3 \in \Sigma_-$ . Para ver isso, suponhamos que  $\alpha_3 \notin \Sigma_-$ . Se  $\alpha_1 \notin \Sigma_-$  temos que  $\{\alpha_{1,2}\}$  é um invariante não normal. Por outro lado, se  $\alpha_3 \notin \Sigma_-$  e  $\alpha_1 \in \Sigma_-$  temos que  $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  é uma componente conexa de  $\Sigma_-$  ligada a  $\alpha_3$ , o que é impossível pelo lema 8.13. O mesmo argumento se aplica a  $\alpha_5$ . Temos então que as possibilidades são:

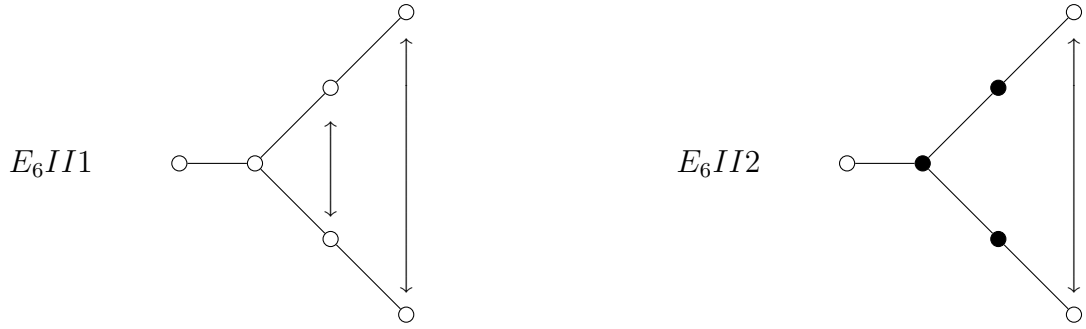
- (a)  $\alpha_1, \alpha_5 \notin \Sigma_-$  é o diagrama e  $E_6I2$
- (b)  $\alpha_1 \notin \Sigma_-$ ,  $\alpha_5 \in \Sigma_-$ . Mas em esse caso teríamos que  $\alpha_1$  estaria ligada a uma componente conexa de forma  $D_5$  como podemos ver na figura abaixo



Mas, se  $l$  é ímpar, então a dobro da ultima coluna da inversas da matriz de Cartan de  $D_l$  não é formada por inteiros. Logo essa possibilidade é descartada.

#### • Diagramas externos

Os diagramas externos de  $E_6$  são



De fato, se  $\alpha_6 \notin \Sigma_-$ , então seu complementar é um  $A_5$  invariante e so podem aparecer as possibilidades acima, pois se o complementar de  $\alpha_6$  estiver contido em  $\Sigma_-$  então  $\alpha_6$  estaria unido a uma componente conexa de  $\Sigma_-$  de forma  $A_5$ , o que é impossível pelo lema 8.14. Por outro lado se  $\Sigma_- = \alpha_3$ , então  $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$  seria um subdiagrama  $D_4$  invariante (pois as raízes fora do subdiagrama que se ligam a ele estão em  $\Sigma_+$ ) mas não normal (pela classificação dos diagramas de  $D_4$  feita anteriormente).

Resta provar que se  $\alpha_6 \in \Sigma_-$  então o diagrama não é normal. As possibilidades são

1.  $\alpha_2, \alpha_4 \notin \Sigma_-$ . Em esse caso se  $\alpha_{1,5} \notin \Sigma_-$  temos que  $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$  é um  $D_4$  invariante não normal. Por outro lado se  $\alpha_1, \alpha_5 \in \Sigma_-$ , temos então que  $\alpha_3 \in \Sigma_-$  pois caso contrario  $\{\alpha_4, \alpha_5\}$  é invariante não normal. Mas nesse caso temos que  $\sigma\alpha_2 = \alpha_4 + \gamma$  e  $\sigma\alpha_4 = \alpha_2 + \gamma'$  com  $\gamma \neq \gamma'$  já que  $\gamma$  tem componente na direção de  $\alpha_1$  o que não ocorre com  $\gamma'$ . Mas isso contradiz o fato de que  $\sigma$  é involutiva.

2.  $\alpha_2, \alpha_4 \in \Sigma_-$ . Aqui temos mais duas possibilidades:

- (a)  $\alpha_1, \alpha_5 \notin \Sigma_-$ . Então  $\alpha_3 \in \Sigma_-$  (caso contrario temos  $\sigma\alpha_1 = \sigma\alpha_5 + \alpha_4$  e  $\sigma\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2$  o que não é possível) e nesse caso temos que

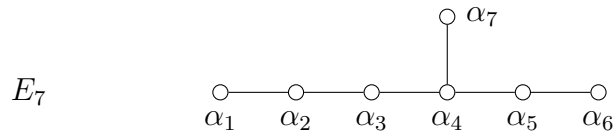
$$\sigma\alpha_1 = \alpha_5 + \frac{3}{4}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{3}{4}\alpha_4 + \frac{1}{4}\alpha_6$$

então esse caso não é possível.

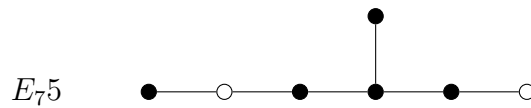
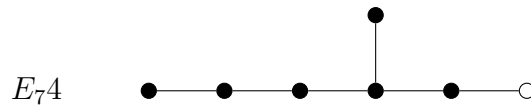
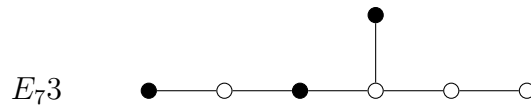
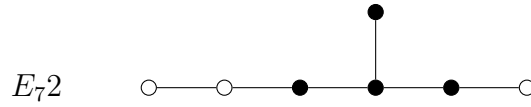
- (b)  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma_-$ . Logo  $\alpha_3$  é ligada a uma componente conexa de  $\Sigma_-$  que é do tipo  $A_2$  o que é impossível.

### Diagramas de $E_7$

Os diagramas de Satake de  $E_7$  são o diagrama de Dynkin



e os seguintes diagramas



Vamos a mostrar que de fato estes são os únicos diagramas. Se  $\alpha_1 \notin \Sigma_-$  então  $\{\alpha_2, \dots, \alpha_6\}$  é um  $E_6$  invariante e, portanto as possibilidades são o próprio diagrama de Dynkin, o diagrama dado por  $E_7 2$  ou o caso em que  $\alpha_1$  é a única raiz fora de  $\Sigma_-$ . Mas esta última possibilidade é descartada pelo fato de a matriz de Cartan de  $E_6$  ser

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & 4 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 4 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como o duplo da primeira coluna não é formado por inteiros temos que essa configuração é impossível pelo lema 8.14

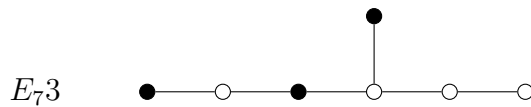
É suficiente considerar, então, os casos em que  $\alpha_1 \in \Sigma_-$ . Em todos eles  $\alpha_7 \in \Sigma_-$  pois caso contrário o complementar de  $\alpha_7$  e um  $A_6$  invariante não normal (pois se  $l$  é par o único diagrama interno de  $A_l$  é o próprio diagrama de Dynkin). Agora, se distinguem dois casos:

1.  $\alpha_3 \notin \Sigma_-$ . Então,  $\{\alpha_7, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  é um  $A_4$  invariante e, portanto, tem que estar contido em  $\Sigma_-$ , mas então, pelo lema 8.14 temos que os coeficientes de  $\sigma\alpha_3$  em relação a esse  $A_4$  não são inteiros. De fato temos que a matriz inversa de  $A_4$  é

$$(A_4)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

portanto, esse caso não oferece nenhum diagrama.

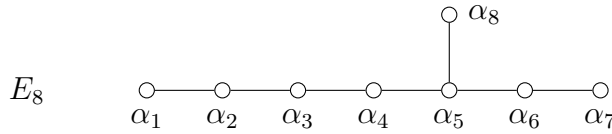
2.  $\alpha_3 \in \Sigma_-$ . Em primeiro lugar, se  $\alpha_5 \notin \Sigma_-$  então temos que  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7\}$  é um  $A_5$  invariante, e então, pela classificação dos diagramas  $A_l$  só podemos ter o diagrama  $E_73$



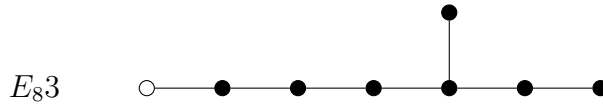
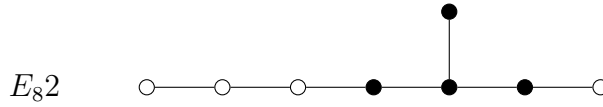
Por outro lado, suponha que  $\alpha_5 \in \Sigma_-$ . Então, deve ser  $\alpha_6 \notin \Sigma_-$  pois caso contrário teríamos que a ligação de  $\alpha_4$  com  $\{\alpha_5, \alpha_6\}$  forçaria  $\alpha_4 \in \Sigma_-$  (pois caso contrário  $\{\alpha_5, \alpha_6\}$  seria invariante não normal) e daí temos que  $\sigma\alpha_2$  não é raiz, pois é ligado a uma componente conexa de  $D_5$  de  $\Sigma_-$ . É necessário, portanto, que  $\alpha_6 \notin \Sigma_-$ . Se isso ocorre então  $\alpha_4 \in \Sigma_-$  (para evitar o invariante não normal  $A_2$  dado por  $\{\alpha_5, \alpha_6\}$ ) e assim os diagramas são  $E_74$  e  $E_75$ .

### Diagramas de $E_8$

Alem do diagrama de Dynkin



temos que os diagramas que ocorrem são



Esses diagramas aparecem no caso em que  $\alpha_1 \notin \Sigma_-$ . Se isso ocorre o complementar de  $\alpha_1$  e um  $E_7$  invariante e só aparecem essas duas possibilidades. Resta então descartar os casos em que  $\alpha_1 \in \Sigma_-$ . Nesse caso os mesmos argumentos de  $E_6$  e  $E_7$  mostram que  $\alpha_8 \in \Sigma_-$ . Agora  $\alpha_5 \in \Sigma_-$ , pois caso contrário  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  e um  $A_4$  invariante e deve estar em  $\Sigma_-$  (o que é impossível pelo lema 8.14). Logo  $\alpha_5 \in \Sigma_-$  implica que  $\alpha_4$  por sua ligação com um subdiagrama  $A_l$  contido em  $\Sigma_-$ . Se  $\alpha_3 \notin \Sigma_-$  teríamos que  $\alpha_3$  estaria ligada a uma componente conexa de  $\Sigma_-$  da forma  $A_2$ , o que é impossível. Da mesma forma que  $\alpha_4$  temos que  $\alpha_6 \in \Sigma_-$ . Se  $\alpha_2 \notin \Sigma_-$  então  $\alpha_2$  está ligado a primeira raiz de uma componente conexa de  $D_5$  de  $\Sigma_-$ , e daí que  $\alpha_7 \in \Sigma_-$ . Mas se isso ocorre, então  $\alpha_2$  está ligado à primeira raiz de uma componente conexa  $E_6$ , o que é impossível. Logo  $\alpha_2 \in \Sigma_-$ . Finalmente  $\alpha_7 \notin \Sigma_-$  não ocorre devido a sua ligação com a última raiz de  $D_7$ . Assim, fica mostrado que se  $\alpha_1 \in \Sigma_-$  então todas suas raízes estão em  $\Sigma_-$ .

Repare o leitor que no caso do diagrama  $E_{83}$  temos que  $\alpha_1$  está ligado a uma componente conexa de  $\Sigma_-$  de tipo  $E_7$  e isso é possível pois a matriz de Cartan de  $E_7$  é dada por

$$E_7 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



e sua inversa é dada por

$$(E_7)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ \frac{5}{2} & 5 & \frac{15}{12} & 9 & 6 & 3 & \frac{9}{2} \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} & 6 & 4 & 2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

e temos que o dobro da primeira coluna da inversa é um vetor que só tem inteiros em suas entradas. Temos de fato que

$$\sigma\alpha_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8$$

No ultimo capitulo utilizaremos esta ultima igualdade para mostrar que, se bem  $E_83$  é um diagrama de Satake normal, ele não é "admissível" em um sentido que será explicado no ultimo capitulo.

## 9.1

## Formas reais e álgebras simples

**Definição 9.1.** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  e seja  $V^{\mathbb{R}}$  o espaço vetorial real obtido por restrição dos escalares a  $\mathbb{R}$ . Este espaço é denominado de *realificado* de  $V$  e sua dimensão é o dobro da dimensão de  $V$ .

A multiplicação por complexos em  $V$  se recupera a partir de  $V^{\mathbb{R}}$  e da transformação linear real obtida pela multiplicação por  $i$  em  $V$ . De fato temos que  $v \in V \mapsto iv \in V$  define uma transformação  $J : V^{\mathbb{R}} \rightarrow V^{\mathbb{R}}$ , já que os conjuntos subjacentes a estes dois espaços coincidem. É evidente que  $J$  é uma transformação linear de  $V^{\mathbb{R}}$  que satisfaz  $J^2 = -1$ . O espaço real  $V^{\mathbb{R}}$ , juntamente com  $J$  determina a estrutura de espaço vetorial complexo em  $V$  definindo o produto por escalares complexos como

$$(a + ib)v = av + b(Jv)$$

com  $a, b$  reais.

**Definição 9.2.** Seja  $W$  um espaço vetorial real. Uma estrutura complexa em  $W$  é uma transformação linear  $J : W \rightarrow W$  que satisfaz  $J^2 = -1$

Pelo dito acima, o realificado de um espaço vetorial complexo tem uma estrutura complexa canônica. Vice-versa, o polinômio minimal de uma estrutura complexa é da forma  $\lambda^2 + 1$  cujas raízes são  $\pm i$ , que são os autovalores de  $J$ . Como esses autovalores aparecem aos pares, a existência de uma estrutura complexa em  $W$  implica que  $\dim W$  é par. Se esse é o caso, definindo como antes  $(a + ib)v = av + bJv$  o produto de escalares complexos em  $W$ , obtém-se um espaço vetorial complexo cujo realificado é  $W$ .

Considerando ainda um espaço vetorial complexo  $V$ , seja  $U \in V$  um subespaço. Seu realificado é um subespaço real de  $V^{\mathbb{R}}$ . No entanto, nem tudo

subespaço de  $V^{\mathbb{R}}$  é obtido pela realificação de um subespaço de  $V$ . Para que isso ocorra, é necessário que o subespaço seja fechado por multiplicação por  $i$ . E dizer um subespaço de  $V^{\mathbb{R}}$  é proveniente de um subespaço complexo se e só se ele é invariante pela estrutura complexa  $J$ .

Quanto as complexificações, seja  $V$  um espaço vetorial real e  $V_{\mathbb{C}}$  o seu complexificado. Os elementos de  $V_{\mathbb{C}}$  se escrevem como  $u + iv$  com  $u, v \in V$ . Escrevendo os elementos de  $v$  desta maneira, fica definida a conjugação  $\sigma : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$  dada por

$$\sigma(u + iv) = \overline{u + iv} = u - iv$$

Esta conjugação satisfaz  $\sigma^2 = 1$  e é antilinear em  $V_{\mathbb{C}}$  no sentido em que  $\sigma$  é linear sobre os reais e

$$\sigma(zw) = \bar{z}w$$

com  $z \in \mathbb{C}$  e  $w \in V_{\mathbb{C}}$

E claro que

$$V = \{W \in V_{\mathbb{C}} : \sigma(w) = w\}$$

Com isso temos a seguinte definição

**Definição 9.3.** Seja  $U$  um espaço vetorial complexo. Uma conjugação em  $U$  é uma transformação antilinear  $\sigma$  que satisfaz  $\sigma^2 = 1$ .

Um espaço vetorial complexo  $U$  com uma conjugação  $\sigma$  pode ser visto como o complexificado de um espaço real. De fato,  $\sigma$  é uma transformação linear de  $U^{\mathbb{R}}$  e, como é uma involução, temos que

$$U^{\mathbb{R}} = U_1 \oplus U_{-1}$$

com  $U_1$  o auto-espaço associado ao autovalor  $-1$  e  $U_{-1}$  o auto-espaço associado ao autovalor  $1$ . O fato de  $\sigma$  ser antilinear como transformação de  $U$  implica que se  $v \in U_1$ , então  $\sigma(iv) = -iv$  e, portanto,  $iv \in U_{-1}$ . E dizer temos que  $J(U_{-1}) \subset U_1$ , o que mostra que  $U_1$  e  $U_{-1}$  têm a mesma dimensão e, portanto,  $U$  é o complexificado de  $U_1$ . Além disso

$$U_1 = \{v \in U : \sigma(v) = v\}$$

e  $\sigma$  é a conjugação obtida da decomposição  $U = U_1 + U_{-1} = U_1 + iU_1$ . Evidentemente, diferentes conjugações em  $U$  fornecem diferentes formas de vê-lo como o complexificado de um espaço real.

O realificado de um espaço complexo pode, por sua vez, ser complexificado. Seja  $(V^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$  esse complexificado. A estrutura complexa  $J$  é uma trans-

formação linear real de  $V_{\mathbb{R}}$  cujos autovalores são  $\pm i$ . Portanto  $J$  não tem autovetores em  $V^{\mathbb{R}}$ , mas sim no seu complexificado. Sejam  $V_{\pm i}$  os auto-espacos generalizados de  $J$  em  $(V^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$  associados a aos autovalores  $\pm i$ . Dentro de  $V_i$ ,  $J$  tem uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} i & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & i \end{bmatrix}$$

e, como  $J^2 = -1$ , essa matriz é diagonal, de onde se conclui que  $Jv = iv$  para todo  $v \in V_i$ . Da mesma forma,  $Jw = -iw$  para todo  $w \in V_{-i}$ . Pelo fato de que  $J$  é real em  $V_{\mathbb{R}}$ ,  $V_{-i} = \sigma(V_i)$  onde  $\sigma$  é a conjugação de  $(V^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$  associada a  $V^{\mathbb{R}}$ . Dessa forma,  $V_i$  e  $V_{-i}$  têm a mesma dimensão e, como

$$(V^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = V_i \oplus V_{-i}$$

a dimensão de  $V_{\pm i}$  é a metade da dimensão de  $V_{\mathbb{R}}$  e, portanto, coincide com a dimensão de  $V$ . Como esses espaços são complexos, eles são isomorfos a  $V$ .

Agora bem, os objetos de nosso interesse são às álgebras de Lie. Um estrutura complexa  $J$  em uma álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}$  é dita *adaptada* se ela comuta com  $ad(X)$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ , isto é, se

$$[X, JY] = J[X, Y]$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . De forma alternativa, uma estrutura complexa é adaptada se e só se

$$[JX, JY] = -[X, Y]$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Alternativamente, como  $J^2 = -1$  temos que  $J$  é adaptada se e só se

$$[JX, JY] = -[X, Y]$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

Na análise dos subespaços reais de uma álgebra de Lie complexa  $\mathfrak{g}$ , as conjugações que interessam são aquelas que satisfazem

$$[\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y]$$

Uma conjugação desse tipo é chamada de *antiautomorfismo*. Um antiautomorfismo de  $\mathfrak{g}$  é claramente um automorfismo da realificada de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ . Além disso, o subespaço dos pontos fixos para um antiautomorfismo é uma subálgebra do realificado de  $\mathfrak{g}$ , pois se  $X$  e  $Y$  são fixos por  $\sigma$ , então temos que

$$[\sigma X, \sigma Y] = [X, Y] = \sigma[X, Y]$$

e segue que  $[X, Y]$  também é ponto fixo por  $\sigma$ . Dessa forma, dado um antiautomorfismo em  $\mathfrak{g}$  a álgebra real  $\mathfrak{g}_0$  dada por

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}$$

tem por complexificada a álgebra complexa  $\mathfrak{g}$

Com isso temos a importante definição de forma real:

**Definição 9.4.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie complexa. Uma forma real de  $\mathfrak{g}$  é uma subálgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  que é o subespaço dos pontos fixos de uma conjugação  $\sigma$  que satisfaz  $[\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y]$ . Se isso ocorre,  $\mathfrak{g}$  é o complexificado de  $\mathfrak{g}_0$ .

Dada uma álgebra real  $\mathfrak{g}$  associa-se a ela sua complexificada  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  e a correspondente realificação  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$ , que é denotada como  $\mathfrak{g}^{\rho}$  por simplicidade de notação.

**Lema 9.1.** Seja  $V$  um espaço vetorial complexo,  $V^{\mathbb{R}}$  seu realificado e  $T : V \rightarrow V$  uma transformação linear. Seja  $T^{\mathbb{R}}$  a mesma transformação so que vista como transformação linear de  $V^{\mathbb{R}}$ . Então

$$\text{tr} T^{\mathbb{R}} = 2\text{Re}(\text{tr} T)$$

*Demonstração.* Seja  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Então

$$\beta^{\rho} = \{v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n\}$$

e base de  $V^{\mathbb{R}}$ . Se  $A$  é a matriz de  $T$  na base  $\beta$ , então uma verificação simples mostra que a matriz de  $T^{\mathbb{R}}$  na base  $\beta^{\rho}$  é dada por

$$\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}$$

onde  $B$  e  $C$  são a parte real e imaginária de  $A$ , respetivamente. Isso mostra que  $\text{tr} T^{\mathbb{R}} = 2\text{tr} B$ . Como  $\text{tr} B$  é exatamente a parte real de  $\text{tr} A$  o lema fica mostrado.

□

**Proposição 9.2.** *Seja  $\mathfrak{h}$  uma álgebra complexa e sejam  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle^\rho$  as formas de Killing de  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}^\mathbb{R}$  respectivamente. Então para  $X, Y \in \mathfrak{h}$  temos*

$$\langle X, Y \rangle^\rho = 2\operatorname{Re}\langle X, Y \rangle$$

onde  $\operatorname{Re}$  denota a parte real de um número complexo.

*Demonstração.* Como a forma real é dada pelo traço de  $T = \operatorname{ad}(X)\operatorname{ad}(Y)$  a proposição é consequência do lema anterior.  $\square$

Esta proposição mostra de imediato que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  não é degenerada se e só se  $\langle \cdot, \cdot \rangle^\rho$  não é degenerada. Então uma álgebra complexa é semi-simples se e só se sua realificada também é.

**Definição 9.5.** Uma álgebra real  $\mathfrak{h}$  é do *Tipo I* se sua complexificada é simples e do *Tipo II* se sua complexificada  $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$  não é simples.

**Proposição 9.3.** *Seja  $\mathfrak{h}$  uma álgebra complexa. Então  $\mathfrak{h}$  é simples se e só se  $\mathfrak{h}^\mathbb{R}$  é simples.*

*Demonstração.* Suponhamos  $\mathfrak{h}$  é simples. Para mostrar que  $\mathfrak{h}^\mathbb{R}$  é simples é suficiente mostrar que os ideais de  $\mathfrak{h}^\mathbb{R}$  são invariantes pela estrutura complexa  $J$ , pois nesse caso esses ideais são subespaços complexos e, portanto, ideais de  $\mathfrak{g}$ . Seja então  $\mathfrak{i}$  ideal de  $\mathfrak{h}^\mathbb{R}$ . Como  $\mathfrak{h}^\mathbb{R}$  é semi-simples,  $\mathfrak{i}$  também é semi-simples e, portanto,  $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = \mathfrak{i}$ . Logo

$$J\mathfrak{i} = J[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = [\mathfrak{i}, J\mathfrak{i}]$$

pois  $J$  é uma estrutura complexa adaptada. Mas como  $\mathfrak{i}$  é ideal  $[\mathfrak{i}, J\mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i}$ , o que mostra que  $\mathfrak{i}$  é invariante por  $J$ . Reciprocamente, os ideais de  $\mathfrak{h}$ , quando realificados, dão ideais de  $\mathfrak{h}^\mathbb{R}$ , o que mostra que  $\mathfrak{h}$  é simples se  $\mathfrak{h}^\mathbb{R}$  for simples.  $\square$

Para mostrar que as álgebras de tipo *II* são precisamente as realificadas das álgebras simples complexas, é necessário encontrar um critério semelhante para estas álgebras.

**Proposição 9.4.** *Seja  $\mathfrak{h}$  uma álgebra complexa simples e denote por  $\mathfrak{h}^\mathbb{C}$  o complexificado do realificado de  $\mathfrak{h}$ , e dizer  $\mathfrak{h}^\mathbb{C} = (\mathfrak{h}^\mathbb{R})_\mathbb{C}$ . Então  $\mathfrak{h}^\mathbb{C}$  se decompõe como soma dois ideais simples*

$$\mathfrak{h}^\mathbb{C} = \mathfrak{i}_1 \oplus \mathfrak{i}_2$$

isomorfos a  $\mathfrak{h}$ .

*Demonstração.* Seja  $J$  a estrutura complexa em  $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ . Então os auto-espacos de  $J$  decompõem  $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$  em soma direta

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{h}_{-i}$$

Sejam  $v \in \mathfrak{h}_i$  e  $w \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ . Então pelo fato de  $J$  ser adaptada temos

$$J[w, v] = [w, Jv] = i[w, v]$$

e, portanto,  $[w, v] \in \mathfrak{h}_i$  o que mostra que  $\mathfrak{h}_i$  é um ideal. Da mesma forma  $\mathfrak{h}_{-i}$  também é um ideal. Como os elementos de  $\mathfrak{h}_{\pm i}$  são autovetores associados a autovalores complexos temos que  $\mathfrak{h}_{\pm i} \cap \mathfrak{h} = 0$ . Esses ideais são álgebras complexas da mesma dimensão que  $\mathfrak{h}$ . Para ver os isomorfismos, seja  $\phi : \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$  a aplicação dada por

$$\phi(X) = \frac{1}{2}(X - iJ(X))$$

Não é difícil verificar que  $\phi$  vista como aplicação de  $\mathfrak{h}$  a valores em  $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ , é linear sobre os complexos. Além do mais, a imagem de  $\phi$  esta contida em  $\mathfrak{h}_i$ , já que, para todo  $X \in \mathfrak{h}$  temos

$$2J(\phi(X)) = J(X - iJ(X)) = (JX + iJX) = I(X - iJX)$$

pois  $J^2 = -1$ , o que mostra que  $\phi(X) \in \mathfrak{h}_i$ . O fato de que  $\mathfrak{h}_{-i} \cap \mathfrak{h} = 0$  implica que  $\phi$  é injetora, pois se  $\phi(X) = 0$ , então  $J(X) = -iX$ . Portanto, para concluir que  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}_i$  são isomorfas, é suficiente mostrar que  $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$  é um homomorfismo. Aqui entra novamente o fato de que  $J$  e estrutura complexa adaptada:

$$\begin{aligned} 4[\phi(X), \phi(Y)] &= [X - iJX, Y - iJY] \\ &= [X, Y] - I[X, JY] - i[JX, Y] - [JX, JY] \\ &= 2[X, Y] - 2iJ[X, Y] \\ &= 4\phi[X, Y] \end{aligned}$$

e, portanto,  $\phi$  é homomorfismo e  $\mathfrak{h}_i$  é isomorfa a  $\mathfrak{h}$ . Analogamente,  $X \mapsto \frac{(X+iJX)}{2}$  define um isomorfismo entre  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}_{-i}$ , concluindo a demonstração da proposição.  $\square$

Reciprocamente

**Proposição 9.5.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra real simples e suponha que  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  se decompõe como soma de ideais simples*

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{i}_1 \oplus \mathfrak{i}_2$$

*isomorfos entre si. Então,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$  para alguma álgebra complexa simples  $\mathfrak{h}$  e os ideais são isomorfos a  $\mathfrak{h}$ .*

*Demonstração.* A ideia da demonstração é construir uma estrutura complexa adaptada  $J$  em  $\mathfrak{g}$ . A construção é inspirada nos isomorfismos entre  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}_{\pm 1}$  da proposição anterior. Como  $\mathfrak{h}_{-i}$  é o conjugado de  $\mathfrak{h}_i$  a primeira coisa a ser feita é substituir  $\mathfrak{i}_2$ , por exemplo, pelo conjugado de  $\mathfrak{i}_1$  na decomposição de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  em soma direta de ideais. Para isso, seja  $\sigma$  a conjugação de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  em relação a  $\mathfrak{g}$ . Então  $\sigma(\mathfrak{i}_1)$  é um ideal, da mesma dimensão que  $\mathfrak{i}_1$  que satisfaz

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{i}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{i}_1)$$

De fato,  $\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{g} = 0$ , pois esta interseção é um ideal de  $\mathfrak{g}$ , que é simples, portanto  $\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{g} = 0$  ou  $\mathfrak{g}$ . Porém,  $\mathfrak{i}_1$  é um subespaço complexo e daí que  $\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$  implica que  $\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ , contradizendo o fato de que  $\mathfrak{i}_2$  é isomorfo a  $\mathfrak{i}_1$ . Da mesma maneira,  $\mathfrak{i}_1 \cap i\mathfrak{g} = 0$ , o que, juntamente com  $\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{g} = 0$  implica que  $\mathfrak{i}_1 \cap \sigma(\mathfrak{i}_1) = 0$ . Como as dimensões de  $\sigma(\mathfrak{i}_1)$  e  $\mathfrak{i}_1$  são as mesmas,  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  é a soma direta de  $\mathfrak{i}_1$  com  $\sigma(\mathfrak{i}_1)$ . Além do mais, o fato de que  $\sigma$  é um antiautomorfismo mostra que  $\sigma(\mathfrak{i}_1)$  é um ideal de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . Agora,  $X \in \mathfrak{g}$  se escreve de maneira única como

$$X = X_1 + X_2$$

com  $X_1 \in \mathfrak{i}_1$ ,  $X_2 \in \sigma(\mathfrak{i}_1)$ . Mas  $\sigma(X) = X$  e, portanto,  $\sigma(X_1) = X_2$  e  $\sigma(X_2) = X_1$ . Dito isso, define-se  $J$  por

$$J(X) = i(X_1 - X_2)$$

Como  $\sigma(J(X)) = -i(\sigma(X_1) - \sigma(X_2))$ ,  $J(X)$  é invariante por  $\sigma$  e, portanto, está em  $\mathfrak{g}$ . A decomposição de  $J(X)$  como soma de elementos de  $\mathfrak{i}_1$  e  $\sigma(\mathfrak{i}_1)$  é dada por  $J(X) = i(X_1 - X_2)$ . Dessa expressão, segue-se que

$$J^2(X) = i(iX_1 + IX_2) = -X$$

e, portanto,  $J$  é uma estrutura complexa em  $\mathfrak{g}$ . Ela é adaptada pois se  $Y \in \mathfrak{g}$  então  $[Y, X_1] \in \mathfrak{i}_1$  e  $[Y, X_2] \in \sigma(\mathfrak{i}_1)$  e daí que

$$[Y, JX] = I([Y, X_1] - [Y, X_2]) = J[X, Y]$$



Isso mostra que  $\mathfrak{g}$  é o realificado de uma álgebra complexa  $\mathfrak{h}$  que é necessariamente simples, pois  $\mathfrak{g}$  é simples. O isomorfismo entre os ideais de  $\mathfrak{h}$  se demonstra, então, como na proposição anterior.  $\square$

Pelas proposições anteriores temos que podemos caracterizar as realificadas das álgebras complexas simples como somas de ideais simples. Como consequência disso podemos mostrar que essas são exatamente as álgebras do tipo *II*.

**Teorema 9.6.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra real simples. Então  $\mathfrak{g}$  é do tipo *II* se e só se  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$  para alguma álgebra complexa simples  $\mathfrak{h}$ .*

*Demonstração.* Se  $\mathfrak{g}$  é o realificado de uma álgebra complexa simples então, pela proposição 9.4 temos que é do tipo *II*. Por outro lado suponha que  $\mathfrak{g}$  é do tipo *II* e seja  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  sua complexificada e  $\sigma$  a conjugação em relação a  $\mathfrak{g}$ . Seja então  $\mathfrak{i}_1$  um ideal simples de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . Então,  $\sigma(\mathfrak{i}_1)$  também é simples e como  $\mathfrak{g}$  é simples, argumentando como na proposição 9.5 temos que  $\mathfrak{i}_1 \cap \sigma(\mathfrak{i}_1) = 0$ . Portanto  $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{i}_1)$  é um ideal de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . Tomando um ideal  $\mathfrak{j}$  complementar a  $\mathfrak{i}$  em  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  pode se fazer uma decomposição semelhante, e assim sucessivamente obter

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{i}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{i}_1)) \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{i}_s \oplus \sigma(\mathfrak{i}_s))$$

com  $\mathfrak{i}_k, k = 1, \dots, s$  ideais simples. Seja  $\mathfrak{j}_k = (\mathfrak{i}_k \oplus \sigma(\mathfrak{i}_k)) \cap \mathfrak{g}$ . Então  $\mathfrak{j}_k$  é ideal de  $\mathfrak{g}$  e

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{j}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{j}_s$$

De fato,  $X \in \mathfrak{g}$  se escreve de maneira única como

$$X = X_1 + \cdots + X_s$$

com  $X_k \in \mathfrak{i}_k \oplus \sigma(\mathfrak{i}_k)$ . Aplicando  $\sigma$  a ambos membros dessa igualdade e usando o fato de que tanto  $X$  quanto  $\mathfrak{i}_k \oplus \sigma(\mathfrak{i}_k)$  são invariantes por  $\sigma$ , conclui-se que  $\sigma(X_k) = X_k$ , isto é,  $X_k \in \mathfrak{j}_k$ , o que mostra que  $\mathfrak{g}$  se decompoe na soma direita acima. No entanto,  $\mathfrak{g}$  é simples e, portanto,  $s = 1$ . Logo, pela proposição 9.5  $\mathfrak{g}$  é o realificado de uma álgebra complexa simples.  $\square$

Temos então a seguinte classificação preliminar das álgebras de Lie reais simples

**Teorema 9.7.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra real simples. Então  $\mathfrak{g}$  é*

1. *uma forma real de uma álgebra complexa simples ou*
2. *o realificado de uma álgebra complexa simples.*

O complexificado de uma álgebra do tipo I é simples e o de uma álgebra do tipo II se decompõe como soma de dois ideais simples isomorfos entre si.

## 9.2

### Formais reais compactas

Existe uma classe especial de formas reais das álgebras semi-simples que são as formas reais compactas. O objetivo de esta seção é mostrar que toda álgebra semi-simples admite formas reais compactas e que elas são isomorfas entre si. Além disso existe uma bijeção entre este tipo de álgebra semi-simples real e as álgebras semi-simples complexas.

**Definição 9.6.** Uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{R}$  é dita *compacta* se sua forma de Killing é negativa definida. O motivo de utilizar um adjetivo de natureza topológica para denotar uma entidade algebraica é que existe um teorema devido justamente ao Hermann Weyl que diz que uma álgebra de Lie semi-simples real é a álgebra de Lie de um grupo de Lie compacto se e só se sua forma de Killing é negativa definida. O leitor pode achar uma prova de este fato em [10].

**Definição 9.7.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra complexa semisimples e  $\mathfrak{h}$  uma subálgebra de Cartan, cujo conjunto de raízes é  $\Pi$ . Uma *base de Weyl* é uma base de  $\mathfrak{g}$  formada por  $H_\alpha$ ,  $\alpha \in \Sigma$ , onde  $H_\alpha$  denota desta vez o dual de raiz  $\alpha$  da subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  e  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$  que satisfaz

1.  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$
2.  $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$  com  $m_{\alpha,\beta}$  real e tal que  $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$  e  $m_{\alpha,\beta} = 0$  se  $\alpha + \beta$  não é raiz.

**Lema 9.8.** Existem  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$  com  $\langle X_\alpha, X_\alpha \rangle = 1$  tal que se  $m_{\alpha,\beta}$  é definido por  $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$  então  $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$

*Demonstração.* Lembramos que o teorema 6.18 garante que existe um automorfismo de  $\mathfrak{g}$  que restrito a  $\mathfrak{h}$  é  $-1$  (pois esta transformação deixa invariante o conjunto das raízes de  $\mathfrak{g}$ ). Seja  $\phi$  este automorfismo. Então,  $\phi(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$  e, portanto, escolhendo  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$  com  $\langle Y_\alpha, Y_\alpha \rangle = 1$  temos

$$\phi(Y_\alpha) = k_\alpha Y_{-\alpha}$$

para algum complexo  $k_\alpha \neq 0$ . Como a forma de Killing é invariante por  $\phi$  temos que  $\langle \phi(Y_\alpha), \phi(Y_{-\alpha}) \rangle = \langle Y_\alpha, Y_{-\alpha} \rangle = 1$  e daí que  $k_\alpha k_{-\alpha} = 1$ . Nos procuramos encontrar um  $X_\alpha$  da forma

$$X_\alpha = x_\alpha Y_\alpha$$

satisfazendo as condições do enunciado. Em primeiro lugar temos que

$$\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = x_\alpha x_{-\alpha} \langle Y_\alpha, Y_{-\alpha} \rangle = x_\alpha x_{-\alpha}$$

e, portanto,  $x_\alpha$  deve ser tomado de tal forma que  $x_\alpha x_{-\alpha} = 1$ . Por outro lado se for possível escolher  $x_\alpha$  de forma tal que  $\phi(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$ , então

$$\begin{aligned} m_{-\alpha, -\beta} X_{-(\alpha+\beta)} &= [-X_{-\alpha}, -X_{-\beta}] \\ &= \phi([X_\alpha, X_\beta]) \\ &= m_{\alpha, \beta} \phi(X_{\alpha+\beta}) \\ &= -m_{\alpha, \beta} X_{-(\alpha+\beta)}, \end{aligned}$$

obtendo a relação desejada entre  $m_{\alpha, \beta}$  e  $m_{-\alpha, -\beta}$ . Agora temos

$$\phi(X_\alpha) = x_\alpha \phi(y_\alpha) = \frac{x_\alpha}{x_{-\alpha}} k_\alpha X_{-\alpha}$$

e portanto tomando  $x_\alpha$  tal que  $x_\alpha x_{-\alpha} = 1$  e  $x_{\alpha^2} = -k_\alpha$ , temos que  $X$  satisfaz as condições desejadas. Essa escolha de  $x_\alpha$  é possível pois  $k_\alpha k_{-\alpha} = 1$ .  $\square$

**Teorema 9.9.** *Toda álgebra de Lie semisimple complexa admite uma base de Weyl.*

*Demonstração.* Pelo lema precedente sabemos que é possível encontrar  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$  tal que

$$m_{\alpha, \beta} = -m_{-\alpha, -\beta} \quad (9.1)$$

Essa igualdade garante automaticamente que  $m_{\alpha, \beta}$  é real, pois, pelo lema 6.15 temos

$$m_{\alpha, \beta} m_{-\alpha, -\beta} = -q(p+1) \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} < 0.$$

Assim, 9.1 implica que  $m_{\alpha, \beta}^2 > 0$  e portanto,  $m_{\alpha, \beta}$  é real.  $\square$

**Teorema 9.10.** *Toda álgebra de Lie semi-simples complexa admite formas reais compactas.*

*Demonstração.* Dada uma base de Weyl, seja  $\mathfrak{u}$  o subespaço real gerado por  $iH_\alpha$ ,  $(X_\alpha - X_{-\alpha})$  e  $i(X_\alpha + X_{-\alpha})$  com  $\alpha$  percorrendo o conjunto  $\Pi^+$  das raízes positivas. Então  $\mathfrak{u}$  é uma forma compacta. De fato temos:

1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$ , pois  $H_\alpha$  e  $X_\alpha$  podem ser escritos como combinações lineares de  $iH_\alpha$ ,  $(X_\alpha - X_{-\alpha})$  e  $i(X_\alpha + X_{-\alpha})$  com coeficientes complexos.
2.  $\mathfrak{u}$  é uma subálgebra real. De fato, usando a notação  $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$  e  $S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$  com  $A_\alpha = S_\alpha = 0$  se  $\alpha$  não é raiz, os colchetes entre

os elementos do gerador são

$$[iH_\alpha, A_\beta] = \beta(H_\alpha)S_\beta$$

e

$$[iH_\alpha, S_\beta] = -\beta(H_\alpha)A_\beta$$

se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes quaisquer. E se  $\alpha \neq \beta$  então usando o fato de que  $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$  temos que

$$[A_\alpha, A_\beta] = m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} + m_{-\alpha,\beta}A_{\alpha-\beta}$$

$$[S_\alpha, S_\beta] = -m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta}A_{\alpha-\beta}$$

$$[A_\alpha, S_\beta] = m_{\alpha,\beta}S_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,-\beta}S_{\alpha-\beta}$$

e finalmente

$$[A_\alpha, S_{-\alpha}] = 2iH_\alpha$$

Esses colchetes mostram que  $\mathfrak{u}$  é uma subálgebra real, pois  $m_{\alpha,\beta}$  é real por definição de base de Weyl e  $\beta(H_\alpha)$  também é real.

3. Resta mostrar que  $\mathfrak{u}$  é compacta. A forma de Killing de  $\mathfrak{u}$  coincide com a restrição da forma de Killing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathfrak{g}$  já que  $\mathfrak{u}$  é uma forma real. Além disso, usando o fato de que se duas raízes não são opostas os espaços de raízes são ortogonais temos que

$$\langle iH_\alpha, A_\beta \rangle = \langle iH_\alpha, S_\beta \rangle = \langle A_\alpha, S_\beta \rangle = 0$$

Portanto, se  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  denota o subespaço de  $\mathfrak{g}$  gerado por  $\{H_\alpha, \alpha \in \Pi\}$  e  $\{H_1, \dots, H_l\}$  é uma base ortogonal de  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  o conjunto

$$\{iH_1, \dots, iH_l\}$$

juntamente com  $\{A_\alpha, S_\alpha, \alpha \in \Pi^+\}$  forma uma base ortogonal de  $\mathfrak{u}$ . Agora,  $\langle iH_j, iH_j \rangle = -\langle H_j, H_j \rangle < 0$ , pois a forma de Killing restrita a  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  é positiva definida. Além do mais temos

$$\langle A_\alpha, A_\alpha \rangle = \langle X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha} \rangle = -2$$

pois  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$  e, portanto,  $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1$ . Analogamente obtemos

$\langle S_\alpha, S_\alpha \rangle = -2$ , o que mostra que a forma de Killing é negativa definida em  $\mathfrak{u}$ .

□

Vejamos um exemplo. Seja a álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . O conjunto formado por  $E_{jk}$ ,  $j \neq k$  e  $E_{jj} - E_{kk}$ ,  $j < k$  é uma base de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . Ela é um múltiplo inteiro de uma base de Weyl associada à subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  das matrizes diagonais. Por isso, a construção feita na demonstração da existência de uma forma real compacta, se for feita com essa base, certamente fornece também uma forma real compacta. Ela é gerada pelas matrizes  $i(E_{jj} - E_{kk})$ ,  $E_{jk} - E_{kj}$  e  $i(E_{jk} + E_{kj})$  e, portanto, ela é formada pelas matrizes complexas de traço zero cujas partes reais são anti-simétricas e cujas partes imaginárias são simétricas. Portanto, temos que a forma real compacta é a álgebra  $\mathfrak{su}(n)$  das matrizes anti-hermitianas de traço zero. E dizer:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{sl}(n) := \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) : X = -\overline{X}^t\}$$

Em outras palavras a conjugação associada a forma real compacta é dada por  $r(X) = -\overline{X}^t$ .

Nosso próximo objetivo será mostrar que a unicidade das formas reais compactas.

**Proposição 9.11.** *Sejam  $\mathfrak{g}_0$  e  $\mathfrak{g}_1$  formais reais de uma álgebra complexa  $\mathfrak{g}$  com conjugações  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ . Então  $\mathfrak{g}_0$  é invariante por  $\sigma_1$  se e só se  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$  comutam e, se isso acontece, então  $\mathfrak{g}_1$  é invariante por  $\sigma_0$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$  comutem. Então dado  $X \in \mathfrak{g}_0$  temos que  $\sigma_0(\sigma_1(X)) = \sigma_1(\sigma_0(X)) = \sigma_1(X)$ , o que mostra que  $\sigma_1(X)$  é fixado por  $\sigma_0$ , e dizer,  $\sigma_1(X) \in \mathfrak{g}_0$ . Reciprocamente, assumindo que  $\mathfrak{g}_1$  é invariante por  $\sigma_0$ , seja  $Z = X + iY \in \mathfrak{g}$  com  $X, Y \in \mathfrak{g}_0$  temos

$$\sigma_1\sigma_0(Z) = \sigma_1(X - iY) = \sigma_1(X) + i\sigma_1(Y)$$

pois  $\sigma_1$  é antilinear. Por outro lado temos

$$\sigma_0\sigma_1(Z) = \sigma_0(\sigma_1(X) - i\sigma_1(Y)) = \sigma_1(X) + i\sigma_1(Y)$$

pois  $\sigma_1$  deixa  $\mathfrak{g}_0$  invariante. Logo  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$  comutam.

□

**Proposição 9.12.** *Sejam  $\mathfrak{g}_0$  e  $\mathfrak{g}_1$  formas reais de  $\mathfrak{g}$  com conjugação  $\sigma$  e  $\sigma_1$  respetivamente e tais que  $\sigma\sigma_1 = \sigma_1\sigma$ . Então*

$$\mathfrak{g}_1 = (\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_0) \oplus (\mathfrak{g}_1 \cap i\mathfrak{g}_0).$$

*Demonstração.* Seja  $Z \in \mathfrak{g}_1$ . Então  $Z$  se escreve de maneira única como

$$Z = X + iY$$

com  $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ . Aplicando  $\sigma_1$  a essa igualdade temos

$$Z = \sigma_1(Z) = \sigma_1(X) - I_1(Y)$$

pois  $\sigma$  é antiautomorfismo. Como as conjugações comutam,  $\sigma_1(X)$  e  $\sigma_1(Y)$  estão em  $\mathfrak{g}_0$  e, portanto,  $\sigma_1(X) = X$  e  $\sigma_1(Y) = -Y$ , pois de decomposição de  $Z$  dada acima é única. Isso mostra que  $X \in \mathfrak{g}_1$  e  $Y \in i\mathfrak{g}_1$ , isto é,  $iY \in \mathfrak{g}_1$ .  $\square$

Esta proposição fornece um critério para decidir se duas álgebras compactas coincidem.

**Lema 9.13.** *Sejam  $\mathfrak{u}_1$  e  $\mathfrak{u}_2$  duas formas reais compactas. Então, elas coincidem se e só se suas conjugações comutam.*

*Demonstração.* Se as conjugações comutam, a proposição anterior garante que

$$\mathfrak{u}_2 = (\mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{u}_1) \oplus (\mathfrak{u}_2 \cap i\mathfrak{u}_1).$$

Seja  $X \in (\mathfrak{u}_2 \cap i\mathfrak{u}_1)$ . Então,  $X = iY$  com  $Y \in \mathfrak{u}_1$  e, portanto,

$$0 \geq \langle X, X \rangle = -\langle Y, Y \rangle \geq 0$$

pois as formas de Killing de  $\mathfrak{u}_1$  e  $\mathfrak{u}_2$  são negativas definidas. Isso mostra que  $X = 0$  e, portanto, que  $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$ .  $\square$

**Lema 9.14.** *Seja  $\sigma$  a conjugação em relação a forma real compacta  $\mathfrak{u}$  da álgebra de Lie complexa  $\mathfrak{g}$ . Então a expressão*

$$H_\sigma(X, Y) = -\langle X, \sigma(Y) \rangle$$

*e tal que define uma forma hermitiana em  $\mathfrak{g}$ .*

*Demonstração.* É claro que  $H_\sigma$  se distribui em relação a soma linear em  $X$ . Além do mais, dados  $X, Y \in \mathfrak{g}$  e  $z \in \mathbb{C}$  temos

$$H_\sigma(X, zY) = -\langle X, \sigma(zY) \rangle = \bar{z}H_\sigma(X, Y)$$

pois  $\sigma$  é antilinear. Por fim, escrevendo  $Z \in \mathfrak{g}$  como  $Z = X + iY$ ,  $X, Y \in \mathfrak{u}$ , temos

$$H_\sigma(Z, Z) = -\langle X + iY, X - iY \rangle = -\langle X, X \rangle - \langle Y, Y \rangle$$

de onde se vê que  $H_\sigma(Z, Z) > 0$  se  $Z \neq 0$ .  $\square$

**Teorema 9.15.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples complexa e  $\mathfrak{u}$  uma forma real compacta de  $\mathfrak{g}$ . Seja também  $\mathfrak{g}_0$  uma forma real qualquer de  $\mathfrak{g}$  e denote por  $\sigma$  a conjugação correspondente. Então existe um automorfismo  $\phi$  tal que  $\sigma$  comuta com a conjugação em relação a forma real compacta  $\phi(\mathfrak{u})$ .*

*Demonstração.* Seja  $r$  a conjugação em relação a  $\mathfrak{u}$ . Deve ser encontrado um automorfismo  $\phi$  tal que  $\phi r \phi^{-1}$  comuta com  $\sigma$ . Vamos a construir ele a través dos seguintes três passos:

1.  $\psi = \sigma\tau$  é um automorfismo diagonalizável da álgebra complexa  $\mathfrak{g}$ . De fato  $\psi$  é automorfismo pois é a composta de dois antiautomorfismos. Por outro lado, pelo lema 9.14 temos que a forma  $H_\tau$  definida por

$$H_\tau(X, Y) = -\langle X, \tau Y \rangle$$

é hermitiana, pois  $\tau$  é a conjugação em relação a uma forma real compacta. Então pelo fato de  $\psi$  ser automorfismo temos

$$\begin{aligned} H_\tau(\psi^{-1}X, Y) &= -\langle \psi^{-1}X, \tau Y \rangle \\ &= -\langle X, \psi \tau Y \rangle \\ &= -\langle X, \sigma Y \rangle \\ &= H_\tau(X, \psi^{-1}Y) \end{aligned}$$

e portanto,  $\psi^{-1}$  é hermitiana em relação a  $H_\tau$ . Como transformações de este tipo são diagonalizáveis, segue que  $\psi^{-1}$  é diagonalizável e seus autovalores são reais. Logo  $\psi$  também é diagonalizável e seus autovalores são reais.

2. Seja  $\varepsilon = \psi^2$ . Então  $\varepsilon = e^A$  para algum  $A$  e suas potências reais  $\varepsilon^t = e^{tA}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  são automorfismos de  $\mathfrak{g}$ . Para ver isso seja  $\{X_1, \dots, X_n\}$  uma base de  $\mathfrak{g}$  que diagonaliza  $\psi$ . Nessa base,  $\varepsilon$  é diagonal

$$\varepsilon = \text{diag}\{\lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

com  $\lambda_j$  real positivo. Portanto se  $\varepsilon$  é a exponencial de uma transformação linear. Suas potências reais são

$$\varepsilon^t = \text{diag}\{\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t\}.$$

Sejam  $c_{jk}^l$  as constantes de estrutura da base que diagonaliza  $\psi$ , isto é,

$$[X_j, X_k] = \sum_{l=1}^n c_{jk}^l X_l$$

Aplicando  $\varepsilon$  a esta igualdade e usando o fato de que  $\varepsilon$  é um automorfismo, temos

$$\lambda_j \lambda_k [X_j, X_k] = \sum_{l=1}^n \lambda_l c_{jk}^l X_l$$

. Substituindo o colchete do primeiro membro pela combinação linear correspondente temos

$$c_{jk}^l \lambda_j \lambda_k = c_{jk}^l \lambda_l$$

para todo  $j, k, l$ . Esta igualdade implica, cancelando e posteriormente multiplicando pelas constantes de estrutura que

$$c_{jk}^l \lambda_j^t \lambda_k^t = c_{jk}^l \lambda_l^t$$

que mostra de imediato que  $\varepsilon^t$  é um automorfismo para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

3.  $\phi = \varepsilon^{\frac{1}{4}}$  é o automorfismo desejado. De fato como  $\psi = \sigma\tau$ ,  $\tau\psi\tau^{-1} = \tau\sigma = \psi^{-1}$ . Portanto temos  $\gamma\varepsilon\gamma^{-1} = \varepsilon^{-1}$ , isto é,  $\tau\varepsilon = \varepsilon^{-1}\tau$ . Tomando a matriz  $(a_{jk})$  de  $\tau$  na base que diagonaliza  $\varepsilon$ , essa última igualdade significa que  $a_{jk}\lambda_k = a_{jk}\lambda_j^{-1}$  para todo  $j, k$ . Dividindo por  $a_{jk}$ , exponenciando por  $t$  e multiplicando novamente por  $a_{jk}$ , obtém-se  $a_{jk}\lambda_j^t = a_{jk}\lambda_j^{-t}$ . Isso implica que  $\tau\varepsilon^t = \varepsilon^{-t}\tau$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Agora, seja  $\tau_1 = \phi\tau\phi^{-1}$  a conjugação da forma real compacta  $\phi(\mathfrak{u})$ . Então temos

$$\sigma\tau_1 = \sigma\varepsilon^{\frac{1}{4}}\tau\varepsilon^{-\frac{1}{4}} = \sigma\tau\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = \psi\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$$

e como  $\varepsilon = \psi^2$ , a matriz de  $\sigma\tau_1$  é diagonal e suas entradas são  $\pm 1$  com o sinal de acordo com o sinal da entrada correspondente de  $\psi$ . Da mesma forma,

$$\tau_1\sigma = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\tau\sigma = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\psi^{-1}$$

que tem a mesma matriz que  $\sigma\tau_1$ . Portanto,  $\sigma$  e  $\tau_1$  comutam.

Com isso fica demonstrado o teorema. □



Finalmente temos a unicidade(a menos de isomorfismo) das formas compactas:

**Corolário 9.16.** *Sejam  $\mathfrak{u}_1$  e  $\mathfrak{u}_2$  formas reais compactas de  $\mathfrak{g}$ . Então existe um automorfismo  $\phi$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $\phi(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_2$*

*Demonstração.* Segue do teorema anterior e do lema 9.13.  $\square$

Existem álgebras complexas que não são simples e que admitem formas reais simples. Essa formas reais não são compactas, como segue do seguinte teorema

**Teorema 9.17.** *Uma álgebra complexa  $\mathfrak{g}$  é simples se e só se sua forma real compacta é simples. Se  $\mathfrak{g}$  é semisimples e se decompõe em ideais simples como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$$

*então  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}_s$  é uma forma real compacta de  $\mathfrak{g}$  se  $\mathfrak{u}_j$  é forma real compacta de  $\mathfrak{g}_j$ .*

*Demonstração.* É claro que  $\mathfrak{u}$  é simples se  $\mathfrak{g}$  o for. Reciprocamente, suponha que  $\mathfrak{u}$  seja simples do tipo II. Então,  $\mathfrak{u} = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$  para alguma álgebra simples complexa  $\mathfrak{h}$ . Seja  $\mathfrak{v}$  a forma real compacta de  $\mathfrak{g}$ . Então temos  $\mathfrak{h} = \mathfrak{v} \oplus i\mathfrak{v}$  e, como  $\mathfrak{v}$  é compacta, a forma de Killing de  $\mathfrak{h}$  restrita a  $i\mathfrak{v}$  é positiva definida. Isso contradiz o fato de que  $\mathfrak{u}$  é compacta, pois como já vimos a forma de Killing da realificada é o dobro da parte real da forma de Killing da álgebra complexa. Portanto  $\mathfrak{u}$  é do tipo I o que mostra que sua complexificada é simples. Quanto à segunda afirmação,  $\mathfrak{u}$  é claramente uma forma real e é compacta, pois os ideais simples na decomposição de  $\mathfrak{g}$  são dois a dois ortogonais em relação a forma de Killing.  $\square$

Esta proposição mostra que as álgebras compactas simples são do tipo I e que o conjunto das classes de equivalência das álgebras compactas esta em bijeção com o das classes de equivalencia das álgebras complexas semi-simples, com a bijeção senda dada, por um lado, por complexificação e, por outro, pela construção das formas reais compactas como foi feito acima.

## 9.3

## Decomposição de Cartan

Seja  $\mathfrak{g}_0$  uma forma real não compacta da álgebra semi-simples complexa  $\mathfrak{g}$  e seja  $\rho$  a conjugação correspondente. Seja também  $\mathfrak{u}$  uma forma real compacta de  $\mathfrak{g}$  com conjugação  $\tau$ . Pelo teorema 9.15 pode se supor, sem perda de generalidade, que  $\tau\rho = \rho\tau$ , o que significa que  $\mathfrak{g}_0$  é invariante por  $\tau$  e  $\mathfrak{u}$  é invariante por  $\rho$ . Assumindo isso, a proposição 9.12 garante que

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$$

onde  $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$  e  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}$ . Esta decomposição é conhecida como *Decomposição de Cartan* de  $\mathfrak{g}_0$ . O problema é que a decomposição depende da escolha de  $\mathfrak{u}$ , mas, felizmente, como vamos verificar nesta seção, duas decomposições de Cartan de uma álgebra semi-simples real  $\mathfrak{g}_0$  são obtidas uma da outra por um automorfismo de  $\mathfrak{g}_0$ . Como  $\mathfrak{u}$  é subálgebra, temos que  $[\mathfrak{u}, i\mathfrak{u}] \in \mathfrak{u}$  e  $[i\mathfrak{u}, i\mathfrak{u}] \in \mathfrak{u}$ . Essas inclusões mostram que os colchetes entre os elementos da decomposição de Cartan são:

$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \in \mathfrak{l}$$

$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{s}] \in \mathfrak{s}$$

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \in \mathfrak{l}$$

e, portanto,  $\mathfrak{l}$  é subálgebra, cuja representação adjunta deixa  $\mathfrak{s}$  invariante e  $\mathfrak{s}$  não é subálgebra, pois, caso contrário  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = 0$  e  $\mathfrak{s}$  seria um ideal abeliano, contradizendo o fato de que  $\mathfrak{g}_0$  é semi-simples.

**Proposição 9.18.** *Dada uma decomposição de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$ , o automorfismo involutivo  $\theta$  definido por  $\theta(X) = X$  se  $X \in \mathfrak{l}$  e  $\theta(Y) = -Y$  se  $Y \in \mathfrak{s}$  é tal que a forma de bilinear dada por*

$$B_\theta(X, Y) = -\langle X, \theta(Y) \rangle$$

*e um produto interno em  $\mathfrak{g}$ . Vice-versa dado um automorfismo  $\theta$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $B_\theta(X, Y) = -\langle X, \theta(Y) \rangle$  é um produto interno, os seus auto-espacos determinam uma decomposição de Cartan. O automorfismo  $\theta$  é denominado involução de Cartan.*

*Demonstração.* Seja  $\tau$  a conjugação de  $\mathfrak{g}$  em relação a forma real compacta  $\mathfrak{u}$  e seja  $\theta$  a restrição a  $\mathfrak{g}_0$ , o que é possível, pois  $\mathfrak{g}_0$  é invariante por  $\tau$ . Então,  $\theta$  é uma involução de  $\mathfrak{g}_0$  e  $\theta(X) = X$  se  $X \in \mathfrak{l}$  e  $\theta(Y) = -Y$  se  $Y \in \mathfrak{s}$ .

Por outro lado como  $\tau$  é um antiautomorfismo de  $\mathfrak{g}$ ,  $\theta$  é um automorfismo de  $\mathfrak{g}_0$ . Além do mais, seja  $B_\theta$  a forma bilinear

$$B_\theta(X, Y) = -\langle X, \theta(Y) \rangle$$

Então  $B_\theta$  é positiva definida, isto é, é um produto interno como segue do lema 9.14 pois  $B_\theta$  é a restrição de  $H_\tau$  a  $\mathfrak{g}_0$ , já que a forma de Killing de  $\mathfrak{g}_0$  é a restrição da forma de Killing de  $\mathfrak{g}$ .

Reciprocamente, seja  $\theta$  um automorfismo involutivo da forma real não compacta  $\mathfrak{g}_0$  tal que  $B_\theta$  como definido no enunciado seja um produto interno. Então  $\theta$  determinam uma decomposição de Cartan da seguinte forma: como por  $\theta^2 = 1$ ,  $\mathfrak{g}_0$  se decompõe nos auto-espacos

$$V_1 := \{X : \theta(X) = X\}$$

e

$$V_{-1} := \{X : \theta(X) = -X\}.$$

Pondo então  $\mathfrak{l} = V_1$  e  $\mathfrak{s} = V_{-1}$  temos que  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$  é uma decomposição de Cartan. De fato, com  $\mathfrak{l}$  e  $\mathfrak{s}$  dessa forma pode se ver que as relações  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \in \mathfrak{l}$ ,  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{s}] \in \mathfrak{s}$  e  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \in \mathfrak{l}$  são satisfeitas, pois  $\theta$  é um automorfismo (por exemplo se  $X \in \mathfrak{l}$  e  $Y \in \mathfrak{s}$ , então  $\theta[X, Y] = [\theta(X), \theta(Y)] = [X, -Y] = -[X, Y]$ , o que mostra que  $[X, Y] \in \mathfrak{s}$ ). Dessa forma, definindo  $\mathfrak{u}$  por

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{s}$$

temos que  $\mathfrak{u}$  é uma subálgebra. Como

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{s}) \oplus (i\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s})$$

temos que  $\mathfrak{u}$  é uma forma real de  $\mathfrak{g}$ . Além do mais, como  $B_\theta$  é um produto interno temos que a forma de Killing de  $\mathfrak{g}_0$  (e, portanto, de  $\mathfrak{g}$ ) é negativa definida em  $\mathfrak{l}$  e positiva definida em  $\mathfrak{s}$ . Isso implica que  $\mathfrak{u}$  é uma forma real compacta. Como  $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$  e  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}$  temos que  $\theta$  define uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ .  $\square$

**Proposição 9.19.** *Seja  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$  uma decomposição de Cartan com involução  $\theta$ . Então  $\text{ad}(X)$ ,  $X \in \mathfrak{l}$  é anti-simétrica em relação a  $B_\theta$  enquanto que  $\text{ad}(Y)$ ,  $Y \in \mathfrak{s}$  é simétrica. Além do mais,  $\mathfrak{l}$  e  $\mathfrak{s}$  são ortogonais tanto em relação à forma de Killing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  quanto a  $B_\theta$*

*Demonstração.* Sejam  $X, Z, W \in \mathfrak{g}_0$ . Então,

$$\begin{aligned} B_\theta([X, Z], W) &= -\langle [X, Z], \theta(W) \rangle \\ &= \langle Z, [X, \theta(W)] \rangle \\ &= \langle Z, \theta[\theta(X), W] \rangle \end{aligned}$$

Isso mostra que  $ad(X)$  é anti-simétrica se  $\theta(X) = X$  é simétrica se  $\theta(Y) = -Y$ . Resta mostrar a ortogonalidade de  $\mathfrak{l}$  y  $\mathfrak{s}$ . Sejam então  $X \in \mathfrak{l}$  e  $Y \in \mathfrak{s}$ . Como  $\theta$  é automorfismo vale

$$\langle X, Y \rangle = \langle \theta(X), \theta(Y) \rangle = -\langle X, Y \rangle$$

e daí temos que  $\langle X, Y \rangle = 0$ . Da mesma forma  $B_\theta(X, Y) = \langle X, Y \rangle = 0$

□

**Proposição 9.20.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra semi-simples complexa e  $\mathfrak{u}$  uma forma real compacta. Então*

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$$

*e uma decomposição de Cartan do realificado de  $\mathfrak{g}$*

*Demonstração.* Seja  $\theta$  a conjugação de  $\mathfrak{g}$  em relação a  $\mathfrak{u}$ . Então  $\theta$  é um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ . Se  $B_\theta$  é definido como antes, então é um produto interno. De fato,  $\mathfrak{u}$  é forma real compacta, portanto, como no lema 9.14, a expressão

$$H_\theta(x, y) = -\langle X, \theta(Y) \rangle$$

define uma forma hermitiana. Como a forma de Killing de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$  é duas vezes a parte real da forma de Killing de  $\mathfrak{g}$ , temos que  $B_\theta$  é o dobro da parte real de  $H_\theta$  e, portanto, um produto interno. Finalmente  $\theta = 1$  em  $\mathfrak{u}$  e  $\theta = -1$  em  $i\mathfrak{u}$  e daí que  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$  é uma decomposição de Cartan.

□

Finalizamos a seção com o teorema que mostra que as decomposições de Cartan são conjugadas por automorfismos de  $\mathfrak{g}_0$

**Teorema 9.21.** *Seja  $\mathfrak{g}_0$  uma álgebra semi-simples real e sejam  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{s}_1$  e  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l}_2 \oplus \mathfrak{s}_2$  duas decomposições de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ . Então existe um automorfismo  $\phi$  de  $\mathfrak{g}_0$  tal que  $\phi(\mathfrak{l}_1) = \mathfrak{l}_2$  e  $\phi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}_2$*

*Demonstração.* Sejam  $\mathfrak{g}$  o complexificado de  $\mathfrak{g}_0$  e  $\mathfrak{u}_j$ ,  $j = 1, 2$  as formas reais definidas por

$$\mathfrak{u}_j = \mathfrak{l}_j \oplus i\mathfrak{s}_j$$

para  $j = 1, 2$ . Denotando por  $\tau_j$  a conjugação de  $\mathfrak{g}$  em relação a  $\mathfrak{u}_j$  o teorema 9.15 garante que existe um automorfismo  $\phi$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $r_2 = \phi\tau_1\phi^{-1}$  e portanto, que  $\phi(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_2$ . Para mostrar o teorema, é suficiente mostrar que  $\phi$  é real, isto é,  $\phi(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$ , pois se isso acontece, então a restrição de  $\phi$  é um automorfismo de  $\mathfrak{g}_0$ . Como

$$\phi(\mathfrak{u}_1) = \phi(\mathfrak{l}_1 \oplus i\mathfrak{s}_1) = \phi(\mathfrak{l}_1) \oplus i\phi(\mathfrak{s}_1)$$

a imagem por  $\phi$  de uma decomposição de Cartan é a outra. Para mostrar que  $\phi$  é real, é necessário lembrar que na demonstração do teorema 9.15 ela foi construída como sendo  $\phi = \varepsilon^{\frac{1}{4}}$  onde  $\varepsilon = (\tau_1\tau_2)^2$  é uma transformação diagonalizável. Agora, seja  $\sigma$  a conjugação de  $\mathfrak{g}$  em relação a  $\mathfrak{g}_0$ . Tanto  $r_1$  quanto  $r_2$  comutam com  $\sigma$ . O mesmo ocorre, portanto, com  $\varepsilon$  e, como é diagonal, segue que  $\phi$  comuta com  $\sigma$ . Isso garante que  $\mathfrak{g}_0$  é invariante por  $\phi$ , já que se  $X \in \mathfrak{g}_0$ , então

$$\sigma\phi(X) = \sigma(X) = \phi(X)$$

e logo  $\phi(X) \in \mathfrak{g}_0$ , concluindo a demonstração do teorema. □

Vejamos um exemplo. Seja  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , álgebra de Lie complexa de tipo  $A_{n-1}$ . Seja a forma real não compacta  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ . Sabemos que a forma compacta de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  é  $\mathfrak{su}(n)$ . Vejamos qual é a decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ . Temos que  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{su}(n)$  é a subálgebra das matrizes anti-hermitianas e reais, e dizer, a subálgebra  $\mathfrak{so}(n)$  das matrizes anti-simétricas. Por outro lado temos que  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \cap i\mathfrak{su}(n)$  é o subespaço das matrizes reais  $X$  tal que  $iX$  é anti-hermitiana, e dizer, e o subespaço das matrizes simétricas  $\mathfrak{s}$ . Temos então que a seguinte decomposição de Cartan

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}$$

A involução de Cartan correspondente é

$$\theta(X) = -X^t$$

pois  $\theta = 1$  em  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  e  $\theta = -1$  em  $\mathfrak{s}$

## 9.4

### Abelianos maximais

Em geral, os pesos de uma subálgebra de Cartan assumem valores complexos. Por esta razão, a teoria de sistemas de raízes, para álgebras

reais, não é desenvolvida via subálgebras de Cartan. Esse rol é desempenhado pelas subálgebras abelianas maximais contidas nas partes simétricas de suas decomposições de Cartan. Formalmente temos

**Definição 9.8.** Seja  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$  uma decomposição de Cartan da álgebra semi-simples real  $\mathfrak{g}_0$ . Seja  $\mathfrak{a}$  subálgebra que é maximal em  $\mathfrak{s}$ , no sentido em que  $\mathfrak{a}$  não está contida em nenhuma subálgebra abeliana contida em  $\mathfrak{s}$ . A existência de subálgebras de este tipo é facilmente garantida por argumentos de maximalidade. Quando falemos de *abelianos maximais* estaremos nos referindo por abuso de linguagem a estas subálgebras maximais abelianas em  $\mathfrak{s}$ .

Em geral as subálgebras maximais em  $\mathfrak{s}$  não são de Cartan, mas a seguinte proposição mostra que  $\mathfrak{a}$  está contida em alguma subálgebra de Cartan:

**Proposição 9.22.** *Seja  $\mathfrak{a}$  subálgebra abeliana, maximal em  $\mathfrak{s}$ . Então existe uma subálgebra abeliana maximal  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  que contém  $\mathfrak{a}$ . A subálgebra  $\mathfrak{h}$  é de Cartan e se decompõe em soma direta como*

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{a}.$$

*Demonstração.* A existência de  $\mathfrak{h}$  é garantida da mesma forma que a de  $\mathfrak{a}$ . Para ver a decomposição em soma direta, seja  $\theta$  a involução de Cartan associada à decomposição  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$ . Afirmamos que  $\mathfrak{h}$  é invariante por  $\theta$ . De fato para  $X \in \mathfrak{h}$ ,  $X - \theta(X) \in \mathfrak{s}$ , pois

$$\theta(X - \theta(X)) = \theta(X) - \theta^2(X) = \theta(X) - X = -(X - \theta(X))$$

Alem do mais, para  $Y \in \mathfrak{a}$  temos

$$[X - \theta(X), Y] = -[\theta(X), Y] = -\theta[X, \theta(Y)] = -[X, \theta(Y)] = \theta[X, Y] = 0$$

e, como  $\mathfrak{a}$  é abeliano maximal em  $\mathfrak{s}$ , isso garante que  $X - \theta(X) \in \mathfrak{a}$ . Logo  $\theta(X) \in \mathfrak{h}$ , já que  $X \in \mathfrak{h}$ . O fato de  $\mathfrak{g}$  ser invariante por  $\theta$  garante a decomposição em soma direta

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s})$$

com  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a}$  pois  $\mathfrak{a}$  é abeliano maximal em  $\mathfrak{s}$ .

Resta mostrar que  $\mathfrak{h}$  é de Cartan. Pelo teorema 5.11 é suficiente provar que se  $H \in \mathfrak{h}$ , então

$ad(H)$  é semi-simples. Seja então a decomposição

$$H = H_k + H_s$$

com  $H_k \in \mathfrak{l}$  e  $H_s \in \mathfrak{s}$ . Então,

$ad(H_s)$  é simétrica em relação ao produto interno  $B_\theta$  enquanto que  $ad(H_k)$  é anti-simétrica. Essas transformações são, portanto, semi-simples, e como elas comutam, sua soma também é semi-simples.  $\square$

A subálgebra abeliana maximal  $\mathfrak{a}$  vai desempenhar na classificação das álgebras reais a mesma função que as subálgebras de Cartan no caso dos corpos algebricamente fechados. Isto é feito, de maneira semelhante, considerando as raízes da representação adjunta de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{g}_0$ . Como  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{s}$  temos que as adjuntas de seus elementos são simétricas em relação ao produto interno  $B_\theta$  e logo seus autovalores são reais. Assim a decomposição do complexificado de  $\mathfrak{g}_0$  em subespaços de pesos da representação adjunta de  $\mathfrak{a}$  é, na verdade, uma decomposição da própria álgebra  $\mathfrak{g}_0$ . Sendo assim, seja  $\alpha$  um funcional real em  $\mathfrak{a}$  e considere o subespaço

$$\bar{\mathfrak{g}}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g}_0 : ad(H)X = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

o funcional  $\alpha$  é chamado raiz restrita de  $\mathfrak{g}_0$  em relação a  $\mathfrak{a}$  caso  $\bar{\mathfrak{g}}_\alpha \neq 0$ . O funcional nulo aparece como peso da representação adjunta de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{g}_0$ , pois  $\mathfrak{a}$  é subálgebra abeliana. O subespaço associado ao peso nulo é denotado por  $\mathfrak{m}$ . Com isso temos que  $\mathfrak{g}_0$  se decompõe como

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \sum_{\alpha} \bar{\mathfrak{g}}_\alpha$$

O subespaço  $\mathfrak{m}$  é uma subálgebra e como  $ad(H)$ ,  $H \in \mathfrak{a}$  é diagonalizável, temos então que  $\mathfrak{m}$  é o contralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{g}_0$ . Dai que se  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Cartan que contém  $\mathfrak{a}$ , então temos que  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m}$  e, como  $\mathfrak{a}$  é abeliano maximal em  $\mathfrak{s}$ ,  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a}$ . Em geral, a inclusão de  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{m}$  é própria.

Queremos que a escolha da subálgebra abeliana maximal possa ser feita sem perda de generalidade.

**Proposição 9.23.** *Seja  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$  decomposição de Cartan da forma real  $\mathfrak{g}_0$ . Sejam  $\mathfrak{a}_1$  e  $\mathfrak{a}_2$  duas subálgebras abelianas maximais de  $\mathfrak{s}$ . Então existe  $k \in K$  tal que  $k\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$  onde  $K$  é o grupo de automorfismos gerado pelas exponenciais das adjuntas de elementos em  $\mathfrak{l}$ :*

$$K = \{e^{ad(X_1)} \dots e^{ad(X_n)} : X_j \in \mathfrak{l}, n \geq 1\}$$

*Demonstração.* Aqui vamos a usar um resultado da teoria de grupos de Lie. Pode se mostrar (ver [10]) que  $K$  é um subgrupo compacto do grupo das transformações lineares inversíveis de  $\mathfrak{g}_0$ . Dito isso, sejam  $H_1 \in \mathfrak{a}_1$  e  $H_2 \in \mathfrak{a}_2$

elementos regulares reais e considere a função

$$k \in K \longmapsto B_\theta(kH_2, H_1) \in \mathbb{R}$$

Esta é uma função contínua e como  $K$  é compacto, assume um mínimo em algum  $k_0 \in K$ . Portanto, se  $X \in \mathfrak{l}$ , a função real a valores reais dada por

$$t \longmapsto B_\theta(e^{tad(X)}k_0H_2, H_1)$$

assume um mínimo em  $t = 0$ . Como  $ad(X)$  é anti-simétrica em relação a  $B_\theta$ , a transformação linear  $e^{tad(X)}$  é uma isometria em relação a esse produto interno e então temos:

$$B_\theta(e^{tad(X)}k_0H_2, H_1) = B_\theta(k_0H_2, e^{-tad(X)}H_1)$$

Tomando derivadas em relação a  $t$  em  $t = 0$  (que é mínimo da função), chega-se a

$$B_\theta(k_0H_2, [X, H_1]) = 0$$

Mas, como  $ad(H)$  é simétrica isso é o mesmo que

$$B_\theta([H_1, K_0H_2], X) = 0$$

Agora são utilizados os colchetes de  $\mathfrak{l}$  e  $\mathfrak{s}$ . Como  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{s}] \in \mathfrak{s}$  temos que, temos que  $e^{ad(Y)}\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}$  para todo  $Y \in \mathfrak{l}$  e, portanto,  $k\mathfrak{s} \in \mathfrak{s}$  para todo  $k \in K$ . Em particular,  $k_0H_2 \in \mathfrak{s}$ . Por outro lado  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \in \mathfrak{l}$  e temos então  $[H_1, k_0H_2] \in \mathfrak{l}$ . Isso justamente com a fórmula  $B_\theta([H_1, K_0H_2], X) = 0$  que garante que  $[H_1, k_0H_2]$  é ortogonal a todo  $X \in \mathfrak{l}$ , implica que  $H_1$  e  $k_0H_2$  comutam. Então  $k_0H_2 \in \mathfrak{a}_1$  e daí que  $\mathfrak{a}_1$  está contido no centralizador de  $k_0H_2$ . Esse centralizador é  $k_0\mathfrak{a}_2$ , pois  $k_0$  é um automorfismo de  $\mathfrak{g}_0$ . Assim temos  $\mathfrak{a}_1 \in k_0\mathfrak{a}_2$  e daí  $\dim \mathfrak{a}_1 \leq \dim \mathfrak{a}_2$ . Analogamente  $\dim \mathfrak{a}_2 \leq \dim \mathfrak{a}_1$ . Como as dimensões de  $\mathfrak{a}_1$  e  $\mathfrak{a}_2$  coincidem temos que  $k_0\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$   $\square$

Como todas as subálgebras abelianas maximais tem a mesma dimensão a seguinte definição está justificada:

**Definição 9.9.** O posto real de uma álgebra de Lie semi-simples real é a dimensão comum das álgebras abelianas maximais contidas em  $\mathfrak{s}$ .

Em geral, o posto real de uma álgebra de Lie é menor que seu posto, já que as subálgebras abelianas maximais em  $\mathfrak{s}$  nem sempre são subálgebras de Cartan. No caso em que a álgebra abeliana maximal  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{s}$  for subálgebra de Cartan temos a seguinte definição:



**Definição 9.10.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples complexa. Uma forma real  $\mathfrak{g}_0$  de  $\mathfrak{g}$  é dita normal se para qualquer decomposição de Cartan

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$$

existe em  $\mathfrak{s}$  uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ .

A continuação vamos a provar a existência de este tipo especial de formas reais:

**Teorema 9.24.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semi-simples complexa. Então  $\mathfrak{g}$  admite forma real normal.*

*Demonstração.* Seja  $X_\alpha$  de tal forma que  $H_\alpha, X_\alpha, \alpha \in \Pi$  forma uma base de Weyl de  $\mathfrak{g}$ . Como as constantes de estrutura associadas a essa base são reais, o subespaço real  $\mathfrak{g}_0$  gerado por ela é uma forma real de  $\mathfrak{g}$ . Pela construção já conhecida temos que o subespaço real  $\mathfrak{u}$  gerado por  $iH_\alpha, (X_\alpha - X_{-\alpha})$  e  $i(X_\alpha + X_{-\alpha})$  é uma forma real compacta de  $\mathfrak{g}$  e assim uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$  é dada por

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}) = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$$

Temos então que  $\mathfrak{l}$  é o subespaço gerado por  $(X_\alpha - X_{-\alpha})$  enquanto que  $\mathfrak{s}$  é o subespaço gerado por  $H_\alpha, (X_\alpha + X_{-\alpha})$ . Temos então que a forma real  $\mathfrak{g}_0$  é normal, pois o subespaço gerado por  $H_\alpha$  é uma subálgebra de Cartan contida em  $\mathfrak{s}$ .  $\square$

A álgebra  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  é uma forma real normal de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . De fato uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  é dada por  $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$ , com  $\mathfrak{l}$  subálgebra das matrizes anti-simétricas e  $\mathfrak{s}$  o subespaço das matrizes simétricas. Temos que a subálgebra de Cartan, que é a subálgebra das matrizes diagonais, esta contida em  $\mathfrak{s}$ . Logo  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  é uma forma real normal de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ .

## 10.1

## Automorfismos involutivos de formas compactas

Nosso objetivo é classificar as formas reais das álgebras simples complexas. Um fato fundamental é que as formas reais são determinadas pelos automorfismos involutivos da forma real compacta  $\mathfrak{u}$  da álgebra semi-simples complexa. De fato como já foi visto, a toda forma real  $\mathfrak{g}$  de uma álgebra semi-simples complexa denotada por  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  esta associada uma involução de Cartan  $\theta$ . Lembramos que dada uma decomposição de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s} = (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u})$$

$\theta$  é o automorfismo tal que é 1 em  $\mathfrak{l}$  e  $-1$  em  $\mathfrak{s}$ . Sendo um automorfismo de  $\mathfrak{g}$ ,  $\theta$  se estende a um automorfismo de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  também denotado por  $\theta$ . Pela definição de involução de Cartan, fica claro que  $\mathfrak{u}$  é invariante por  $\theta$  e daí que  $\theta$  define um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{u}$ .

Reciprocamente seja  $\theta : \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u}$  um automorfismo involutivo (e dizer, tal que  $\theta^2 = \mathbf{1}$ ). Este automorfismo decompõe  $\mathfrak{u}$  como

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{u}^-$$

com  $\theta = 1$  em  $\mathfrak{u}^+$  e  $\theta = -1$  em  $\mathfrak{u}^-$ . Como  $\theta$  é automorfismo, os colchetes entre esses subespaços são dados por

$$[\mathfrak{u}^+, \mathfrak{u}^+] \in \mathfrak{u}^+$$

$$[\mathfrak{u}^+, \mathfrak{u}^-] \in \mathfrak{u}^-$$

$$[\mathfrak{u}^-, \mathfrak{u}^-] \in \mathfrak{u}^+$$

Em particular,  $\mathfrak{u}^+$  é uma subálgebra e  $\mathfrak{u}^+ \oplus i\mathfrak{u}^-$  é uma forma real

de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . Pode ser verificado que se  $\sigma$  é a conjugação de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  em relação a  $\mathfrak{u}$ , então o isomorfismo antilinear  $\sigma\theta = \theta\sigma$  é a conjugação que define  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{u}^-$ . Assim, como dizemos, as formas reais são determinadas pelos automorfismos involutivos da forma real compacta  $\mathfrak{u}$ . É importante observar que automorfismos conjugados definem álgebras isomorfas, isto é, se  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são automorfismos involutivos de  $\mathfrak{u}$  que determinam as formas reais  $\mathfrak{g}_1$  e  $\mathfrak{g}_2$ , respectivamente, e se

$$\theta_1 = \phi\theta_2\phi^{-1}$$

para algum automorfismo  $\phi$ , então  $\phi\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1$ .

O interessante é que por sua vez, como vamos ver a continuação, os possíveis automorfismos involutivos das formas reais compactas são determinados por suas restrições a subálgebras de Cartan, que dão origem a  $\sigma$  – *sistemas* de raízes. Pela construção canônica de  $\mathfrak{u}$  a partir de uma base de Weyl feita no capítulo precedente, pode-se escolher como subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{u}$  o subespaço  $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , que é o subespaço real gerado pelos duais das raízes da subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ .

Seja agora  $\theta$  um automorfismo de  $\mathfrak{u}$  que deixa  $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  invariante. Então  $\theta$  se estende a um automorfismo de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  que deixa invariante tanto  $\mathfrak{h}$  quanto  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  e, portanto,  $\theta$  define diferentes transformações lineares, todas elas denotadas da mesma maneira por  $\theta$ . A transposta de  $\theta$  dada por

$$\theta^*(\alpha) = \alpha \circ \theta^{-1} = \alpha \circ \theta$$

define uma transformação linear em  $\mathfrak{h}^*$ .

Com essa notação temos que  $\theta^*(\Pi) = \Pi$  onde  $\Pi$  é o conjunto das raízes de  $\mathfrak{h}$ , e dizer a transformação deixa invariante o conjunto das raízes. De fato temos que se  $\alpha$  é uma raiz,  $H \in \mathfrak{h}$  e  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  onde  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  é o espaço de raízes em  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ , então

$$[H, \theta(X)] = \theta[\theta(H), X] = \theta(\alpha(\theta(H))X) = \alpha(\theta(H))\theta(X)$$

e, portanto,  $\alpha \circ \theta$  é raiz cujo espaço de raízes é

$$\mathfrak{g}_{\theta^*\alpha} = \theta(\mathfrak{g}_{\alpha})$$

Por outro lado temos o seguinte teorema, de grande importância no presente trabalho e cuja demonstração é a que se pode encontrar em [6] ou em [7]:

**Teorema 10.1.** *Seja  $\theta$  uma transformação linear de  $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  e suponha que  $\theta^*(\Pi) = \Pi$  onde  $\Pi$  é o conjunto das raízes de  $\mathfrak{h}$ . Então,  $\theta$  se estende a um*

automorfismo de  $\mathfrak{u}$ .

*Demonstração.* Pelo teorema 6.18, existe uma extensão de  $\theta$  a um automorfismo  $\phi$  de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . Por isso, a demonstração consiste em modificar  $\phi$  e obter um automorfismo que deixa  $\mathfrak{u}$  invariante e cuja restrição a  $\mathfrak{h}$  coincide com  $\theta$ . Seja  $X_{\alpha} \in \Pi$  uma base de Weyl de  $\mathfrak{g}$  que define  $\mathfrak{u}$ . Usamos, como anteriormente, a notação

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta}$$

Como a restrição de  $\phi$  a  $\mathfrak{h}$  é  $\theta$  temos que

$$\phi(\mathfrak{g}_{\alpha}) = \mathfrak{g}_{\theta^* \alpha}$$

e, portanto, para cada  $\alpha \in \Pi$  existe um número complexo  $a_{\alpha}$  tal que

$$\phi(X_{\alpha}) = a_{\alpha} X_{\theta^* \alpha}$$

Esses complexos satisfazem a relação

$$a_{\alpha} a_{-\alpha} = 1$$

pois, em uma base de Weyl,  $[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = H_{\alpha}$  e daí que

$$\begin{aligned} H_{\theta^* \alpha} &= \theta(H_{\alpha}) \\ &= \phi(H_{\alpha}) \\ &= \phi([X_{\alpha}, X_{-\alpha}]) \\ &= [\phi(X_{\alpha}), \phi(X_{-\alpha})] \\ &= a_{\alpha} a_{-\alpha} [X_{\theta^* \alpha}, X_{-\theta^* \alpha}] \\ &= a_{\alpha} a_{-\alpha} H_{\theta^* \alpha} \end{aligned}$$

Ainda pelo fato de  $X_{\alpha}$  formar uma base de Weyl temos que  $m_{\alpha, \beta} = -m_{-\alpha, -\beta}$  e portanto, pelo lema 6.14 temos que

$$m_{\alpha, \beta}^2 = p(q+1) \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2}$$

onde  $p$  e  $q$  são dados pela  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta$ . Observamos que como  $\theta^*$  é uma transformação ortogonal em relação a forma de Killing (ver demonstração do teorema 6.18) e como a  $\theta^* \alpha$ -sequencia iniciada em  $\theta^* \beta$  é a imagem por  $\theta^*$  da  $\alpha$ -sequencia iniciada em  $\beta$ , temos que o segundo membro desta igualdade permanece inalterado se  $\alpha$  e  $\beta$  são substituídos por  $\theta^* \alpha$  e  $\theta^* \beta$ .

Então temos  $m_{\alpha,\beta}^2 = m_{\theta^*\alpha,\theta^*\beta}^2$  e daí

$$m_{\alpha,\beta} = \pm m_{\theta^*\alpha,\theta^*\beta}$$

Este fato, aplicado à igualdade  $\phi[X_\alpha, X_\beta] = [\phi(X_\alpha), (\phi(X_\beta))]$  mostra que

$$m_{\alpha,\beta}a_{\alpha+\beta} = (m_{\theta^*\alpha,\theta^*\beta})a_\alpha a_\beta$$

e portanto que

$$a_{\alpha+\beta} = \pm a_\alpha a_\beta$$

Uma vez verificadas estas propriedades de  $a_\alpha$ , é possível modificar  $\phi$  e obter um automorfismo que preserva  $\mathfrak{u}$ . Esta modificação será da forma:

$$\psi = \phi \circ e^{ad(iH)}$$

com  $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ . Como  $\mathfrak{h}$  é abeliana (pois é subálgebra de Cartan), a restrição de  $e^{ad(iH)}$  a  $\mathfrak{h}$  é a identidade e, portanto,  $\phi$  e  $\psi$  coincidem em  $\mathfrak{h}$ . Além do mais,  $e^{ad(iH)}$  é diagonal na base de Weyl e

$$e^{ad(iH)}X_\alpha = e^{\alpha(iH)}X_\alpha$$

Seja então  $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$  um sistema simples de raízes. Então, como  $a_\alpha \neq 0$  (pois  $a_\alpha a_{-\alpha} = 1$  e  $\Sigma$  é uma base de  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ ), existe  $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  tal que para todo  $\alpha_j \in \Sigma$  vale:

$$a_{\alpha_j} = e^{-\alpha_j(H)}$$

Para esse  $H$ , o automorfismo  $\psi$  é a modificação desejada, pois deixa  $\mathfrak{u}$  invariante. De fato

$$\psi(X_\alpha) = a_\alpha e^{\alpha(H)} X_{\theta^*\alpha} = \epsilon_\alpha X_{\theta^*\alpha}$$

sendo que o coeficiente  $\epsilon_\alpha$  que aparece aí é  $\pm 1$ , pois se  $\alpha$  é uma das raízes simples, então  $\epsilon_\alpha = 1$  pela própria definição de  $H$  e se

$$\alpha = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$$

então, pode se provar (por indução simples a partir da formula  $a_{\alpha+\beta} = \pm a_\alpha a_\beta$ ) que

$$a_\alpha = \pm \prod (a_{\alpha_i})^{n_i} = \pm e^{-\alpha(H')}$$

e que

$$\epsilon_\alpha = \pm \epsilon_{\alpha_1}^{n_1} \dots \epsilon_{\alpha_l}^{n_l}$$

Alem do mais, como  $a_\alpha a_{-\alpha} = 1$  temos que  $\epsilon_{-\alpha} = \epsilon_\alpha$ . Temos então que

$$\begin{aligned}\psi(A_\alpha) &= \pm A_\alpha, \\ \psi(S_\alpha) &= \pm S_\alpha,\end{aligned}$$

e, como estes elementos geram  $\mathfrak{u}$ , temos que a forma real compacta  $\mathfrak{u}$  é invariante por  $\psi$ .  $\square$

Como corolário temos que as extensões da identidade são exponenciais de elementos da forma compacta  $\mathfrak{u}$ .

**Corolário 10.2.** *Seja  $\phi$  um automorfismo de  $\mathfrak{u}$  e suponha que sua restrição a  $\theta$  a  $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  seja a identidade. Então, existe  $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  tal que*

$$\phi = e^{ad(iH)}$$

*Demonstração.* Na demonstração do teorema temos que  $\psi(X_\alpha) = \pm X_\alpha$ . O sinal  $\pm$  provem da igualdade  $a_{\alpha+\beta} = \pm a_\alpha a_\beta$  que por sua vez é dado por

$$m_{\theta^*\alpha, \theta^*\beta} = \pm m_{\alpha, \beta}$$

Como agora  $\theta$  é a identidade, o sinal  $\pm$  desaparece e, portanto,

$$\psi(X_\alpha) = X_\alpha$$

e  $\psi = 1$ . O corolário, então, é consequência de da definição de  $\psi$  como  $\psi = \phi \circ e^{ad(iH)}$  como foi feita na demonstração do teorema.  $\square$

Reparemos que o automorfismo  $\psi$  de  $\mathfrak{u}$ , que estende  $\theta$ , construído na demonstração do teorema 10.1 é da forma

$$\psi(X_\alpha) = \epsilon_\alpha X_{\theta^*\alpha}$$

onde  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  é uma base de Weyl e os coeficientes de  $\epsilon_\alpha$  satisfazem as relações:

C1  $\epsilon_\alpha = \pm 1$  (e  $\epsilon_\alpha = 1$  se  $\alpha$  for simples)

C2  $\epsilon_\alpha \epsilon_{-\alpha} = 1$

C3  $\epsilon_{\alpha+\beta} = \frac{m_{\theta^*\alpha, \theta^*\beta}}{m_{\alpha, \beta}} \epsilon_\alpha \epsilon_\beta$  se  $\alpha + \beta$  e raiz.

Uma extensão deste tipo é denominada *extensão canônica* associada à base de Weyl. Essa extensão depende apenas dos coeficientes  $\epsilon_\alpha, \in \Pi$ , e pela propriedade C3 esses coeficientes são determinados a partir de seus valores nos elementos de um sistemas simples  $\Sigma$ . Mas, como vimos, para a construção

das formas reais o que nos interessam são automorfismos involutivos de  $\mathfrak{u}$ . Precisamos então uma condição adicional que garanta que o automorfismo é involutivo. Se  $\theta$  é involutivo, então

$$\psi^2(X_\alpha) = \psi(\epsilon_\alpha X_{\theta^*\alpha}) = \epsilon_\alpha \epsilon_{\theta^*\alpha} X_\alpha$$

e então a extensão canônica é involutiva se e somente se vale

$$\epsilon_\alpha \epsilon_{\theta^*\alpha} = 1$$

A demonstração do teorema precedente garante uma extensão a um automorfismo de  $\mathfrak{u}$ , mas não garante uma extensão a um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{u}$ . Podemos nos perguntar se uma extensão que seja um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{u}$  sempre existe. A resposta, como veremos mais na frente é que nem sempre existe uma extensão involutiva.

Podemos determinar as formas reais analisando os possíveis conjuntos de coeficientes  $\epsilon_\alpha = \pm 1$ ,  $\alpha \in \Pi$ , que são determinados a partir de seus valores para as raízes simples. Isso pode ser feito, pois, felizmente, a álgebra dos pontos fixos de uma extensão involutiva qualquer é isomorfa a álgebra dos pontos fixos de uma extensão canônica como dita a seguinte proposição.

**Proposição 10.3.** *Seja  $\theta$  como acima. Suponha que  $\theta \neq 1$  admita alguma extensão canônica involutiva. Denote uma de essas extensões por  $\psi_0$ . Seja  $\phi$  uma extensão involutiva de  $\theta$  a um automorfismo de  $\mathfrak{u}$ . Então, existem uma extensão canônica  $\psi$  e  $H_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  tal que*

$$e^{i(ad(H_0))} \phi e^{-i(ad(H_0))} = \psi$$

Alem do mais,  $\psi$  é dado por

$$\psi = \psi_0 e^{i(ad(H_+))}$$

para algum  $H_+ \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  com  $\theta(H_+) = H_+$ .

*Demonstração.* Ver ou [6] ou [7]. □

Quer dizer que na pratica podemos nos limitar a considerar as chamadas extensões canônicas. O seguinte lema é em verdade um corolario da anterior proposição que o leitor pode achar também em [6].

**Lema 10.4.** *Sejam  $\phi$  e  $\psi$  extensões involutivas de  $\theta$  tais que*

$$\phi = \psi e^{i(ad(H_-))}$$

com  $\theta(H_-) = -H_-$ . Então

$$e^{i(ad\frac{H_-}{2})}\phi e^{-i(ad\frac{H_-}{2})} = \psi$$

## 10.2

### $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ como $\sigma$ -sistema normal

Seja  $\mathfrak{g}$  uma forma real da álgebra simples complexa  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  e seja  $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$  uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Seja também  $\mathfrak{h}$  uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  com abeliano maximal  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{s}$ . Então, como já visto, pode-se decompor  $\mathfrak{h}$  como

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{a}$$

com  $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}$ . Então a complexificada  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  de  $\mathfrak{h}$  pode-se escrever como

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{h}_k \oplus i\mathfrak{a}$$

Os termos intermediários desta decomposição formam o subespaço real  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  em que as raízes de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  são reais, e dizer

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \{H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} : \alpha(H) \in \mathbb{R} \forall \alpha \in \Pi\}$$

e temos a seguinte proposição:

**Proposição 10.5.** *Seja  $H_{\alpha}$  o dual da raiz  $\alpha$  pela forma de Killing. Seja  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  o subespaço real de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  gerado por  $H_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Pi$ . Então,*

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = i\mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{a}$$

*Demonstração.* O subconjunto de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  em que as raízes de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  assumem valores reais é exatamente  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ . De fato, as raízes de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  assumem valores reais em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ . Além do mais,  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  e para  $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  existe uma raiz  $\beta$  tal que  $\beta(H) \neq 0$ . Dessa forma se  $H' = H_1 + iH_2 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  não pertence a  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , então  $\beta(H')$  não é real para alguma raiz  $\beta$ . Por outro lado, as adjuntas dos elementos de  $\mathfrak{a}$  são simétricas em relação ao produto interno  $B_{\theta}$  e logo seus autovalores são reais. Como os autovalores de  $ad(H)$ ,  $H \in \mathfrak{a}$  são da forma  $\alpha(H)$  com  $\alpha$  raiz, isso mostra que  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ . Analogamente os autovalores das adjuntas dos elementos de  $\mathfrak{h}_k$  são puramente imaginários e daí que  $i\mathfrak{h}_k \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ . Essas inclusões juntamente com o fato de que a dimensão(real) de  $i\mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{a}$  coincide com a de  $\mathfrak{g}$ , mostram a proposição.  $\square$

A análise da álgebra real  $\mathfrak{g}$  é feita a partir das raízes restritas que são os autovalores das adjuntas dos elementos de  $\mathfrak{a}$ . Essas raízes são as restrições



a  $\mathfrak{a}$  das raízes  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ . Para olhar essas restrições é conveniente considerar o dual de  $\mathfrak{a}$  como subespaço do dual de  $\mathfrak{h}$  através da aplicação  $\mathfrak{a}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  que associa a um funcional de  $\mathfrak{a}$  sua extensão a  $\mathfrak{h}$  que é identicamente nula em  $\mathfrak{h}_k$ . Vamos associar a um funcional  $\alpha$  de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  o funcional linear  $\sigma(\alpha) := \bar{\alpha}$  definido assim:

$$\bar{\alpha}(H) = \overline{\alpha(\bar{H})}$$

onde  $\bar{H}$  denota a conjugação em  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  enquanto que a outra conjugação do segundo membro é a usual dos números complexos. Pode ser ver que a conjugação  $\sigma(\alpha) = \bar{\alpha}$  é uma conjugação no dual de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  pois é antilinear e satisfaz  $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ . Uma raiz  $\alpha$  se diz imaginária se  $\bar{\alpha} = -\alpha$  e se diz real se  $\bar{\alpha} = \alpha$ . O conjunto das raízes imaginárias é denotado por  $\Pi_{im}$  e seu complementar  $\Pi - \Pi_{im}$  em  $\Pi$  é denotado por  $\Pi_{co}$ . Se  $\alpha$  é raiz, ela assume valores reais em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  e portanto, o mesmo ocorre com  $\bar{\alpha}$  e daí que restrito a  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ,  $\sigma$  é um funcional linear real. Além do mais se uma raiz é imaginária, então ela é identicamente nula em  $\mathfrak{a}$  enquanto que se ela é real então é identicamente nula em  $\mathfrak{h}_k$ . Em geral para uma raiz  $\alpha$  tem-se que  $\bar{\alpha} = -\alpha(H)$  se  $H \in i\mathfrak{h}_k$  e  $\bar{\alpha}(H) = \alpha(H)$  se  $H \in \mathfrak{a}$ . Desses fatos, tire-se que a restrição de  $\alpha$  a  $\mathfrak{a}$  é dada por

$$\frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})$$

Uma maneira alternativa de descrever as restrições das raízes a  $\mathfrak{a}$  é através da involução de Cartan  $\theta$  associada à decomposição de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$  de uma forma real  $\mathfrak{g}$ . Essa involução é um automorfismo de  $\mathfrak{g}$  e como tal se estende a um automorfismo de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  também denotado por  $\theta$ . Seja então  $iX + Y \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ . Como  $X \in \mathfrak{h}_k \subset \mathfrak{l}$  e  $Y \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$  temos que

$$\theta(iX + Y) = i\theta(X) + \theta(Y) = iX - Y = -\overline{(iX + Y)}$$

Quer dizer que a restrição de  $\theta$  a  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  é dada por

$$\theta(H) = -\bar{H}$$

Juntando isso ao fato de que  $\alpha$  é real em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  tem-se que nesse espaço vale

$$\bar{\alpha} = -\theta^* \alpha = -\alpha \circ \theta^{-1} = -\alpha \circ \theta$$

e como  $\theta$  é automorfismo, isso mostra que se  $\alpha$  é raiz, então a restrição de  $\sigma(\alpha) = \bar{\alpha}$  a  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  coincide com uma raiz. E dizer  $\sigma(\alpha) := \bar{\alpha}$  define um  $\sigma$ -sistema em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ .

Assim, a restrição de  $\alpha$  a  $\mathfrak{a}$  pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}(1 - \theta^*)\alpha$$

Em outras palavras, a restrição de uma raiz e sua imagem pela projeção ortogonal

$$P = \frac{1}{2}(1 - \theta^*)$$

sobre o auto-espaço de  $\theta^*$  associado ao autovalor -1. Por outro lado  $\theta^*\alpha = -\bar{\alpha}$ , então  $P$  também é a projeção ortogonal sobre o autoespaço dos pontos fixos pela conjugação  $\sigma(\alpha) = \bar{\alpha}$  e logo temos, pela proposição 8.2, se o  $\sigma$ -sistema for normal então  $P^+(\Pi) = \mathfrak{a}^*$  é sistema de raízes no espaço

$$(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)^+ := \{\beta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* : \sigma(\beta) := \bar{\beta} = \beta\}.$$

O fato decisivo é justamente que este  $\sigma$ -sistema é normal. Isso justifica e definição de  $\sigma$ -sistema normal e nossa classificação dos diagramas de Satake normais, e vai nos permitir estabelecer a conexão entre estes diagramas e as formas reais de uma álgebra de Lie complexa simples.

**Lema 10.6.** *A conjugação  $\sigma(\alpha) = \bar{\alpha}$  define um  $\sigma$ -sistema normal em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ .*

*Demonstração.* Temos que provar que se  $\beta$  é raiz então  $\beta - \bar{\beta}$  não é raiz. Isso e o mesmo que provar que se  $\beta$  raiz arbitraria então  $\beta + \theta^*\beta$  não é raiz, com  $\theta$  sendo a involução de Cartan de uma forma real não-compacta. Dividimos a demonstração em dois passos:

1. Primeiramente vamos a provar que se  $\alpha$  é uma raiz tal que  $\theta^*\alpha = \alpha$  (e dizer se  $\alpha$  é imaginária) então o espaço de raízes  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  está contido em  $\mathfrak{l} + i\mathfrak{l}$ . Em geral temos para automorfismos que  $\theta(\mathfrak{g}_{\alpha}) = \mathfrak{g}_{\theta^*\alpha}$ . Logo, em nosso caso temos  $\theta(\mathfrak{g}_{\alpha}) = \mathfrak{g}_{\alpha}$ . Seja então  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ , então como  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  tem dimensão um temos que  $\theta(X) = cX$  e como  $\theta$  é involutivo temos que  $c^2 = 1$ , e dizer,  $c = \pm 1$ . Suponhamos por absurdo que  $c = -1$ , e dizer que  $X \in \mathfrak{s} + i\mathfrak{s}$ . Então como a condição  $\theta^*\alpha = \alpha$  implica  $\bar{\alpha} = -\alpha$ , e isso garante que  $\alpha(H) = 0$  para todo  $H \in \mathfrak{a}$ , temos que  $[H, X] = \alpha(H)X = 0$  para todo  $H \in \mathfrak{a}$  e então  $\mathfrak{a}$  não seria abeliano maximal em  $\mathfrak{s}$ . Logo temos que  $\mathfrak{g}_{\alpha} \in \mathfrak{l} + i\mathfrak{l}$ .
2. Seja  $\beta$  é raiz arbitraria e suponha que  $\beta - \sigma(\beta) = \beta + \theta^*\beta$  é raiz. Seja então  $\alpha := \beta + \theta^*\beta$ . Temos que  $\theta^*\alpha = \alpha$ , e logo, pela primeira parte da demonstração, temos que  $\mathfrak{g}_{\alpha} \in \mathfrak{l} + i\mathfrak{l}$ . Por outro lado temos que

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{g}_{\beta + \theta^*\beta} = [\mathfrak{g}_{\beta}, \mathfrak{g}_{\theta^*\beta}] = [\mathfrak{g}_{\beta}, \theta(\mathfrak{g}_{\beta})]$$

E então teríamos que se  $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ ,

$$X = [Y, \theta(Y)]$$

geraria  $\mathfrak{g}_\alpha$ . Isso constitui um absurdo, pois

$$\theta(X) = \theta[Y, \theta(Y)] = [\theta(Y), \theta^2(Y)] = [\theta(Y), Y] = -[Y, \theta(Y)] = -X$$

Usamos a anti-simetria do colchete de Lie na quarta igualdade. Logo  $X \in \mathfrak{s} + \mathfrak{i}\mathfrak{s}$  e  $X$  não poderia gerar  $\mathfrak{g}_\alpha$ . Portanto  $\beta + \theta^*\beta = \beta - \sigma(\beta)$  não é raiz e o  $\sigma$ -sistema é normal.

□

Com isso, temos a nossa disposição os resultados já estudados sobre sistemas normais em, em particular, o conjunto das raízes restritas  $\mathfrak{a}^*$  e um sistema raízes. O conjunto das raízes imaginárias  $\Pi_{im}$  também é um sistema de raízes no subespaço que ele gera, que tem  $\Sigma_{im}$  como raízes simples. Para tomar um sistema simples das raízes restritas, basta tomar uma ordem lexicográfica de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  que seja compatível com uma ordem lexicográfica de  $\mathfrak{a}^*$ . Denotando por  $\Sigma$  o sistema simples em relação a uma ordem dessas, seja  $\Sigma_{im}$  o conjunto das raízes imaginárias e  $\Sigma_{co}$  seu complementar em  $\Sigma$ . Assim, como dito, pela proposição 8.3, temos que  $\Sigma_{im}$  é um sistema simples do sistema de raízes  $\Pi_{im}$ . Além disso, pela proposição 8.9, temos que  $P(\Sigma_{co})$  é um sistema simples do sistema de raízes das raízes restritas  $\mathfrak{a}^*$  associado a ordem lexicográfica de  $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)^+$ . Além do mais, usando a notação

$$\Sigma_{co} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$$

existe uma permutação  $\sigma$  dos subíndices tal que

$$\sigma(\alpha_j) = \overline{\alpha_j} = \alpha_{\pi(j)} + \beta_j$$

com  $\beta_j$  uma combinação linear de  $\Sigma_{im}$  como mostrado na proposição 8.12. Além disso temos, pelo corolário 8.7, que o espaço  $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)^-$  é gerado por  $\Sigma_{im}$  e pelas diferenças  $(\alpha_i - \alpha_{\pi(i)})$ , onde  $\alpha_i \in \Sigma_{co}$  e  $\pi$  é a permutação do automorfismo de diagrama correspondente.

### 10.3

#### Relação entre Diagramas de Satake e Formas reais

Sabemos que  $\sigma(\alpha) = \overline{\alpha}$  e um  $\sigma$ -sistema normal em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ . Além disso se  $\mathfrak{g}$  é uma forma real com involução de Cartan  $\theta$  vimos que em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  vale que  $\overline{\alpha} = -\theta^*\alpha$ .

Dado um diagrama de Satake normal nos perguntamos primeiramente se este diagrama corresponde a uma forma real, e dizer, se existe uma forma real  $\mathfrak{g}$  com esse diagrama associado. Veremos na próxima seção um critério para responder esta pergunta. Agora bem, dado um diagrama de Satake normal e assumindo que ele existe uma forma real que tem esse diagrama associado, surge a pergunta: essa forma real é única? O diagrama de Satake normal codifica a informação de um  $\sigma$ -sistema normal, tal que  $\sigma(\alpha) = \bar{\alpha}$ . Definindo  $\theta^* \alpha = -\bar{\alpha}$  e definindo  $\theta$  por dualidade temos que as formas reais são obtidas pelas extensões involutivas de  $\theta$  a  $\mathfrak{u}$ . Se  $\psi$  é uma de essas extensões então a forma real  $\mathfrak{g}$  se construi como  $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{s}$  com

$$\mathfrak{l} = \{X \in \mathfrak{u} : \psi(X) = X\}$$

e

$$\mathfrak{s} = \{\psi(X) \in \mathfrak{u} = -X\}$$

O que sabemos ate agora é que é suficiente olhar extensões canonicas, e elas são dadas por coeficientes  $\epsilon_\alpha$  a traves das igualdades

$$\psi(X_\alpha) = \epsilon_\alpha X_{-\bar{\alpha}}$$

onde  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  forma uma base de Weyl. Usando, como sempre, a notação

$$[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$$

temos que se  $\alpha + \beta$  é raiz, então os coeficientes devem satisfazer as condições:

$$C_1 \quad \epsilon_\alpha = \pm 1 \quad (\text{e } \epsilon_\alpha = 1 \text{ se } \alpha \in \Sigma)$$

$$C_2 \quad \epsilon_\alpha \epsilon_{-\alpha} = 1$$

$$C_3 \quad \epsilon_{\alpha+\beta} = -\frac{m_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}}{m_{\alpha,\beta}} \epsilon_\alpha \epsilon_\beta$$

$$C_4 \quad \epsilon_\alpha \epsilon_{-\bar{\alpha}} = 1$$

A ultima condição, como antes, é imposta para garantir que de fato a extensão é involutiva, e pela condição  $C_2$  temos que  $C_4$  é equivalente a  $\epsilon_\alpha \epsilon_{\bar{\alpha}} = 1$

Construindo a forma real  $\mathfrak{g}$  a partir de  $\sigma(\alpha) = \bar{\alpha}$ , onde  $\sigma$  vai depender do diagrama de Satake em questão, temos que

$$\mathfrak{a} = \{H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} : \theta(H) = -H\}$$

tem que ser abeliano maximal em  $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{u} : \psi(X) = -X\}$ . Para isso é necessário incluir uma condição extra dada pelo seguinte lema, e que vai nos dar a unicidade da forma real correspondente:

**Lema 10.7.** *Uma condição necessária e suficiente para que  $\mathfrak{a} := \{H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} : \theta(H) = -H\}$  seja abeliano maximal em  $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{u} : \psi(X) = -X\}$  é*

$$\bar{\alpha} = -\alpha \implies \epsilon_{\alpha} = 1$$

*Demonstração.* O centralizador de  $\mathfrak{a}$  é dado por

$$\mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in J} \bar{\mathfrak{g}}_{\alpha}$$

sendo  $J := \{\alpha : \alpha(H) = 0 \ \forall H \in \mathfrak{a}\}$ . Mas  $\mathfrak{a} \in J$  se e somente se  $\bar{\alpha} = -\alpha$ . Então a única forma de  $\mathfrak{a}$  não ser maximal em  $\mathfrak{s}$  é se existe  $\epsilon_{\alpha} = -1$  para alguma  $\alpha$  imaginária. Assim o lema fica provado. Chamaremos  $C_5$  a condição do lema.  $\square$

Temos então que uma aplicação  $\sigma(\alpha) = \bar{\alpha}$  que define em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  um  $\sigma$ -sistema normal, determina uma forma real  $\mathfrak{g}$  se for possível encontrar um sistema de números  $\epsilon_{\alpha}$  satisfazendo as cinco condições acima enunciadas.

O importante é que qualquer sistema de números  $\epsilon_{\alpha}$  define uma mesma classe de equivalência de formas reais desde que  $\epsilon_{\alpha} = 1$  para as raízes imaginárias, como mostramos a continuação:

**Lema 10.8.** *Sejam  $\phi$  e  $\psi$  extensões involutivas de  $\theta$  e suponha que  $\phi(X) = \psi(X) = X$  para  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  se  $\theta^*\alpha = \alpha$  (e, dizer as extensões involutivas  $\phi$  e  $\psi$  satisfazem a condição do lema 10.7) Então existe  $H_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  tal que:*

$$e^{i(ad(H_0))}\phi e^{-i(ad(H_0))} = \psi$$

*Demonstração.* Como  $\psi$  e  $\phi$  são extensões de uma mesma transformação, pelo corolário 10.2 temos que existe  $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  tal que

$$\phi = \psi \circ e^{i(ad(H))}$$

Esse  $H$  não é único, pois para  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  temos que

$$e^{i(ad(H))}X = e^{i\alpha(H)}X$$

e daí que  $e^{i(ad(H))} = e^{i(ad(H'))}$  se  $\alpha(H) - \alpha(H')$  é múltiplo par de  $\pi$  para toda raiz  $\alpha$ . A ideia da demonstração é encontrar um  $H$  satisfazendo  $\phi = \psi \circ e^{i(ad(H))}$  e tal que  $\theta(H) = -H$  e logo aplicar o lema 10.4 que garante, então, a conjugação entre  $\phi$  e  $\psi$ . Para  $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , temos que  $\theta(H) = -H$  se e somente se  $\beta(H) = 0$  para todo  $\beta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  em que  $\theta^*\beta = \beta$ , e dizer para todo elemento de  $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)^-$ . Dito

de outra forma, o autoespaço de  $\theta$  associado a  $-1$  é o anulador do espaço de pontos fixos de  $\theta^*\beta = \beta$ .

Agora bem, pelo corolário 8.7 sabemos que o espaço  $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)^-$  é gerado pelas raízes simples imaginárias  $\Sigma_{im}$  e pelas diferenças  $\alpha_j - \alpha_{\pi(j)}$  com  $\alpha_j \in \Sigma_{co}$  onde  $\pi$  é a permutação associada ao automorfismo de diagrama do diagrama de Satake correspondente.

Então o que procuramos é um  $H$  tal que  $\phi = \psi \circ e^{i(ad(H))}$  e tal que  $\alpha(H) = 0$  para todo  $\alpha \in \Sigma_{im}$  e  $(\alpha_j - \alpha_{\pi(j)})(H) = 0$  para todo  $\alpha_j \in \Sigma_{co}$ .

Escrevemos o sistema simples, dado por ordens lexicográficas compatíveis, como

$$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_l\}$$

com  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq k$  sendo as raízes imaginárias. Seja  $\{H_1, \dots, H_l\}$  a base de  $h_{\mathbb{R}}$  dual de  $\Sigma$ . Temos

$$\alpha_r(H_s) = \delta_{rs}$$

Então,  $H$  se decompõe como

$$H = \alpha_1(H)H_1 + \dots + \alpha_l(H)H_l = H' + H''$$

com  $H' = \alpha_1(H)H_1 + \dots + \alpha_k(H)H_k$  a combinação correspondente as raízes imaginárias. Se  $\alpha$  é uma raiz com  $\theta^*\alpha = \alpha$  então para  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  temos  $\phi(X) = \psi(X) = X$  e, portanto,  $e^{i(ad(H))}X = X$  de onde se conclui que  $e^{i(ad(H))} = 1$ , isto é,  $\alpha(H)$  é um múltiplo par de  $\pi$ . Dessa forma, pode se assumir que  $H' = 0$ . Assumindo isso temos que  $\alpha(H) = 0$  para as raízes imaginárias. Quanto as demais raízes, o fato de que  $\epsilon_{\alpha} = \epsilon_{\bar{\alpha}}$  tanto para  $\phi$  quanto para  $\psi$  garante que  $\alpha_j(H)$  e  $\alpha_{\pi(j)}(H)$  são múltiplos inteiros de  $\pi$  com a mesma paridade. Assim, é possível tomar  $H$  de tal forma que  $\alpha_j(H) = \alpha_{\pi(j)}(H)$  para as raízes  $\alpha_j$  em  $\Sigma_{co}$ .  $\square$

Quer dizer todo diagrama de Satake que corresponde a uma forma real, corresponde a uma única forma real a menos de um automorfismo da álgebra complexa. Nos tínhamos mostrado isso com uma construção explícita no caso das formas reais compactas. Agora sabemos que vale para toda forma real. Em particular a menos de um automorfismo da álgebra complexa simples, existe uma única forma real normal. Pela construção feita é claro que o diagrama de Satake correspondente a forma real normal é um diagrama de Dynkin, é dizer, é um diagrama onde nenhuma raiz simples é imaginária. De fato, em uma forma real normal temos que a subálgebra de Cartan é igual ao abeliano maximal  $\mathfrak{a}$  em  $\mathfrak{s}$ , e uma raiz imaginária é identicamente nula em  $\mathfrak{a}$ . Analogamente uma forma real compacta é um diagrama de Satake com todos os vértices pretos,

e dizer, como todas as raízes imaginárias. Vamos a ver a continuação que em geral, toda álgebra de Lie complexa admite outras formas reais além destas duas, com exceção das álgebras da família  $G_2$ , já que, como foi visto num capítulo precedente, o único diagrama de Satake normal de  $G_2$  é o diagrama de Dynkin.

## 10.4

### Diagramas admissíveis e não admissíveis

As formas reais são determinadas pelas conjugações normais  $\sigma(\alpha) = \bar{\alpha}$  em  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ . A condição para que uma conjugação dessas seja proveniente de uma forma real é que exista um conjunto de números  $\epsilon_{\alpha} = \pm 1$  satisfazendo as condições  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  e também satisfazendo a condição  $C_5$  do lema 10.7. Se isso ocorre a conjugação é chamada admissível. Temos que verificar então quais diagrama de Satake normais são admissíveis. Para isso, deve se escolher  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \pm\Sigma$ . A condição  $C_3$  garante uma extensão única a um conjunto  $\epsilon_{\alpha}$  para  $\alpha \in \Pi$ . As restrições para  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \pm\Sigma$  são dadas por  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_5$ . Fazendo a escolha com essas condições, a extensão a  $\epsilon_{\alpha}$  para  $\alpha \in \Pi$  satisfaz automaticamente  $C_1$ , pois  $m_{\alpha,\beta} = \pm 1$ . Como  $m_{-\alpha,-\beta} = -m_{\alpha,\beta}$  para uma base de Weyl, a condição  $C_2$  também é satisfeita pela extensão. Por essa mesma relação,  $C_5$  vale para toda raiz  $\alpha \in \Pi_{im}$  se ela for satisfeita para  $\alpha \in \Sigma_{im}$ . Quanto a  $C_4$  se ela for satisfeita para  $\alpha \in \pm\Sigma$  então continua valendo para todas as raízes não imaginárias, devido a  $C_3$ . Assim, um diagrama de Satake normal é admissível caso existe uma escolha de  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Sigma$ , tal que  $\epsilon_{\alpha} = 1$  e  $C_4$  for satisfeita para todo  $\alpha \in \Sigma_{co}$ . O seguinte lema é um critério de admissibilidade para os diagramas interiores:

**Lema 10.9.** *Tomando  $\epsilon_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Sigma$  com  $\epsilon_{\alpha} = 1$  para  $\alpha \in \Sigma_{im}$ , seja  $\beta \in \Sigma_{co}$ . Então*

1. Se

$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta$$

com  $\gamma \neq -\delta$  raízes imaginárias tais que  $\beta + \gamma$  e  $\beta + \delta$  são raízes e  $\gamma + \delta$  não é raiz, então  $\epsilon_{\beta}\epsilon_{\bar{\beta}} = 1$

2. Se

$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta + \tau$$

com  $\gamma, \delta, \tau$  raízes imaginárias tal que

- $(\beta + \gamma), (\beta + \delta), (\beta + \tau), (\bar{\beta} - \gamma), (\bar{\beta} - \delta)$  e  $(\bar{\beta} - \tau)$  são raízes e
- $(\gamma + \delta), (\gamma + \tau)$  e  $(\delta + \tau)$  não são raízes,

então  $\epsilon_{\beta}\epsilon_{\bar{\beta}} = -1$

*Demonstração.* A demonstração consiste numa aplicação reiterada dos lemas 6.16 e 6.17. Esses lemas dizem que para raízes  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  que não são opostas duas a duas, então:

- se  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  então  $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha} = -m_{\alpha,\gamma}$
- se  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$  então  $m_{\alpha,\beta}m_{\gamma,\delta} + m_{\alpha,\delta}m_{\beta,\gamma} + m_{\gamma,\alpha}m_{\beta,\delta} = 0$

Lembramos que  $\theta\alpha = -\alpha$  e sua extensão, definida por  $\epsilon_\alpha$ , é denotada por  $\phi$

$$\phi(X_\alpha) = \epsilon_\alpha X_\alpha$$

onde  $X_\alpha \in g_\alpha$  forma uma base de Weyl.

1. Aplicando  $\phi$  a ambos membros de

$$[[X_\beta, X_\gamma], X_\delta] = m_{\beta,\gamma}m_{\beta+\gamma,\delta}X_{\bar{\beta}}$$

e usando o fato de que  $\epsilon_\gamma = \epsilon_\delta = 1$ , chega-se a

$$\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}} = \frac{m_{\beta,\gamma}m_{\beta+\gamma,\delta}}{m_{-\bar{\beta},\gamma}m_{-\beta-\delta,\delta}}$$

O lema 6.17, aplicado as raízes  $-\bar{\beta}$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  (que somam zero) fornece

$$m_{\beta,\gamma}m_{-\bar{\beta},\delta} + m_{\gamma,-\bar{\beta}}m_{\beta,\delta}$$

já que, por hipótese,  $\gamma + \delta$  não é raiz e, portanto,  $m_{\gamma,\delta} = 0$ . Substituindo nessa igualdade  $m_{\gamma,-\bar{\beta}} = -m_{-\bar{\beta},\gamma}$ , chega-se a

$$\frac{m_{\beta,\gamma}}{m_{-\bar{\beta},\gamma}} = \frac{m_{\beta,\delta}}{m_{-\bar{\beta},\delta}}$$

e daí que

$$\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}} = \frac{m_{\beta,\delta}m_{\beta+\gamma,\delta}}{m_{-\bar{\beta},\delta}m_{-\beta-\delta,\delta}} = 1$$

pois o lema 6.16, aplicado às raízes  $-\bar{\beta}$ ,  $\delta$  e  $\beta + \gamma$  mostra que

$$m_{\beta+\gamma,\delta} = -m_{\delta,\beta+\delta} = -m_{-\bar{\beta},\delta}$$

e pelo mesmo lema aplicado, agora, as raízes  $-(\beta + \delta)$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ , tem-se

$$m_{\beta,\delta} = -m_{\delta,\beta} = -m_{-\beta-\delta,\delta}$$



2. Da mesma forma que no item anterior, obtém-se a expressão

$$\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}} = \frac{m_{\beta,\gamma} m_{\beta+\gamma,\delta} m_{\beta+\gamma+\delta,\tau}}{m_{-\bar{\beta},\gamma} m_{-\bar{\beta}+\gamma,\delta} m_{-\bar{\beta}+\gamma+\delta,\tau}}$$

aplicando  $\phi$  a ambos os membros de

$$[[[X_\beta, X_\gamma], X_\delta], X_\tau] = m_{\beta,\gamma} m_{\beta+\gamma,\delta} m_{\beta+\gamma+\delta,\tau} X_{\bar{\beta}}$$

Como  $\gamma + \delta$  não é raiz, temos que  $[X_\gamma, X_\delta] = 0$  e, portanto, a identidade de Jacobi implica que

$$[[X_\beta, X_\gamma], X_\delta] = [[X_\beta, X_\delta], X_\gamma]$$

o que por sua vez mostra que

$$m_{\beta,\gamma} m_{\beta+\gamma,\delta} = m_{\beta,\delta} m_{\beta+\delta,\gamma}$$

e, portanto

$$\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}} = \frac{m_{\beta,\gamma} m_{\beta+\gamma,\delta} m_{\beta+\gamma+\delta,\tau}}{m_{-\bar{\beta},\gamma} m_{-\bar{\beta}+\gamma,\delta} m_{-\bar{\beta}+\gamma+\delta,\tau}}$$

Agora, aplicando o lema 6.17 às raízes  $-\bar{\beta}$ ,  $\beta + \delta$ ,  $\gamma$  e  $\tau$  e usando o fato de que  $\gamma + \tau$  não é raiz, mostra-se que

$$m_{\beta+\delta,\gamma} m_{-\bar{\beta},\tau} + m_{\gamma,-\bar{\beta}} m_{\beta+\delta,\tau} = 0$$

Mas o lema 6.16 aplicado às raízes  $-\bar{\beta}$ ,  $\tau$  e  $\beta + \gamma + \delta$  fornece

$$m_{-\bar{\beta},\tau} = m_{\tau,\beta+\gamma+\delta} = -m_{\beta+\gamma+\delta,\tau}$$

e daí que

$$\frac{m_{\beta+\gamma+\delta,\tau}}{m_{-\bar{\beta},\gamma}} = -\frac{m_{\beta+\delta,\tau}}{m_{\beta+\delta,\gamma}}.$$

Dessa forma a expressão para  $\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}}$  se simplifica como

$$\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}} = -\frac{m_{\beta,\delta} m_{\beta+\gamma,\tau}}{m_{-\bar{\beta}+\gamma,\delta} m_{-\bar{\beta}+\gamma+\delta,\tau}}$$

Procedendo na mesma maneira e aplicando o lema 6.17 as raízes  $-\bar{\beta} + \gamma$ ,  $\delta$  e  $\tau$ , juntamente com o lema 6.16 as raízes  $-\bar{\beta} + \gamma$  e  $\beta + \delta$  chega-se a igualdade

$$\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}} = \frac{m_{\beta, \tau}}{m_{-\bar{\beta} + \gamma + \delta, \tau}}$$

e o segundo membro dessa igualdade é  $-1$ , pois o lema 6.16 aplicando as raízes  $\beta, \tau$  e  $-\bar{\beta} + \gamma + \delta$ , garante que

$$m_{\beta, \tau} = m_{\tau, -\bar{\beta} + \gamma + \delta} = m_{-\bar{\beta} + \gamma + \delta, \tau}$$

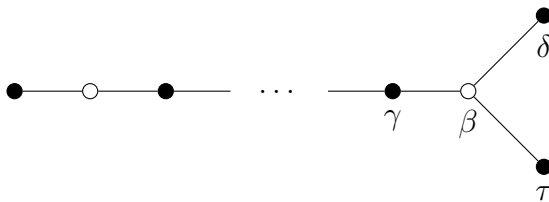
concluindo a demonstração.  $\square$

Agora, com esse lema é possível encontrar finalmente os diagramas de Satake admissíveis.

Entre os diagramas normais estudados apenas cinco não são admissíveis.

### Diagramas não admissíveis

- O diagrama de  $DI_4$  dado por



é normal mas não é admissível pois as raízes indicadas satisfazem as condições do segundo item do lema 10.9. De fato, como já vimos no teorema 6.22 uma álgebra de Lie correspondente ao diagrama  $D_l$  é a álgebra  $\mathfrak{so}(2l) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l), A + A^t = 0\}$ , que é isomorfa a álgebra da forma  $\{A \in \mathfrak{sl}(2l) : AJ + JA^t = 0\}$  com

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e denotamos a esta álgebra também como  $\mathfrak{so}(2l)$ . Escrevendo a matriz  $2l \times 2l$  em blocos  $l \times l$  temos que  $A \in \mathfrak{so}(2l)$  se e só se é da forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix}$$

com  $\beta$  e  $\gamma$  matrizes  $l \times l$  anti-simétricas. A subálgebra  $\mathfrak{h}$  das matrizes diagonais e de Cartan e seus elementos se escrevem da forma

$$H = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ -0 & -\Lambda \end{bmatrix}$$

com  $\Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_l\}$  uma matriz diagonal arbitraria. Sendo

$$\lambda_i : \text{diag}\{a_1, \dots, a_l\} \rightarrow a_i$$

as raízes são dadas por  $\lambda_i - \lambda_j$  com  $i \neq j$ ,  $\lambda_i + \lambda_j$  com  $i \neq j$  e  $-(\lambda_i - \lambda_j)$  com  $i \neq j$ . Um sistema simples é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$$

Com a notação usada temos  $\gamma = \lambda_{l-3} - \lambda_{l-2}$ ,  $\beta = \lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}$ ,  $\delta = \lambda_{l-1} - \lambda_l$  e  $\tau = \lambda_{l-1} + \lambda_l$ . Temos que

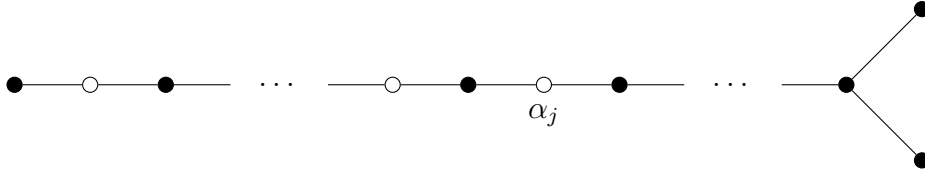
$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta + \tau$$

E logo vale:

1.  $\beta + \gamma = (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-3} - \lambda_{l-2}) = \lambda_{l-3} - \lambda_{l-1}$  é raiz.
2.  $\beta + \delta = (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) = \lambda_{l-2} - \lambda_l$  é raiz.
3.  $\beta + \tau = (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l) = \lambda_{l-2} + \lambda_l$  é raiz.
4.  $\bar{\beta} - \gamma = \beta + \delta + \tau = (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) - (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l) = \lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}$  é raiz.
5.  $\bar{\beta} - \delta = \beta + \gamma + \tau = (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-3} - \lambda_{l-2}) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l) = \lambda_{l-3} + \lambda_l$  é raiz.
6.  $\bar{\beta} - \tau = \beta + \gamma + \delta = (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-3} - \lambda_{l-2}) + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) = \lambda_{l-3} - \lambda_l$  é raiz.
7.  $\gamma + \delta = (\lambda_{l-3} - \lambda_{l-2}) - (\lambda_{l-1} - \lambda_l)$  não é raiz.
8.  $\gamma + \tau = (\lambda_{l-3} - \lambda_{l-2}) - (\lambda_{l-1} + \lambda_l)$  não é raiz.
9.  $\tau + \delta = (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l) = 2\lambda_{l-1}$  não é raiz.

Logo pelo item 2 do lema 10.9 temos que  $\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}} = -1$  e o diagrama não é admissível.

• Outro diagrama de Satake de  $D_l$  que é normal mas não é admissível, é o diagrama  $DI6$



Aqui  $\beta = \alpha_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$  é a maior raiz, que não é imaginária. Como foi visto, temos que

$$\bar{\beta} = \alpha_{j-1} + \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2}) + \alpha_{l-1} + \alpha_l$$

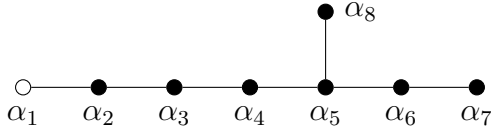
e se tomamos  $\gamma = \alpha_{j-1}$ ,  $\delta = \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_{l-1}$  e  $\tau = \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_l$  temos que

$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta + \tau$$

e essas raízes satisfazem o segundo item do lema 10.9 pois

1.  $\beta + \gamma = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) = \lambda_{j-1} - \lambda_{j+1}$  é raiz.
2.  $\beta + \delta = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) + \cdots + (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) = \lambda_j - \lambda_l$  é raiz.
3.  $\beta + \tau = \lambda_j + \lambda_l$  é raiz.
4.  $\bar{\beta} - \gamma = \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2}) + \alpha_{l-1} + \alpha_l = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + 2(\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) + 2(\lambda_{j+2} - \lambda_{j+3}) + \cdots + 2(\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l) = \lambda_j + \lambda_{j+1}$  é raiz
5.  $\bar{\beta} - \delta = \alpha_{j-1} + \alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_l = (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) + \cdots + (\lambda_{j-2} - \lambda_{j-1}) + (\lambda_{j-1} + \lambda_j) = \lambda_{j-1} + \lambda_l$  é raiz.
6.  $\bar{\beta} - \tau = \lambda_{j+1} - \lambda_l$  é raiz.
7.  $\gamma + \delta = (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) + (\lambda_{j+2} - \lambda_{j+3}) + \cdots + (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) = \lambda_{j-1} - \lambda_j + \lambda_{j+1} - \lambda_l$  não é raiz.
8.  $\gamma + \tau = (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_{j+2} - \lambda_{j+3}) + \cdots + (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l) = \lambda_{j-1} - \lambda_j + \lambda_{j+1} + \lambda_l$  não é raiz.
9.  $\delta + \tau = (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) + (\lambda_{j+2} - \lambda_{j+3}) + \cdots + (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) + (\lambda_{j+2} - \lambda_{j+3}) + \cdots + (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l) = 2\lambda_{j+1}$  não é raiz.

- O diagrama  $E_83$  não é admissível.



Primeiramente lembramos que a álgebra  $E_8$  é construída no espaço  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(9) \oplus V \oplus V^*$ , a subálgebra das matrizes diagonais em  $\mathfrak{sl}(9)$  é uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  e denotando por  $\lambda_i$  o funcional

$$\lambda_i : \text{diag}\{a_1, \dots, a_9\} \mapsto a_i$$

as raízes de  $\mathfrak{h}$  são dadas por  $(\lambda_i - \lambda_j)$  com  $i \neq j$ ,  $(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$  com  $i < j < k$  e  $-(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$  com  $i < j < k$  e vale que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_9 = 0$ .

Um sistema simples é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_8 - \lambda_9, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}$$

E na base do diagrama a ordem é dada por  $\alpha_1 = \lambda_8 - \lambda_9$  e  $\alpha_7 = \lambda_2 - \lambda_3$ . Tomando  $\beta = \alpha_1$ , temos que, como já vimos anteriormente

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8 \\ &= -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + 2\lambda_8 + \lambda_9) \\ &= \lambda_1 - \lambda_8 \end{aligned}$$

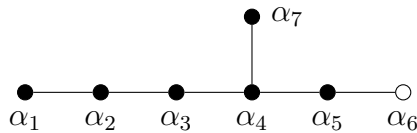
e as raízes que mostram que o diagrama não é admissível são, por exemplo  $\gamma = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_8)$ ,  $\delta = (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_8)$  e  $\tau = -(\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8)$ . De fato temos

1.  $\beta + \gamma = (\lambda_8 - \lambda_9) - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_8 = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_9)$  é raiz
2.  $\beta + \delta = (\lambda_8 - \lambda_9) - \lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_8 = (\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_9)$  é raiz
3.  $\beta + \tau = (\lambda_8 - \lambda_9) - \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 = (\lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_9)$  é raiz
4.  $\bar{\beta} - \gamma = (\lambda_1 - \lambda_8) + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_8 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$  é raiz.
5.  $\bar{\beta} - \delta = (\lambda_1 - \lambda_8) + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_8 = (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5)$  é raiz.
6.  $\bar{\beta} - \tau = (\lambda_1 - \lambda_8) + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 = (\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_8)$  é raiz.

Por outro lado  $\gamma + \delta$ ,  $\gamma + \tau$  e  $\delta + \tau$  não são raízes.

Logo as hipóteses do item dois do lema 10.9 são satisfeitas e vale que  $\epsilon_{\beta}\epsilon_{\bar{\beta}} = -1$ . Temos então que  $E_{83}$  não é admissível.

- O diagrama normal  $E_{74}$  não é admissível.



A base de  $E_7$  é dada por

$$\Sigma = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_7 - \lambda_8, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}$$

com  $\alpha_1 = \lambda_7 - \lambda_8$  e  $\alpha_6 = \lambda_2 - \lambda_3$

Tomamos  $\beta = \alpha_6$ . Esta raiz está unida a uma componente conexa de  $\Sigma_-$  de tipo  $D_6$  a través de sua quinta raiz. A matriz de Cartan de  $D_6$  é

$$D_6 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é dada por

$$(D_6)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Então considerando o dobro da quinta coluna da inversa da matriz de  $D_6$  e o lema 8.14 temos

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \alpha_6 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_7 + 3\alpha_5 \\ &= -(\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8) \\ &= \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_9 \end{aligned}$$

Escolhemos as raízes  $\gamma = -(\lambda_2 + \lambda_7 + \lambda_8)$ ,  $\delta = -(\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6)$  e  $\tau = \lambda_3 - \lambda_4$ . Assim:

$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta + \tau$$

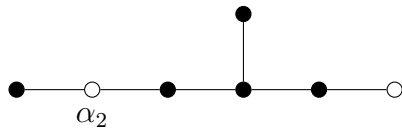
e temos

1.  $\beta + \gamma = -(\lambda_3 - \lambda_7 - \lambda_8)$  é raiz.
2.  $\beta + \delta = -(\lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_6)$  é raiz.

3.  $\beta + \tau = \lambda_2 - \lambda_4$  é raiz.
4.  $\bar{\beta} - \gamma = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_9 + \lambda_2 + \lambda_7 + \lambda_8 = -(\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6)$  é raiz.
5.  $\bar{\beta} - \delta = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_9 + \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6 = -(\lambda_4 + \lambda_7 + \lambda_8)$  é raiz.
6.  $\bar{\beta} - \tau = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_9 - \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_9$  é raiz.
7.  $\gamma + \delta = -(\lambda_2 + \lambda_7 + \lambda_8) - (\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6) = -2\lambda_2 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_5 - \lambda_6$  não é raiz.
8.  $\gamma + \tau = -(\lambda_2 - \lambda_7 - \lambda_8) + \lambda_3 - \lambda_4$  não é raiz.
9.  $\delta + \tau = -\lambda_2 - \lambda_5 - \lambda_6 + \lambda_3 - \lambda_4$  não é raiz.

Assim, ficam satisfeitas as condições do item 2 do lema 10.9 e  $E_{74}$  não é admissível.

- O diagrama normal  $E_{75}$  não é admissível.



Tomando  $\beta = \alpha_2$  temos que uma das componentes conexas de  $\Sigma_-$  é um subdiagrama da forma  $D_4$ . A matriz de de  $D_4$  é

$$D_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é

$$(D_4)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Então, considerando o dobro da primeira coluna da inversa de  $D_4$  e o lema 8.14 temos que

$$\bar{\beta} = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7$$

e as raízes  $\gamma = \alpha_1$ ,  $\delta = \alpha_3 + \alpha_4$  e  $\tau = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7$  satisfazem o item 2 do lema 10.9 pois

$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta + \tau$$

e temos que

1.  $\beta + \gamma = \alpha_2 + \alpha_1 = (\lambda_6 - \lambda_7) + (\lambda_7 - \lambda_8) = \lambda_6 - \lambda_8$  é raiz.
2.  $\beta + \delta = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\lambda_6 - \lambda_7) + (\lambda_5 - \lambda_6) + (\lambda_4 - \lambda_5) = \lambda_4 - \lambda_7$  é raiz
3.  $\beta + \tau = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 = (\lambda_6 - \lambda_7) + (\lambda_5 - \lambda_6) + (\lambda_4 - \lambda_5) + (\lambda_3 - \lambda_4) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = -(\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_7)$  é raiz
4.  $\bar{\beta} - \gamma = \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 = (\lambda_6 - \lambda_7) + 2(\lambda_5 - \lambda_6) + 2(\lambda_4 - \lambda_5) + (\lambda_3 - \lambda_4) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = -(\lambda_2 + \lambda_6 + \lambda_7)$  é raiz.
5.  $\bar{\beta} - \delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 = (\lambda_7 - \lambda_8) + (\lambda_6 - \lambda_7) + (\lambda_5 - \lambda_6) + (\lambda_4 - \lambda_5) + (\lambda_3 - \lambda_4) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = -(\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_8)$  é raiz
6.  $\bar{\beta} - \tau = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\lambda_7 - \lambda_8) + (\lambda_6 - \lambda_7) + (\lambda_5 - \lambda_6) + (\lambda_4 - \lambda_5) = \lambda_4 - \lambda_8$  é raiz
7.  $\gamma + \delta = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\lambda_7 - \lambda_8) + (\lambda_5 - \lambda_6) + (\lambda_4 - \lambda_5) = \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_6 + \lambda_4$  não é raiz.
8.  $\gamma + \tau = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 = (\lambda_7 - \lambda_8) + (\lambda_5 - \lambda_6) + (\lambda_4 - \lambda_5) + (\lambda_3 - \lambda_4) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_6 - \lambda_2 - \lambda_4$  não é raiz
9.  $\delta + \tau = 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7 = 2(\lambda_5 - \lambda_6) + 2(\lambda_4 - \lambda_5) + (\lambda_3 - \lambda_4) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = -2\lambda_6 - \lambda_2 + \lambda_4$  não é raiz.

Assim, ficam satisfeitas as condições do item 2 do lema 10.9 e temos que  $\epsilon_{\beta}\epsilon_{\bar{\beta}} = -1$ . Logo  $E_{74}$  não é admissível.

### Diagramas admissíveis

- O diagrama  $A_{II}$  é admissível.

$$A_{II} \quad \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \quad l \text{ ímpar}$$

Lembramos que  $A_l$  está associado a álgebra  $sl(l+1)$ . Uma subálgebra de Cartan é a álgebra das matrizes diagonais de traço zero e as raízes são da forma  $\lambda_i - \lambda_j$  onde  $\lambda_i$  é dado por

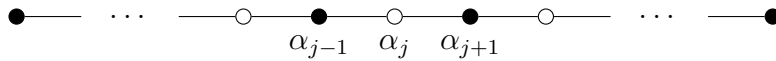
$$\lambda_i : \text{diag}\{a_1, \dots, a_{l+1}\} \mapsto a_i$$



e um sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_l - \lambda_{l+1}\}$$

Temos então que se  $\beta = \alpha_j$  é uma raiz simples não imaginária



podemos tomar  $\gamma = \alpha_{j-1}$  e  $\delta = \alpha_{j+1}$  e temos que

$$\bar{\beta} = \alpha_{j+1} + \alpha_j + \alpha_{j+1} = \beta + \gamma + \delta$$

e vale que

1.  $\beta + \gamma = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) = \lambda_{j-1} - \lambda_{j+1}$  é raiz.
2.  $\beta + \delta = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) - (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) = \lambda_j - \lambda_{j+2}$  é raiz.
3.  $\gamma + \delta = \lambda_{j-1} - \lambda_j + \lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}$  não é raiz.

e logo, pelo item 1 do lema 10.9 temos que  $AII$  é admissível, pois para toda raiz  $\beta \in \Sigma_{co}$  vale que  $\epsilon_{\beta}\epsilon_{\bar{\beta}} = 1$ .

- O diagrama  $B2$  é admissível.



$l - 1$

Lembramos que a álgebra de Lie associada a um diagrama  $B_l$  é  $\mathfrak{so}(2l+1)$  e, como vimos na demonstração do teorema 6.20  $\mathfrak{so}(2l+1)$  é uma álgebra isomorfa a álgebra das matrizes anti-simétricas em relação a  $J$ , com:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_l \\ 0 & 1_l & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $1_l$  é a matriz identidade  $l \times l$ . Escrevendo a matriz  $A$ ,  $(2l+1) \times (2l+1)$ , com blocos do mesmo tamanho que os blocos de  $J$  e usando a condição  $A^t J + J A = 0$ . Calculamos que a matriz  $A$  tem forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{bmatrix}$$

com  $\beta$  e  $\gamma$  duas matrizes  $1 \times l$  e as demais matrizes  $l \times l$ ,  $b$  e  $c$  anti-simétricas e  $a$  matriz qualquer. Uma subálgebra de Cartan é das matrizes diagonais. As matrizes são da forma

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda \end{bmatrix}$$

com  $\Lambda$  uma matriz diagonal  $l \times l$  qualquer. Lembramos também que com a notação

$$\lambda_j : \Lambda = \text{diag}\{a_1, \dots, a_l\} \mapsto a_j$$

temos que as raízes são da forma  $\lambda_j$ ,  $-\lambda_j$ ,  $\lambda_i - \lambda_j$  com  $i \neq j$ ,  $\lambda_i + \lambda_j$  com  $i \neq j$  e  $-(\lambda_i + \lambda_j)$

e um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_l - \lambda_{l-1}, \lambda_l\}$$

Em  $B_2$  a única raiz simple cuja conjugada não é ela mesma é  $\beta = \alpha_j$  onde  $\alpha_j$  é a raiz que se liga a  $\Sigma_{im}$ . Para essa raiz a inversa da matriz de Cartan de  $B_l$  fornece

$$\bar{\beta} = \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_l)$$

e tomando  $\gamma = \delta = \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_l$  temos que o diagrama é admissível pois

1.  $\beta + \gamma = \beta + \delta = \alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_l = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) = \lambda_j - \lambda_{j+2}$  é raiz
2.  $\gamma + \delta = 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_l)$  não é raiz.

e assim, as condições do item 1 do lema 10.9 são satisfeitas e  $\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}} = 1$ .

- O diagrama  $C_2$  é admissível.

$$C_2 \quad \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \text{---} \leftarrow \leftarrow \circ \quad l \text{ par}$$

Em este caso, a situação é como em  $A_2$  exceto pela raiz  $\beta = \alpha_l$ . Neste caso temos

$$\bar{\beta} = \alpha_l + 2\alpha_{l-1}$$

tomamos então  $\gamma = \delta = \alpha_{l-1}$  e temos que

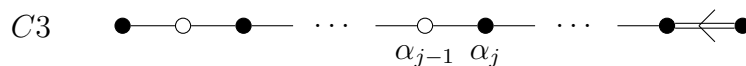
$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta$$

e vale que:

1.  $\beta + \gamma = \beta + \delta = \lambda_l + \lambda_l$  é raiz
2.  $\gamma + \delta = 2\alpha_{l-1} = 2(\lambda_{l-1} - \lambda_l)$  não é raiz.

logo, as condições do primeiro item do lema 10.9 são satisfeitas e o diagrama é admissível.

- O diagrama  $C3$  é admissível.



Só resta verificar o caso em que  $\beta = \alpha_j$  é a maior das raízes não imaginarias que se liga a  $\Sigma_{im}$ . Considerando a inversa da matriz de Cartan de  $C_l$  temos que

$$\bar{\beta} = \alpha_{j-1} + \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l$$

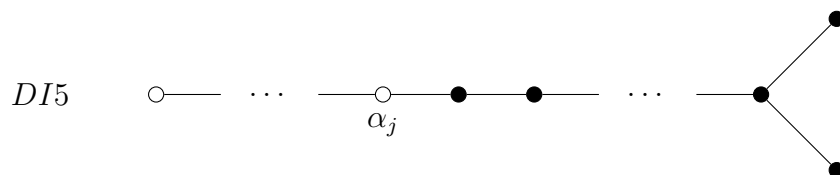
e as raízes que satisfacem o item 1 do lema 10.9 são  $\gamma = \alpha_{j-1}$  e

$$\delta = 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{l-2} + \alpha_{l-1}) + \alpha_l$$

De fato temos que

1.  $\beta + \gamma = \alpha_j + \alpha_{j-1} = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + (\lambda_{j-1} + \lambda_j = \lambda_{j-1} - \lambda_{j+1})$  é raiz.
2.  $\beta + \delta = \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{l-2} + \alpha_{l-1}) + \alpha_l = (\lambda_j = \lambda_{j+1} + 2(\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2} + \dots + 2(\lambda_{l-1} - \lambda_l) + 2\lambda_l = \lambda_j + \lambda_{j+1})$  é raiz
3.  $\gamma + \delta = \lambda_{j-1} - \lambda_l + 2\lambda_{j+1}$  não é raiz.

- O diagrama  $DI5$  é admissível.



A questão se reduz a raiz  $\beta = \alpha_j$  que se liga as raízes imaginarias. Temos que

$$\bar{\beta} = \alpha_j + 2(\alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$$

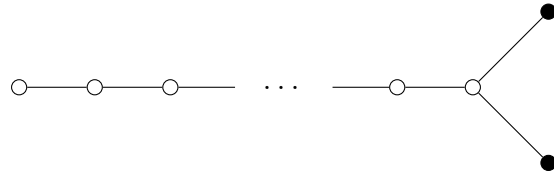
Tomamos então  $\gamma = \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2}$  e  $\delta = \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$  e temos que

1.  $\beta + \gamma = \alpha_j + (\alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2}) = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) + \cdots + (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) = \lambda_j - \lambda_{l-1}$  é raiz.
2.  $\beta + \delta = \alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + (\lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}) + \cdots + (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l) = \lambda_j + \lambda_{l-1}$  é raiz
3.  $\gamma + \delta$  não é raiz.

Logo, são satisfeitas as condições do item 1 do lema 10.9

- O diagrama *DI3* é admissível

*DI3*



Seja  $\beta = \alpha_{l-2} = (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1})$ . Então temos que tomando  $\gamma = \alpha_{l-1} = \lambda_{l-1} - \lambda_l$  e  $\delta = \alpha_l = \lambda_{l-1} + \lambda_l$  vale que

$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta$$

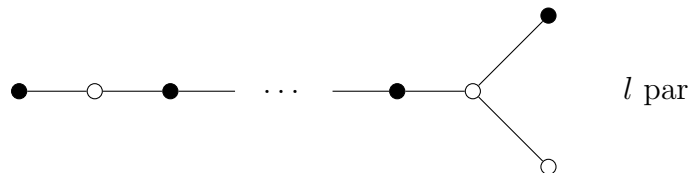
e temos que

1.  $\beta + \gamma = (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) = \lambda_{l-2} - \lambda_l$  é raiz
2.  $\beta + \delta = (\lambda_{l-2} - \lambda_{l-1}) + (\lambda_{l-1} + \lambda_l) = \lambda_{l-2} + \lambda_l$  é raiz
3.  $\gamma + \delta = 2\lambda_{l-1}$  não é raiz.

e logo pelo segundo item do lema 10.9 temos que  $\epsilon_\beta \epsilon_{\bar{\beta}} = 1$  e segue que o diagrama é admissível.

- O diagrama *DI2* é admissível.

*DI2*



$l$  par

Este caso é analógico a  $A_2$ .

- O diagrama  $F_4III$  é admissível.

$$F_42 \quad \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \circ$$

O conjugado da raiz  $\beta = \alpha_4$  não imaginária é dado pela inversa da matriz de Cartan de  $B_3$ . Temos que

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

é sua inversa é

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Agora considerando o dobro da última coluna temos, pelo lema 10.9, que se  $\beta = \alpha_4$

$$\bar{\beta} = \alpha_4 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3,$$

e tomando  $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$  e  $\delta = \alpha_2 + 2\alpha_3$  temos que

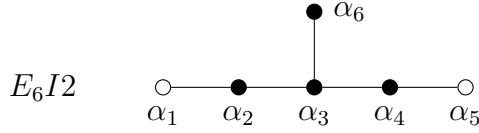
$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta.$$

Lembrando a realização canônica de  $F_4$  temos que

1.  $\beta + \gamma = (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) + e_3 - \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_4 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_4$  é raiz
2.  $\beta + \delta = (e_2 - e_3) + 2e_3 - \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_4 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 + e_4$  é raiz
3.  $\gamma + \delta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = (e_1 - e_2) + 2(e_2 - e_3) + 3e_3 = e_1 + e_2 + e_3$  não é raiz.

e assim é satisfeito o item 1 do lema 10.9.

- O diagrama  $E_6I2$  é admissível.



Temos que se  $\beta = \alpha_1$ , então considerando a inversa da matriz de Cartan de  $D_4$  (já explicitada para quando provamos que  $E_7 5$  não é admissível) vale que:

$$\bar{\beta} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$$

e, tomando  $\gamma = \alpha_2 + \alpha_3$  e  $\delta = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$  temos que

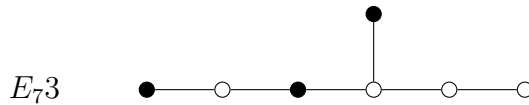
$$\bar{\beta} = \beta + \gamma + \delta$$

e, além disso, vale

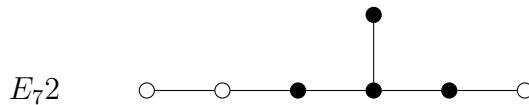
1.  $\beta + \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (\lambda_6 - \lambda_7) + (\lambda_5 - \lambda_6) + (\lambda_4 - \lambda_5) = \lambda_4 - \lambda_7$  é raiz.
2.  $\beta + \delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 = (\lambda_6 - \lambda_7) + (\lambda_5 - \lambda_6) + (\lambda_4 - \lambda_5) + (\lambda_3 - \lambda_4) - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = -(\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_7)$  é raiz.
3.  $\gamma + \delta = 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 = 2(\lambda_5 - \lambda_6) + 2(\lambda_4 - \lambda_5) + (\lambda_3 - \lambda_4) - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = -2\lambda_6$  não é raiz

Assim são satisfeitas as hipóteses do item 1 lema 10.9, e  $\epsilon_{\alpha_1} \epsilon_{\bar{\alpha}_1} = 1$ . Analogamente  $\epsilon_{\alpha_5} \epsilon_{\bar{\alpha}_5} = 1$  e segue que o diagrama é admissível.

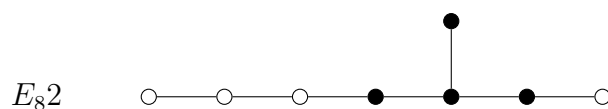
- O diagrama  $E_7 3$  é admissível pois as raízes são como em  $AII$



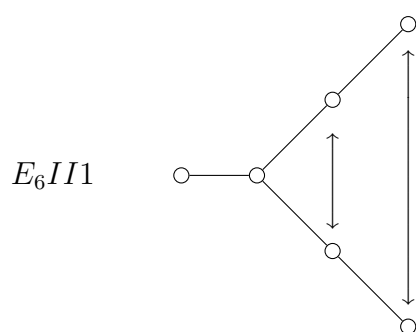
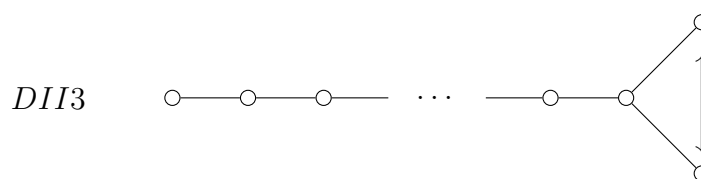
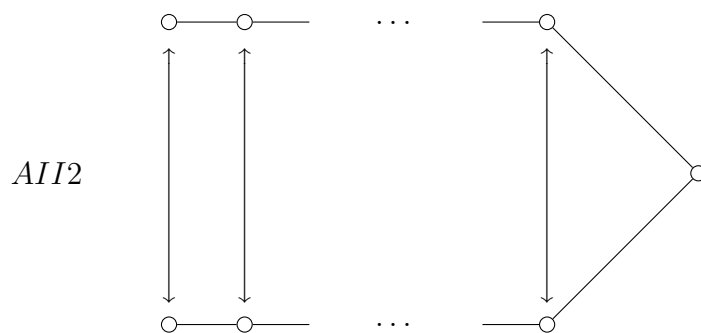
- O diagrama  $E_7 2$  é admissível pois as raízes são como em  $E_6 I2$ .



- O diagrama  $E_8 2$  é admissível pois aqui a situação também é como em  $E_6 I2$ .

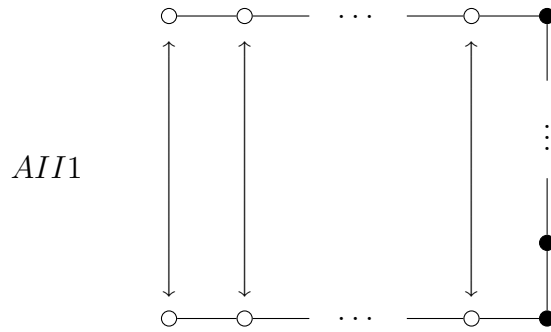


Vamos a analisar agora os diagramas exteriores. Os que não contem raízes imaginárias são admissíveis pois  $\epsilon_\alpha = 1$  para toda raiz simples  $\alpha$  e para esses diagramas o conjugado de uma raiz simples e outra raiz simples. Os diagramas exteriores que não contem raízes imaginárias são  $A_{II}2$ ,  $D_{II}3$  e  $E_6 III1$ .



Os restantes diagramas exteriores são:

- $A_{II}1$  é admissível.

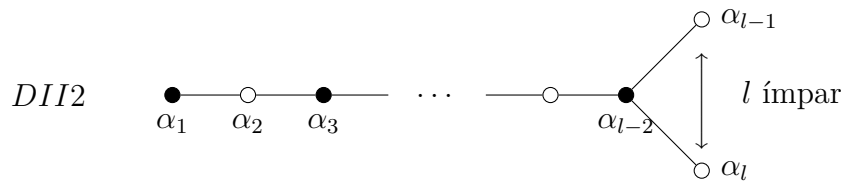


Para este diagrama se  $a_j, a_k \in \Sigma_{co}$  são tais que  $a_j \longleftrightarrow \alpha_k$  e nenhuma delas está ligada a uma raiz imaginária, então temos que  $\overline{\alpha_j} = \alpha_k$ , pelo fato de que o suporte de uma raiz é conexo. Portanto, nesse caso, basta tomar  $\epsilon_{\alpha_j} = \epsilon_{\alpha_k}$ . Já se elas estão ligadas a raízes imaginárias então temos

$$\overline{\alpha_j} = \alpha_k + (\alpha_{j+1} + \alpha_{j+2} + \cdots + \alpha_{L-j}) = \alpha_k + \gamma$$

com  $\gamma$  raiz. Assim, pode-se tomar  $\epsilon_{\alpha_j}$  arbitrário e  $\epsilon_{\alpha_k}$  de tal forma que a condição  $C3$  é satisfeita para  $\alpha_k$  e  $\gamma$ .

- O diagrama  $DII2$  é admissível



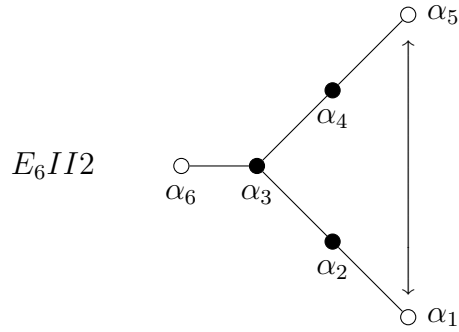
as raízes tem um comportamento como em  $AI2$ , exceto pelas raízes  $\alpha_{l-1}$  e  $\alpha_l$ , mas temos que

$$\overline{\alpha_{l-1}} = \alpha_l + \alpha_{l-2}$$

logo  $\overline{\alpha_{l-1}} - \alpha_l$  é raiz e a escolha de  $\epsilon_{\alpha_{l-1}}$  e  $\epsilon_{\alpha_l}$  pode ser feita de maneira compatível com  $C3$ .

- O diagrama  $E_6II2$  é admissível





Temos então que  $\alpha_6$  é ligado a uma componente conexa de  $\Sigma_-$  de tipo  $A_3$  dada por  $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ . A matriz de Cartan de  $A_3$  é

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é dada por

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Agora, considerando o dobro da segunda coluna da matriz inversa, temos que

$$\overline{\alpha_6} = \alpha_6 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$$

e tomando  $\gamma = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$  e  $\delta = \alpha_3$  temos que o primeiro item do lema 10.9, e então  $\epsilon_{\alpha_6} \epsilon_{\overline{\alpha_6}} = 1$ . Por outro lado temos que

$$\overline{\alpha_1} = \alpha_5 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

pois o suporte de  $\overline{\alpha_1}$  é a base do diagrama. Assim, temos que  $\overline{\alpha_1} - \alpha_5$  é raiz e é possível tomar  $\epsilon_{\alpha_1}$  e  $\epsilon_{\alpha_5}$  compatíveis com  $C_3$ .

## Referências bibliográficas

- [1] K. Erdmann e M.J. Wildon, *Introduction to lie algebras*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer London, 2006.
- [2] V.S. Varadarajan, *Lie groups, lie algebras, and their representations*, Prentice-Hall series in modern analysis, Prentice-Hall, 1974.
- [3] J. Humphreys, *Introduction to lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1994.
- [4] G.A. Jones e J.P. Serre, *Complex semisimple lie algebras*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [5] R.W. Carter, *Lie algebras of finite and affine type*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. v. 13, Cambridge University Press, 2005.
- [6] Luis A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, 1999.
- [7] S. Helgason, *Differential geometry, lie groups, and symmetric spaces*, Crm Proceedings & Lecture Notes, American Mathematical Society, 2001.
- [8] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover books on advanced mathematics, Dover, 1979.
- [9] Y. Félix, J. Oprea, e D. Tanré, *Algebraic models in geometry*, Oxford graduate texts in mathematics, Oxford University Press, 2008.
- [10] D.H. Sattinger e O.L. Weaver, *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry, and mechanics*, Applied Mathematical Sciences, Springer New York, 2013.