Victor Jorge Lima Galvão Rosa

**Modelo Harmônico Estocástico para as
Flutuações de Preço**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da PUC-Rio como requisito parcial para
obtenção do título de Doutor em Física.

Orientadora: Prof. Rosane Riera Freire

Rio de Janeiro
Abril de 2016

Victor Jorge Lima Galvão Rosa

**Modelo Harmônico Estocástico para as
Flutuações de Preço**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da PUC-Rio como requisito parcial para
obtenção do título de Doutor em Física. Aprovada
pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Rosane Riera Freire

Orientadora

Departamento de Física – PUC-Rio

Prof. Paulo Murilo Castro de Oliveira

UFF

Prof. Luca Moriconi

UFRJ

Prof. Marcelo Byrro Ribeiro

UFRJ

Prof. Fernando Fagundes Ferreira

USP

Prof. Marcio da Silveira Carvalho

Coordenado Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de abril de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e da orientadora.

Victor Jorge Lima Galvão Rosa

Graduou-se Licenciado em Física no ano de 2008 e Bacharel em Física no ano de 2009, pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Obteve o título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-graduação em Física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro em setembro de 2011, onde estudou Caos em Sistemas Hamiltonianos. Atualmente está cursando o Doutorado em Física pelo programa de pós-graduação da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, cuja ênfase é Física Estatística aplicada ao mercado financeiro.

Ficha Catalográfica

Rosa, Victor Jorge Lima Galvão

Modelo harmônico estocástico para as flutuações de preço /
Victor

Jorge Lima Galvão Rosa ; orientadora: Rosane Riera Freire. –
2016

168 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio
de Janeiro, Departamento de Física, 2016.

Inclui bibliografia

1. Física – Teses. 2. Oscilador harmônico estocástico. 3.
Ruído multiplicativo. 4. Ruído dicotômico. 5. Processo não-
Markoviano. 6. Econofísica. I. Freire, Rosane Riera. II.
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
Departamento de Física. III. Título.

CDD: 530

Para minha mãe, Jeanine pelo carinho e tempo dedicados em minha criação.
Para minha orientadora, Rosane, por acreditar em meu potencial.
Em memória de meu pai, Jorge e meu primo, José Mario.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Rosane Riera Freire, pelo estímulo e MUITA paciência e parceria para a realização deste trabalho.

Ao CNPq (processo 142496/2013-8) e à CAPES, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

À todos os meus amigos da Física UERJ, em especial aos amigos Anderson Ribeiro e Marcos Vinicius Colaço Gonçalves por me apoiarem (através de alguns puxões de orelha - SNEF 2009) na minha decisão de ingressar na pós graduação. Gostaria de agradecer ao professor Henrique Pereira de Oliveira por me orientar no mestrado. Agradeço também ao amigo Bruno Fernando Inchausp Teixeira (Maricá) por ter me aconselhado durante esta ultima fase da conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos Thales Mattos, Rodolpho Cabral e Thiago de Mattos por todo apoio, paciência e compreensão.

À minha mãe, pela educação, atenção e carinho de todas as horas.

Ao professor João Batista Garcia Canalle por me apoiar desde a minha graduação.

Aos meus colegas da PUC-Rio, Carlos Olivares, Marlon Ramos, Lucianno Defaveri, Michael Candido, Eduardo Colombo, pela ajuda que sempre ofereceram e pelas conversas no Bandeirão. Não posso deixar de agradecer à Giza por sempre ser atenciosa comigo.

A todos os amigos e familiares, em particular a minha tia e professora Norma Galvão, que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

Resumo

Rosa, Victor Jorge Lima Galvão; Freire, Rosane Riera. **Modelo Harmônico Estocástico para as Flutuações de Preço**. Rio de Janeiro, 2016. 168p. Tese de Doutorado - Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Consideramos o oscilador harmônico com amortecimento aleatório em presença de ruído externo. Os ruídos, representando perturbações externas e internas, são modelados pelo processo de Ornstein-Uhlenbeck ou ruído branco e pelo processo dicotômico ou ruído branco, respectivamente. Usando técnicas de sistemas dinâmicos, analisamos o valor médio e a dispersão da posição e da velocidade do oscilador harmônico estocástico, apresentando resultados analíticos e numéricos. Em particular, obtemos expressões para a expansão de baixa-ordem em relação ao tempo de correlação da perturbação interna, no caso da atuação do ruído dicotômico. Finalmente, usando o modelo de oscilador harmônico com amortecimento aleatório como referência, investigamos a série intradiária de preços do mercado brasileiro.

Palavras-chave

Oscilador Harmônico Estocástico; Ruído Multiplicativo; Ruído Dicotômico; Processo não-Markoviano; Econofísica.

Abstract

Rosa, Victor Jorge Lima Galvão; Freire, Rosane Riera (Advisor). **Stochastic Harmonic Model for Price Fluctuations**. Rio de Janeiro, 2016. 168p. D.Sc Thesis - Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We consider the random damping harmonic oscillator in presence of external noise. The noises, representing external and internal perturbations, are modeled as an Ornstein-Uhlenbeck process or a white noise and as a dichotomous process or a white noise, respectively. Using dynamical systems tools, we analyze the expected value as well as the dispersion of the stochastic harmonic oscillator's position and velocity, presenting analytical and numerical results. In particular, we also provide expressions for the low-order expansion in the correlation time of the internal perturbation, in the case the dichotomous noise is at play. Using random damped harmonic oscillator model as a reference, we conclude by investigating the intra-day Brazilian stock price series.

Keywords

Stochastic Harmonic Oscillator; Multiplicative Noise; Dichotomous Noise; non-Markovian Process; Econophysics.

Sumário

1. Introdução	19
2. Conceitos básicos	22
2.1. Equações de Langevin	22
2.1.1. EL em sistemas com memória não-local	22
2.1.2. EL: Aproximação Markoviana	26
2.1.3. Ruído aditivo generalizado	26
2.2. Processo Markoviano de dois estados e Ruído Dicotômico	28
2.3. O procedimento de Furutzu-Novikov-Shapiro-Loginov.	33
2.3.1. Dedução do procedimento de FNSL para ruídos gaussianos com covariância em forma exponencial	34
2.3.2. Dedução geral do procedimento FNSL para processos aleatórios com covariância em forma exponencial.	35
3. Oscilador harmônico amortecido com ruído aditivo	38
3.1 Oscilador com ruído aditivo colorido: análise através de funções de Green	38
3.2 Oscilador com ruído aditivo colorido: análise através de sistemas dinâmicos	43
3.3 Diferentes regimes de dependência temporal da variância de acordo com a magnitude relativa das escalas temporais características	52
3.4 Considerações energéticas para o problema do oscilador com ruído aditivo	61
3.4.1 Considerações energéticas: ruído aditivo branco	61
3.4.2 Considerações energéticas: ruído Gaussiano colorido	63
4. Oscilador com amortecimento aleatório sujeito a ruído aditivo	66
4.1. Análise dos casos I e II	69
4.1.1. Casos I e II: valores médios de $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle \equiv \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$	69

4.1.2. Casos I e II: variâncias $\langle[\varphi-\langle\varphi\rangle]^2\rangle$ e $\langle[y-\langle y\rangle]^2\rangle$	75
4.2. Análise do caso III	91
4.2.1. Caso III: valor médio de $\langle\varphi(t)\rangle$ e $\langle y(t)\rangle \equiv \langle\dot{\varphi}(t)\rangle$	91
4.2.2. Caso III: variâncias $\langle[\varphi-\langle\varphi\rangle]^2\rangle$ e $\langle[y-\langle y\rangle]^2\rangle$	101
4.3. Resumo dos resultados para o oscilador com amortecimento aleatório	106
4.4. Diferentes regimes de dependência temporal da variância de acordo com a magnitude relativa das escalas temporais características	113
4.5. Considerações energéticas para o oscilador com amortecimento estocástico sujeito a ruído aditivo	128
5. Aplicação de modelo harmônico estocástico ao mercado financeiro	134
5.1. Modelagem para a dinâmica dos preços intradiários	134
5.2. Análise estatística do Ibovespa	140
5.3. Ajuste do modelo teórico aos dados do Ibovespa	145
6 Conclusões e perspectivas futuras	152
7 Referências bibliográficas	156
8 Apêndices	159
8.1. Demonstração da autocorrelação de ruído colorido Gaussiano a partir de um processo de Ornstein-Uhlenbeck	159
8.2. Obtenção da eq.(2.1.1.8)	160
8.3. Obtenção da matriz de probabilidade de transição do processo Markoviano de dois estados	160
8.4. Dedução da correlação estacionária do processo Markoviano de dois estados	161
8.5. Obtenção da eq.(3.1.8b)	162
8.6. Dedução da variância $\langle[\varphi-\langle\varphi\rangle]^2\rangle$ para o oscilador sujeito a ruído aditivo colorido no regime de tempo de correlação longo	164
8.7. Exemplificação numérica da resolução do sistema de	

equações dada pela eq.(4.1.2.4a)	166
8.8. Exemplificação numérica da resolução do sistema de equações dada pela eq.(4.1.2.8b)	166
8.9. Exemplificação numérica da resolução do sistema de equações dada pela eq.(4.2.2.3)	167

Lista de figuras

Figura 1 – Processo Markoviano de dois estados em função do tempo. 30

Figura 2 – Gráfico de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ calculado pelas expressões 3.1.10, para $\lambda_a = 0,1$ e $\sigma_a = 1$. No caso subamortecido (vermelho) foram utilizados os valores $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$. No caso superamortecido (azul) $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 1,1$. Após um regime transiente, as expressões tendem ao regime estacionário. 41

Figura 3 – Gráfico de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso de ruído branco (em preto) e de ruído colorido (ver legenda) para $D_a = 10$, $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$. Os parâmetros de ruído colorido satisfazem a $\sigma_a^2/\lambda_a = D_a$. 42

Figura 4 – Correlações $\langle \zeta \varphi \rangle$ e $\langle \zeta y \rangle$ nos casos subamortecido ($\gamma = 0,9$ em preto) e superamortecido ($\gamma = 1,1$ em vermelho). Os parâmetros comuns são $\omega_0 = 1$, $\sigma_a = 1$ e $\lambda_a = 0,1$. 48

Figura 5 – Correlações $\langle \zeta \varphi \rangle$ e $\langle \zeta y \rangle$ nos casos subamortecido (preto) e superamortecido (vermelho), com parâmetros de amortecimento iguais aos da figura anterior. $\omega_0 = 1$, $\sigma_a = 1$ e $\lambda_a = 1$. 48

Figura 6 – Gráfico de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ calculado através do sistema de equações (3.2.10), para $\lambda_a = 0,1$, $\sigma_a = 1$, $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$. 50

Figura 7 – Gráfico de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ calculado através do sistema de equações (3.2.10), para $\lambda_a = 1$, $\sigma_a = 1$, $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$. 50

Figura 8 – Gráfico de $\langle [y - \langle y \rangle][\varphi - \langle \varphi \rangle] \rangle$ calculado através do sistema de equações (3.2.10), para $\lambda_a = 0,1$, $\sigma_a = 1$, $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$. 51

Figura 9 – Gráfico comparativo de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para os casos I e II. Caso I (em azul): $\tau_0 \ll \tau_r \ll \tau_{ef}$ ($\tau_0 = 1$, $\tau_r = 10$, $\tau_{ef} = 50$, $\lambda_a = 0,02$; $\sigma_a = 0,014$, $D_a = 0,01$). Caso II (em vermelho): $\tau_0 \ll \tau_{ef} \ll \tau_r$ ($\tau_0 = 1$, $\tau_{ef} = 10$ ($\lambda_a = 0,1$), $\tau_r = 50$; $\sigma_a = 0,032$, $D_a = 0,01$). 56

Figura 10 – Gráfico comparativo de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para os casos III e IV.

Caso III (em azul): $\tau_{ef} \ll \tau_r \ll \tau_0$ ($\tau_{ef} = 1$ ($\lambda_a = 1$), $\tau_r = 10$, $\tau_0 = 50$, $\sigma_a = 0,01$, $D_a = 0,01$). Caso IV (em vermelho): $\tau_r \ll \tau_{ef} \ll \tau_0$ ($\tau_r = 1$, $\tau_{ef} = 10$ ($\lambda_a = 0,1$), $\tau_0 = 50$; $\sigma_a = 0,032$, $D_a = 0,01$). 58

Figura 11 – Gráfico comparativo de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para os casos V e VI. Caso

V (em vermelho): $\tau_{ef} \ll \tau_0 \ll \tau_r$ ($\tau_{ef} = 1$ ($\lambda_a = 1$), $\tau_0 = 10$, $\tau_r = 50$; $\sigma_a = 0,01$, $D_a = 0,01$). Caso VI (em azul): $\tau_r \ll \tau_0 \ll \tau_{ef}$ ($\tau_r = 1$, $\tau_0 = 10$, $\tau_{ef} = 50$ ($\lambda_a = 0,02$); $\sigma_a = 0,014$, $D_a = 0,01$). 60

Figura 12 – Ilustração do comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para parâmetros $\tau_r = 1$, $\tau_{ef} = 2$, $\tau_0 = 4$ ($\sigma_a = 0,07$ e $\lambda_a = 0,5$). 61

Figura 13 – Gráfico de $\langle E \rangle$, $\langle W_\zeta \rangle$, $\langle W_{diss} \rangle$ e $\langle W \rangle$ para parâmetros $\gamma = 1,1$, $\omega_0 = 1$, $\lambda_a = 0,1$ e $\sigma_a = 1$ (ver legenda). 65

Figura 14 – Comportamento de $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle$ nos casos de ruídos descorrelacionados I e II . São exemplificados os regimes superamortecido ($D_m < D_m^{CRIT}$), subamortecido ($D_m^{CRIT} < D_m < 1/2\gamma$), criticamente amortecido ($D_m = D_m^{CRIT}$) e instável ($D_m > 1/2\gamma$). Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$ ($D_m^{CRIT} = 0,0625$). 73

Figura 15 – Análise de estabilidade energética - gráfico de $\langle \varphi^2 \rangle$ e $\langle y^2 \rangle$ para $D_a = 0$ e diferentes amplitudes de ruído multiplicativo D_m mostrados na legenda. Parâmetros $\gamma = 2$ e $\omega_0 = 1,5$ ($D_m^* = 0,125$). Ensemble inicial $\langle \varphi^2(0) \rangle = 0$ e $\langle y^2(0) \rangle = 25 \cdot 10^{-6}$. É possível notar a convergência para valores não nulos se $D_m \geq D_m^*$. 80

Figura 16 – Análise de estabilidade energética - gráfico de $\langle \varphi^2 \rangle$ e $\langle y^2 \rangle$ para $D_a = 0$ e diferentes parâmetros γ , ω_0 associados ao valor limite $D_m^* = 0,125$ (ver legenda). Neste caso, independentemente do valor dos parâmetros, os momentos quadráticos convergem para valores finitos não nulos. 81

Figura 17 – Variância $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para parâmetros $\omega_0 = 1,5$ e $\gamma = 2$ e $D_a = 0,1$. A) distribuição inicial $(\varphi_0, y_0) = (0,0)$. B) distribuição inicial $(\varphi_0, y_0) = (1,0)$. 82

Figura 18 – Ilustração do comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ quando variamos as condições iniciais (ver legenda). Os parâmetros utilizados são $\omega_0 = 1,5$ e $\gamma = 2$, $D_a = 0,1$ e $D_m = 0,06$. 83

Figura 19 – Diagrama de regimes dos casos I e II (ver texto). 86

Figura 20 – Ilustração do colapso das curvas de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada t' , segundo mudança de ω_0 (ver legenda). Os parâmetros reescalados são $x = 0,75$, $D_m = 0,09$, $D_a = 0,03$ e $T_a = 0,1$. A condição inicial é $(\varphi'_0; y'_0) = (0; 1/\omega_0)$. 88

Figura 21 – Ilustração do colapso das curvas de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada t' , segundo mudança de ω_0 (ver legenda). Os parâmetros reescalados são $x = 0,75$, $D_m = 0,09$, $D_a = 0,03$ e $T_a = 2$. A distribuição inicial é $(\varphi'_0; y'_0) = (0; 1/\omega_0)$. 88

Figura 22 – Ilustração do colapso das curvas de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada t' , segundo mudança de ω_0 (ver legenda). Mesmos parâmetros reescalados da figura 20. Distribuição inicial $(\varphi'_0; y'_0) = (0; 0,005/\omega_0)$. 89

Figura 23 – Ilustração do colapso das curvas de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada t' , segundo mudança de ω_0 (ver legenda). Mesmos parâmetros reescalados da figura 21. Distribuição inicial $(\varphi'_0; y'_0) = (0; 0,005/\omega_0)$. 89

Figura 24 – Ilustração da mudança do comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ quando variamos o tempo característico reescalado T_a (ver legenda). A distribuição inicial e os outros parâmetros reescalados são os mesmos das figuras 20 e 21. O limite de ruído branco é mostrado para comparação ($T_a = 0$). 90

Figura 25 – Diagrama de regimes de $\langle \varphi(t) \rangle$ e limite de estabilidade para $x_1 = 0,25$ (cor preta), $x_2 = 0,5$ (cor azul) e $x_3 = 0,75$ (cor vermelha). É possível notar o aumento tanto da região superamortecida quanto da região subamortecida para os três valores de x considerados. 96

Figura 26 – Comparação da solução exata de $\langle \varphi(t') \rangle$ (linhas cheias) com

a aproximação de primeira ordem para T_m (caracteres), na variável temporal reescalada t' . Os parâmetros originais são $\omega_0 = 1,5$ e $\gamma = 2$ (parâmetro reescalado $x = 0,75$). Foram considerados $D_m = 0,1$ e diferentes valores de T_m , mostrados na legenda. As condições iniciais da equação original são $\varphi_0^* = 0$ e $y_0^* = y_0 \omega_0$, com $y_0 = 0,005$. 98

Figura 27 – Comparação da solução exata de $\langle \varphi(t') \rangle$ (linhas cheias) com a aproximação de primeira ordem para T_m (caracteres). Os parâmetros originais são $\omega_0 = 1,5$, $\gamma = 2$ (parâmetro reescalado $x = 0,75$). Foram considerados $D_m = 0,1$ e $T_m = 0,25$. As condições iniciais da equação original são $\varphi_0^* = 0$ e $y_0^* = \omega_0 y_0$, com $y_0 = 0,005$, $y_0 = 0,05$ e $y_0 = 0,5$ (ver legenda). 99

Figura 28 – Comparação da solução exata de $\langle \varphi(t') \rangle$ (linhas cheias) com a aproximação de primeira ordem em T_m (caracteres) para $D_m = 0,1$. Variando-se ω_0 , foram considerados diferentes valores de x e de $T_m = 0,2 x$, mostrados na legenda. As condições iniciais da equação original são $\varphi_0^* = 0$ e $y_0^* = \omega_0 y_0$, com $y_0 = 0,005$. 100

Figura 29 – Comparação da solução exata de $\langle \varphi(t') \rangle$ (linhas cheias) com a aproximação de primeira ordem para $T_m = 0,1 x$ (caracteres). Foram considerados $x = 0,5$ e diferentes valores de D_m , mostrados na legenda. As condições iniciais da equação original são $\varphi_0^* = 0$ e $y_0^* = \omega_0 y_0$, com $y_0 = 0,005$. 100

Figura 30 – Comportamento de D_m^* em função de τ_m para diferentes valores da razão $x \equiv \omega_0 \gamma$. Para efeito de comparação, temos $\omega_0 = 1$. 105

Figura 31 – Diagrama de fases para o caso III (vermelho) em comparação com os casos I e II (preto). A curva $D_m^{\text{CRIT}}(T_m, x)$ separa os regimes sub (I) e super (II) amortecidos. A curva $D_m^*(T_m, x)$ separa estes regimes da região energeticamente instável (III). As curvas tracejadas representam os resultados fora do limiar da aproximação. $\gamma \tau_m \ll 1$. 106

Figura 32 – Diagrama de equações para obtenção de $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle$ como função do tempo de correlação do ruído multiplicativo

(ver texto).

107

Figura 33 – Comportamento de $\langle \varphi(t) \rangle$ para regimes de tempo de correlação ultracurtos, curtos, intermediários e longos com ensemble inicial localizado em ($\langle \varphi(t=0) \rangle = 0$, $\langle y(t=0) \rangle = 0,01$). Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0=2.1$, $D_m = 0.1$.

109

Figura 34 – Comportamento de $\langle \varphi(t) \rangle$ para regimes de tempo de correlação ultracurtos, curtos, intermediários e longos com ensemble inicial localizado em ($\langle \varphi(t=0) \rangle = 0$, $\langle y(t=0) \rangle = 0,01$). Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0=2.1$, $D_m = 0.1$.

109

Figura 35 – Diagrama de equações para obtenção de $\langle \varphi^2 \rangle$ e $\langle y^2 \rangle$ como função do tempo de correlação do ruído multiplicativo (ver texto).

110

Figura 36 – Perfis característicos de $\langle \varphi^2(t) \rangle$ para regimes de tempo de correlação ultracurtos, curtos, intermediários e longos com ensemble inicial localizado em ($\langle \varphi(t=0) \rangle = 0$, $\langle y(t=0) \rangle = 0,01$). Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0=2.1$, $D_m = 0.1$, $D_a = 0.01$.

111

Figura 37 – Perfis característicos de $\langle y^2(t) \rangle$ para regimes de tempo de correlação ultracurtos, curtos, intermediários e longos com ensemble inicial localizado em ($\langle \varphi(t=0) \rangle = 0$, $\langle y(t=0) \rangle = 0,01$). Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0=2.1$, $D_m = 0.1$, $D_a = 0.01$.

111

Figura 38 – Perfis transientes de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para diferentes ensembles localizados. Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0=1.5$, $D_m = 0.11$, $\tau_m = 1$, $D_a = 0.1$.

112

Figura 39 – Perfis transientes de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ para diferentes ensembles localizados. Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0=1.5$, $D_m = 0.11$, $\tau_m = 1$, $D_a = 0.1$.

112

Figura 40 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para τ_m muito maior do que as outras escalas temporais. Os parâmetros utilizados são: $\gamma = 2$ ($\tau_r = 0,5$), $\omega_0 = 1,5$ ($\tau_0 = 4,2$), $\lambda_m = 0,01$ ($\tau_m = 100$), $\sigma_m = 0,02$ ($D_m = 0,05$) e $D_a = 0,01$.

115

Figura 41 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso I: $\tau_0 \ll \tau_r \ll \tau_m$

($\tau_0 = 1$, $\tau_r = 10$, $\tau_m = 100$, $\lambda_m = 0,01$, $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura. 118

Figura 42 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso II: $\tau_0 \ll \tau_m \ll \tau_r$ ($\tau_0 = 1$, $\tau_m = 10$, $\lambda_m = 0,1$, $\tau_r = 100$, $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura. 119

Figura 43 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso III: $\tau_m \ll \tau_r \ll \tau_0$ ($\tau_m = 1$, $\lambda_m = 1$, $\tau_r = 10$, $\tau_0 = 100$; $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura. 122

Figura 44 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso IV: $\tau_r \ll \tau_m \ll \tau_0$ ($\tau_r = 1$, $\tau_m = 10$, $\lambda_m = 0,1$, $\tau_0 = 100$, $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura. 124

Figura 45 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso V: $\tau_m \ll \tau_0 \ll \tau_r$ ($\tau_m = 1$, $\lambda_m = 1$, $\tau_0 = 10$, $\tau_r = 100$, $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura. 125

Figura 46 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso VI: $\tau_r \ll \tau_0 \ll \tau_m$ ($\tau_r = 1$, $\tau_0 = 10$, $\tau_m = 100$, $\lambda_m = 0,01$, $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura. 127

Figura 47 – Perfis do regime transiente (obtidos numericamente) para a $\langle E \rangle$ para diferentes valores do parâmetro D_m . Foram utilizados ensembles localizados na origem do espaço de fase. Os parâmetros são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$, $D_a = 0,1$, $\lambda_m = 0,1$ ($D_m^* = 10,24$; $\sigma_m^* = 1,01$). 129

Figura 48 – Regime transiente (obtidos numericamente) para a potência total $\langle P \rangle$, para diferentes valores do parâmetro D_m . Foram utilizados

ensembles localizados na origem do espaço de fase. Os parâmetros são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$, $D_a = 0,1$, $\lambda_m = 0,1$ ($D_m^* = 10,24$; $\sigma_m^* = 1,01$). 130

Figura 49 – Perfis do regime transiente (obtidos numericamente) para $\langle W \rangle$ e $\langle E \rangle$ para diferentes valores do parâmetro D_m . Foram utilizados ensembles localizados na origem do espaço de fase. Os parâmetros são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$, $D_a = 0,1$, $\lambda_m = 0,1$ ($D_m^* = 10,24$; $\sigma_m^* = 1,01$). 131

Figura 50 – Perfis do regime transiente (obtidos numericamente) para $\langle P_{DISS} \rangle$ em curvas cheias, quando $D_m = D_m^*(\gamma, \omega_0, \lambda_m)$, variando-se λ_m (ver legenda). Os casos limítrofes (obtidos analiticamente) mencionados no texto estão ilustrados por $\lambda_m = 0$ (quase determinístico) e $\lambda_m = \infty$ (ruído branco). Os parâmetros são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 2$, $D_a = 0,1$. 132

Figura 51 – Ilustração de uma configuração do *order-book* caracterizada pelo número N de ordens de compra (em vermelho) e ordens de venda (em azul) ao longo do eixo de preços. A faixa de preços correspondente ao nível interno está mostrada em cinza. Após Δt , a configuração do *order-book* é modificada. 135

Figura 52 – Série temporal de $\langle X(t) \rangle$ (intervalos de 1 min) para os anos de 2006 (preto), 2007 (vermelho), 2008 (azul) e biênio 2006-2007 (marrom). 142

Figura 53 – Série temporal de $SD(X(t))$ (intervalos de 1 min) para os anos de 2006 (preto), 2007 (vermelho), 2008 (azul) e biênio 2006-2007 (marrom). 143

Figura 54 – Série temporal de $\langle R(t) \rangle$ (intervalos de 1 min) para os anos de 2006 (preto), 2007 (vermelho), 2008 (azul) e biênio 2006-2007 (marrom). 143

Figura 55 – Série temporal de $SD(R(t))$ (intervalos de 1 min) para os anos de 2006 (preto), 2007 (vermelho), 2008 (azul) e biênio 2006-2007 (marrom). 144

Figura 56 – Série temporal intradiária de $\langle X(t) \rangle$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo. 146

Figura 57 – Série temporal intradiária de $\langle X(t) \rangle$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo. 146

Figura 58 – Série temporal intradiária de $SD(X(t))$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo. 147

Figura 59 – Série temporal intradiária de $SD(X(t))$ no biênio 2006- 2007 e ajuste do modelo. 147

Figura 60 – Série temporal intradiária de $\langle R(t) \rangle$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo. 148

Figura 61 – Série temporal intradiária de $\langle R(t) \rangle$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo. 148

Figura 62 – Série temporal intradiária de $SD(R(t))$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo. 149

Figura 63 – Série temporal intradiária de $SD(R(t))$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo. 149

Figura 64 – Gráfico comparativo da variância $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ entre a solução exata (em azul) e solução de força constante dada pela eq.(8.6.4) (em vermelho). Parâmetros $\sigma_a = 0,01$, $\omega_0 = 6,28$, $\gamma = 0,1$. Primeiro painel: $\lambda_a = 0,02$ (apenas para a solução exata). Segundo painel: o limite $\lambda_a \rightarrow 0$ para a solução exata coincide com a solução de força constante. 165

1

Introdução

O grande interesse nos modelos de oscilador harmônico estocástico surge do fato de serem boas aproximações para diversas aplicações, que podem ser encontradas não só em Física, mas também em Química, Engenharias além das ciências econômicas e sociais [1, 2 (e referências nele contidas), 3].

Sabe-se que qualquer partícula sujeita a um potencial confinante exhibe comportamento oscilatório na vizinhança de pontos de equilíbrio estáveis que podem ser aproximados por um potencial harmônico. O oscilador harmônico estocástico é uma alternativa para descrever tais sistemas na presença de fontes ruidosas. O ruído estocástico é utilizado com o intuito de modelar os graus de liberdade desconhecidos, em geral associados a modos rápidos. Neste caso, espera-se extrair informação relevante do sistema em um nível estatístico. Um exemplo simples de oscilador harmônico estocástico é considerar uma partícula na qual atua, além de uma força restauradora, uma força de resistência devida ao meio no qual esta partícula está inserida e uma força motriz aleatória. A equação de movimento para esta partícula descreve o Movimento Browniano e é extensamente conhecida na literatura.

O exemplo anterior caracteriza-se por um oscilador sujeito a ruído aditivo. Outra forma de tratar o efeito de fontes ruidosas sobre o oscilador harmônico é através de ruídos multiplicativos, considerando-se flutuações nos parâmetros que o compõem. Assim, obtêm-se modelos com frequência aleatória, amortecimento aleatório ou massa aleatória [4 (e referências nele contidas), 5]. Tais modelos, quando sujeitos a sinais periódicos podem exibir propriedades novas interessantes, dentre as quais podemos destacar o fenômeno de ressonância estocástica [6, 7, 8], no qual a amplitude do sinal de resposta apresenta dependência não-monotônica em relação aos parâmetros do ruído.

Neste trabalho, faremos análises de osciladores harmônicos estocásticos, em particular do oscilador com amortecimento aleatório sujeito a uma força motriz

também aleatória, para o qual existem poucos resultados na literatura [5]. Este modelo possui duas fontes estocásticas, uma aditiva (força motriz aleatória) e uma multiplicativa (amortecimento aleatório) e, portanto, sistemas sujeitos a ruído aditivo e multiplicativo em geral são complexos em sua análise. Vamos apresentar, na presente tese, algumas contribuições exatas e outras aproximadas para o comportamento transiente dos primeiros e segundos momentos dos observáveis físicos (posição e velocidade) desses osciladores.

Nosso objeto de aplicação destes modelos será na análise das oscilações dos preços do mercado financeiro. As regras do mercado são bem estáveis e os ciclos macroeconômicos persistem por anos, sendo interrompidos por acontecimentos extremos raros. Desta forma, podemos considerar a existência de um regime de equilíbrio temporário dos preços, governado por um “reservatório” de informações externas com características próprias deste ciclo. Por outro lado, estas informações tem processamento idiossincrático por parte dos agentes que atuam no mercado, levando a parâmetro interno de amortecimento com caráter estocástico.

A estrutura desta tese será organizada da seguinte forma:

O capítulo 2 irá abordar os conceitos necessários para definirmos os osciladores harmônicos estocásticos. Serão introduzidas equações de Langevin generalizadas para ruídos com memória e em particular, será discutido o ruído dicotômico, que será utilizado em um dos modelos. Ainda neste capítulo, definiremos o procedimento de Furutzu-Novikov-Shapiro-Loginov, que é uma poderosa ferramenta para o cálculo de grandezas envolvendo ruído dicotômico ou Gaussiano, ambos com memória de decaimento exponencial.

O capítulo 3 discutirá o oscilador harmônico sujeito a ruído aditivo, que tem sido amplamente estudado na literatura [9, 10]. Através do método de sistemas dinâmicos, apresentaremos resultados exatos para o oscilador sujeito a ruído Gaussiano branco ou colorido, que reproduzem alguns resultados obtidos por outros métodos. A análise destes modelos servirá para introduzir o método de sistemas dinâmicos utilizado no estudo do modelo principal deste trabalho, envolvendo ruído aditivo Gaussiano e ruído multiplicativo dicotômico, que será apresentado no capítulo 4.

No capítulo 5, introduziremos uma modelagem para a formação de preços no mercado financeiro que nos leva à equação diferencial do oscilador harmônico estocástico estudado no capítulo 4. Ilustraremos a conformidade do modelo com os dados empíricos do IBOVESPA.

No capítulo 6 apresentamos as conclusões e perspectivas futuras deste estudo.

2 Conceitos básicos

2.1. Equações de Langevin

Para o estudo que será feito neste trabalho, é necessária uma breve introdução sobre Equações de Langevin (EL), que modelam uma série de fenômenos físicos.

2.1.1. EL em sistemas com memória não-local

Uma forma de descrever a evolução temporal de sistemas fora do equilíbrio é através de equações diferenciais estocásticas (EDE). Várias EDEs têm sido utilizadas para descrever sistemas físicos nas mais diversas áreas. Um sistema protótipo é o movimento Browniano de uma partícula clássica de coordenada q (massa unitária) sujeita a um potencial $V(q)$ e interagindo com um banho térmico. Este sistema é regido pela EDE:

$$\ddot{q}(t) + 2\gamma\dot{q}(t) + V'[q(t)] = \varepsilon(t) , \quad (2.1.1.1)$$

onde γ é a taxa de amortecimento, $V'[q(t)] \equiv dV/dq$ e $\varepsilon(t)$ é um ruído branco devido ao acoplamento partícula-banho térmico.

Equações deste tipo assumem que a vizinhança interage instantaneamente com a partícula. No entanto, nos sistemas reais, esta interação se processa através de intervalos de tempo finitos, fazendo surgir, consequentemente, efeitos de memória sobre as grandezas dinâmicas através dos termos de dissipação e de ruído.

Uma forma simples de descrever a interação com a vizinhança é modelar o banho térmico por osciladores harmônicos microscópicos, no qual o acoplamento

entre a partícula e o banho térmico é linear, este sistema pode ser descrito pela seguinte Hamiltoniana (omitindo-se os termos de massa):

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q) + \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \frac{\omega_j^2}{2} (q_j - c_j q)^2, \quad (2.1.1.2)$$

onde (p, q) representam a coordenada da partícula, $\{p_j, q_j\}$ são as coordenadas dos N osciladores (com frequências ω_j) que compõem o banho térmico. A integração sobre os graus de liberdade do banho leva a uma equação generalizada, com ruído colorido $\eta(t)$ e termo de dissipação descrito através do *kernel* não local $D(t - t')$ [11]:

$$\ddot{q}(t) + \int_{t_0}^t dt' D(t - t') \dot{q}(t') + V'[q(t)] = \eta(t). \quad (2.1.1.3)$$

O *kernel* $D(t - t')$ define o peso da influência do valor de $\dot{q}(t')$ do instante passado t' no valor presente $\dot{q}(t)$. É usualmente referido como o propagador do sistema. A dinâmica descrita pela equação acima torna-se assim não-Markoviana, pois acopla explicitamente a evolução presente ao passado completo.

Do ponto de vista microscópico, o acoplamento da partícula com o banho térmico determina tanto o termo de ruído quanto o termo de dissipação. Assim, a auto-correlação do ruído deve satisfazer ao teorema de flutuação-dissipação (constante de Boltzmann $k_B = 1$):

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = T D(t - t'), \quad (2.1.1.4)$$

onde $\langle \dots \rangle$ denota média sobre realizações estocásticas do ruído e T é a temperatura do banho térmico. Consideraremos aqui o *kernel* exponencial

$$D(t - t') = 2\gamma\nu \exp(-\nu|t - t'|), \quad (2.1.1.5a)$$

satisfazendo a:

$$2\gamma = \int_{-\infty}^t dt' D(t-t') . \quad (2.1.1.5b)$$

Assim, $\tau_c = 1/\nu$ define o tempo de correlação do banho térmico e γ define a magnitude da dissipação.

O ruído colorido $\eta(t)$ com autocorrelação definida pela eq.(2.1.1.4) com *kernel* exponencial eq.(2.1.1.5a) pode ser obtido a partir de um processo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck (OU) [12] (ver apêndice 8.1):

$$\dot{\eta}(t) = -\nu[\eta(t) - 2\sqrt{\gamma T}\zeta(t)], \quad (2.1.1.6a)$$

onde o ruído auxiliar $\zeta(t)$ é um ruído branco Gaussiano padronizado que satisfaz a:

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \delta(t-t') . \quad (2.1.1.6b)$$

Conforme mencionado, a eq.(2.1.1.3) surge a partir do acoplamento linear sistema-banho e as flutuações resultantes são aditivas e a dissipação é linear.

Considerando acoplamento sistema- banho não linear através da função $\chi(q)$:

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q) + \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \frac{\omega_j^2}{2} (q_j - c_j \chi(q))^2 , \quad (2.1.1.7)$$

obtem-se, através de procedimento análogo, a equação de Langevin generalizada [13]:

$$\ddot{q}(t) + \chi'(q(t)) \int_{t_0}^t dt' D(t-t') \chi'(q(t')) \dot{q}(t') + V'[q(t)] = \chi'(q(t)) \eta(t) \quad (2.1.1.8)$$

com $\chi'(q)$ representando a derivada em relação a coordenada q . A generalização desse formalismo para acoplamento não linear leva portanto à existência de flutuações multiplicativas e termo de dissipação não-linear.

A equação de Langevin generalizada (EG) para descrever a dinâmica de um sistema representado pela variável ϕ , com acoplamento não linear do tipo ϕ^{n+1} , leva à EDE não-Markoviana [14]:

$$\ddot{\phi}(t) + \phi^n(t) \int_{t_0}^t dt' \phi^n(t') D(t-t') \dot{\phi}(t') + V'(\phi) = \phi^n(t) \xi(t), \quad (2.1.1.9)$$

(com $n = 0, 1, 2 \dots$), onde t_0 é um tempo inicial, $D(t-t')$ é um *kernel* de dissipação não local.

Pode-se mostrar (ver Apêndice 8.2) que o termo de dissipação $\Gamma(t) = \int_{t_0}^t dt' \phi^n(t') D(t-t') \dot{\phi}(t')$ com *kernel* exponencial apresenta a seguinte propriedade:

$$\dot{\Gamma}(t) = -\nu \Gamma(t) + \phi^n(t) D(0) \dot{\phi}(t). \quad (2.1.1.10)$$

O caso $n = 0$ fornece a equação padrão com ruído aditivo, análogo a eq. 2.1.1.3, enquanto $n = 1, 2, \dots$ representam EDEs com ruído multiplicativo.

Em geral, consideram-se potenciais da forma (polinômio de grau p):

$$V(\phi) = -\Lambda_0 \phi^1 + \frac{\omega_0^2}{2} \phi^2 + \delta_0 \phi^p, \quad (2.1.1.11)$$

onde ω_0 está associada à frequência característica do sistema (na aproximação harmônica) e δ_0 fornece o grau de não linearidade da força de reversão.

Equações não lineares como a eq.(2.1.1.9) são de difícil resolução, só havendo solução analítica para as quantidades médias (sobre realizações do ruído) no caso da forma linear, onde $n = 0$ (ruído aditivo) e para potencial harmônico ($\delta_0 = 0$). Portanto, nos casos mais gerais, onde $V(\phi)$ é um polinômio de grau maior do que dois ou a EDE é não linear, devemos utilizar soluções analíticas aproximadas ou métodos numéricos.

2.1.2.**EL: Aproximação Markoviana**

Na aproximação Markoviana, todos os efeitos de memória finita são desprezados ($\nu \rightarrow \infty$) e o *kernel* eq.(2.1.1.4), se transforma em:

$$D(t - t') = 4\gamma\delta(t - t') , \quad (2.1.2.1)$$

O termo de dissipação não local da eq.(2.1.1.9) é substituído por um local de magnitude 2γ .

$$\ddot{\phi}(t) + 2\gamma\phi^{2n}(t)\dot{\phi}(t) + V'(\phi) = \phi^n(t)\xi(t) . \quad (2.1.2.2)$$

Quando o tempo de correlação do *kernel* $\tau_c = 1/\nu$ é muito menor que a escala temporal de observação, espera-se que a aproximação de memória local seja válida. Da mesma forma, para tempos suficientemente longos, quando os efeitos de memória já se tornaram amortecidos, esta apresentação pode também representar a dinâmica do sistema, ou seja, ambas as dinâmicas devem ter o mesmo estado assintótico.

No entanto, de acordo com os parâmetros do sistema, este regime pode ser obtido apenas para escalas temporais inacessíveis empiricamente. Neste caso, os efeitos de memória afetam a dinâmica de modo significativo, tornando imprescindível a análise do regime de memória não-Markoviana.

De forma geral, quando a escala temporal microscópica de correlação é comparável com outras escalas temporais que caracterizam o sistema, devemos desenvolver ferramentas apropriadas para a análise das equações integro-diferenciais estocásticas não-Markovianas.

2.1.3.**Ruído aditivo generalizado**

Até aqui consideramos sistemas termodinamicamente fechados, descritos por uma partícula imersa em um banho térmico, cujas flutuações são devidas apenas ao próprio banho. Por outro lado, em presença de ruído externo, espera-se um comportamento dinâmico diferente da partícula, pois neste caso, está em

contato com uma vizinhança fora do equilíbrio, devido à modulação externa do banho térmico.

Considere um ruído externo Gaussiano e estacionário satisfazendo a:

$$\langle \epsilon(t) \rangle = 0, \quad \langle \epsilon(t) \epsilon(t') \rangle = 2D_\epsilon \psi(t - t'), \quad (2.1.3.1)$$

onde $\langle \dots \rangle_\epsilon$ indica média sobre realizações de $\epsilon(t)$, D_ϵ é o parâmetro de magnitude do ruído externo e $\psi(t - t')$ é o *kernel* de decaimento. A inclusão deste ruído se dá, em um modelo microscópico, através da adição de um reservatório externo ao sistema partícula-banho, que se traduz, por exemplo, em um termo do tipo na eq.(2.1.1.2)

$$H_{ext} = \sum_{j=1}^N \kappa_j q_j \epsilon(t), \quad (2.1.3.2)$$

onde κ_j denota a intensidade de interação entre as partículas do banho térmico e o ruído externo. Para o acoplamento linear entre partícula e banho térmico ($n = 0$), eliminando-se os graus de liberdade do banho, obtém-se [15]:

$$\ddot{\phi}(t) + \int_{t_0}^t dt' D(t - t') \dot{\phi}(t') + V'[\phi(t)] = \eta(t) + \pi(t), \quad (2.1.3.3)$$

onde $\eta(t)$ é o ruído térmico e $\pi(t)$ representa o ruído externo modulado (“vestido”) pelo banho térmico:

Com isto, pode-se definir um ruído aditivo efetivo para o sistema, representando a atuação dos reservatórios interno e externo conjuntamente. Este ruído efetivo é dado por $\zeta(t) = \eta(t) + \pi(t)$. Dependendo da forma do ruído externo, $\zeta(t)$ pode ser uma variável aleatória com propriedades distintas. Neste trabalho, serão analisadas duas possíveis situações:

- i) ruído externo δ -correlacionado;
- ii) ruído externo com *kernel* exponencial com tempo de correlação $\tau_\epsilon \neq \tau_C \equiv \nu^{-1}$.

No caso i), pode-se mostrar que o ruído externo vestido $\pi(t)$ atuará sobre a partícula com o mesmo tempo de correlação do ruído interno $\eta(t)$. Consequentemente, $\zeta(t)$ terá tempo de correlação $\tau_c = 1/\nu$. No entanto, a magnitude do ruído efetivo não irá satisfazer a relação de flutuação-dissipação devido ao valor independente do acoplamento banho-ruído externo. Podemos, portanto, tratá-lo fenomenologicamente com amplitude arbitrária.

No caso ii), pode-se mostrar que o ruído $\pi(t)$ tem função de correlação com dois termos, caracterizados por tempos de correlação τ_ϵ e τ_c . O caso $\tau_\epsilon \ll \tau_c$ equivale ao resultado anterior e $\pi(t)$, e consequentemente $\zeta(t)$, terão a mesma escala característica de tempo de correlação, correspondente à escala interna τ_c , porém, com amplitude do ruído total modificada. Para $\tau_\epsilon \gg \tau_c$, o ruído externo modulado $\pi(t)$ é governado pelo tempo de correlação do ruído externo $\epsilon(t)$, levando a um novo valor de tempo de correlação efetivo do ruído resultante $\zeta(t)$, $\tau_{ef} \equiv 1/\lambda$.

Em resumo, levando-se em conta argumentos citados nesta seção é possível justificar a existência de um termo de ruído efetivo $\zeta(t)$ na equação de Langevin com valores arbitrários de $\langle \zeta^2(t) \rangle$ e de tempo de correlação τ_{ef} :

$$\ddot{\phi}(t) + \int_{t_0}^t dt' D(t-t') \dot{\phi}(t') + V'[\phi(t)] = \zeta(t), \quad (2.1.3.4)$$

ou seja, a de um ruído aditivo que não satisfaça o teorema de flutuação-dissipação. Em nosso trabalho, vamos considerar esta classe de sistemas.

2.2.

Processo Markoviano de dois estados e Ruído Dicotômico

Neste trabalho serão utilizados três tipos de ruído: o ruído Gaussiano branco, o ruído Gaussiano com correlação exponencial e o ruído dicotômico. O ruído dicotômico é um processo Markoviano de dois estados, que tem uma ampla variedade de aplicações [16,17].

Por serem bastante conhecidos na literatura, não iremos tratar a teoria dos ruídos Gaussianos mencionados. Será feita apenas uma introdução do ruído dicotômico.

O processo Markoviano de dois estados (TMN) é um exemplo simples de processo estocástico colorido para reproduzir o efeito de graus de liberdade lentos sobre a dinâmica do sistema. Possui autocorrelação temporal de decaimento exponencial, com tempo de correlação finito τ_c :

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{D}{\tau_c} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_c}\right). \quad (2.2.1)$$

O significado do parâmetro D pode ser encontrado a partir de $D = \langle \xi^2 \rangle \tau_c$ ou $D = \int_{-\infty}^t dt' \langle \xi(t)\xi(t') \rangle$, ou seja, ele quantifica a magnitude efetiva da intensidade do ruído que atua de forma coerente no sistema.

O TMN é suficientemente simples levando a modelos analiticamente solúveis [16 (e referências nele contidas)]. Constitui-se assim de uma boa alternativa ao processo conhecido de Orstein-Uhlenbeck, que também é um processo de Markov estacionário com autocorrelação da forma da eq.(2.2.1) (sendo, além disso, Gaussiano).

Do ponto de vista de simulação numérica, o TMN tem a vantagem de ser de fácil implementação por seu suporte finito. Além disso, fornece um “modelo parcimonioso”, mas suficientemente rico para descrever os mecanismos subjacentes de vários fenômenos de não equilíbrio observados em sistemas complexos.

Como será mostrado adiante, o TMN se reduz, dentro de limites apropriados, ao ruído Gaussiano branco e, portanto, também fornece uma forma alternativa de resolução de problemas governados por esse último ruído.

Considere um processo Markoviano de dois estados, descrito pela variável aleatória $\xi(t)$ que pode assumir apenas dois valores distintos, a_1 e a_2 . Cada um desses estados possui uma duração média, mas a transição de um estado para outro ocorre em instantes de tempos aleatórios. A figura 1 ilustra o comportamento desse processo em função do tempo.

Figura 1 – Processo Markoviano de dois estados em função do tempo.

Os tempos de espera τ_1 e τ_2 em cada estado são distribuídos exponencialmente:

$$P(\tau_i) = \lambda_i \exp(-\lambda_i \tau_i), \quad i=1,2, \quad (2.2.2)$$

onde os coeficientes λ_i denotam a probabilidade por unidade de tempo de uma transição, ou seja, λ_1 e λ_2 denotam respectivamente as taxas de transição $a_2 \rightarrow a_1$ e $a_1 \rightarrow a_2$. Da eq. (2.2.2), A duração média de cada estado é dada por $\langle \tau_i \rangle = 1/\lambda_i, i=1,2$.

A matriz que descreve a probabilidade de transição do estado i para o estado j por intervalo de tempo é dada por $P \equiv \{P_{ij}\}$, com $P_{ij} \equiv \text{Pr}\{\xi(t) = a_i | \xi(0) = a_j\}, i, j=1,2$. Pode-se mostrar que (ver apêndice 8.3):

$$P_{ij} = P_{ij}^{(0)} + P_{ij}^{(1)} \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau], \quad (2.2.3a)$$

onde

$$P^{(0)} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad P^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.3b)$$

Da eq. (2.2.3a), o tempo característico de relaxação é dado por:

$$\tau_c = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (2.2.4)$$

A seguir, consideraremos exclusivamente o processo estacionário, para o qual a probabilidade estacionária dos dois estados é dada por:

$$Pr\{\xi(t) = a_1\} = \lambda_1 \tau_c ; \quad Pr\{\xi(t) = a_2\} = \lambda_2 \tau_c , \quad (2.2.5)$$

com o correspondente valor médio:

$$\langle \xi(t) \rangle = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2. \quad (2.2.6)$$

Vamos considerar processos no qual a média é nula, o que implica em:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0 . \quad (2.2.7)$$

Neste caso, $\xi(t)$ é caracterizado por três parâmetros independentes. É interessante considerar o processo em termos de novos parâmetros. Em particular, pode-se mostrar (ver apêndice 8.4) que a autocorrelação estacionária decai exponencialmente com tempo de correlação τ_c e que podemos escrever a eq.(2.2.1) como:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \lambda^* D \exp(-\lambda^* |t - t'|) , \quad (2.2.8a)$$

onde

$$\lambda^* = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (2.2.8b)$$

Da eq. (2.2.4),

$$\lambda^* = \frac{1}{\tau_c} \quad (2.2.8c)$$

e a eq.(2.2.8b) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\langle \tau_1 \rangle} + \frac{1}{\langle \tau_2 \rangle} \quad (2.2.8d)$$

O parâmetro D é dado por (ver apêndice 8.4):

$$D = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{[\lambda^*]^3} (a_1 - a_2)^2 . \quad (2.2.9)$$

Considerando os novos parâmetros λ^* e D , podemos definir o terceiro parâmetro, chamado “parâmetro de não-Gaussianidade”, dado por [18]:

$$\Lambda = \frac{|a_1 - a_2|}{\lambda_1 + \lambda_2} = |a_1 - a_2| \tau_c . \quad (2.2.10)$$

Consideramos o processo simétrico onde $a_1 = -a_2$, que chamaremos de Processo Dicotômico de Markov, ou Ruído Dicotômico (ξ_{dn}). Neste caso, da eq.(2.2.6), os tempos médios de espera em cada estado são iguais:

$$\langle \tau_1 \rangle = \langle \tau_2 \rangle = \tau \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \lambda^*/2. \quad (2.2.11)$$

Além disso, sendo σ o desvio padrão da distribuição estacionária (2.2.5), os estados do ruído correspondem a $a_{1,2} = \pm \sigma$, ou seja, σ corresponde à amplitude do ruído dicotômico. Da eq.(2.2.9),

$$D = \sigma^2 / \lambda^* \quad (2.2.12)$$

Logo, para ruído dicotômico, o processo é determinado apenas por dois parâmetros independentes σ e D . Em particular, usando a eq. (2.2.12) a autocorrelação estacionária dada pela eq.(2.2.8a) pode ser escrita como:

$$\langle \xi_{dn}(t) \xi_{dn}(t') \rangle = \sigma^2 \exp(-\lambda^* |t - t'|) . \quad (2.2.13)$$

O ruído dicotômico possui uma importante propriedade: pode ser reduzido a um ruído branco Gaussiano (em probabilidade) quando a taxa das transições tende a infinito, tornando-se um *continuum* de pulsos. [18, 19] Considere o processo simétrico no qual a duração média de cada estado vai a zero ($\tau \rightarrow 0$) e o valor correspondente $\pm \sigma$ diverge.

Obtém-se assim uma representação de uma sequência de pulsos $\pm \delta$ ocorrendo em tempos aleatórios, com peso médio dado por $\langle w \rangle = \sigma \tau$.

Vamos descrever este processo limite em termos dos novos parâmetros λ^* e D . Inicialmente, usando a eq. (2.2.8d), o limite $\tau \rightarrow 0$ leva a $\tau_c \rightarrow 0$, o que implica que, usando a eq. (2.2.8c), $\lambda^* \rightarrow \infty$.

Tomando-se simultaneamente os limites $\sigma \rightarrow \infty$ e $\lambda^* \rightarrow \infty$ de tal forma que o parâmetro $D = \sigma^2/\lambda^*$ definido na eq. (2.2.12) seja finito, o peso médio $\langle w \rangle$ dos pulsos vai a zero. Por outro lado, a densidade dos pulsos cresce simultaneamente ($\lambda = 1/\tau \rightarrow \infty$) de forma a manter o valor do parâmetro D constante.

Pode-se mostrar que, considerando-se intervalos de observação infinitesimais dt obtém-se uma distribuição Gaussiana da variável $dZ = \xi(t)dt$. Note que o parâmetro de não-Gaussianidade dado pela eq. (2.2.10) fornece justamente o valor $\Lambda = \langle w \rangle = 2\sigma/\lambda^* \rightarrow 0$.

Deve-se notar, no entanto, que não existe um mapeamento possível entre o ruído Dicotômico e o processo de Orstein-Uhlenbeck, ou seja, não é possível eliminar o caráter não-Gaussiano do ruído dicotômico enquanto ele é colorido [16]. Os dois ruídos tem propriedades estatísticas diferentes, gerando diferentes propriedades da resposta dos sistemas nos quais atuam.

2.3. O procedimento de Furutzu-Novikov-Shapiro-Loginov.

Neste trabalho, para o cálculo dos observáveis de interesse, será preciso encontrar correlações do tipo $\langle g\zeta \rangle$ onde $g \equiv g_t[\zeta]$ é um funcional do ruído, desta vez, denotado por $\zeta(t)$. Para ruídos Gaussianos que possuam autocorrelação exponencial e processos Markovianos de dois estados (ruído dicotômico, com constante característica de correlação λ), o procedimento de Furutzu-Novikov-Shapiro-Loginov (FNSL) [20, 21] fornece uma maneira simples de calcular estas quantidades:

$$\frac{d}{dt} \langle g\zeta \rangle = \langle \zeta \frac{dg}{dt} \rangle - \lambda \langle g\zeta \rangle. \quad (2.3.1)$$

Sabemos que é possível mapear estes ruídos em um ruído Gaussiano branco. Desta forma, o procedimento FNSL também auxilia no cálculo de correlações

entre funcionais deste ruído branco e o próprio ruído. Nas subseções seguintes, apresentaremos deduções deste procedimento, o qual será utilizado no presente trabalho.

2.3.1.

Dedução do procedimento de FNSL para ruídos gaussianos com covariância em forma exponencial

Considere um ruído colorido Gaussiano satisfazendo a:

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \sigma^2 \exp(-\lambda|t - t'|), \quad (2.3.1.1)$$

caracterizado pelas escalas λ e σ^2 . O ruído $\zeta(t)$ pode ser dado através de um processo de Ornstein-Uhlenbeck, a partir de um ruído auxiliar $\zeta(t)$:

$$\frac{d}{dt} \zeta = -\lambda \zeta + \alpha \zeta, \quad (2.3.1.2)$$

com $\zeta(t)$ um ruído branco Gaussiano com média nula.

Considere uma função que dependa do tempo e deste ruído ($g \equiv g_t[\zeta]$).

Assim,

$$\frac{d}{dt} (g\zeta) = \zeta \frac{dg}{dt} + g \frac{d\zeta}{dt}. \quad (2.3.1.3)$$

Substituindo a eq.(2.3.1.2) na eq.(2.3.1.3) e tomando a média sobre as realizações,

$$\frac{d}{dt} \langle g\zeta \rangle = \langle \zeta \frac{dg}{dt} \rangle + \langle -\lambda g\zeta + \alpha g\zeta \rangle = \langle \zeta \frac{dg}{dt} \rangle - \lambda \langle g\zeta \rangle + \alpha \langle g\zeta \rangle. \quad (2.3.1.4)$$

Mas $\langle g\zeta \rangle = 0$, logo,

$$\frac{d}{dt} \langle g\zeta \rangle = \langle \zeta \frac{dg}{dt} \rangle - \lambda \langle g\zeta \rangle. \quad (2.3.1.5)$$

2.3.2.

Dedução geral do procedimento FNSL para processos aleatórios com covariância em forma exponencial.

Considere um processo aleatório estacionário $\zeta(t)$ satisfazendo a:

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \sigma^2 \exp(-\lambda|t - t'|), \quad (2.3.2.1)$$

caracterizado pelas escalas λ e σ^2 , onde $\sigma^2 = \langle \zeta^2 \rangle$ e $\langle \dots \rangle$ denota média estatística sobre realizações.

Vamos mostrar que o procedimento de FNSL é válido para vários tipos de processos aleatórios satisfazendo a eq.(2.3.2.1), em particular para o processo Markoviano de dois estados apresentado na seção 2.2.

Considere uma variável estocástica que dependa do tempo e do processo $\zeta(\tau)$, para $0 < \tau \leq t$, onde $t = 0$ é o instante inicial. Esta variável é denotada por $g_t[\zeta]$.

A classe de equações diferenciais estocásticas a serem consideradas são aquelas que descrevem a evolução de $g_t[\zeta]$ sujeita a condições iniciais independentes do processo $\zeta(\tau)$.

O procedimento FNSL é baseado na fórmula:

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta(t)g_t[\zeta] \rangle = \langle \zeta(t) \frac{d}{dt} g_t[\zeta] \rangle - \lambda \langle \zeta(t)g_t[\zeta] \rangle. \quad (2.3.2.2)$$

Para obtenção dos processos $\zeta(\tau)$ que satisfazem a relação acima, considere a expansão do funcional $g_t[\zeta]$ em uma serie de Taylor:

$$g_t[\zeta] = g_t[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t \dots \int_0^t K_t^{(n)} \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n dt_1 dt_2 \dots dt_n, \quad (2.3.2.3a)$$

onde $\zeta_i \equiv \zeta(t_i)$, $t \geq t_1 \geq \dots \geq t_{n-1} \geq t_n$ e $K_t^{(n)} \equiv \frac{\delta^n g_t[\zeta]}{\delta \zeta_1 \delta \zeta_2 \dots \delta \zeta_n} \Big|_{\zeta=0}$.

Como $K_t^{(n)}$ é simétrico com respeito a todos os argumentos $t_1, t_2 \dots t_{n-1}, t_n$, podemos reescrever a eq.(2.3.2.3a) como:

$$g_t[\varsigma] = g_t[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n K_t^{(n)} \varsigma_1 \varsigma_2 \dots \varsigma_n . \quad (2.3.2.3b)$$

Multiplicando esta equação por $\varsigma(t)$ e tomando a média estatística obtem-se que:

$$\langle \varsigma(t) g_t[\varsigma] \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n K_t^{(n)} \langle \varsigma(t) \varsigma_1 \varsigma_2 \dots \varsigma_n \rangle , \quad (2.3.2.4)$$

onde foi usado que, como $g_t[0]$ não depende de ς e $\langle \varsigma(t) \rangle = 0$, então $\langle \varsigma(t) g_t[0] \rangle = \langle \varsigma(t) \rangle g_t[0] = 0$.

A partir da diferenciação das eq.(2.3.2.3b) e da eq.(2.3.2.4), é possível mostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varsigma(t) g_t[\varsigma] \rangle &= \langle \varsigma(t) \frac{d}{dt} g_t[\varsigma] \rangle + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n K_t^{(n)} \frac{d}{dt} \langle \varsigma(t) \varsigma_1 \varsigma_2 \dots \varsigma_n \rangle . \end{aligned} \quad (2.3.2.5)$$

Assim, da eq.(2.3.2.5), o procedimento FNSL dado pela fórmula da eq.(2.3.2.2) será valido para o funcional $g_t[\varsigma]$, desde que:

$$\frac{d}{dt} \langle \varsigma \varsigma_1 \varsigma_2 \dots \varsigma_n \rangle = -\lambda \langle \varsigma \varsigma_1 \varsigma_2 \dots \varsigma_n \rangle . \quad (2.3.2.6)$$

Para ruídos Gaussianos com média nula, $\langle \varsigma(t) \rangle = 0$, vale a propriedade [22]:

$$\langle \varsigma \varsigma_1 \varsigma_2 \dots \varsigma_n \rangle = \langle \varsigma \varsigma_1 \rangle \langle \varsigma_2 \dots \varsigma_n \rangle + \langle \varsigma \varsigma_2 \rangle \langle \varsigma_1 \varsigma_3 \dots \varsigma_n \rangle + \dots + \langle \varsigma \varsigma_n \rangle \langle \varsigma_1 \dots \varsigma_{n-1} \rangle . \quad (2.3.2.7)$$

Como a correlação na eq.(2.3.2.1) é exponencial, isto implica na validade da eq.(2.3.2.6) e por consequência, da eq.(2.3.2.2). Este resultado reproduz o resultado da subseção anterior.

Considere agora um processo Markoviano de dois estados, introduzido na seção 2.2, no qual $\varsigma(t)$ pode assumir dois valores: $\varsigma(t) = a_1$ ou $\varsigma(t) = a_2$. Para processos de média nula, mostrou-se que a autocorrelação estacionária da variável aleatória tem decaimento exponencial da forma dada pela eq.(2.3.2.1).

Por ser um processo Markoviano, o produto da forma $\langle \varsigma(t)\varsigma(t_1) \dots \varsigma(t_n) \rangle$ com $t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \langle \varsigma(t)\varsigma(t_1) \dots \varsigma(t_n) \rangle = & \sum_{i, i_1 \dots i_n = 1, 2} \varsigma_i \varsigma_{i_1} \varsigma_{i_2} \dots \varsigma_{i_n} P_{ii_1}(t - t_1) P_{i_1 i_2}(t_1 - t_2) \dots \\ & \dots P_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1} - t_n) P(i_n), \end{aligned} \quad (2.3.2.8)$$

onde $\varsigma_{i_k=1} = a_1$, $\varsigma_{i_k=2} = a_2$. $P(i_n)$ é a probabilidade de ocorrência do valor ς_{i_n} em t_n e $P_{i_k i_l}$ é probabilidade de transição do estado $i_k = 1, 2$ em t_k para o estado $i_l = 1, 2$ em t_l :

$$P_{i_k i_l} \equiv Pr\{\varsigma(t_k) = \varsigma_{i_k} | \varsigma(t_l) = \varsigma_{i_l}\}. \quad (2.3.2.9)$$

Derivando a eq.(2.3.2.8) é possível obter novamente a eq.(2.3.2.6) assumindo que a correlação é da forma da eq.(2.3.2.1). A partir da eq.(2.3.2.5), mostra-se a validade do procedimento FNSL para o processo Markoviano de dois estados e em particular, para o processo Markoviano Dicotômico.

3

Oscilador harmônico amortecido com ruído aditivo

Neste capítulo trataremos o problema do oscilador harmônico em um meio dissipativo, sujeito a uma força aleatória colorida. Este problema pode ser reproduzido através de um sistema RLC sujeito a força eletromotriz aleatória. O modelo é extensamente tratado na literatura [9, 10, 23] com aplicações em diversas áreas do conhecimento (veja, por exemplo, [24, 25]). A intenção de apresentá-lo é a de exemplificar a metodologia de sistemas dinâmicos que será empregada na análise de problemas posteriores. Como resultado novo proveniente desta metodologia, apresentamos, por exemplo, o comportamento transiente da correlação ruído-resposta $\langle \zeta y \rangle$, que será importante para a análise energética do sistema ao final do capítulo.

3.1

Oscilador com ruído aditivo colorido: análise através de funções de Green

Vamos partir da equação:

$$\ddot{\phi}(t) + 2\gamma\dot{\phi}(t) + V'[\phi(t)] = \zeta(t), \quad (3.1.1)$$

onde o termo de dissipação interno é local e $V[\phi(t)]$ é um potencial externo confinante. A existência de uma vizinhança fora de equilíbrio devido à atuação de um ruído externo ao sistema partícula-banho, de acordo com a análise da subseção 2.1.3, leva a um ruído efetivo $\zeta(t)$ que pode ser:

- i. Ruído branco Gaussiano, de agora em diante definido por $\zeta_{wn}(t)$;
- ii. Ruído colorido Gaussiano com tempo de correlação efetivo τ_{ef} . Na prática, este tempo de correlação é arbitrário. Vamos denotá-lo por $\zeta_{cn}(t)$.

Considerando o potencial é quadrático em ϕ , $V[\phi(t)] = \omega_0^2(\phi - \phi_0)^2/2$, obtém-se a equação de um oscilador harmônico amortecido sujeito a uma força aleatória:

$$\ddot{\phi} + 2\gamma\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = \zeta(t), \quad (3.1.2)$$

com $\varphi = \phi - \phi_0$.

O termo de dissipação e a força restauradora garantem a existência de uma solução estacionária. Esta equação possui solução analítica conhecida para os momentos $\langle\varphi\rangle$ e $\langle\varphi^2\rangle$, onde $\langle\dots\rangle$ significa média sobre as realizações do ruído. Tomando a média na eq.(3.1.2),

$$\langle\ddot{\varphi}\rangle + 2\gamma\langle\dot{\varphi}\rangle + \omega_0^2\langle\varphi\rangle = 0, \quad (3.1.3)$$

cuja solução depende dos valores da constante de amortecimento γ e da frequência angular ω_0 , assim como das condições iniciais $\dot{\varphi}_0$ e φ_0 consideradas:

I) $\gamma < \omega_0$ - Caso subamortecido:

$$\langle\varphi\rangle(t) = e^{-\gamma t} \left[(\dot{\varphi}_0 + \gamma\varphi_0) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + \varphi_0 \cos \omega_1 t \right]; \quad (3.1.4a)$$

II) $\gamma > \omega_0$ - Caso Superamortecido:

$$\langle\varphi\rangle(t) = e^{-\gamma t} \left[(\dot{\varphi}_0 + \gamma\varphi_0) \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} + \varphi_0 \cosh \alpha t \right], \quad (3.1.4b)$$

onde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ e $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. O caso em que $\gamma = \omega_0$ não será levado em consideração neste trabalho.

Para calcularmos a variância, podemos considerar a solução geral causal para a eq.(3.1.2) através do método de funções de Green,

$$\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t) = \langle\varphi\rangle(t) + \int_0^t dt' G(t - t') \zeta(t'), \quad (3.1.5)$$

onde a função de Green $G(t - t')$ satisfaz a

$$\ddot{G}(t - t') + 2\gamma\dot{G}(t - t') + \omega_0^2 G(t - t') = \delta(t - t') , \quad (3.1.6)$$

cuja solução é:

$$G(t) = \begin{cases} e^{-\gamma t} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} , & \gamma < \omega_0 \\ e^{-\gamma t} \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} , & \gamma > \omega_0 \end{cases} . \quad (3.1.7)$$

Da eq.(3.1.5) é possível obter a expressão para a variância:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = \int_0^t ds \int_0^t ds' G(t - s) G(t - s') \langle \zeta(s) \zeta(s') \rangle , \quad (3.1.8a)$$

que pode ser convenientemente reescrita como (ver apêndice 8.5):

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = 2 \int_0^t ds \int_0^s ds' G(s) G(s') \langle \zeta(s) \zeta(s') \rangle . \quad (3.1.8b)$$

Vamos considerar o ruído $\zeta_{cn}(t)$ colorido, com propriedades definidas por:

$$\langle \zeta_{cn}(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta_{cn}(t) \zeta_{cn}(t') \rangle = \sigma_a^2 \exp(-\lambda_a |t - t'|) , \quad (3.1.9a)$$

onde σ_a é a amplitude do ruído aditivo e λ_a define o tempo de correlação $\tau_{ef} = \lambda_a^{-1}$. O caso de ruído branco é obtido no limite $\sigma_a \rightarrow \infty$, $\lambda_a \rightarrow \infty$, com o vínculo $\sigma_a^2 / \lambda_a = D_a$:

$$\langle \zeta_{wn}(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta_{wn}(t) \zeta_{wn}(t') \rangle = 2D_a \delta(t - t') . \quad (3.1.9b)$$

Esta situação pode representar a dinâmica do sistema em presença de ruído colorido para tempos de correlação suficientemente curtos, menores que a escala temporal de observação.

A partir da eq.(3.1.8b) a variância será dada por [10]:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = \frac{2\sigma_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)} \left[1 - \left(\frac{(\lambda_a + \gamma) \sin \omega_1 t}{\omega_1} + \cos \omega_1 t \right) e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \right] + \frac{\lambda_a - 2\gamma}{4\omega_0^2 \gamma} [1 - e^{-2\gamma t}] - \frac{e^{-2\gamma t}}{4\omega_0^2} \left[(\lambda_a - 2\gamma) \frac{\sin 2\omega_1 t}{\omega_1} + (2\lambda_a \gamma - 4\gamma^2 + 2\omega_0^2) \frac{\sin^2 \omega_1 t}{\omega_1^2} \right] \right\} \quad (3.1.10a)$$

no caso subamortecido ($\gamma < \omega_0$) e

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = \frac{2\sigma_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)} \left[1 - \left(\frac{(\lambda_a + \gamma) \sinh \alpha t}{\alpha} + \cosh \alpha t \right) e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \right] + \frac{\lambda_a - 2\gamma}{4\omega_0^2 \gamma} [1 - e^{-2\gamma t}] - \frac{e^{-2\gamma t}}{4\omega_0^2} \left[(\lambda_a - 2\gamma) \frac{\sinh 2\alpha t}{\alpha} + (2\lambda_a \gamma - 4\gamma^2 + 2\omega_0^2) \frac{\sinh^2 \alpha t}{\alpha^2} \right] \right\} \quad (3.1.10b)$$

no caso superamortecido ($\gamma > \omega_0$).

É importante citar que os resultados dados na eq.(3.1.10) para a variância são válidos para ruídos aditivos com correlação exponencial, qualquer que seja sua distribuição probabilística [10]

O gráfico da figura 2 ilustra o perfil característico da variância nos dois casos, para tempo de correlação do ruído $\tau_{ef} = \lambda_a^{-1} = 10$. Observa-se que o caso superamortecido apresenta convergência mais rápida para o estado assintótico.

Figura 2 – Gráfico de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ calculado pelas expressões 3.1.10, para $\lambda_a = 0,1$ e $\sigma_a = 1$. No caso subamortecido (vermelho) foram utilizados os valores $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$. No caso superamortecido (azul) $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 1,1$. Após um regime transiente, as expressões tendem ao regime estacionário.

Tomando-se o limite de ruído branco $\zeta_{cn} \rightarrow \zeta_{wn}$, a variância pode ser escrita como:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = \frac{D_a}{2\gamma\omega_0^2} \{1 - [1 + \gamma(f(2t) + 2\gamma f^2(t))]e^{-2\gamma t}\}, \quad (3.1.11)$$

onde $f(t) = \sin \omega_1 t / \omega_1$ para o caso subamortecido ou $f(t) = \sinh at / \alpha$ no caso superamortecido.

A figura 3 compara os casos de ruído branco e colorido para o oscilador subamortecido. Considera-se a sequência de ruídos coloridos satisfazendo a $\sigma_a^2 / \lambda_a = D_a$. Como esperado, à medida que o alcance da memória do ruído torna-se mais curto, é mais rápida a convergência para o estado assintótico, cujo valor de magnitude de flutuação é também maior. No limite em que no limite $\sigma_a \rightarrow \infty$, $\lambda_a \rightarrow \infty$, obtém-se o comportamento do ruído branco com parâmetro D_a .

Figura 3 – Gráfico de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso de ruído branco (em preto) e de ruído colorido (ver legenda) para $D_a = 10$, $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$. Os parâmetros de ruído colorido satisfazem a $\sigma_a^2 / \lambda_a = D_a$.

As eq.(3.1.10a) e eq.(3.1.10b) para ruído colorido fornecem a mesma expressão para a variância do regime estacionário ($t \rightarrow \infty$) [10]:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle_{est} = \frac{\sigma_a^2(\lambda_a + 2\gamma)}{2\gamma\omega_0^2(\lambda_a^2 + 2\lambda_a\gamma + \omega_0^2)}, \quad (3.1.12)$$

Note que a variância estacionária para ruído aditivo colorido é função não-monotônica da taxa de correlação λ_a .

No limite de ruído branco, a eq.(3.1.12) leva a [9]:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle_{est} = \frac{D_a}{2\omega_0^2 \gamma} . \quad (3.1.13)$$

Note que esta solução estacionária para ruído branco está de acordo com a eq.(3.1.11).

3.2

Oscilador com ruído aditivo colorido: análise através de sistemas dinâmicos

Vamos agora introduzir um método alternativo para a obtenção dos momentos de primeira e de segunda ordem. Vamos reobter as soluções para a média $\langle \varphi \rangle$ e a variância $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e compará-las com o método anterior, com a intenção de verificar a consistência dos resultados. Além disso, vamos obter resultados originais para o comportamento transiente da variância $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$, da covariância $\langle [y - \langle y \rangle][\varphi - \langle \varphi \rangle] \rangle$ e das correlações ruído-resposta $\langle \zeta \varphi \rangle$ e $\langle \zeta y \rangle$.

Considere a eq.(3.1.2):

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \zeta(t) , \quad (3.2.1)$$

A eq.(3.2.1) pode ser escrita através de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem,

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y \\ \dot{y} = -2\gamma y - \omega_0^2\varphi + \zeta(t) \end{cases} . \quad (3.2.2)$$

Tomando-se a média sobre as realizações do ruído aditivo ($\langle \zeta(t) \rangle = 0$), é possível obter:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi} \rangle = \langle y \rangle \\ \langle \dot{y} \rangle = -2\gamma\langle y \rangle - \omega_0^2\langle \varphi \rangle \end{cases} . \quad (3.2.3a)$$

A partir da eq.(3.2.2), utilizando as regras usuais de cálculo (segundo Stratonovich) [26, 17], é possível determinar o sistema de equações que descreve a dinâmica de $\langle \varphi^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ e $\langle \varphi y \rangle$:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -4\gamma\langle y^2 \rangle - 2\omega_0^2\langle \varphi y \rangle + 2\langle \zeta y \rangle \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 2\gamma\langle \varphi y \rangle - \omega_0^2\langle \varphi^2 \rangle + \langle \zeta \varphi \rangle \end{cases} . \quad (3.2.3b)$$

Note que no sistema dado pela eq.(3.2.3b) aparecem termos novos envolvendo as correlações do ruído com as respostas do sistema $\langle \zeta y \rangle$ e $\langle \zeta \varphi \rangle$. Estes termos podem ser calculados se considerarmos um ruído colorido do tipo (3.19a). Para isso vamos utilizar o procedimento de Furutzu-Novikov-Shapiro-Loginov (FNSL), que foi introduzido na seção 2.3:

$$\frac{d}{dt}\langle \zeta f \rangle = \langle \zeta \frac{df}{dt} \rangle - \lambda \langle \zeta f \rangle , \quad (3.2.4)$$

onde $f = f[\zeta(t)]$ e λ é o inverso do tempo de correlação do ruído. Assim,

$$\langle \zeta \dot{\varphi} \rangle = \langle \zeta \dot{\varphi} \rangle - \lambda \langle \zeta \varphi \rangle = \langle \zeta y \rangle - \lambda_a \langle \zeta \varphi \rangle , \quad (3.2.5a)$$

e

$$\langle \zeta \dot{y} \rangle = \langle \zeta \dot{y} \rangle - \lambda_a \langle \zeta y \rangle = \langle \zeta(-2\gamma y - \omega_0^2 \varphi + \zeta) \rangle - \lambda_a \langle \zeta y \rangle. \quad (3.2.5b)$$

Usando a eq.(3.1.9a), $\langle \zeta^2 \rangle = \sigma_a^2$, e é possível descrever a dinâmica das correlações $\langle \zeta y \rangle$ e $\langle \zeta \varphi \rangle$ através de um sistema de equações diferenciais lineares:

$$\begin{cases} \langle \zeta \dot{\varphi} \rangle = \langle \zeta y \rangle - \lambda_a \langle \zeta \varphi \rangle \\ \langle \zeta \dot{y} \rangle = -(\lambda_a + 2\gamma)\langle \zeta y \rangle - \omega_0^2 \langle \zeta \varphi \rangle + \sigma_a^2 \end{cases} . \quad (3.2.6)$$

Note que o sistema da eq.(3.2.6) está desacoplado do sistema da eq.(3.2.3b), permitindo sua resolução independente.

Primeiramente podemos estudar o regime estacionário, fazendo $\langle \zeta \dot{y} \rangle$ e $\langle \zeta \dot{\varphi} \rangle$ nulos. Neste regime,

$$\langle \zeta \varphi \rangle_{est} = \frac{\sigma_a^2}{(\lambda_a^2 + 2\lambda_a\gamma + \omega_0^2)} , \quad (3.2.7a)$$

$$\langle \zeta y \rangle_{est} = \frac{\sigma_a^2 \lambda_a}{(\lambda_a^2 + 2\lambda_a\gamma + \omega_0^2)} . \quad (3.2.7b)$$

Inserindo eq.(3.2.7a) e eq.(3.2.7b) no sistema dado pela eq.(3.2.3b) e fazendo as derivadas nulas, obtemos os seguintes valores estacionários:

$$\langle \varphi^2 \rangle_{est} = \frac{\sigma_a^2(\lambda_a + 2\gamma)}{2\gamma\omega_0^2(\lambda_a^2 + 2\lambda_a\gamma + \omega_0^2)}, \quad (3.2.8a)$$

$$\langle y^2 \rangle_{est} = \frac{\sigma_a^2\lambda_a}{2\gamma(\lambda_a^2 + 2\lambda_a\gamma + \omega_0^2)}, \quad (3.2.8b)$$

$$\langle \varphi y \rangle_{est} = 0. \quad (3.2.8c)$$

O próximo passo é considerar as soluções transientes. Para isso, vamos introduzir o método de sistemas dinâmicos, que pode ser utilizado para a resolução de sistemas de equações de primeira ordem lineares com coeficientes constantes. Caso seja necessário, o leitor não familiarizado pode consultar a literatura relacionada a métodos de solução de equações diferenciais. [27].

Note primeiramente, que a eq.(3.2.3a) para os valores médios, a eq.(3.2.6) para as correlações ruído/variável dinâmica e a eq.(3.2.3b) para os momentos quadráticos, podem ser escritas em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \langle \dot{\varphi} \rangle \\ \langle \dot{y} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi \rangle \\ \langle y \rangle \end{pmatrix}; \quad (3.2.9a)$$

$$\begin{pmatrix} \langle \zeta \dot{\varphi} \rangle \\ \langle \zeta \dot{y} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_a & 1 \\ -\omega_0^2 & -(\lambda_a + 2\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \zeta \varphi \rangle \\ \langle \zeta y \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_a^2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.9b)$$

$$\begin{pmatrix} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4\gamma & -2\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 1 & -4\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi^2 \rangle \\ \langle y^2 \rangle \\ \langle \varphi y \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\langle \zeta y \rangle \\ \langle \zeta \varphi \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.2.9c)$$

Estes sistemas podem ser escritos simbolicamente ($\mathcal{X}$ e $\mathcal{B}$ vetores coluna e $\mathbb{A}$ é uma matriz quadrada) como:

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = \mathbb{A}\mathcal{X}(t) + \mathcal{B}(t). \quad (3.2.10a)$$

Como os coeficientes de $\mathbb{A}$ são supostos constantes, podemos obter a solução geral da eq.(3.2.9) a partir de $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}_h(t) + \mathcal{X}_p(t)$, onde $\mathcal{X}_h(t)$ é a parte homogênea que satisfaz

$$\dot{\mathcal{X}}_h(t) = \mathbb{A}\mathcal{X}_h(t) \quad (3.2.10b)$$

$$\dot{\mathcal{X}}_p(t) = \mathcal{B}(t) \quad (3.2.10c)$$

Para a parte homogênea, a ideia é considerar uma solução matricial na forma $\mathcal{X}_h(t) = \mathcal{X}_0 e^{mt}$. Substituindo na eq.(3.2.10b), obtemos a equação característica:

$$(\mathbb{A} - m\mathbb{I})\mathcal{X}_0 = 0, \quad (3.2.11a)$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade. Esta equação permite encontrar os autovalores m_i e os respectivos autovetores $\mathcal{X}_0^i$, que compõem a solução geral da eq.(3.2.10b), onde o índice i é, a princípio, igual ao número de equações diferenciais de primeira ordem.

$$\mathcal{X}_h(t) = \sum_i C_i \mathcal{X}_0^i e^{m_i t}. \quad (3.2.11b)$$

Para a parte não homogênea $\mathcal{X}_p(t)$ temos de considerar uma solução particular de mesma forma funcional que $\mathcal{B}(t)$ (se esta dependência funcional for em termos de funções analíticas do tempo, do tipo senos, cossenos e exponenciais, que é o caso deste trabalho). É possível mostrar que $\mathcal{X}_p(t) = \mathcal{F}(t) \equiv \mathbb{A}^{-1}\mathcal{B}(t)$ onde $\mathbb{A}^{-1}$ satisfaz $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$. Assim, a solução de sistemas matriciais do tipo da eq.(3.2.9) são dados por:

$$\mathcal{X}(t) = \sum_i C_i \mathcal{X}_0^i e^{m_i t} + \mathcal{F}(t). \quad (3.2.11c)$$

Este método nos permite encontrar as soluções dos sistemas da eq.(3.2.9), respeitando-se os ensembles iniciais (condições iniciais) considerados.

A solução do sistema mostrado na eq.(3.2.9a), equivalente à equação diferencial de segunda ordem para $\langle\varphi\rangle$, reproduz as soluções dadas pela eq.(3.1.4), considerando-se as condições iniciais $\langle\varphi(t=0)\rangle = 0$ e $\langle\dot{\varphi}(t=0)\rangle = 0$.

Através do método de sistemas dinâmicos aplicado à eq.(3.2.9b), considerando-se as condições iniciais $\langle\zeta\varphi(t=0)\rangle = 0$ e $\langle\zeta\dot{\varphi}(t=0)\rangle = 0$, obtivemos as seguintes soluções para o regime transiente do sistema da eq.(3.2.6):

$$\langle\zeta\varphi\rangle = \frac{\sigma_a^2}{(\lambda_a^2 + 2\lambda_a\gamma + \omega_0^2)} \left\{ 1 - e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \left[\cos \omega_1 t + (\lambda_a + \gamma) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right] \right\}, \quad (3.2.12a)$$

$$\langle\zeta\dot{\varphi}\rangle = \frac{\sigma_a^2 \lambda_a}{(\lambda_a^2 + 2\lambda_a\gamma + \omega_0^2)} \left\{ 1 - e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \left[\cos \omega_1 t - \frac{(\omega_0^2 + \lambda_a\gamma)}{\lambda_a} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right] \right\}, \quad (3.2.12b)$$

para $\omega_0 > \gamma$ e

$$\langle\zeta\varphi\rangle = \frac{\sigma_a^2}{(\lambda_a^2 + 2\lambda_a\gamma + \omega_0^2)} \left\{ 1 - e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \left[\cosh \alpha t + (\lambda_a + \gamma) \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} \right] \right\}, \quad (3.2.12c)$$

$$\langle\zeta\dot{\varphi}\rangle = \frac{\sigma_a^2 \lambda_a}{(\lambda_a^2 + 2\lambda_a\gamma + \omega_0^2)} \left\{ 1 - e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \left[\cosh \alpha t - \frac{(\omega_0^2 + \lambda_a\gamma)}{\lambda_a} \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} \right] \right\}, \quad (3.2.12d)$$

para $\omega_0 < \gamma$.

Os resultados acima para o comportamento transiente das correlações entre as respostas do oscilador com o ruído colorido ζ_{cn} serão utilizados posteriormente na análise energética do sistema. Note que no longo prazo, a eq.(3.2.12) tende à do regime estacionário mostrado na eq.(3.2.7).

O gráfico da figura 4 ilustra o comportamento de $\langle\zeta\varphi\rangle$ e $\langle\zeta\dot{\varphi}\rangle$ nos caso sub e superamortecimento, com os mesmos parâmetros da figura 2. Observa-se a convergência para valores assintóticos altos de $\langle\zeta\varphi\rangle$ e um comportamento não-monotônico de $\langle\zeta\dot{\varphi}\rangle$.

Figura 4 – Correlações $\langle \zeta \varphi \rangle$ e $\langle \zeta y \rangle$ nos casos subamortecido ($\gamma = 0,9$ em preto) e superamortecido ($\gamma = 1,1$ em vermelho). Os parâmetros comuns são $\omega_0 = 1$, $\sigma_a = 1$ e $\lambda_a = 0,1$.

Na figura 5, apresentamos o comportamento de $\langle \zeta \varphi \rangle$ e $\langle \zeta y \rangle$ para os mesmos sistemas, porém com tempo de correlação de ruído menor. Vê-se que o efeito mais importante foi a mudança nos valores assintóticos de correlação.

Figura 5 – Correlações $\langle \zeta \varphi \rangle$ e $\langle \zeta y \rangle$ nos casos subamortecido (preto) e superamortecido (vermelho), com parâmetros de amortecimento iguais aos da figura anterior. $\omega_0 = 1$, $\sigma_a = 1$ e $\lambda_a = 1$.

O próximo passo é resolver o sistema dado pela eq.(3.2.3b), inserindo as expressões em função do tempo de $\langle \zeta \varphi \rangle$ e $\langle \zeta y \rangle$ da eq.(3.2.12) no sistema da eq.(3.2.9c).

A variância $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ pode então ser obtida a partir das condições iniciais, isto é, de um ensemble inicial. Com este formalismo é possível considerar distribuições localizadas em qualquer ponto do espaço de fase, por exemplo, $\langle \varphi(t=0) \rangle = \varphi_0$, $\langle \varphi^2(t=0) \rangle = \varphi_0^2$; $\langle y(t=0) \rangle = y_0$, $\langle y^2(t=0) \rangle = y_0^2$, ou ainda distribuições Gaussianas tanto para a posição inicial (com média φ_0 e variância σ_0^2), quanto para velocidade inicial (com média y_0 e variância v_0^2).

No entanto, para o sistema considerado, desde que o ensemble inicial seja localizado, o comportamento ao longo do tempo das variâncias independe do ensemble inicial. Vamos adotar em nossa análise, sem perda de generalidade, distribuições iniciais localizadas caracterizadas por $\langle \varphi(t=0) \rangle = 0$, $\langle \varphi^2(t=$

$0\rangle\rangle = 0$ e $\langle\dot{\phi}(t=0)\rangle \equiv \langle y(t=0)\rangle = 0$, $\langle\dot{\phi}^2(t=0)\rangle \equiv \langle y^2(t=0)\rangle = 0$, ou seja, partículas sem velocidade partindo da origem.

Resolvendo o sistema da eq.(3.2.9c), obtemos os segundos momentos. Além de reproduzirmos os resultados da literatura para $\langle[\varphi - \langle\varphi\rangle]^2\rangle$ dada pela eq.(3.1.10), obtivemos os seguintes resultados:

$$\langle[y - \langle y\rangle]^2\rangle = \frac{2\sigma_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left\{ -\frac{\lambda_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)} \left[1 + \left(\frac{(\omega_0^2 + \lambda_a\gamma)}{\lambda_a} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \cos \omega_1 t \right) e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \right] + \frac{\lambda_a}{4\gamma} [1 + e^{-2\gamma t}] + \frac{e^{-2\gamma t}}{4} \left[\frac{\sin 2\omega_1 t}{\omega_1} + 2(\lambda_a\gamma - \omega_0^2) \frac{\sin^2 \omega_1 t}{\omega_1^2} \right] \right\}; \quad (3.2.13a)$$

$$\langle[y - \langle y\rangle][\varphi - \langle\varphi\rangle]\rangle = \frac{2\sigma_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left\{ -\frac{e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \sin \omega_1 t}{\omega_1} + e^{-2\gamma t} \left[\frac{\sin 2\omega_1 t}{\omega_1} + (\lambda_a - \gamma) \frac{\sin^2 \omega_1 t}{\omega_1^2} \right] \right\}, \quad (3.2.13b)$$

para $\gamma < \omega_0$ e

$$\langle[y - \langle y\rangle]^2\rangle = \frac{2\sigma_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left\{ -\frac{\lambda_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)} \left[1 + \left(\frac{(\omega_0^2 + \lambda_a\gamma)}{\lambda_a} \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} - \cosh \alpha t \right) e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \right] + \frac{\lambda_a}{4\gamma} [1 + e^{-2\gamma t}] + \frac{e^{-2\gamma t}}{4} \left[\frac{\sinh 2\alpha t}{\alpha} + 2(\lambda_a\gamma - \omega_0^2) \frac{\sinh^2 \alpha t}{\alpha^2} \right] \right\}; \quad (3.2.13c)$$

$$\langle[y - \langle y\rangle][\varphi - \langle\varphi\rangle]\rangle = \frac{2\sigma_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left\{ -\frac{e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \sinh \alpha t}{\alpha} + e^{-2\gamma t} \left[\frac{\sinh 2\alpha t}{\alpha} + (\lambda_a - \gamma) \frac{\sinh^2 \alpha t}{\alpha^2} \right] \right\}, \quad (3.2.13d)$$

para $\gamma > \omega_0$.

No limite $t \rightarrow \infty$, temos os regimes estacionários dados pela eq.(3.2.8). Além disso, tomando-se o limite $\sigma_a \rightarrow \infty$, $\lambda_a \rightarrow \infty$ com $\sigma_a^2/\lambda_a = D_a$ nas expressões dadas pela eq.(3.2.13), temos as expressões para a variância da velocidade e covariância para ruído Gaussiano branco:

$$\langle[y - \langle y\rangle]^2\rangle = \frac{D_a}{2\gamma} \{1 - [1 - \gamma(f(2t) + 2\gamma f^2(t))]e^{-2\gamma t}\}, \quad (3.2.14a)$$

$$\langle[y - \langle y\rangle][\varphi - \langle\varphi\rangle]\rangle = -D_a f^2(t) e^{-2\gamma t}, \quad (3.2.14b)$$

onde $f(t) = \sin \omega_1 t / \omega_1$ para o caso subamortecido ou $f(t) = \sinh \alpha t / \alpha$ no caso superamortecido. Estas expressões para o ruído branco reproduzem resultados anteriores da literatura [9].

O gráfico da figura 6 a seguir apresenta o resultado obtido para $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ a partir do método de sistemas dinâmicos. Ele mostra um forte crescimento das flutuações no regime de curto prazo antes de atingir o regime de longo prazo previsto pela eq.(3.2.8b):

Figura 6 – Gráfico de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ calculado através do sistema de equações da eq.(3.2.9c), para $\lambda_a = 0,1, \sigma_a = 1, \omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$.

A figura 7 ilustra o efeito do encurtamento do alcance da memória do ruído sobre este resultado:

Figura 7 – Gráfico de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ calculado através do sistema de equações da eq.(3.2.9c), para $\lambda_a = 1, \sigma_a = 1, \omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$.

O perfil típico da covariância $\langle [y - \langle y \rangle][\varphi - \langle \varphi \rangle] \rangle$ é mostrado na figura 8. Note que esta grandeza tende assintoticamente a zero, ou seja, as flutuações de φ e y tornam-se independentes. Note também que seu valor já é desprezível em escalas temporais menores do que a escala temporal de memória do ruído.

Figura 8 – Gráfico de $\langle [y - \langle y \rangle][\varphi - \langle \varphi \rangle] \rangle$ calculado através do sistema de equações da eq. (3.2.9c), para $\lambda_a = 0,1$, $\sigma_a = 1$, $\omega_0 = 1$ e $\gamma = 0,9$.

Os métodos apresentados nas duas seções deste capítulo permitem determinar analiticamente a resposta do sistema, em particular, o comportamento da média e das flutuações em torno desta média, assim como das correlações resposta-ruído. Todavia, é difícil inferir a influência de cada parâmetro original a partir destas expressões. Uma alternativa para facilitar a análise do comportamento dessas grandezas é investigar as equações à luz das escalas características do sistema, tema da próxima seção.

3.3

Diferentes regimes de dependência temporal da variância de acordo com a magnitude relativa das escalas temporais características

Nesta seção, apresentamos uma análise do comportamento transiente da variância do oscilador harmônico amortecido sujeito a ruído aditivo colorido, de acordo com o valor relativo entre o tempo de observação e as escalas temporais características do sistema. Os resultados mostrados a seguir estendem os apresentados em [10].

As expressões obtidas para a variância da resposta do oscilador harmônico amortecido governado por ruído colorido eq.(3.2.1) dependem dos parâmetros ω_0 , γ , λ_a e σ_a . Lembramos que neste sistema, existem três escalas de tempo características: o tempo de relaxação ($\tau_r = 1/\gamma$), a escala natural de oscilação $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ e o tempo característico de autocorrelação do ruído ($\tau_{ef} = 1/\lambda_a$). Nesta seção mostraremos que a variância vai apresentar regimes distintos de acordo com a escala temporal de observação t e conforme o valor relativo de τ_r , τ_0 e τ_{ef} .

Inicialmente, devemos citar que, na modelagem de sistemas físicos por equações de segunda ordem do tipo da eq.(3.2.1), é usual assumir-se que o coeficiente de amortecimento γ é muito grande, de tal forma que $t \gg \tau_r$ ($\gamma t \gg 1$) e o termo de aceleração $\ddot{\phi}$ se torna desprezível. Esta aproximação também é conhecida como “aproximação adiabática”:

$$2\gamma\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = \zeta(t) . \quad (3.3.1)$$

No entanto, analisaremos aqui o efeito do amortecimento em toda a extensão de escala, pois, a princípio, o valor relativo dos parâmetros depende do efeito ou da característica que se quer descrever. Por exemplo, na modelagem do mercado financeiro, a escala temporal de memória interna associada ao sistema pode ser mais longa ou mais curta, de acordo com o horizonte temporal de atuação do agente considerado, o mesmo valendo para a escala de tempo no qual as informações externas chegam ao mercado de forma coerente.

Por outro lado, quaisquer que sejam os valores relativos dos tempos característicos, podemos obter comportamentos limites de acordo com a escala temporal de observação. Quando o tempo de observação é muito maior do que as escalas de oscilação e de amortecimento ($t \gg \tau_r, \tau_0$), a variância assume o valor estacionário dado pela eq.(3.1.12).

Em outro extremo, nos estágios iniciais de evolução dinâmica ($t \ll \tau_r, \tau_0$), a técnica de **balanço dominante** [28] nos diz que $|\ddot{\varphi}| \gg \gamma|\dot{\varphi}|$ e $|\ddot{\varphi}| \gg \omega_0^2|\varphi|$, ou seja, os efeitos do amortecimento e da mola são desprezíveis e a eq.(3.2.1) se transforma em:

$$\ddot{\varphi} = \zeta(t) . \quad (3.3.2)$$

Outros comportamentos limites importantes são obtidos em relação à escala temporal da memória do ruído. Quando a escala do tempo de observação é bem menor do que a escala de tempo da memória do ruído $t \ll \tau_{ef}$, os ruídos sucessivos estão fortemente correlacionados e a probabilidade de que ele troque de valor é pequena. Isto significa que é quase certo que $\zeta(t) = \zeta(0)$, ou seja, a força motriz pode ser tomada como determinística (constante) (ver apêndice 8.6) para cada realização de ruído inicial. A eq.(3.2.1) toma a forma:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \zeta(0) . \quad (3.3.3)$$

Assim, da eq.(3.3.2), os estágios iniciais da evolução dinâmica, onde o tempo de observação é muito menor que todas as escalas características do sistema, ficam regidos por:

$$\ddot{\varphi} = \zeta(0) . \quad (3.3.4a)$$

Para condições iniciais $\varphi(0) = 0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$, obtém-se a solução balística $\varphi(t) = \frac{1}{2}\zeta(0)t^2$. Considerando as diferentes realizações do ruído, obtém-se:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle \cong \frac{\zeta(0)^2}{4} t^4 . \quad (3.3.4b)$$

Em outro extremo, $t \gg \tau_{ef}$, a dinâmica passa a ser governada por um ruído branco:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \zeta_{wn}(t) . \quad (3.3.5)$$

Vale a pena observar que na prática, este regime pode não ser observado, uma vez que o sistema já tenha atingido o equilíbrio.

Vamos agora investigar o comportamento para tempos de observação intermediários entre as escalas temporais características do sistema, nos casos em que as escalas de τ_r , τ_0 e τ_{ef} não são comparáveis [10] Analisaremos seis situações a seguir.

I) $\tau_0 \ll \tau_r \ll \tau_{ef}$ – O movimento é subamortecido ($\tau_r > \tau_0$) e o tempo de autocorrelação do ruído é a maior das escalas envolvidas. Podemos considerar duas situações intermediárias:

a) $\tau_0 \ll t < \tau_r \ll \tau_{ef}$ – Definindo-se o tempo adimensional $t' = t/\tau_0$, é possível mostrar que a Eq. (3.3.1) toma a forma:

$$\varphi'' + 2 (\tau_0/\tau_r) \varphi' + 4\pi^2\varphi = \tau_0^2\zeta_{cn}(t') , \quad (3.3.6a)$$

onde φ' representa diferenciação com respeito à t' e $\zeta(t')$ é o ruído colorido transformado. Como $\tau_0/\tau_r \ll 1$, pode-se desprezar o termo em φ' . A dinâmica pode ser então aproximada por:

$$\varphi'' + 4\pi^2\varphi = \tau_0^2\zeta_{cn}(t') , \quad (3.3.6b)$$

ou, na variável temporal original,

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \zeta_{cn}(t) . \quad (3.3.6c)$$

A eq.(3.3.6c) descreve o comportamento efetivo do sistema para intervalos de observação da ordem de τ_r , no qual o efeito do amortecimento é desprezível frente às inúmeras oscilações do sistema naquele intervalo.

A condição $t \ll \tau_{ef}$ implica que o ruído seja fortemente correlacionado, logo, o comportamento da variância deve ser próximo do caso determinístico para uma dada realização do ruído inicial, conforme mencionado anteriormente. Assim,

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \zeta(0) . \quad (3.3.6d)$$

b) $\tau_0 \ll \tau_r < t \ll \tau_{ef}$ – A análise deste regime é análoga ao do regime anterior. Portanto, nos dois regimes, o comportamento da variância é dominado pelo modo oscilatório.

II) $\tau_0 \ll \tau_{ef} \ll \tau_r$ – Aqui, o movimento também será subamortecido, com a mesma condição $\tau_0/\tau_r \ll 1$ da situação anterior. Logo, a princípio, a dinâmica será regida pela eq.(3.3.6c), tanto no intervalo $\tau_0 \ll t < \tau_{ef} \ll \tau_r$ quanto em $\tau_0 \ll \tau_{ef} < t \ll \tau_r$ ou seja, a dinâmica também é governada pelo modo oscilatório. No entanto, como o tempo de relaxação é a maior escala envolvida, espera-se que as oscilações da variância tenham amplitudes maiores do que no caso anterior.

A figura 9 ilustra o comportamento oscilatório de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ nos casos I e II. O primeiro gráfico mostra detalhes do curto prazo. O segundo gráfico é o mesmo, enfatizando o regime de longo prazo ($t \gg \tau_r, \tau_0$). Os parâmetros relacionados à composição do ruído foram escolhidos de forma a satisfazer o vínculo $\sigma_a^2/\lambda_a = D_a$.

Figura 9 – Gráfico comparativo de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para os casos I e II. Caso I (em azul): $\tau_0 \ll \tau_r \ll \tau_{ef}$ ($\tau_0 = 1$, $\tau_r = 10$, $\tau_{ef} = 50$ ($\lambda_a = 0,02$); $\sigma_a = 0,014$, $D_a = 0,01$). Caso II (em vermelho): $\tau_0 \ll \tau_{ef} \ll \tau_r$ ($\tau_0 = 1$, $\tau_{ef} = 10$ ($\lambda_a = 0,1$), $\tau_r = 50$; $\sigma_a = 0,032$, $D_a = 0,01$).

III) $\tau_{ef} \ll \tau_r \ll \tau_0$ – Nesta condição, o movimento será superamortecido ($\tau_r < \tau_0$). A autocorrelação do ruído é de curto alcance, o que significa poder utilizar a aproximação de ruído branco para os intervalos de observação intermediários entre as escalas do sistema. Temos duas possíveis situações de transiente, de acordo com t :

a) $\tau_{ef} \ll t < \tau_r \ll \tau_0$ – O termo aleatório $\zeta(t)$ age como ruído branco e a variância é regida pela eq.(3.1.11). Nos estágios iniciais do processo, ($\gamma t \ll 1$) e ($\omega_0 t \ll 1$), podemos mostrar que:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle \cong \frac{2}{3} D_a t^3 . \quad (3.3.7)$$

b) $\tau_{ef} \ll \tau_r \ll t < \tau_0$ – Neste regime, $t \gg \tau_r$ e o sistema é governado pela eq.(3.3.1), onde o termo de segunda derivada é desprezado comparado ao de primeira derivada. Definindo-se o tempo adimensional $t' = t/\tau_r$, é possível mostrar que a eq.(3.3.1) toma a forma:

$$2\varphi' + 4\pi^2(\tau_r/\tau_0)^2\varphi = \tau_r^2\zeta_{wn}(t') , \quad (3.3.8a)$$

onde φ' representa diferenciação com respeito à t' e $\zeta_{wn}(t')$ é o ruído branco transformado. Como $\tau_r/\tau_0 \ll 1$, pode-se desprezar o termo em φ . A dinâmica pode ser então aproximada por:

$$2\varphi' = \tau_r^2 \zeta_{wn}(t') , \quad (3.3.8b)$$

ou, na variável temporal original,

$$\dot{\varphi} = \zeta_{wn}(t)/2\gamma . \quad (3.3.8c)$$

Assim, neste regime, a evolução temporal do oscilador é descrita por uma marcha aleatória, o que implica em:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = \frac{D_a}{2\gamma^2} t . \quad (3.3.8d)$$

IV) $\tau_r \ll \tau_{ef} \ll \tau_0$ – O movimento continua sendo superamortecido e, como na situação anterior, temos dois regimes de transiente distintos:

a) $\tau_r \ll t < \tau_{ef} \ll \tau_0$ – Usando procedimento análogo ao regime III-b para $t/\tau_r \gg 1$ e $\tau_r/\tau_0 \ll 1$, chega-se à equação equivalente à eq.(3.3.8c), mas com termo aleatório colorido:

$$\dot{\varphi} = \zeta_{cn}(t)/2\gamma . \quad (3.3.9a)$$

Isto implica que $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle \approx t^\vartheta$, $\vartheta > 1$, ou seja, após o efeito transiente do amortecimento, o sistema exibe comportamento superdifusivo.

Para τ_{ef} suficientemente grande, ou seja, para $\tau_r \ll t \ll \tau_{ef}$, a eq.(3.3.9a) é aproximada por:

$$\dot{\varphi} = \zeta(0)/2\gamma . \quad (3.3.9b)$$

Para diferentes realizações do ruído obtém-se que:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = \frac{\sigma_a^2}{4\gamma^2} t^2. \quad (3.3.9c)$$

b) $\tau_r \ll \tau_{ef} \ll t < \tau_0$ – Como o tempo de observação nesta situação é maior que os tempos de relaxação e de memória do ruído, o termo aleatório pode ser aproximado pelo ruído branco e a dinâmica pode ser descrita similarmente ao regime III-b, com evolução da variância dada pela eq.(3.3.8d).

A figura 10 ilustra o comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ nos casos III e IV. Em ambos os casos, τ_0 é a maior das escalas envolvidas. O primeiro gráfico mostra detalhes do curto prazo. Note o comportamento não linear da variância no intervalo $1 < t < 10$, associado aos regimes III-a ($\tau_{ef} \ll t < \tau_r$) e IV-a ($\tau_r \ll t < \tau_{ef}$). Observa-se também o comportamento linear da variância em escalas temporais intermediárias, $10 < t < 50$, associado aos regimes III-b e IV-b ($\tau_{ef}, \tau_r \ll t < \tau_0$), previsto pela eq.(3.3.8d). O segundo gráfico é o mesmo, enfatizando o regime de longo prazo ($t \gg \tau_r, \tau_0$). Os parâmetros relacionados à composição do ruído foram escolhidos de forma a satisfazer o vínculo $\sigma_a^2/\lambda_a = D_a$.

Figura 10 – Gráfico comparativo de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para os casos III e IV. Caso III (em azul):

$\tau_{ef} \ll \tau_r \ll \tau_0$ ($\tau_{ef} = 1$ ($\lambda_a = 1$), $\tau_r = 10$, $\tau_0 = 50$; $\sigma_a = 0,01$, $D_a = 0,01$). Caso IV (em vermelho): $\tau_r \ll \tau_{ef} \ll \tau_0$ ($\tau_r = 1$, $\tau_{ef} = 10$ ($\lambda_a = 0,1$), $\tau_0 = 50$; $\sigma_a = 0,032$, $D_a = 0,01$).

V) $\tau_{ef} \ll \tau_0 \ll \tau_r$ – A dinâmica é subamortecida e temos dois regimes intermediários:

a) $\tau_{ef} \ll t < \tau_0 \ll \tau_r$ - Neste regime, o tempo de relaxação é grande comparado ao tempo de observação e o amortecimento pode ser desprezado. No início deste processo ($t \ll \tau_0$), a dinâmica é descrita por:

$$\ddot{\varphi} = \zeta_{cn}(t) , \quad (3.3.10a)$$

mas sendo o tempo de observação bem maior que o tempo característico de memória do ruído, a dinâmica pode ser aproximada por:

$$\ddot{\varphi} = \zeta_{wn}(t) . \quad (3.3.10b)$$

A eq.(3.3.10b) implica que $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ tenha comportamento dado pela eq.(3.3.7) analogamente ao regime III-a.

b) $\tau_{ef} \ll \tau_0 < t \ll \tau_r$ - Neste regime, o tempo de relaxação também é grande comparado ao tempo de observação, e o amortecimento também pode ser desprezado. A dinâmica é governada pelos modos oscilatórios:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \zeta_{wn}(t) . \quad (3.3.11)$$

VI) $\tau_r \ll \tau_0 \ll \tau_{ef}$ - Nesta condição, a dinâmica é superamortecida e o tempo de memória do ruído é a maior das escalas envolvidas. Podemos distinguir 2 regimes.

a) $\tau_r \ll t < \tau_0 \ll \tau_{ef}$ - temos situação análoga ao regime IV-a no qual $t/\tau_r \gg 1$ e $\tau_r/\tau_0 \ll 1$. O ruído está fortemente correlacionado e podemos considerar que $\zeta(t) = \zeta(0)$ para cada realização inicial do ruído. Logo, a equação de evolução pode ser aproximada por:

$$2\gamma\dot{\varphi} = \zeta(0) , \quad (3.3.12)$$

obtendo-se a para a variância o comportamento mostrado na eq.(3.3.9c).

b) $\tau_r \ll \tau_0 \ll t < \tau_{ef}$ – Neste regime, o tempo de observação é muito maior do que as escalas de oscilação e de amortecimento ($t \gg \tau_r, \tau_0$) e a variância assume o valor estacionário do oscilador sujeito a ruído colorido descrito pela eq.(3.1.12).

A figura 11 ilustra o comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ nas situações V e VI. O primeiro gráfico mostra detalhes do curto prazo. Note o comportamento não linear da variância no intervalo $1 < t < 10$, associado aos regimes V-a ($\tau_{ef} \ll t < \tau_0$) e VI-a ($\tau_r \ll t < \tau_0$). Observa-se também em escalas temporais intermediárias $10 < t < 50$ o comportamento oscilatório da variância associado ao regime V-b ($\tau_0 < t \ll \tau_r$). O segundo gráfico é o mesmo, enfatizando o regime de longo prazo ($t \gg \tau_r, \tau_0$). Os parâmetros relacionados à composição do ruído foram escolhidos de forma a satisfazer o vínculo $\sigma_a^2/\lambda_a = D_a$.

Figura 11 – Gráfico comparativo de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para os casos V e VI. Caso V (em vermelho): $\tau_{ef} \ll \tau_0 \ll \tau_r$ ($\tau_{ef} = 1$ ($\lambda_a = 1$), $\tau_0 = 10$, $\tau_r = 50$; $\sigma_a = 0,01$, $D_a = 0,01$). Caso VI (em azul): $\tau_r \ll \tau_0 \ll \tau_{ef}$ ($\tau_r = 1$, $\tau_0 = 10$, $\tau_{ef} = 50$ ($\lambda_a = 0,02$); $\sigma_a = 0,014$, $D_a = 0,01$).

Nas análises feitas até aqui, considera-se que as escalas características do sistema não possuem ordens de grandeza comparáveis. Para escalas equivalentes, ou seja, $\tau_r \sim \tau_0 \sim \tau_{ef}$, ilustramos na figura 12 um comportamento típico da variância, onde são observadas regiões de picos de incerteza na fase transiente.

Figura 12 – Ilustração do comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para parâmetros $\tau_r = 1$, $\tau_{ef} = 2$, $\tau_0 = 4$ ($\sigma_a = 0,07$ e $\lambda_a = 0,5$).

3.4

Considerações energéticas para o problema do oscilador com ruído aditivo

A fim de fazer considerações físicas acerca dos sistemas que são estudados neste capítulo, efetuamos uma descrição estatística (dependente do tempo) do fluxo de energia injetada e dissipada nesses sistemas. Inicialmente, será considerado a título de exemplificação, o oscilador mais simples estudado neste capítulo, no qual o ruído é aditivo Gaussiano branco e cujos resultados estão na literatura. A seguir, trataremos do caso de ruído aditivo Gaussiano colorido, cujos resultados para o regime transiente são originais.

3.4.1

Considerações energéticas: ruído aditivo branco

Considere a energia média do oscilador, sendo φ a posição e y sua velocidade ($m = 1$):

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \omega_0^2 \varphi^2 \rangle. \quad (3.4.1.1)$$

Nas seções 3.1 e 3.2 foram apresentadas respectivamente as variâncias da posição φ e da velocidade y . Considerando o oscilador partindo da origem do espaço de

fase, $\langle \varphi^2 \rangle = \langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e $\langle y^2 \rangle = \langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$, como já mencionado. Para simplificar a análise, vamos tomar apenas o caso superamortecido, onde,

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{D_a}{2\gamma\omega_0^2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\gamma \sinh 2\alpha t}{\alpha} + \frac{2\gamma^2 \sinh^2 \alpha t}{\alpha^2} \right) e^{-2\gamma t} \right\}, \quad (3.4.1.2a)$$

$$\langle y^2 \rangle = \frac{D_a}{2\gamma} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\gamma \sinh 2\alpha t}{\alpha} + \frac{2\gamma^2 \sinh^2 \alpha t}{\alpha^2} \right) e^{-2\gamma t} \right\}. \quad (3.4.1.2b)$$

Assim, a energia média ao longo do tempo será dada por:

$$\langle E \rangle = \frac{D_a}{2\gamma} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} \sinh^2 \alpha t \right] e^{-2\gamma t} \right\}. \quad (3.4.1.3)$$

No longo prazo, isto é, quando $t \gg 1/\gamma$, obtém-se a convergência para o regime estacionário $\langle E \rangle_{est} = D_a/2\gamma$.

Neste caso, o sistema descreve uma partícula em contato com um reservatório de calor com temperatura T , a energia cinética média no regime estacionário também poderá ser escrita como $\langle E_c \rangle_{est} = \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle_{est} = \frac{1}{2} k_B T$, onde k_B é a constante de Boltzmann. Neste caso, existirá um vínculo entre a amplitude do ruído e a temperatura do reservatório, $D_a = 2\gamma k_B T$.

O próximo passo é considerar o trabalho médio realizado pelas forças microscópicas sobre o sistema $\langle W \rangle_F$, ou seja, o trabalho da força de dissipação e da força motriz aleatória. Neste caso, o trabalho microscópico corresponde ao calor gerado no acoplamento partícula-banho. Define-se:

$$\langle W \rangle_F = \int_0^t \langle Fv \rangle dt', \quad (3.4.1.4)$$

onde F é a força que atua sobre a partícula e v é a sua velocidade.

Em nosso problema, a força estocástica ζ_{wn} é a responsável pela injeção de energia no sistema. O trabalho médio de ζ_{wn} é dado por:

$$\langle W \rangle_\zeta = \int_0^t \langle \zeta y \rangle dt' = D_a t, \quad (3.4.1.5)$$

onde o termo $\langle \zeta y \rangle = D_a$ foi obtido tomando-se o limite de ruído branco na eq.(3.2.12d). Já o trabalho médio da força dissipativa $\langle W \rangle_{diss} = \langle [-2\gamma y] y \rangle dt$, usando-se a eq.(3.4.1.2b), é dada por:

$$\langle W \rangle_{diss} = -2\gamma \int_0^t \langle y^2 \rangle dt' = \frac{D_a}{2\gamma} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} \sinh^2 \alpha t \right] e^{-2\gamma t} \right\} - D_a t. \quad (3.4.1.6)$$

A variação da energia da partícula entre o instante inicial $t_0 = 0$ e o instante final t está relacionada à quantidade calor injetada e dissipada. De fato, dado que o ensemble inicial está localizado na origem do espaço de fase, a partir da eq.(3.4.1.5) e da eq.(3.4.1.6), obtém-se que o trabalho total das forças microscópicas para levar o sistema de $\varphi_0 = y_0 = 0, E(t_0 = 0) = 0$ ao instante t satisfaz a $\langle E \rangle = \langle W \rangle_\zeta + \langle W \rangle_{diss}$, com a energia média total dada pela eq.(3.4.1.3).

3.4.2

Considerações energéticas: ruído Gaussiano colorido

Considere o oscilador com ruído colorido Gaussiano ζ_{cn} com mesmas condições iniciais da seção anterior. O regime transiente para a energia média é calculada a partir da eq.(3.4.1.1), utilizando os momentos quadráticos médios dados pelo sistema da eq.(3.2.9c). Vamos tomar o caso superamortecido como referência para os cálculos, para o qual obtivemos que:

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{2\sigma_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)} \left[1 - \left(\frac{(\lambda_a + \gamma) \sinh \alpha t}{\alpha} + \cosh \alpha t \right) e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \right] + \frac{\lambda_a - 2\gamma}{4\omega_0^2\gamma} [1 - e^{-2\gamma t}] - \frac{e^{-2\gamma t}}{4\omega_0^2} \left[(\lambda_a - 2\gamma) \frac{\sinh 2\alpha t}{\alpha} + (2\lambda_a\gamma - 4\gamma^2 + 2\omega_0^2) \frac{\sinh^2 \alpha t}{\alpha^2} \right] \right\}, \quad (3.4.2.1a)$$

$$\langle y^2 \rangle = \frac{2\sigma_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left\{ -\frac{\lambda_a^2}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)} \left[1 + \left(\frac{(\omega_0^2 + \lambda_a\gamma) \sinh \alpha t}{\lambda_a \alpha} - \cosh \alpha t \right) e^{-(\lambda_a + \gamma)t} \right] + \frac{\lambda_a}{4\gamma} [1 + e^{-2\gamma t}] + \frac{e^{-2\gamma t}}{4} \left[\frac{\sinh 2\alpha t}{\alpha} + 2(\lambda_a\gamma - \omega_0^2) \frac{\sinh^2 \alpha t}{\alpha^2} \right] \right\}; \quad (3.4.2.1b)$$

A eq.(3.4.2.1a) reproduz o resultado obtido através do método da função de Green mostrado na eq.(3.1.10b). A eq.(3.4.2.1b) reproduz a eq.(3.2.13c).

A partir dos nossos resultados, a energia média ao longo do tempo é dada por:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle = & \frac{\sigma_a^2(\lambda_a + \gamma)}{2\gamma[\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)]} + \\ & + \frac{\sigma_a^2 e^{-(\lambda_a + \gamma)t}}{[\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)][\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)]} \left[(\omega_0^2(\lambda_a + \gamma) + \lambda_a^2 \gamma) \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} + (\omega_0^2 - \lambda_a^2) \cosh \alpha t \right] + \\ & + \frac{\sigma_a^2 e^{-2\gamma t}}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left[\frac{\omega_0^2(\gamma - \lambda_a)}{\gamma \alpha^2} - \frac{\gamma \sinh 2\alpha t}{\alpha} - (\gamma^2 + \lambda_a \gamma) \frac{\cosh 2\alpha t}{\alpha^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.2.1c)$$

Da equação acima, a energia média estacionária será [10]:

$$\langle E \rangle_{est} = \frac{\sigma_a^2(\lambda_a + \gamma)}{2\gamma(\lambda_a^2 + 2\lambda_a \gamma + \omega_0^2)}. \quad (3.4.2.2)$$

Deve-se observar que as flutuações geradas pela força estocástica ζ_{cn} são coloridas enquanto a dissipação é local (no tempo), não tendo, portanto, a mesma origem e assim, não satisfazem à relação de flutuação-dissipação.

Neste caso, enquanto o trabalho microscópico da força dissipativa $-2\gamma y$ corresponde ao calor gerado no acoplamento partícula-banho, o trabalho microscópico da força estocástica ζ_{cn} corresponde ao acoplamento partícula-banho “vestido” - ver capítulo 2), que atua como um reservatório de trabalho, pois ζ_{cn} atua de forma coerente durante períodos de tempo τ_a , induzindo momento linear no sistema.

O passo seguinte é calcular os trabalhos médios das forças microscópicas que atuam no sistema.

Considerando o caso superamortecido, o trabalho médio $\langle W \rangle_\zeta$ de ζ_{cn} pode ser obtido exatamente para todo o intervalo temporal a partir da integral da eq.(3.2.12d):

$$\begin{aligned} \langle W \rangle_\zeta = & \frac{\sigma_a^2 \lambda_a}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)} t + \frac{\sigma_a^2(\omega_0^2 - \lambda_a^2)}{[\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)]^2} + \\ & - \frac{\sigma_a^2 e^{-(\lambda_a + \gamma)t}}{[\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)]^2} \left[(\omega_0^2(\lambda_a + \gamma) + \lambda_a^2 \gamma) \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} + (\omega_0^2 - \lambda_a^2) \cosh \alpha t \right]. \end{aligned} \quad (3.4.2.3)$$

Da mesma forma, o trabalho $\langle W \rangle_{diss}$ da força dissipativa é obtido integrando-se $\langle -2\gamma y^2 \rangle$ a partir da eq.(3.4.2.1b).

$$\begin{aligned}
\langle W \rangle_{diss} = & -\frac{\sigma_a^2 \lambda_a}{(\lambda_a^2 + 2\lambda_a \gamma + \omega_0^2)} t + \frac{\sigma_a^2}{(\lambda_a^2 + 2\lambda_a \gamma + \omega_0^2)} \left\{ [1 + \gamma + \lambda_a] - \frac{2(\lambda_a \gamma + \omega_0^2)}{(\lambda_a^2 + 2\lambda_a \gamma + \omega_0^2)} \right\} + \\
& + \frac{4\sigma_a^2 \lambda_a \gamma e^{-(\lambda_a + \gamma)t}}{[\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a + 2\gamma)]^2 [\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)]} \left[(\omega_0^2(\lambda_a + \gamma) + \lambda_a^2 \gamma) \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} + (\omega_0^2 - \lambda_a^2) \cosh \alpha t \right] + \\
& + \frac{\sigma_a^2 e^{-2\gamma t}}{\omega_0^2 + \lambda_a(\lambda_a - 2\gamma)} \left[\frac{\omega_0^2(\gamma - \lambda_a)}{\gamma \alpha^2} - \frac{\gamma \sinh 2\alpha t}{\alpha} - (\gamma^2 + \lambda_a \gamma) \frac{\cosh 2\alpha t}{\alpha^2} \right]. \quad (3.4.2.4)
\end{aligned}$$

Das eq.(3.4.2.3) e eq.(3.4.2.4) obtém-se que o trabalho total das forças microscópicas para levar o sistema de $\varphi_0 = y_0 = 0$, $E(t_0 = 0) = 0$ ao instante final t , $\langle W \rangle = \langle W \rangle_\zeta + \langle W \rangle_{diss}$ satisfaz a $\langle E \rangle = \langle W \rangle$, conforme esperado, com a energia média total dada pela eq.(3.4.2.1c).

A figura 13 ilustra o perfil característico de $\langle E \rangle$, $\langle W \rangle_\zeta$, $\langle W \rangle_{diss}$ e $\langle W \rangle$. Em particular, observa-se que após o regime transiente, $\langle W \rangle_\zeta$ ($\langle W \rangle_{diss}$) cresce (decrece) com mesma taxa no tempo, ou seja, no regime de longo prazo a potência injetada é consumida pela dissipação. Como consequência, o trabalho microscópico total feito sobre a partícula desde $t_0 = 0$ até qualquer instante final no longo prazo $\langle W \rangle = \langle W \rangle_\zeta + \langle W \rangle_{diss}$ é constante, garantindo a existência de um estado estacionário.

Figura 13 – Gráfico de $\langle E \rangle$, $\langle W \rangle_\zeta$, $\langle W \rangle_{diss}$ e $\langle W \rangle$ para parâmetros $\gamma = 1.1$, $\omega_0 = 1$, $\lambda_a = 0.1$ e $\sigma_a = 1$ (ver legenda).

4

Oscilador com amortecimento aleatório sujeito a ruído aditivo

Vamos considerar a seguinte equação diferencial, que fornece a modelagem mais geral tratada neste trabalho:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma[1 + \xi(t)]\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \varsigma(t) . \quad (4.1a)$$

Além do ruído aditivo $\varsigma(t)$ presente no sistema, introduz-se uma componente aleatória no termo de amortecimento através do ruído multiplicativo $\xi(t)$.

Esta equação pode ser transformada na equação de difusão-convecção, que descreve a transferência de partículas, energia ou outra grandeza de interesse em um meio que se movimenta:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vartheta(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mathcal{F} , \quad (4.1b)$$

onde a grandeza física é representada pela variável φ , D é o coeficiente de difusão, $\mathcal{F}$ representa as fontes ou absorvedores de φ e ϑ é a velocidade de convecção local do meio. Na versão estacionária:

$$D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \vartheta(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathcal{F} = 0 , \quad (4.1c)$$

Comparando-se com a eq.(4.1a), vê-se que são equivalentes, com a variável temporal t sendo substituída pela variável espacial x e onde o termo de amortecimento é mapeado no termo de convecção devido ao fluxo do meio.

Da mesma forma, a eq. (4.1a) pode ser mapeada versão estacionária da equação de Landau-Ginzburg que descreve a transição de fase em sistemas com fluxo do meio. Na versão linearizada [29]:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \vartheta(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x} + a\Psi = 0 , \quad (4.1d)$$

onde Ψ representa o parâmetro de ordem e a é um coeficiente proveniente da expressão da energia livre.

Estas equações descrevem um grande número de situações físicas diferentes, daí a importância de sua resolução. Neste trabalho, a eq. (4.1a) será utilizada para modelar a dinâmica de preços intradiários do mercado financeiro.

Como anteriormente, vamos considerar dois casos para o ruído aditivo $\zeta(t)$:

- i) Ruído branco Gaussiano - $\zeta_{wn}(t)$ satisfazendo a:

$$\langle \zeta_{wn}(t) \rangle = 0 \quad \langle \zeta_{wn}(t) \zeta_{wn}(t') \rangle = 2D_a \delta(t - t') ; \quad (4.2a)$$

- ii) Ruído colorido Gaussiano - $\zeta_{cn}(t)$ satisfazendo a:

$$\langle \zeta_{cn}(t) \rangle = 0 \quad \langle \zeta_{cn}(t) \zeta_{cn}(t') \rangle = \sigma_a^2 \exp(-\lambda_a |t - t'|) . \quad (4.2b)$$

O ruído branco (4.2a) é obtido tomando-se simultaneamente o limite $\sigma_a \rightarrow \infty$ e $\lambda_a \rightarrow \infty$ com o vínculo $\sigma_a^2/\lambda_a = D_a$ finito. Por outro lado, da eq.(4.2), $\int_{-\infty}^t dt' \langle \zeta_{cn}(t) \zeta_{cn}(t') \rangle = \sigma_a^2/\lambda_a$ e $\int_{-\infty}^t dt' \langle \zeta_{wn}(t) \zeta_{wn}(t') \rangle = D_a$. Assim, se considerarmos uma sequência de ruídos coloridos de parâmetros (σ_a, λ_a) satisfazendo a $\sigma_a^2/\lambda_a = D_a$ com o mesmo valor de D_a , isto significa que estamos mantendo o valor da integral $\int_{-\infty}^t dt' \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle$ como sendo a mesma do ruído branco para o qual convergem. É então conveniente reescrever a eq.(4.2b) como:

$$\langle \zeta_{cn}(t) \rangle = 0 \quad \langle \zeta_{cn}(t) \zeta_{cn}(t') \rangle = \lambda_a D_a \exp(-\lambda_a |t - t'|) . \quad (4.2c)$$

Desta forma, variando-se λ_a , estamos percorrendo a sequência de ruídos Gaussianos coloridos associados ao mesmo valor limite D_a .

Para o novo ruído $\xi(t)$, vamos considerar o processo dicotômico, introduzido na seção 2.2, o qual pode assumir apenas dois estados, com valores simétricos $\pm\sigma_m$ que se alternam aleatoriamente, com tempos de espera regidos por distribuição exponencial.

Vamos considerar dois casos para o ruído multiplicativo $\xi(t)$:

- i) Ruído branco Gaussiano - $\xi_{wn}(t)$ satisfazendo a:

$$\langle \xi_{wn}(t) \rangle = 0 \quad \langle \xi_{wn}(t) \xi_{wn}(t') \rangle = 2D_m \delta(t - t') ; \quad (4.3a)$$

- ii) Ruído colorido Dicotômico - $\xi_{dn}(t)$ satisfazendo a:

$$\langle \xi_{dn}(t) \rangle = 0 \quad \langle \xi_{dn}(t) \xi_{dn}(t') \rangle = \sigma_m^2 \exp(-\lambda_m |t - t'|) . \quad (4.3b)$$

Lembramos que os parâmetros $(\sigma_m, \lambda_m, D_m)$ da eq.(4.3) são equivalentes aos parâmetros (σ, λ^*, D) introduzidos na seção 2.2. Considerando-se simultaneamente os limites, $\sigma_m \rightarrow \infty, \lambda_m \rightarrow \infty$ de tal forma que a razão $\sigma_m^2/\lambda_m = D_m$ seja finita, pode-se mostrar que o ruído dicotômico da eq.(4.3b) também se reduz ao ruído branco Gaussiano da eq.(4.3a) (ver seção 2.2).

Vamos também considerar aqui a sequência de ruídos dicotômicos que possuem parâmetros (σ_m, λ_m) satisfazendo ao vínculo $\sigma_m^2/\lambda_m = D_m$, convergindo para ruído branco com dado parâmetro D_m . Assim, o valor da integral $\int_{-\infty}^t dt' \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \sigma_m^2/\lambda_m$ em cada família de ruídos dicotômicos analisada é a mesma que a do ruído branco para o qual convergem. Neste caso, é conveniente reescrever a eq.(4.3b) como:

$$\langle \xi_{dn}(t) \rangle = 0 \quad \langle \xi_{dn}(t) \xi_{dn}(t') \rangle = \lambda_m D_m \exp(-\lambda_m |t - t'|) \quad (4.3c)$$

Desta forma, mantendo-se D_m fixo e, por exemplo, aumentando-se λ_m e aproximando-se do limite Gaussiano, estamos analisando comparativamente ruídos dicotômicos com amplitude σ_m também cada vez maiores.

Assim, para o oscilador com amortecimento e força externa aleatórios, dadas as hipóteses aqui apresentadas, serão analisados os seguintes casos de interesse, a saber:

- I. $\xi_{wn}(t)$ e $\zeta_{wn}(t)$;
- II. $\xi_{wn}(t)$ e $\zeta_{cn}(t)$;
- III. $\xi_{dn}(t)$ e $\zeta_{wn}(t)$;

Neste trabalho, trataremos $\xi(t)$ e $\zeta(t)$ como não são correlacionados. Estudaremos estes casos começando pela obtenção de $\langle \varphi(t) \rangle$ e de $\langle \dot{\varphi}(t) \rangle$, e a seguir, analisaremos a variância das soluções.

4.1.

Análise dos casos I e II

Iremos tratar inicialmente o problema do oscilador com amortecimento aleatório para os casos mais simples, onde o ruído multiplicativo é Gaussiano branco [7, 8] e o ruído aditivo, Gaussiano branco ou colorido (casos I e II, respectivamente).

4.1.1. Casos I e II: valores médios de $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle \equiv \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$

Para apresentarmos o comportamento de $\langle \varphi(t) \rangle$, reescrevemos a eq.(4.1) como:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \zeta(t) - 2\gamma\xi(t)\dot{\varphi}. \quad (4.1.1.1)$$

Definindo-se o operador diferencial $L\{f\} \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)f$ é possível reescrever a eq.(4.1.1.1) como:

$$L\{\varphi\} = \zeta(t) - 2\gamma\xi(t)\dot{\varphi} \Rightarrow \varphi = L^{-1}\{\zeta(t) - 2\gamma\xi(t)\dot{\varphi}\}. \quad (4.1.1.2)$$

Para o caso onde $\gamma > \omega_0$, adequado às aplicações ao mercado financeiro que faremos no presente trabalho,

$$L^{-1}\{f\} = \frac{1}{\alpha} \int_0^t dt_1 e^{-\gamma(t-t_1)} \sinh \alpha(t-t_1) f(t_1), \quad (4.1.1.3)$$

com $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Assim,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t dt_1 e^{-\gamma(t-t_1)} \sinh \alpha(t-t_1) [\zeta(t_1) - 2\gamma\xi(t_1)\dot{\varphi}(t_1)]. \quad (4.1.1.4)$$

Para o cálculo da média, vamos utilizar a eq.(4.1.1.4) como equação auxiliar. Derivando-a em relação a t , temos:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\alpha} \int_0^t dt_1 [\zeta(t_1) - 2\gamma\xi(t_1)\dot{\varphi}(t_1)] F(t - t_1), \quad (4.1.1.5a)$$

onde

$$F(t - t_1) = e^{-\gamma(t-t_1)} \{\alpha \cosh \alpha(t - t_1) - \gamma \sinh \alpha(t - t_1)\}. \quad (4.1.1.5b)$$

Substituindo a eq.(4.1.1.5a) na eq.(4.1.1.1):

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \zeta(t) - \frac{2\gamma}{\alpha} \int_0^t dt_1 [\xi(t)\zeta(t_1) - 2\gamma\xi(t)\xi(t_1)\dot{\varphi}(t_1)] F(t - t_1). \quad (4.1.1.5c)$$

Tomando a média sobre realizações dos ruídos:

$$\langle \ddot{\varphi} \rangle + 2\gamma\langle \dot{\varphi} \rangle + \omega_0^2\langle \varphi \rangle = -\frac{2\gamma}{\alpha} \int_0^t dt_1 [\langle \xi(t)\zeta(t_1) \rangle - 2\gamma\langle \xi(t)\xi(t_1)\dot{\varphi}(t_1) \rangle] F(t - t_1). \quad (4.1.1.6a)$$

Como o ruído $\xi(t)$ só pode ser, por hipótese, difusivo ou dicotômico, e, por conseguinte um processo de Markov, é possível reescrever a correlação mista presente na eq.(4.1.1.6a) como [30] $\langle \xi(t)\xi(t_1)\dot{\varphi}(t_1) \rangle = \langle \xi(t)\xi(t_1) \rangle \langle \dot{\varphi}(t_1) \rangle$. Desta forma, a equação diferencial para $\langle \varphi(t) \rangle$ fica dependente apenas das correlações entre os ruídos $\langle \xi(t)\zeta(t_1) \rangle$ e $\langle \xi(t)\xi(t_1) \rangle$:

$$\langle \ddot{\varphi} \rangle + 2\gamma\langle \dot{\varphi} \rangle + \omega_0^2\langle \varphi \rangle = -\frac{2\gamma}{\alpha} \int_0^t dt_1 [\langle \xi(t)\zeta(t_1) \rangle - 2\gamma\langle \xi(t)\xi(t_1) \rangle \langle \dot{\varphi}(t_1) \rangle] F(t - t_1). \quad (4.1.1.6b)$$

Este desenvolvimento para o cálculo do valor médio será utilizado para todos os casos analisados no presente trabalho.

Para os casos I e II, onde o ruído multiplicativo $\xi \equiv \xi_{wn}(t)$ é descorrelacionado do ruído aditivo Gaussiano $\zeta(t)$ e onde $\zeta(t)$ pode ser respectivamente branco, $\zeta_{wn}(t)$, ou colorido, $\zeta_{cn}(t)$, as correlações presentes na eq.(4.1.1.6b) são:

$$\langle \xi(t)\zeta(t_1) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t_1) \rangle = 2D_m\delta(t - t_1). \quad (4.1.1.7)$$

Com isto, a equação para a média $\langle \varphi \rangle$ terá a forma:

$$\langle \ddot{\varphi} \rangle + 2\gamma(1 - 2\gamma D_m)\langle \dot{\varphi} \rangle + \omega_0^2\langle \varphi \rangle = 0. \quad (4.1.1.8)$$

Este resultado reproduz o obtido na literatura [7].

Assim, o efeito dominante da presença do ruído multiplicativo branco $\xi_{wn}(t)$ é a diminuição da constante de amortecimento efetiva:

$$\gamma_{ef} \equiv \gamma(1 - 2\gamma D_m). \quad (4.1.1.9)$$

Como a eq.(4.1.1.8) não depende do ruído aditivo, $\langle \varphi(t) \rangle$ assume a dinâmica do oscilador harmônico usual na ausência de força externa.

Por outro lado, se a perturbação for suficientemente forte de tal forma que $\gamma_{ef} < 0$, a atenuação se torna uma amplificação. Isto significa um processo no qual as flutuações são realimentadas, levando a $\langle \varphi(t) \rangle$ crescente com o tempo, ou seja, indicando instabilidade. Da eq.(4.1.1.9), assumindo por hipótese, que a solução é estável, a amplitude do ruído multiplicativo deve ser então limitada pelo valor:

$$D_m^{max} = 1/2\gamma \quad (4.1.1.10a)$$

Considerando a hipótese de soluções estáveis e o caso $\gamma > \omega_0$, a forma das soluções depende da relação entre γ_{ef} e ω_0 . O caso crítico ($\gamma_{ef} = \omega_0$), onde há mudança de forma funcional da solução, ocorre para novo valor crítico da amplitude D_m :

$$D_m^{CRIT} \equiv \frac{1}{2\gamma} \left(1 - \frac{\omega_0}{\gamma} \right) \quad (4.1.1.10b)$$

As soluções são, portanto, análogas às soluções clássicas do oscilador harmônico amortecido ($\omega_{ef} \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_{ef}^2} = i\alpha_{ef}$; $\varphi_0 \equiv \langle \varphi(0) \rangle$; $\dot{\varphi}_0 \equiv \langle \dot{\varphi}(0) \rangle$):

i) $\frac{1}{2\gamma} > D_m > D_m^{CRIT}$ – regime subamortecido ($\gamma_{ef} < \omega_0$)

$$\langle \varphi(t) \rangle = e^{-\gamma_{ef}t} \left[(\dot{\varphi}_0 + \gamma_{ef}\varphi_0) \frac{\sin \omega_{ef}t}{\omega_{ef}} + \varphi_0 \cos \omega_{ef}t \right]; \quad (4.1.1.11a)$$

ii) $D_m = D_m^{CRIT}$ – regime criticamente amortecido ($\gamma_{ef} = \omega_0$).

$$\langle \varphi(t) \rangle = e^{-\gamma_{ef}t} [(\dot{\varphi}_0 + \gamma_{ef}\varphi_0)t + \varphi_0]; \quad (4.1.1.11b)$$

iii) $D_m < D_m^{CRIT}$ – regime superamortecido ($\gamma_{ef} > \omega_0$)

$$\langle \varphi(t) \rangle = e^{-\gamma_{ef}t} \left[(\dot{\varphi}_0 + \gamma_{ef}\varphi_0) \frac{\sinh \alpha_{ef}t}{\alpha_{ef}} + \varphi_0 \cosh \alpha_{ef}t \right]. \quad (4.1.1.11c)$$

Para $\gamma \leq \omega_0$, a presença de ruído multiplicativo apenas reforça a dinâmica subamortecida ($D_m^{CRIT} = 0$).

A figura 14 ilustra o comportamento de $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle \equiv \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ para vários níveis do parâmetro de ruído multiplicativo D_m . Este comportamento será utilizado como referência da modelagem utilizada para os outros casos. As condições iniciais $\varphi_0 = 0$ e $y_0 \equiv \dot{\varphi}_0 = 0,005$ consideradas são as adequadas ao tratamento de dados do mercado que será feito posteriormente.

Figura 14 – Comportamento de $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle \dot{y}(t) \rangle$ para oscilador harmônico com amortecimento aleatório nos casos I e II. São exemplificados os regimes superamortecido ($D_m < D_m^{CRIT}$), subamortecido ($D_m^{CRIT} < D_m < 1/2\gamma$), criticamente amortecido ($D_m = D_m^{CRIT}$) e instável ($D_m > 1/2\gamma$). Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$ ($D_m^{CRIT} = 0,0625$).

Vale ressaltar que a eq.(4.1.1.8) também pode ser obtida através do método de sistemas dinâmicos descrito na seção 3.2. Para aplicá-lo, transforma-se a eq.(4.1) em um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -2\gamma[1 + \xi(t)]y(t) - \omega_0^2\varphi + \zeta(t) \end{cases} \quad (4.1.1.12a)$$

e toma-se a média sobre as realizações dos ruídos:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi} \rangle = \langle y \rangle \\ \langle \dot{y} \rangle = -2\gamma\langle y \rangle - 2\gamma\langle \xi y \rangle - \omega_0^2\langle \varphi \rangle \end{cases} \quad (4.1.1.12b)$$

Note que este sistema é idêntico ao sistema do oscilador sem termo estocástico no amortecimento, eq.(3.2.3a), a menos de um termo de correlação entre o ruído multiplicativo ξ e a resposta y do sistema.

É importante ressaltar que quando tratamos com ruído multiplicativo, não é claro o instante de tempo da resposta $y(t)$ no produto $\xi(t)y(t)$ (o chamado dilema de Itô-Stratonovich [31]). Neste trabalho, utilizamos a interpretação de Stratonovich.

A fim de obter-se um sistema fechado de equações, é necessário encontrar a expressão que descreve $\langle \xi y \rangle$. Ela pode ser encontrada através do seguinte método: (i) considera-se o ruído como dicotômico e aplica-se o procedimento FNSL

descrito na seção 2.3; (ii) a partir da expressão obtida, aplica-se o limite de ruído branco ao ruído dicotômico, conforme descrito no início deste capítulo.

Aplicando-se o procedimento FNSL para $y \equiv g_t[\xi]$ e a expressão de $\dot{y}$ na eq.(4.1.1.12a), o passo (i) do método utilizado fornece a seguinte evolução temporal da correlação $\langle \xi y \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \xi y \rangle &= \langle \xi \frac{dy}{dt} \rangle - \lambda_m \langle \xi y \rangle = \langle \xi [-2\gamma y - 2\gamma \xi y - \omega_0^2 \varphi + \zeta] \rangle - \lambda_m \langle \xi y \rangle \\ \therefore \frac{d}{dt} \langle \xi y \rangle &= -(\lambda_m + 2\gamma) \langle \xi y \rangle - 2\gamma \langle \xi^2 y^2 \rangle - \omega_0^2 \langle \xi \varphi \rangle + \langle \xi \zeta \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.1.13a)$$

Primeiramente, esta expressão pode ser simplificada, lembrando que os ruídos são descorrelacionados e possuem média nula, ou seja, $\langle \xi \zeta \rangle = 0$. Além disso, para ruído dicotômico (ver seção 2.2), ξ^2 é uma constante ($\xi^2 = \sigma_m^2$), logo, $\langle \xi^2 y^2 \rangle = \sigma_m^2 \langle y^2 \rangle$.

Porém, a eq. (4.1.1.13a) envolve outros termos novos e ainda não temos um sistema fechado de equações. Para o cálculo de $\langle \dot{\xi} \varphi \rangle$, utilizamos novamente o procedimento FNSL, obtendo-se:

$$\frac{d}{dt} \langle \xi \varphi \rangle = \langle \xi y \rangle - \lambda_m \langle \xi \varphi \rangle. \quad (4.1.1.13b)$$

Com isto, encontra-se o seguinte sistema fechado de equações diferenciais de primeira ordem lineares:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi} \rangle = \langle y \rangle \\ \langle \dot{y} \rangle = -2\gamma \langle y \rangle - 2\gamma \langle \xi y \rangle - \omega_0^2 \langle \varphi \rangle \\ \langle \dot{\xi} y \rangle = -(\lambda_m + 2\gamma) \langle \xi y \rangle - 2\gamma \sigma_m^2 \langle y^2 \rangle - \omega_0^2 \langle \xi \varphi \rangle \\ \langle \dot{\xi} \varphi \rangle = \langle \xi y \rangle - \lambda_m \langle \xi \varphi \rangle \end{cases} \quad (4.1.1.14)$$

A seguir, de acordo com o passo (ii) do método utilizado, toma-se o limite de ruído branco nas equações acima, obtendo-se $\langle \xi \varphi \rangle = 0$ e $\langle \xi y \rangle = -2\gamma D_m \langle y \rangle$. A ordem do sistema fica então reduzida:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi} \rangle = \langle y \rangle \\ \langle \dot{y} \rangle = -2\gamma(1 - 2\gamma D_m) \langle y \rangle - \omega_0^2 \langle \varphi \rangle \end{cases}, \quad (4.1.1.15)$$

que é equivalente à eq.(4.1.1.8) escrita em termos de equações diferenciais de primeira ordem.

Podemos concluir que os métodos Transformada de Laplace e Sistemas Dinâmicos são equivalentes para descrever os valores médios das respostas $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle$ dos casos de oscilador harmônico I e II, onde a componente aleatória do amortecimento é descrita por ruído multiplicativo branco e onde o termo de ruído aditivo é representado por ruído Gaussiano branco ou colorido, ambos com média nula. Na verdade, esta equivalência para os valores médios é válida para qualquer ruído aditivo com média nula.

Note ainda que o sistema da eq.(4.1.1.14), onde o ruído multiplicativo foi tratado como dicotômico, pode ser utilizado como método alternativo para o cálculo dos valores médios das respostas $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle$ do oscilador harmônico do caso III, que será analisado posteriormente.

Vale ressaltar que o método de Sistemas Dinâmicos apresenta uma vantagem em relação ao método de Transformada de Laplace em problemas nos quais é possível construir um sistema fechado de equações diferenciais de primeira ordem lineares e com coeficientes constantes. A princípio, este sistema pode ser resolvido a partir de métodos conhecidos na literatura [27], cuja solução pode ser obtida analiticamente ou numericamente, conforme o caso. Além disso, sua resolução fornece simultaneamente o valor médio de todas as grandezas envolvidas no sistema encontrado, incluindo correlações ruído-resposta como aquelas presentes no sistema descrito pela eq.(4.1.1.14).

4.1.2.

Casos I e II: variâncias $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$

Nessa subseção, os resultados apresentados para o caso I no regime estacionário reproduzem os resultados da literatura [8]. Nossa contribuição reside na obtenção das soluções transientes e de suas propriedades. Os resultados apresentados para o caso II tanto no regime transiente quanto no estacionário são originais.

Para o cálculo das variâncias, vamos utilizar a abordagem através de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem desenvolvida anteriormente na seção 3.2.

Na representação de Stratonovich, para uma função de variável estocástica g vale a regra de derivação $\dot{g}^2 = 2g\dot{g}$. A partir das expressões da eq.(4.1.1.12a) chega-se ao sistema de três equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^2 = 2\varphi y \\ \dot{y}^2 = -4\gamma y^2 - 4\gamma \xi y^2 - 2\omega_0^2 \varphi y + 2\zeta y \\ \dot{\varphi} y = y^2 - 2\gamma \varphi y - 2\gamma \xi \varphi y - \omega_0^2 \varphi^2 + \zeta \varphi \end{cases} \quad (4.1.2.1)$$

Tomando-se a média sobre realizações dos ruídos,

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -4\gamma \langle y^2 \rangle - 4\gamma \langle \xi y^2 \rangle - 2\omega_0^2 \langle \varphi y \rangle + 2\langle \zeta y \rangle \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 2\gamma \langle \varphi y \rangle - 2\gamma \langle \xi \varphi y \rangle - \omega_0^2 \langle \varphi^2 \rangle + \langle \zeta \varphi \rangle \end{cases} \quad (4.1.2.2)$$

onde se nota o aparecimento de termos extras $\langle \xi y^2 \rangle$ e $\langle \xi \varphi y \rangle$ em relação ao sistema do oscilador com parâmetro de amortecimento constante, mostrado na eq.(3.2.3b).

A fim de encontrar um sistema fechado de equações, vamos obter as expressões que descrevem $\langle \xi \dot{y}^2 \rangle$ e $\langle \xi \dot{\varphi} y \rangle$. A forma final dessas expressões irá depender dos tipos de ruídos envolvidos. Para o cálculo destas quantidades, vamos utilizar novamente a relação de FNSL, lembrando que este procedimento supõe que os ruídos são inicialmente coloridos.

Primeiramente, consideremos o termo $\langle \xi y^2 \rangle$. Usando o procedimento FNSL para $y^2 \equiv g_t[\xi]$ (ver seção 2.3) e a expressão para $\dot{y}^2$ na eq.(4.1.2.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \xi y^2 \rangle &= \langle \xi \frac{dy^2}{dt} \rangle - \lambda_m \langle \xi y^2 \rangle = \langle \xi [-4\gamma y^2 - 4\gamma \xi y^2 - 2\omega_0^2 \varphi y + 2\zeta y] \rangle - \lambda_m \langle \xi y^2 \rangle \\ \therefore \frac{d}{dt} \langle \xi y^2 \rangle &= -4\gamma \langle \xi y^2 \rangle - 4\gamma \sigma_m^2 \langle y^2 \rangle - 2\omega_0^2 \langle \xi \varphi y \rangle + 2\langle \xi \zeta y \rangle - \lambda_m \langle \xi y^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.2.3a)$$

Vale lembrar que a separação das médias em $\langle \xi^2 y^2 \rangle = \sigma_m^2 \langle y^2 \rangle$ só é válida quando o ruído ξ é dicotômico, pois nesse caso, ξ^2 é uma constante ($\xi^2 = \sigma_m^2$).

De maneira análoga podemos aplicar o procedimento FNSL para $\langle \xi \varphi y \rangle$, obtendo-se:

$$\frac{d}{dt} \langle \xi \varphi y \rangle = \langle \xi \frac{d(\varphi y)}{dt} \rangle - \lambda_m \langle \xi \varphi y \rangle = \langle \xi y^2 \rangle - 2\gamma \langle \xi \varphi y \rangle - 2\gamma \sigma_m^2 \langle \varphi y \rangle - \omega_0^2 \langle \xi \varphi^2 \rangle + \langle \xi \zeta \varphi \rangle - \lambda_m \langle \xi \varphi y \rangle, \quad (4.1.2.3b)$$

assim como para outros termos envolvendo correlação resposta-ruído na eq.(4.1.2.2) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \zeta y \rangle &= \langle \zeta \frac{dy}{dt} \rangle - \lambda_a \langle \zeta y \rangle = -2\gamma \langle \zeta y \rangle - 2\gamma \langle \zeta \xi y \rangle - \omega_0^2 \langle \zeta \varphi \rangle + \langle \zeta^2 \rangle - \lambda_a \langle \zeta y \rangle \\ \therefore \frac{d}{dt} \langle \zeta y \rangle &= -(2\gamma + \lambda_a) \langle \zeta y \rangle - 2\gamma \langle \zeta \xi y \rangle - \omega_0^2 \langle \zeta \varphi \rangle + \sigma_a^2; \quad (4.1.2.3c) \end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta \varphi \rangle = \langle \zeta y \rangle - \lambda_a \langle \zeta \varphi \rangle \quad (4.1.2.3d)$$

Observa-se ainda o aparecimento de novos termos de correlação na eq.(4.1.2.3b) e na eq.(4.1.2.3c) envolvendo os dois ruídos, $\langle \zeta \xi \varphi \rangle$ e $\langle \zeta \xi y \rangle$. Esses termos serão tomados de forma aproximada, de acordo com caso analisado.

Para determinar a dinâmica dos momentos quadráticos, temos que resolver o sistema dado pela eq.(4.1.2.2) juntamente com o conjunto das equações dado pela eq.(4.1.2.3), ou seja, um sistema de sete equações acopladas.

No entanto, estas expressões podem ser simplificadas quando o ruído é branco, fazendo-se os limites apropriados $\sigma_{a,m} \rightarrow \infty$, $\lambda_{a,m} \rightarrow \infty$ com os vínculos $\sigma_{a,m}^2 / \lambda_{a,m} = D_{a,m}$ finitos.

Considerando inicialmente o caso I, onde $\xi = \xi_{wn}(t)$ e $\zeta = \zeta_{wn}(t)$ são independentes, vamos tomar o limite de ruído branco nas relações FNSL. Com isto, a eq.(4.1.2.3) se simplifica: $\langle \xi y^2 \rangle = -4\gamma D_m \langle y^2 \rangle$; $\langle \xi \varphi y \rangle = -2\gamma D_m \langle \varphi y \rangle$; $\langle \zeta y \rangle = D_a$ e $\langle \zeta \varphi \rangle = 0$ e $\langle \zeta \xi \varphi \rangle \cong 0$; $\langle \zeta \xi y \rangle \cong 0$. Desta forma, o sistema que rege a dinâmica dos momentos quadráticos é dado por:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -4\gamma(1 - 4\gamma D_m)\langle y^2 \rangle - 2\omega_0^2\langle \varphi y \rangle + 2D_a \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 2\gamma(1 - 2\gamma D_m)\langle \varphi y \rangle - \omega_0^2\langle \varphi^2 \rangle \end{cases} \quad (4.1.2.4a)$$

Este sistema de equações diferenciais é linear e possui coeficientes constantes (através dos parâmetros do sistema). Para resolvê-lo, utilizamos o método descrito na seção 3.2. Os autovalores m são raízes da equação característica:

$$m^3 + 2\gamma[(3 - 10\gamma D_m)]m^2 + 4[\omega_0^2 + 2\gamma^2(1 - 2\gamma D_m)(1 - 4\gamma D_m)]m + 8\gamma\omega_0^2(1 - 4\gamma D_m) = 0. \quad (4.1.2.4b)$$

Assim, é possível obter soluções analíticas para os segundos momentos. Entretanto, tais soluções são extensas para serem exibidas no texto (Exemplificamos no apêndice 8.7 cálculos numéricos para a variância $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$). Desta forma, a análise do regime transiente para os segundos momentos (e conseqüentemente para as variâncias) será feita numericamente.

Como mostrado na seção 3.2, a resolução de um sistema de equações diferenciais lineares com coeficiente constantes, a princípio, depende dos ensembles iniciais dos processos φ e y . No entanto, para o caso I, os regimes estacionários independem de condições ou distribuições iniciais [8]:

$$\langle \varphi^2 \rangle_{est} = \frac{D_a}{2\gamma\omega_0^2(1 - 4\gamma D_m)}; \quad (4.1.2.5a)$$

$$\langle y^2 \rangle_{est} = \omega_0^2 \langle \varphi^2 \rangle_{est}; \quad (4.1.2.5b)$$

$$\langle \varphi y \rangle_{est} = 0. \quad (4.1.2.5c)$$

Evidentemente, tomando o parâmetro do ruído multiplicativo $D_m = 0$, os resultados se reduzem aos obtidos no capítulo 3 para o caso do oscilador com amortecimento constante, sujeito a ruído aditivo Gaussiano branco.

Como, para o caso I agora considerado, os valores médios de φ e $y = \dot{\varphi}$ se anulam no regime estacionário, os resultados para momentos quadráticos equivalem aos das variâncias estacionárias.

Da eq.(4.1.2.5a), encontramos que o parâmetro D_m deve satisfazer a um segundo valor limite, $D_m < D_m^*$, onde

$$D_m^* = \frac{1}{4\gamma}, \quad (4.1.2.6)$$

dado que os valores dos momentos quadráticos devem ser positivos. Este resultado é diferente do caso de oscilador com frequência aleatória (perturbada por ruído branco), onde a condição de instabilidade para o segundo momento ocorre a partir do valor $D_m^* = \frac{2\gamma}{\omega_0^2}$. [30,32].

Vamos mostrar agora que a condição $D_m < D_m^*$ equivale à condição de estabilidade energética. Define-se estabilidade energética como a condição na qual, na ausência de perturbações externas ($D_a = 0$), os momentos quadráticos $\langle \varphi^2 \rangle$ e $\langle y^2 \rangle$ relaxam a zero para tempos arbitrariamente grandes [30]. Para exemplificar esta equivalência no sistema estudado, ilustramos na figura 15 os gráficos de $\langle \varphi^2(t) \rangle$ e $\langle y^2(t) \rangle$ quando $D_a = 0$, considerando o ensemble inicial localizado $\langle \varphi(t=0) \rangle = 0$, $\langle \varphi^2(t=0) \rangle = 0$; $\langle y(t=0) \rangle = y_0$, $\langle y^2(t=0) \rangle = y_0^2$, com $y_0 = 5 \times 10^{-3}$, para parâmetros $\omega_0 = 1,5$ e $\gamma = 2$. É possível observar que a condição de estabilidade energética é satisfeita apenas para amplitudes de ruído multiplicativo inferiores a $D_m^* = 0,125$, ou seja, no limite definido na eq.(4.1.2.6).

Este resultado mostra uma propriedade importante do oscilador com amortecimento aleatório: o regime estável para os valores médios $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle$ é limitado pelo valor $D_m^{max} = 1/2\gamma$ (da eq.(4.1.1.9), $\gamma_{ef} < 0$) enquanto o regime estável dos momentos quadráticos $\langle \varphi^2(t) \rangle$ e $\langle y^2(t) \rangle$ é limitado pelo valor $D_m^* = 1/4\gamma$ (da eq.(4.1.2.5a), $\langle \varphi^2 \rangle_{est} > 0$). No caso de sistema apenas com ruído aditivo, só existe instabilidade para valores negativos de γ , tanto para momentos de primeira ordem quanto para os de segunda ordem.

Figura 15 – Análise de estabilidade energética - gráfico de $\langle \varphi^2 \rangle$ e $\langle y^2 \rangle$ para $D_a = 0$ e diferentes parâmetros de ruído multiplicativo D_m mostrados na legenda. Parâmetros $\gamma = 2$ e $\omega_0 = 1,5$ ($D_m^* = 0,125$). Ensemble inicial localizado (ver texto). É possível notar a convergência para valores não nulos se $D_m \geq D_m^*$.

No gráfico anterior, observa-se que, para $D_m = D_m^*$, há a convergência para um regime estacionário onde $\langle \varphi^2 \rangle_{est}$ e $\langle y^2 \rangle_{est}$ tem valores finitos, na ausência de ruído aditivo. Entretanto, estes resultados não podem ser determinados através da eq.(4.1.2.5a) e da eq.(4.1.2.5b), uma vez que elas foram obtidas sob a hipótese implícita de estabilidade energética. Para tal, devemos tratar o sistema inicial descrito pela eq.(4.1.2.4a) com coeficientes atribuídos ao valor limite D_m^* :

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -2\omega_0^2 \langle \varphi y \rangle + 2D_a \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - \gamma \langle \varphi y \rangle - \omega_0^2 \langle \varphi^2 \rangle \end{cases} \quad (4.1.2.7a)$$

Este sistema possui solução simples para os segundos momentos. Se considerarmos um ensemble inicial localizado do tipo $\langle \varphi(t=0) \rangle = 0$, $\langle \varphi^2(t=0) \rangle = 0$; $\langle y(t=0) \rangle = y_0$, $\langle y^2(t=0) \rangle = y_0^2$ (que é o suficiente para os propósitos desta análise - e deste trabalho), temos as seguintes soluções, onde definimos o parâmetro $\beta \equiv \sqrt{16\omega_0^2 - \gamma^2}$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(t) \rangle &= \frac{y_0^2}{2\omega_0^2} - \frac{\gamma D_a}{4\omega_0^4} + \frac{D_a t}{\omega_0^2} + \\ &- \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{4\omega_0^4} \left[(2\gamma y_0^2 \omega_0^2 + (8 - \omega_0^2 \gamma^2) D_a) \frac{\sin \beta t}{\beta} + (2y_0^2 \omega_0^2 - \gamma D_a) \cos \beta t \right]; \end{aligned} \quad (4.1.2.7b)$$

$$\langle y^2(t) \rangle = \frac{y_0^2}{2} + \frac{\gamma D_a}{4\omega_0^2} + D_a t +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{4\omega_0^2} \left[(2\gamma y_0^2 \omega_0^2 + (8 - \omega_0^2 \gamma^2) D_a) \frac{\sin \beta t}{\beta} + (2y_0^2 \omega_0^2 - \gamma D_a) \cos \beta t \right]; \quad (4.1.2.7c)$$

$$\langle \varphi y(t) \rangle = \frac{D_a}{2\omega_0^2} + \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{2\omega_0^2} \left[(4y_0^2 \omega_0^2 - \gamma D_a) \frac{\sin \beta t}{\beta} - D_a \cos \beta t \right]. \quad (4.1.2.7d)$$

De acordo com estas soluções, é possível concluir que na presença de ruído aditivo não há regime estacionário, pois para tempos de observação maiores que a escala de relaxação, os momentos quadráticos crescem linearmente com o tempo. Na ausência de D_a , as soluções dadas pela eq.(4.1.2.7) fornecem regimes estacionários dados por $\langle \varphi^2 \rangle_{est} = y_0^2/2\omega_0^2$, $\langle y^2 \rangle_{est} = y_0^2/2$ e $\langle \varphi y \rangle_{est} = 0$.

Na figura 16 a amplitude de ruído multiplicativo é fixada no valor limite $D_m^* = 0,125$ para três combinações de parâmetros ω_0 e γ , com condições iniciais idênticas às da figura 15. Assintoticamente os momentos quadráticos tendem a valores não nulos, mostrando a violação da condição de estabilidade energética, para qualquer parâmetro do sistema. Observa-se também que $\langle y^2 \rangle_{est}$ não depende dos parâmetros do sistema, mas apenas da condição inicial, enquanto $\langle \varphi^2 \rangle_{est}$ possui dependência com ω_0 , de acordo com nossos resultados analíticos.

Figura 16 – Análise de estabilidade energética - gráfico de $\langle \varphi^2 \rangle$ e $\langle y^2 \rangle$ para $D_a = 0$ e diferentes pares de parâmetros (γ, ω_0) associados ao valor limite $D_m^* = 0,125$ (ver legenda). Neste caso, os momentos quadráticos convergem para valores finitos não nulos.

Vamos agora analisar a dependência com as condições iniciais do comportamento transiente de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ do oscilador com

amortecimento aleatório em presença de ruído multiplicativo e aditivo brancos (caso I). Em particular, vamos analisar esta dependência, quando o ensemble inicial está localizado na origem de uma ou de ambas as coordenadas do espaço de fase. O gráfico da figura 17 exibe o comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para duas distribuições iniciais, $(\varphi_0, y_0) = (0,0)$ e $(\varphi_0, y_0) = (1,0)$, respectivamente, nos painéis A) e B), para três diferentes amplitudes D_m . Pode-se notar a convergência para valores estacionários de variância cada vez maiores, à medida que o parâmetro D_m do ruído multiplicativo aumenta. Além disso, a curva para $D_m = 0$ é a mesma para as duas condições iniciais, corroborando o resultado anterior mostrado no capítulo 3 de independência da variância com relação às condições iniciais quando existe apenas ruído aditivo no sistema.

Figura 17 – Variância $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para parâmetros $\omega_0 = 1,5$ e $\gamma = 2$ e $D_a = 0,1$. A) distribuição inicial $(\varphi_0, y_0) = (0,0)$. B) distribuição inicial $(\varphi_0, y_0) = (1,0)$.

O painel B) da figura 17 ilustra a ocorrência de um aumento significativo de flutuação no regime transiente à medida que a amplitude do ruído multiplicativo $\xi(t)$ aumenta, no caso de distribuições iniciais que não estão localizadas na origem do espaço de fase. A figura 18 apresenta este comportamento não-trivial das variâncias $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ para quatro condições iniciais diferentes.

Figura 18 – Ilustração do comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ quando variamos as condições iniciais (ver legenda). Os parâmetros utilizados são $\omega_0 = 1,5$ e $\gamma = 2$, $D_a = 0,1$ e $D_m = 0,06$.

A partir da figura 18, podemos inferir o efeito das condições iniciais sobre o comportamento transiente: $y_0 \neq 0$ acarreta aumento imediato das flutuações, enquanto $\varphi_0 \neq 0$ acarreta aumento mais forte, porém em escala de tempo maior. Observe que o comportamento estacionário é o mesmo.

O caso II corresponde a $\xi = \xi_{wn}(t)$ e $\zeta = \zeta_{cn}(t)$ independentes entre si. Assim, tomando o limite de ruído branco para o ruído multiplicativo na eq.(4.1.2.3a) e na eq.(4.1.2.3b) obtemos as mesmas relações que no caso I: $\langle \xi y^2 \rangle = -4\gamma D_m \langle y^2 \rangle$ e $\langle \xi \varphi y \rangle = -2\gamma D_m \langle \varphi y \rangle$. No entanto, como o ruído aditivo possui memória, pode-se mostrar que $\langle \xi \zeta \varphi \rangle \cong 0$, mas $\langle \zeta \xi y \rangle \cong -2\gamma D_a D_m$. Além disso, não podemos fazer as mesmas aproximações na eq.(4.1.2.3c) e na eq.(4.1.2.3d), tendo que utilizá-las como equações auxiliares. Teremos assim um sistema de equações de quinta ordem para descrever a dinâmica dos momentos quadráticos:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -4\gamma(1 - 4\gamma D_m)\langle y^2 \rangle - 2\omega_0^2\langle \varphi y \rangle + 2\langle \zeta y \rangle \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 2\gamma(1 - 2\gamma D_m)\langle \varphi y \rangle - \omega_0^2\langle \varphi^2 \rangle + \langle \zeta \varphi \rangle \\ \langle \dot{\zeta} y \rangle = -(\lambda_a + 2\gamma)\langle \zeta y \rangle - 2\gamma\langle \zeta \xi y \rangle - \omega_0^2\langle \zeta \varphi \rangle + \sigma_a^2 \\ \langle \dot{\zeta} \varphi \rangle = \langle \zeta y \rangle - \lambda_a\langle \zeta \varphi \rangle \end{cases}, \quad (4.1.2.8a)$$

ou, em termos de σ_a ,

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -4\gamma(1 - 4\gamma D_m)\langle y^2 \rangle - 2\omega_0^2\langle \varphi y \rangle + 2\langle \zeta y \rangle \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 2\gamma(1 - 2\gamma D_m)\langle \varphi y \rangle - \omega_0^2\langle \varphi^2 \rangle + \langle \zeta \varphi \rangle \\ \langle \dot{\zeta} y \rangle = -(\lambda_a + 2\gamma)\langle \zeta y \rangle - \omega_0^2\langle \zeta \varphi \rangle + \sigma_a^2 \left(1 + \frac{4\gamma^2 D_m}{\lambda_a}\right) \\ \langle \dot{\zeta} \varphi \rangle = \langle \zeta y \rangle - \lambda_a \langle \zeta \varphi \rangle \end{cases} \quad (4.1.2.8b)$$

Note que se pode definir uma amplitude efetiva $\Sigma_a^2 = \sigma_a^2 \left(1 + \frac{4\gamma^2 D_m}{\lambda_a}\right)$ para o ruído aditivo. No limite $\lambda_a \rightarrow \infty$, o parâmetro D_a será o mesmo que no caso I, ou seja, $\Sigma_a^2/\lambda_a = D_a$.

Se compararmos o sistema da eq.(4.1.2.8b) com o da eq.(4.1.2.4a), o caso de ruído aditivo colorido difere apenas por suas equações auxiliares, relacionadas à construção do próprio ruído $\zeta_{cn}(t)$. Novamente, este é um sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes que possui solução analítica, tal como o sistema para ruído multiplicativo branco. A equação característica para os autovalores é dada por:

$$\begin{aligned} m^5 + \{2(\lambda_a + \gamma) + 2\gamma(3 - 10\gamma D_m)\}m^4 + \{[4\gamma(\lambda_a + \gamma)(3 - 10\gamma D_m)] + \\ [8\gamma^2(1 - 2\gamma D_m)(1 - 4\gamma D_m)] + [\lambda_a(\lambda_a + 2\gamma) + \omega_0^2]\}m^3 + 2\gamma\{[\omega_0^2(1 - \\ 4\gamma D_m)] + [8\gamma(\lambda_a + \gamma)(1 - 2\gamma D_m)] + (3 - 10\gamma D_m)[\lambda_a(\lambda_a + 2\gamma) + \omega_0^2]\}m^2 + \\ 8\gamma(1 - 4\gamma D_m)\{\gamma(1 - 2\gamma D_m)[\lambda_a(\lambda_a + 2\gamma) + \omega_0^2] + \omega_0^2(\lambda_a + \gamma)\}m + \\ 8\gamma\omega_0^2(1 - 4\gamma D_m)[\lambda_a(\lambda_a + 2\gamma) + \omega_0^2] = 0. \end{aligned} \quad (4.1.2.8c)$$

As expressões algébricas que descrevem a solução geral do sistema da eq.(4.1.2.8b) são muito extensas para serem mostradas aqui, dado que o polinômio característico obtido para os autovalores é de quinta ordem. Por conseguinte, efetuamos uma análise numérica desses resultados para obter os comportamentos transientes apresentados no decorrer desta seção. Exemplificamos no apêndice 8.9 cálculos numéricos para a variância $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$.

Novamente, supondo que os momentos sejam energeticamente estáveis, é possível encontrar as seguintes soluções estacionárias para o sistema da eq.(4.1.2.8):

$$\langle \varphi^2 \rangle_{est} = \frac{\Sigma_a^2 [\lambda_a + 2\gamma(1 - 4\gamma D_m)]}{2\gamma\omega_0^2(1 - 4\gamma D_m)[\lambda_a(\lambda_a + 2\gamma) + \omega_0^2]} ; \quad (4.1.2.9a)$$

$$\langle y^2 \rangle_{est} = \frac{\lambda_a \Sigma_a^2}{2\gamma(1 - 4\gamma D_m)[\lambda_a(\lambda_a + 2\gamma) + \omega_0^2]} ; \quad (4.1.2.9b)$$

$$\langle \varphi y \rangle_{est} = 0, \quad (4.1.2.9c)$$

Vamos agora analisar os regimes das soluções dos casos I e II à luz do conceito de estabilidade energética. Como foi visto anteriormente, o valor médio das respostas dinâmicas para ambos os casos são os mesmos, e assim, os limiares D_m^{CRIT} e D_m^{max} são iguais. Com a intenção de compararmos o comportamento destes dois casos, vamos utilizar explicitamente o vínculo associado ao limite de ruído branco, ou seja, considerar a sequência de ruídos coloridos tal que $\Sigma_a^2 = D_a \lambda_a$ para a construção dos gráficos.

Para esta análise, é conveniente a introdução de parâmetros reescalados por ω_0 que são: $x \equiv \omega_0 \tau_r$ ($\tau_r = 1/\gamma$), $\mathcal{D}_m \equiv 2 \omega_0 D_m$, $\mathcal{D}_a \equiv D_a / \omega_0^3$ e $\mathcal{T}_a \equiv \omega_0 \tau_a$, com $\tau_a \equiv 1/\lambda_a$. Desta forma, os regimes estacionários do caso II tomam a forma ($\langle \varphi y \rangle_{est} = 0$):

$$\langle \varphi^2 \rangle_{est} = \frac{\mathcal{D}_a x [1 + 2(\mathcal{T}_a/x)(1 - 2\mathcal{D}_m/x)]}{2(1 - 2\mathcal{D}_m/x)[(1 + 2\mathcal{T}_a/x) + \mathcal{T}_a^2]} ; \quad (4.1.2.10a)$$

$$\langle y^2 \rangle_{est} = \frac{\mathcal{D}_a \omega_0^2 x}{2(1 - 2\mathcal{D}_m/x)[(1 + 2\mathcal{T}_a/x) + \mathcal{T}_a^2]} ; \quad (4.1.2.10b)$$

Para $\mathcal{T}_a = 0$, temos os regimes estacionários das variâncias para o caso I. As expressões obtidas nos permitem unificar a análise dos regimes e da estabilidade das soluções do oscilador harmônico sujeito a ruído aditivo e com amortecimento aleatório dos casos I e II. Esta análise será feita utilizando-se a eq.(4.1.2.10) escritas em termos dos parâmetros reescalados adimensionais.

A figura 19 mostra o diagrama de regimes do modelo de acordo com o parâmetro do ruído multiplicativo reescalado $\mathcal{D}_m$ e o tempo de relaxação (devido ao amortecimento) reescalado x .

O valor de D_m^{CRIT} dado pela eq.(4.1.1.10b), para o qual temos a solução criticamente amortecida separando os regimes de sub e super amortecimento, é descrito pela parábola $D_m^{CRIT}(x) = x(1 - x)$. O valor de D_m^{max} dado pela eq.(4.1.1.10a), que limita o valor de amplitude para a qual o amortecimento efetivo é positivo, é representado pela reta $D_m^{max}(x) = x$. O valor de D_m^* dado pela eq.(4.1.2.6), que delimita o valor de amplitude para a qual existe variância estacionária finita, é representado pela reta $D_m^*(x) = x/2$. Portanto, valores acima de $D_m^*(x)$ não fornecem soluções energeticamente estáveis, conforme mostrado anteriormente.

Figura 19 – Diagrama de regimes dos casos I e II (ver texto).

Para que sejam observadas soluções energeticamente estáveis nos três regimes para um dado conjunto de parâmetros, devemos ter $D_m^* > D_m^{CRIT}$. No entanto, note que a parábola $D_m^{CRIT}(x)$ e a reta $D_m^*(x)$ se cruzam em $x = 1/2$, indicando região de parâmetros proibida. Em particular, o regime subamortecido aparece somente se $x > 1/2$ ($\gamma < 2\omega_0$). Assim, quando $\gamma > \omega_0$, esperamos ser possível observar soluções estáveis nos três regimes apenas se $2\omega_0 > \gamma > \omega_0$ ($\frac{1}{2} < x < 1$). Estes resultados mostram a importância de serem analisados os momentos de ordem superior no caso de amortecimento aleatório.

A partir da eq.(4.1.2.10a), infere-se que o comportamento estacionário de $\langle \varphi^2 \rangle$ é invariante com relação à mudança do parâmetro ω_0 , mantendo-se fixos os valores de x , $\mathcal{D}_m$, D_a e $\mathcal{T}_a$. O mesmo não acontece com $\langle y^2 \rangle_{est}$ na eq.(4.1.2.10b). Porém, usando-se variável temporal reescalada t' através da transformação $t' = \omega_0 t$, a condição inicial $\langle \varphi(t' = 0) \rangle$ é a mesma, enquanto a condição inicial $\langle \frac{d\varphi}{dt'}|_{t'=0} \rangle \equiv y'_0$ é naturalmente modificada para $y'_0 = \omega_0^{-1} y_0$.

Assim, na variável t' , o comportamento estacionário dos dois momentos de segunda ordem são invariantes com relação à mudança do parâmetro ω_0 , mantendo-se fixos os valores dos parâmetros reescalados x , $\mathcal{D}_m$, D_a e $\mathcal{T}_a$.

Iremos agora analisar o comportamento transiente de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ e em particular, verificando se possuem as mesmas propriedades de invariância do valor estacionário.

As figuras a seguir apresentam o colapso de dados das curvas de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada $t' = \omega_0 t$. A fim de compararmos com a figura 18, utilizamos os parâmetros reescalados $x = 0,75$, $\mathcal{D}_m = 0,09$, $\mathcal{D}_a = 0,03$, correspondentes aos parâmetros originais $\omega_0 = 1,5$ e $\gamma = 2$, $D_a = 0,1$ e $D_m = 0,06$ daquela figura. A distribuição inicial escolhida para comparação foi $(\varphi_0, y_0) = (0; 1)$, que corresponde às condições iniciais na variável t' : $\langle \varphi(t' = 0) \rangle \equiv \varphi'_0 = 0$ e $\langle \frac{d\varphi}{dt'}|_{t'=0} \rangle \equiv y'_0 = (\omega_0)^{-1}$. Na figura 20 consideramos $\mathcal{T}_a = 0,1$ e na figura 21, $\mathcal{T}_a = 2$.

Figura 20 – Ilustração do colapso das curvas de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada t' , segundo mudança de ω_0 (ver legenda). Os parâmetros reescalados são $x = 0,75$, $\mathcal{D}_m = 0,09$, $\mathcal{D}_a = 0,03$ e $\mathcal{T}_a = 0,1$. A condição inicial é $(\varphi'_0; y'_0) = (0; 1/\omega_0)$.

Figura 21 – Ilustração do colapso das curvas de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada t' , segundo mudança de ω_0 (ver legenda). Os parâmetros reescalados são $x = 0,75$, $\mathcal{D}_m = 0,09$, $\mathcal{D}_a = 0,03$ e $\mathcal{T}_a = 2$. A distribuição inicial é $(\varphi'_0; y'_0) = (0; 1/\omega_0)$.

Comparando-se as figuras 20 e 21, observamos que, dada uma condição inicial e parâmetros reescalados fixos, o maior alcance da memória do ruído aditivo diminui as flutuações da resposta do sistema.

As figuras a seguir mostram o comportamento das variâncias para os mesmos parâmetros reescalados das figuras anteriores, porém alterando-se a condição inicial para $(\varphi_0; y_0) = (0; 0,005)$, isto é, $(\varphi'_0; y'_0) = (0; 0,005/\omega_0)$. Comparando-se as figuras 22 e 23 com as figuras 20 e 21 respectivamente,

observa-se uma forte dependência do comportamento transiente com o valor da condição inicial y_0 , por exemplo, havendo atenuação e até supressão de picos transientes (note que as figuras estão em escalas diferentes). Mais uma vez, esta propriedade é devida à presença de ruído multiplicativo ao sistema.

Figura 22 – Ilustração do colapso das curvas de $\langle [\phi - \langle \phi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada t' , segundo mudança de ω_0 (ver legenda). Mesmos parâmetros reescalados da figura 20. Distribuição inicial $(\phi'_0; y'_0) = (0; 0,005/\omega_0)$.

Figura 23 – Ilustração do colapso das curvas de $\langle [\phi - \langle \phi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada t' , segundo mudança de ω_0 (ver legenda). Mesmos parâmetros reescalados da figura 21. Distribuição inicial $(\phi'_0; y'_0) = (0; 0,005/\omega_0)$.

A figura 24 ilustra a estrutura das curvas de colapso de dados com o tempo característico de correlação do ruído aditivo reescalado $\mathcal{T}_a$, mantendo-se

os outros parâmetros reescalados fixos. É possível fazer também uma comparação direta com o caso I, fazendo $\mathcal{T}_a \rightarrow 0$.

Figura 24 – Ilustração da mudança do comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ quando variamos o tempo característico reescalado $\mathcal{T}_a$ (ver legenda). A distribuição inicial e os outros parâmetros reescalados são os mesmos das figuras 20 e 21. O limite de ruído branco é mostrado para comparação ($\mathcal{T}_a = 0$).

Os resultados numéricos estão de acordo com os resultados analíticos assintóticos mostrados na eq.(4.1.2.10) nos quais tanto a amplitude quanto o alcance da memória do ruído aditivo contribuem para uma mudança de escala do comportamento da variância.

4.2.

Análise do caso III

Nosso próximo modelo a ser estudado envolve ruído multiplicativo com autocorrelação exponencial, o ruído dicotômico, introduzido no capítulo 2. Neste caso, o ruído aditivo associado será tratado apenas como Gaussiano branco, ou seja, $\xi(t) \equiv \xi_{dn}(t)$ e $\varsigma \equiv \varsigma_{wn}(t)$. Além disso, trataremos estas variáveis aleatórias como descorrelacionadas.

4.2.1.

Caso III: valor médio de $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle \equiv \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$

Nesta subseção, apresentaremos resultados analíticos originais para ruído multiplicativo com tempo de correlação curto assim como para toda análise dela decorrente. Os gráficos para o comportamento transiente do sistema foram obtidos numericamente.

Vamos retomar à expressão mais geral obtida anteriormente no desenvolvimento da seção 4.1.1:

$$\langle \ddot{\varphi} \rangle + 2\gamma \langle \dot{\varphi} \rangle + \omega_0^2 \langle \varphi \rangle = -\frac{2\gamma}{\alpha} \int_0^t dt_1 [\langle \xi(t) \varsigma(t_1) \rangle - 2\gamma \langle \xi(t) \xi(t_1) \rangle \langle \dot{\varphi}(t_1) \rangle] F(t - t_1). \quad (4.2.1.1)$$

com $F(t - t_1)$ dado pela eq.(4.1.1.5b). Temos que substituir as correlações da equação acima pelos valores correspondentes ao ruído dicotômico.

$$\langle \xi(t) \varsigma(t_1) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t_1) \rangle = \lambda_m D_m \exp(-\lambda_m |t - t'|). \quad (4.2.1.2)$$

A partir destas equações, temos:

$$\langle \ddot{\varphi} \rangle + 2\gamma \langle \dot{\varphi} \rangle + \omega_0^2 \langle \varphi \rangle = \frac{4\gamma^2 \lambda_m D_m}{\alpha} \int_0^t dt_1 \langle \dot{\varphi}(t_1) \rangle e^{-\lambda_m(t-t_1)} F(t - t_1). \quad (4.2.1.3)$$

Esta é a equação integro-diferencial que descreve o comportamento transiente para o valor médio de φ . Para analisar a eq.(4.2.1.3), vamos utilizar a transformada de Laplace:

$$\Phi(s) = \int_0^\infty \langle \varphi(t) \rangle e^{-st} dt . \quad (4.2.1.4)$$

Neste caso, vamos trabalhar com condições iniciais $\langle \varphi(0) \rangle = 0$, com o intuito de atender às aplicações financeiras do presente trabalho. Aplicando a transformada dada pela eq.(4.2.1.3), encontramos:

$$(s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2)\Phi(s) - y_0 = 4\gamma^2 D_m G(s)\Phi(s), \quad (4.2.1.5)$$

com

$$G(s) = \frac{s\lambda_m(s+\lambda_m)}{(s+\lambda_m)(s+\lambda_m+2\gamma)+\omega_0^2}, \quad (4.2.1.6)$$

Para λ_m e D_m arbitrários, a transformada da solução toma a forma:

$$\Phi(s) = \frac{[(s+\lambda_m+2\gamma)(s+\lambda_m)+\omega_0^2]}{(s^2+2\gamma s+\omega_0^2)[(s+\lambda_m+2\gamma)(s+\lambda_m)+\omega_0^2]-4\lambda_m D_m \gamma^2 s(s+\lambda_m)} y_0. \quad (4.2.1.7)$$

No limite de ruído multiplicativo branco ($\lambda_m \rightarrow \infty$ com D_m finito), $G(s) \rightarrow s$, o que implica em:

$$\Phi(s) = \frac{y_0}{(s^2+2\gamma(1-2\gamma D_m)s+\omega_0^2)}, \quad (4.2.1.8)$$

que é a solução conhecida para a transformada de Laplace da eq.(4.1.1.8) dos casos I e II, para ruídos aditivo e multiplicativo brancos, com a condição de média inicial nula. Este resultado corrobora o que já tinha sido demonstrado anteriormente no capítulo 2 de que, no limite citado, $\xi_{dn}(t) \rightarrow \xi_{wn}(t)$.

Determinar o comportamento e as condições de estabilidade de a partir da Transformada de Laplace inversa da eq.(4.2.1.7) não é trivial, devido à existência de polinômio de quarta ordem na variável transformada. Da mesma forma, não é possível obter-se expressão analítica para $\langle \varphi(t) \rangle$.

É interessante notar que a solução de $\langle \varphi(t) \rangle$ utilizando o método de sistemas dinâmicos pode ser também obtida numericamente através do sistema da eq.(4.1.1.14), que também é de quarta ordem.

Por outro lado, a expressão da transformada de Laplace da eq.(4.2.1.7) permite fazer expansão para tempos de correlação $\tau_m \equiv 1/\lambda_m$ curtos e obter as soluções analíticas nessa aproximação.

Utilizando a condição $\gamma\tau_m \ll 1$ na eq.(4.2.1.6), a expansão em série de potências até a primeira ordem em τ_m de $G(s)$ é dada por:

$$G(s) \cong (1 - 2\gamma\tau_m) s - \tau_m s^2. \quad (4.2.1.9)$$

Logo, a eq.(4.2.1.5) é aproximada por:

$$(s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2) \Phi(s) - y_0 = 4\gamma^2 D_m \{(1 - 2\gamma\tau_m) s - \tau_m s^2\} \Phi(s). \quad (4.2.1.10a)$$

Reagrupando os termos, temos:

$$s^2 \Phi(s) + \frac{2\gamma\{1-2\gamma D_m[(1-2\gamma\tau_m)]\}}{1+4\gamma^2 D_m \tau_m} s \Phi(s) + \frac{\omega_0^2}{1+4\gamma^2 D_m \tau_m} \Phi(s) - \frac{y_0}{1+4\gamma^2 D_m \tau_m} = 0, \quad (4.2.1.10b)$$

que pode ser escrita na forma:

$$s^2 \Phi(s) + 2\Gamma_{ef} s \Phi(s) + \Omega_0^2 \Phi(s) - Y_0 = 0. \quad (4.2.1.10c)$$

A equação acima descreve a transformada de Laplace de um oscilador similar aos casos I e II, com novo parâmetro efetivo de amortecimento Γ_{ef} e nova frequência natural Ω_0 :

$$\Gamma_{ef} \equiv \frac{\gamma\{1-2\gamma D_m[(1-2\gamma\tau_m)]\}}{1+4\gamma^2 D_m \tau_m}, \quad (4.2.1.11a)$$

$$\Omega_0^2 \equiv \frac{\omega_0^2}{1+4\gamma^2 D_m \tau_m}. \quad (4.2.1.11b)$$

Assim, o advento da memória de curto alcance tem o efeito de mudar o amortecimento e a frequência do sistema, equivalentemente à renormalização da massa em sistemas quânticos. Note que os valores efetivos desses parâmetros são diminuídos em relação aos originais.

As novas condições iniciais renormalizadas são:

$$\langle \varphi(0) \rangle \equiv \Phi_0 = 0 \quad \text{e} \quad \langle \dot{\varphi}(0) \rangle \equiv Y_0 = \frac{y_0}{(1+4\gamma^2 D_m \tau_m)}. \quad (4.2.1.11c)$$

Assim, no limite em que $\gamma \tau_m \ll 1$, podemos aproximar a eq.(4.2.1.5) pela eq.(4.2.1.10b), com as condições iniciais renormalizadas, dadas pela eq.(4.2.1.11c).

Para a análise das soluções nessa aproximação, vamos utilizar os parâmetros adimensionais reescalados por ω_0 e a variável temporal reescalada, $t' = \omega_0 t$, tal como feito na seção 4.1.2. A transformada de Laplace Inversa da eq.(4.2.1.10c) toma então a forma:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt'^2} + \frac{2\{x^2 - D_m x (1 - 2\mathcal{T}_m/x)\}}{x(x^2 + 2D_m \mathcal{T}_m)} \frac{d\varphi}{dt'} + \frac{x^2}{(x^2 + 2D_m \mathcal{T}_m)} \varphi = 0. \quad (4.2.1.12a)$$

Lembrando que na variável temporal reescalada, a condição inicial $\langle \varphi(t' = 0) \rangle$ é a mesma, enquanto a condição inicial $\langle \frac{d\varphi}{dt'}|_{t'=0} \rangle \equiv Y'_0$ é naturalmente modificada para $Y'_0 = \omega_0^{-1} Y_0$, de (4.2.1.11c):

$$\langle \varphi(t' = 0) \rangle \equiv \Phi'_0 = 0 \quad Y'_0 = \omega_0^{-1} y_0 \frac{x^2}{(x^2 + 2D_m \mathcal{T}_m)}. \quad (4.2.1.12b)$$

Considerando-se a aproximação de primeira ordem em τ_m , as condições de estabilidade das soluções e os regimes de $\langle \varphi(t) \rangle$ podem agora ser obtidos. A condição de amortecimento efetivo $\Gamma_{ef} > 0$ na eq.(4.2.1.11a) implica que o valor máximo para D_m , escrito nos parâmetros reescalados, seja dado por:

$$\mathcal{D}_m^{max}(\mathcal{T}_m, x) \cong x \left(1 + 2 \frac{\mathcal{T}_m}{x} \right). \quad (4.2.1.13)$$

Esta expressão é obtida no domínio de validade da aproximação feita ($\mathcal{T}_m \ll x$). Note que ela fornece valores maiores em comparação com os anteriores (da eq.(4.1.1.10a), $\mathcal{D}_m^{max} = x$), quando não há memória no ruído multiplicativo ($\mathcal{T}_m = 0$). Isto significa que a introdução de efeito de memória na componente ruidosa do amortecimento do sistema favorece a ordem do sistema.

O próximo passo é estudar o novo valor crítico da amplitude $\mathcal{D}_m$, determinado por $\Gamma_{ef} = \Omega_0$. Da eq.(4.2.1.11a) e da eq.(4.2.1.11b), podemos aproximar $\mathcal{D}_m^{CRIT}$, até a primeira ordem em τ_m por:

$$\mathcal{D}_m^{CRIT}(\tau_m) \cong \frac{1}{2\gamma} \left(1 - \frac{\omega_0}{\gamma}\right) + \left(\frac{\omega_0^2 + 2\gamma^2 - 3\gamma\omega_0}{2\gamma^2}\right) \tau_m. \quad (4.2.1.14a)$$

Fazendo $\tau_m = 0$ na eq.(4.2.1.14a), recupera-se o valor $\mathcal{D}_m^{CRIT}$ dos casos I e II, dado pela eq.(4.1.1.10b). Em termos dos parâmetros reescalados, teremos:

$$\mathcal{D}_m^{CRIT}(\mathcal{T}_m, x) \cong x(1 - x) + [(x - 1)(x - 2)] \mathcal{T}_m. \quad (4.2.1.14b)$$

Analogamente aos casos I e II, o regime superamortecido (subamortecido) para a solução $\langle \varphi(t) \rangle$ ocorrerá quando $\Gamma_{ef} > \Omega_0$ ($\Gamma_{ef} > \Omega_0$). Em termos dos parâmetros reescalados, os intervalos da amplitude do ruído multiplicativo associados a cada regime são universais, ou seja, o regime superamortecido ocorrerá quando $0 < \mathcal{D}_m < \mathcal{D}_m^{CRIT}(\mathcal{T}_m, x)$ e o regime subamortecido, em $\mathcal{D}_m^{CRIT}(\mathcal{T}_m, x) < \mathcal{D}_m < \mathcal{D}_m^{max}(\mathcal{T}_m, x)$. Para $\mathcal{D}_m$ acima do valor máximo, teremos soluções instáveis.

O diagrama da figura 25 ilustra o comportamento de $\mathcal{D}_m^{CRIT}$ e $\mathcal{D}_m^{max}$ de acordo com o tempo característico de memória $\mathcal{T}_m$ para três valores de x : $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ e $x_3 = 0,75$. Como a região de validade da nossa aproximação é tal que $\mathcal{T}_m \ll x$, o intervalo considerado foi $0 \leq \mathcal{T}_m \leq 0,1 x$.

Figura 25 – Diagrama de regimes de $\langle \varphi(t) \rangle$ e limite de estabilidade para $x_1 = 0,25$ (cor preta), $x_2 = 0,5$ (cor azul) e $x_3 = 0,75$ (cor vermelha). É possível notar o aumento tanto da região superamortecida quanto da região subamortecida para os três valores de x considerados.

A introdução de memória de curto alcance no ruído multiplicativo produz assim um aumento de estabilidade do sistema, permitindo que maiores amplitudes de ruído ocorram. Da mesma forma, há uma mudança quantitativa no diagrama dos regimes das soluções de acordo com a amplitude reescalada $\mathcal{D}_m$, que se tornam mais robustos à medida que o alcance reescalado $\mathcal{T}_m$ desta memória cresce.

Vamos agora analisar o comportamento das soluções. Lembramos que no limite $\tau_m \rightarrow 0$ ($\gamma\tau_m \ll 1$), as soluções exatas da equação original, obtidas pela Transformada de Laplace Inversa da eq.(4.2.1.7) com condições iniciais $(\varphi_0 = 0; y_0)$ podem ser aproximadas pelas soluções obtidas pela Transformada de Laplace Inversa da eq.(4.2.1.10c), com as condições iniciais renormalizadas $(\Phi_0 = 0; Y_0)$ dadas pela eq.(4.2.1.11c). Usando tempo e parâmetros reescalados, chegamos à eq.(4.2.1.12a), com condições iniciais reescaladas $(\Phi'_0 = 0; Y'_0)$ dadas pela eq.(4.2.1.12b).

Podemos verificar que a eq.(4.2.1.12a) válida na aproximação de primeira ordem é invariante por mudança do parâmetro ω_0 , mantendo-se constantes os valores de x , $\mathcal{D}_m$ e $\mathcal{T}_m$. No entanto, para que a solução $\langle \varphi(t') \rangle$ aproximada seja

invariante, as condições iniciais da equação original devem ser modificadas, tornando-se dependentes de ω_0 :

$$\varphi_0^* = \varphi_0 = 0 ; \quad y_0^* = \omega_0 y_0, \quad (4.2.1.15)$$

Desta forma, a condição inicial reescalada Y'_0 na eq.(4.2.1.12b) torna-se constante, isto é, independente de ω_0 .

A mesma análise pode ser aplicada à solução exata obtida a partir da eq.(4.2.1.7). Na variável temporal reescalada $t' = \omega_0 t$, o parâmetro de Laplace é reescalado para $s' = s/\omega_0$. Lembrando que as condições iniciais são reescaladas $(\varphi_0 = 0; y_0) \rightarrow (\varphi'_0 = 0; y'_0 = \omega_0^{-1} y_0)$, utilizando os parâmetros x , $\mathcal{D}_m$ e $\mathcal{T}_m$:

$$\Phi(s') = \frac{[(s'+1/\mathcal{T}_m + 2/x)(s'+1/\mathcal{T}_m) + 1]}{(s'^2 + (2/x)s' + 1)[(s'+1/\mathcal{T}_m + 2/x)(s'+1/\mathcal{T}_m) + 1] - (2/\mathcal{T}_m)\mathcal{D}_m(1/x^2)^{s'(s'+1/\mathcal{T}_m)}} \frac{y'_0}{\omega_0}. \quad (4.2.1.16)$$

Para que a solução da eq.(4.2.1.16) seja invariante por mudança do parâmetro ω_0 , mantendo-se constantes os valores de x , $\mathcal{D}_m$ e $\mathcal{T}_m$, basta também utilizarmos as condições iniciais modificadas dadas pela eq.(4.2.1.15).

Nas figuras a seguir vamos comparar o comportamento de $\langle \varphi(t') \rangle$, obtido a partir da aproximação dada pela eq.(4.2.1.12a), com a solução exata, obtida numericamente a partir da transformada de Laplace inversa da eq.(4.2.1.7). Foram utilizadas condições iniciais modificadas na variável temporal original t , dadas pela eq.(4.2.1.15). O colapso de dados obtido em ambos os casos comprova que ambas as soluções são invariantes por mudança do parâmetro ω_0 , para os mesmos valores de x , $\mathcal{D}_m$ e $\mathcal{T}_m$.

Na figura 26, foi utilizado o valor $y_0 = 0,005$ e considerados os parâmetros originais $\omega_0 = 1,5$ e $\gamma = 2$ associados ao parâmetro reescalado $x = 0,75$. A amplitude reescalada do ruído foi fixada em $\mathcal{D}_m = 0,1$ enquanto o tempo de correlação $\mathcal{T}_m$ assumiu três valores distintos.

A figura nos mostra que os desvios em relação ao resultado exato crescem à medida que a razão $\mathcal{T}_m/x$ cresce, conforme esperado. No entanto, note que a

aproximação em $\mathcal{T}_m = 0,25$ ($\mathcal{T}_m / x \cong 0,3$), apesar de aparentemente violar a condição $\gamma\tau_m \ll 1$ ou $\mathcal{T}_m \ll x$, apresenta erro relativo no pico do gráfico de apenas 3,8%. Este fato dá suporte aos resultados analíticos obtidos para o caso de ruído multiplicativo colorido a partir da eq.(4.2.1.12a).

Figura 26 – Comparação da solução exata de $\langle \varphi(t') \rangle$ (linhas cheias) com a aproximação de primeira ordem para $\mathcal{T}_m$ (caracteres), na variável temporal reescalada t' . Os parâmetros originais são $\omega_0 = 1,5$ e $\gamma = 2$ (parâmetro reescalado $x = 0,75$). Foram considerados $\mathcal{D}_m = 0,1$ e diferentes valores de $\mathcal{T}_m$, mostrados na legenda. As condições iniciais da equação original são $\varphi_0^* = 0$ e $y_0^* = y_0 \omega_0$, com $y_0 = 0,005$.

Lembrando que as curvas mostradas na figura 26 são invariantes por mudança do parâmetro ω_0 , concluímos que o erro relativo da aproximação de primeira ordem em $\mathcal{T}_m$ é o mesmo para cada classe de sistemas associados ao par de parâmetros reescalados $(x; \mathcal{D}_m)$. No caso de $(x; \mathcal{D}_m) = (0,75; 0,1)$, podemos considerar o limiar $\gamma\tau_m \cong 0,2$ ou $\mathcal{T}_m \cong 0,2 x$ para obtermos uma barra de erro menor do que 3,8%.

Por outro lado, devemos analisar se o limiar de validade da aproximação depende do valor de y_0 . A figura 27 compara, para os mesmos parâmetros, a solução exata e a aproximada de $\langle \varphi(t') \rangle$, variando-se apenas o valor de y_0 .

A solução $\langle \varphi(t) \rangle$ para ruído multiplicativo dicotômico na aproximação de primeira ordem é mapeada na solução do oscilador harmônico amortecido usual, de parâmetros efetivos Γ_{ef} e Ω_0 , sujeito às condições iniciais dadas pela eq.(4.2.1.11c). Assim, $\langle \varphi(t) \rangle$ será proporcional a y_0 .

Para melhor visualizarmos o erro relativo da aproximação, apresentamos a solução $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle \varphi(t) \rangle / y_0$, para alguns valores de y_0 . O colapso de dados no segundo painel mostra que, dada uma classe de sistemas caracterizados pelos parâmetros $(x; \mathcal{D}_m)$ e considerando condições iniciais dadas pela eq.(4.2.1.15) na equação original da eq.(4.2.1.7), o erro relativo da aproximação de segunda ordem em $\mathcal{T}_m$ independe do valor de y_0 .

Figura 27 – Comparação da solução exata de $\langle \varphi(t') \rangle$ (linhas cheias) com a aproximação de primeira ordem para $\mathcal{T}_m$ (caracteres). Os parâmetros originais são $\omega_0 = 1,5$, $\gamma = 2$ (parâmetro reescalado $x = 0,75$). Foram considerados $\mathcal{D}_m = 0,1$ e $\mathcal{T}_m = 0,25$. As condições iniciais da equação original são $\varphi_0^* = 0$ e $y_0^* = \omega_0 y_0$, com $y_0 = 0,005$, $y_0 = 0,05$ e $y_0 = 0,5$ (ver legenda).

As figuras a seguir apresentam a análise da aproximação de primeira ordem de acordo com a classe $(x; \mathcal{D}_m)$. Na figura 28 fixamos o valor da amplitude reescalada do ruído multiplicativo em $\mathcal{D}_m = 0,1$ e variamos o valor de x (fixando γ e variando ω_0). As condições iniciais da equação original são dadas pela eq.(4.2.1.15), com $y_0 = 0,005$. Considerando $\mathcal{T}_m = 0,2 x$, verifica-se que o erro da aproximação no pico dos gráficos depende do valor de x , variando desde 1,3% para $x = 0,75$ até da ordem de 20% para $x = 0,1$. Este resultado

sugere que o limiar da razão $\mathcal{T}_m/x$ deve ser reduzido quando $x < 0,25$, para que sejam obtidos erros da ordem de até 5%. Conclui-se que, dada uma barra de erro relativo, a aproximação de primeira ordem tem limiar de validade $\mathcal{T}_m/x$ cada vez menor à medida que x decresce.

Figura 28 – Comparação da solução exata de $\langle \varphi(t') \rangle$ (linhas cheias) com a aproximação de primeira ordem em $\mathcal{T}_m$ (caracteres) para $\mathcal{D}_m = 0,1$. Variando-se ω_0 , foram considerados diferentes valores de x e de $\mathcal{T}_m = 0,2 x$, mostrados na legenda. As condições iniciais da equação original são $\varphi_0^* = 0$ e $y_0^* = \omega_0 y_0$, com $y_0 = 0,005$.

Analisaremos agora o limiar de validade da aproximação de acordo com o valor de $\mathcal{D}_m$, para x fixo. Na figura 29 apresentamos os resultados para $x = 0,5$ e $\mathcal{T}_m = 0,1 x$.

Figura 29 – Comparação da solução exata de $\langle \varphi(t') \rangle$ (linhas cheias) com a aproximação de primeira ordem para $\mathcal{T}_m = 0,1 x$ (caracteres). Foram considerados $x = 0,5$ e diferentes valores de $\mathcal{D}_m$, mostrados na legenda. As condições iniciais da equação original são $\varphi_0^* = 0$ e $y_0^* = \omega_0 y_0$, com $y_0 = 0,005$.

A partir das figuras 28 e 29, vemos que, dado um valor de $\mathcal{D}_m$ fixo, à medida que x diminui, ou, dado um valor de x fixo, à medida $\mathcal{D}_m$ cresce, o erro da aproximação de primeira ordem é cada vez maior. Concluimos que, à medida que a classe de sistemas $(x; \mathcal{D}_m)$ se aproxima da classe de sistemas instáveis caracterizados por $(x; \mathcal{D}_m^{max}(\mathcal{T}_m, x))$, o erro da aproximação de primeira ordem é cada vez maior.

4.2.2.

Caso III: variâncias $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$

Nessa subseção, os resultados estacionários para $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ reproduzem os da literatura [5,8]. Os resultados para o regime transiente provenientes da resolução do sistema dinâmico correspondente assim como a análise numérica das soluções são originais.

Relembrando o sistema obtido para os momentos quadráticos na eq.(4.1.2.2b):

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -4\gamma \langle y^2 \rangle - 4\gamma \langle \xi y^2 \rangle - 2\omega_0^2 \langle \varphi y \rangle + 2\langle \zeta y \rangle \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 2\gamma \langle \varphi y \rangle - 2\gamma \langle \xi \varphi y \rangle - \omega_0^2 \langle \varphi^2 \rangle + \langle \zeta \varphi \rangle \end{cases} \quad (4.2.2.1)$$

Como o ruído aditivo é branco, podemos utilizar este limite nas relações FNSL obtendo $\langle \zeta y \rangle = D_a$, $\langle \zeta \varphi \rangle = 0$, assim como no caso I, e fazer a aproximação $\langle \zeta \xi \varphi \rangle \cong 0$ e $\langle \zeta \xi y \rangle \cong 0$. Para o ruído multiplicativo, devemos utilizar as expressões dadas pela eq.(4.1.2.3) com $\xi^2 = \sigma_m^2$, dado que o ruído multiplicativo é dicotômico. Assim,

$$\frac{d}{dt} \langle \xi y^2 \rangle = -4\gamma \langle \xi y^2 \rangle - 4\gamma \sigma_m^2 \langle y^2 \rangle - 2\omega_0^2 \langle \xi \varphi y \rangle - \lambda_m \langle \xi y^2 \rangle ; \quad (4.2.2.2a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \xi \varphi y \rangle = \langle \xi y^2 \rangle - 2\gamma \langle \xi \varphi y \rangle - 2\gamma \sigma_m^2 \langle \varphi y \rangle - \omega_0^2 \langle \xi \varphi^2 \rangle - \lambda_m \langle \xi \varphi y \rangle . \quad (4.2.2.2b)$$

O termo $\langle \xi \varphi^2 \rangle$ deve ser calculado utilizando-se o procedimento FNSL:

$$\frac{d}{dt} \langle \xi \varphi^2 \rangle = \langle \xi \frac{d\varphi^2}{dt} \rangle - \lambda_m \langle \xi \varphi^2 \rangle = \langle \xi [2\varphi y] \rangle - \lambda_m \langle \xi \varphi^2 \rangle = 2\langle \xi \varphi y \rangle - \lambda_m \langle \xi \varphi^2 \rangle .$$

(4.2.2.2c)

Estas três equações devem ser utilizadas em conjunto com eq.(4.2.2.1). Portanto o cálculo destas quantidades será feito através de um sistema de 6 equações diferenciais lineares e acopladas:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -4\gamma\langle y^2 \rangle - 4\gamma\langle \xi y^2 \rangle - 2\omega_0^2\langle \varphi y \rangle + 2D_a \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 2\gamma\langle \varphi y \rangle - 2\gamma\langle \xi \varphi y \rangle - \omega_0^2\langle \varphi^2 \rangle \\ \langle \xi \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \xi \varphi y \rangle - \lambda_m\langle \xi \varphi^2 \rangle \\ \langle \xi \dot{y}^2 \rangle = -(\lambda_m + 4\gamma)\langle \xi y^2 \rangle - 4\gamma\sigma_m^2\langle y^2 \rangle - 2\omega_0^2\langle \xi \varphi y \rangle \\ \langle \xi \dot{\varphi} y \rangle = \langle \xi y^2 \rangle - (\lambda_m + 2\gamma)\langle \xi \varphi y \rangle - 2\gamma\sigma_m^2\langle \varphi y \rangle - \omega_0^2\langle \xi \varphi^2 \rangle \end{cases} \quad (4.2.2.3a)$$

A solução analítica para os momentos de segunda ordem é obtida utilizando-se o método de resolução para sistemas de equações diferenciais lineares mostrado no capítulo 3. Para obtenção das soluções é necessário determinar as raízes do um polinômio característico de sexta ordem para os autovalores m . Estas raízes podem ser obtidas numericamente:

$$\begin{aligned} m^6 + \{3\lambda_m + 12\gamma\}m^5 + \{8\omega_0^2 + 52\gamma^2 + 30\gamma\lambda_m + 3\lambda_m^2 - 20\gamma^2\sigma_m^2\}m^4 + \\ \{16\lambda_m\omega_0^2 + 64\gamma\omega_0^2 + 96\gamma^3 + \lambda_m^3 + 104\gamma^2\lambda_m + 24\gamma\lambda_m^2 - 96\gamma^3\sigma_m^2 - \\ 40\gamma^2\lambda_m\sigma_m^2\}m^3 + \{144\gamma^3\lambda_m + 6\gamma\lambda_m^3 + 60\gamma^2\lambda_m^2 + 64\gamma^4 + 96\gamma\lambda_m\omega_0^2 + \\ 160\gamma^2\omega_0^2 + 12\lambda_m^2\omega_0^2 + 16\omega_0^4 - 128\gamma^4\sigma_m^2 - 144\gamma^3\lambda_m\sigma_m^2 - 20\gamma^2\lambda_m^2\sigma_m^2 - \\ 32\gamma^2\omega_0^2\sigma_m^2 + 64\gamma^4\sigma_m^4\}m^2 + \{64\gamma^4\lambda_m + 48\gamma^3\lambda_m^2 + 8\gamma^2\lambda_m^3 + 16\lambda_m\omega_0^4 + \\ 4\lambda_m^3\omega_0^2 + 48\lambda_m^2\omega_0^2 + 64\gamma\omega_0^4 + 160\lambda_m\gamma^2\omega_0^2 + 128\gamma^3\omega_0^2 - 128\lambda_m\gamma^4\sigma_m^2 - \\ 128\gamma^3\lambda_m\sigma_m^2 - 48\gamma^3\lambda_m^2\sigma_m^2 - 128\gamma^3\omega_0^2\sigma_m^2 + 64\lambda_m\gamma^4\sigma_m^4\}m + \{64\gamma^2\omega_0^4 + \\ 32\gamma\lambda_m\omega_0^4 + 8\gamma\lambda_m^3\omega_0^2 + 32\lambda_m\gamma^3\omega_0^2 + 128\gamma^2\lambda_m^2\omega_0^2 - 64\gamma^2\omega_0^4\sigma_m^2 - \\ 64\gamma^3\lambda_m\omega_0^2\sigma_m^2 + 32\gamma^2\lambda_m^2\omega_0^2\sigma_m^2\} = 0 . \end{aligned} \quad (4.2.2.3b)$$

A solução geral (matricial) para o regime transiente da eq.(4.2.2.3a), será dada por:

$$\mathcal{X}(t) = \sum_i C_i \mathcal{X}_0^i e^{m_i t} + \mathcal{X}_p, \quad (4.2.2.3c)$$

onde $\mathcal{X}_0^i$ é o autovetor associado ao autovalor m_i , C_i são constantes arbitrárias e $\mathcal{X}_p = \mathbb{A}^{-1}\mathcal{B}$ são as soluções particulares. Efetuaremos análises numéricas para determinar o comportamento transiente das soluções da eq.(4.2.2.3a). Ilustramos algumas soluções no apêndice 8.9.

Os regimes estacionários podem ser calculados, desde que o critério de estabilidade energética seja respeitado. Considerando esta hipótese:

$$\langle \varphi^2 \rangle_{est} = \frac{D_a \{ [\lambda_m(\lambda_m + 4\gamma) + 4\omega_0^2](\lambda_m + 2\gamma) + 8\lambda_m \gamma^2 \sigma_m^2 \}}{2\gamma \omega_0^2 \{ [\lambda_m(\lambda_m + 4\gamma) + 4\omega_0^2](\lambda_m + 2\gamma) - 4\gamma \sigma_m^2 [\lambda_m(\lambda_m + 2\gamma) + 2\omega_0^2] \}}; \quad (4.2.2.4a)$$

$$\langle y^2 \rangle_{est} = \frac{D_a \{ [\lambda_m(\lambda_m + 4\gamma) + 4\omega_0^2](\lambda_m + 2\gamma) \}}{2\gamma \{ [\lambda_m(\lambda_m + 4\gamma) + 4\omega_0^2](\lambda_m + 2\gamma) - 4\gamma \sigma_m^2 [\lambda_m(\lambda_m + 2\gamma) + 2\omega_0^2] \}}; \quad (4.2.2.4b)$$

$$\langle \varphi y \rangle_{est} = 0. \quad (4.2.2.4c)$$

O resultado para $\langle \varphi^2 \rangle_{est}$ foi obtido anteriormente na literatura [5, 8]. Das equações acima obtem-se que, para ruído multiplicativo dicotômico, o segundo momento $\langle \varphi^2 \rangle_{est}$ é função não-monotônica tanto da amplitude quadrática σ_m^2 quanto da taxa de correlação λ_m .

A fim de fazer uma comparação direta com os casos anteriores, é conveniente escrever $\sigma_m^2 = \lambda_m D_m$. Além disso, em conformidade com o procedimento adotado para o cálculo dos valores médios, consideramos a aproximação $\gamma \tau_m \ll 1$, com $\tau_m \equiv 1/\lambda_m$.

Desta forma, fazendo uma expansão até a primeira ordem em τ_m nos momentos estacionários, dados pela eq.(4.2.2.4), encontra-se ($\langle \varphi y \rangle_{est} = 0$) e:

$$\langle \varphi^2 \rangle_{est} = \frac{D_a}{2\gamma \omega_0^2 (1 - 4\gamma D_m)} \left\{ 1 - \left(\frac{1 + 4\gamma D_m}{1 - 4\gamma D_m} \right) 8\gamma^2 D_m \tau_m \right\}; \quad (4.2.2.5a)$$

$$\langle y^2 \rangle_{est} = \frac{D_a}{2\gamma (1 - 4\gamma D_m)} \left\{ 1 - \frac{16\gamma^2 D_m}{(1 - 4\gamma D_m)} \tau_m \right\}. \quad (4.2.2.5b)$$

Claramente, tomando-se tempo de correlação nulo, as expressões acima se reduzem às expressões estacionárias do caso II, com ruído multiplicativo branco (ver eq.(4.1.2.5))

Para que o critério de estabilidade energética seja satisfeito, os denominadores dos momentos quadráticos na eq.(4.2.2.4) devem ser positivos e não nulos. Com efeito, existe um valor máximo para o parâmetro D_m da perturbação do amortecimento, assim como nos casos anteriores. Este valor é dado por:

$$D_m^* = \left(\frac{1}{4\gamma} + \frac{1}{2\lambda_m} \right) \frac{[\lambda_m(\lambda_m + 4\gamma) + 4\omega_0^2]}{[\lambda_m(\lambda_m + 2\gamma) + 2\omega_0^2]}, \quad (4.2.2.6)$$

No limite de tempo de correlação curto, onde $\gamma\tau_m, \omega_0\tau_m \ll 1$, a eq.(4.2.2.6) toma a forma:

$$D_m^* = \frac{1}{4\gamma} + \tau_m, \quad (4.2.2.7)$$

De acordo com a eq.(4.2.2.6), o limiar para o qual as soluções deixam de ser energeticamente estáveis aumenta à medida que o tempo de correlação τ_m ($\tau_m = 1/\lambda_m$) cresce. Para observarmos esse comportamento, exibimos na figura 30, gráficos de D_m^* em função do tempo de τ_m onde, para tempos de correlação curtos, reproduz-se o comportamento obtido pela expansão de primeira ordem na eq.(4.2.2.7).

Para tempos de correlação longos, pode-se mostrar que $D_m^* \cong \tau_m$, de acordo com figura 30. Apesar de D_m^* ser ilimitado, esta relação significa que, no regime determinístico do amortecimento, o limiar de instabilidade energética é caracterizado pelo valor limite da amplitude do ruído dicotômico $\sigma_m^* = 1$. Este último resultado será explorado posteriormente nas seções 4.3 e 4.4.

Figura 30 – Comportamento de D_m^* em função de τ_m para diferentes valores da razão $x \equiv \omega_0/\gamma$. Para efeito de comparação, temos $\omega_0 = 1$.

Vamos agora fazer uma breve análise dos regimes de estabilidade das soluções para o sistema sujeito ao ruído multiplicativo dicotômico. Para isso, é conveniente utilizar novamente o reescalonamento dos parâmetros, ou seja, $x \equiv \omega_0/\gamma$, $\mathcal{D}_m \equiv 2 \omega_0 D_m$, $\mathcal{D}_a \equiv D_a/\omega_0^3$ e $\mathcal{T}_m \equiv \omega_0 \tau_m$. Este reescalonamento nos permitiu, além disso, verificar invariância de escala em relação a ω_0 das expressões da variância. De eq.(4.2.2.5a), eq.(4.2.2.5b) e eq.(4.2.2.8), temos:

$$\langle \varphi^2 \rangle_{est} = \frac{\mathcal{D}_a x}{2(1-2\mathcal{D}_m/x)} \left\{ 1 - 4 \left(\frac{1+2\mathcal{D}_m/x}{1-2\mathcal{D}_m/x} \right) \frac{\mathcal{D}_m \mathcal{T}_m}{x^2} \right\}; \quad (4.2.2.8a)$$

$$\langle y^2 \rangle_{est} = \frac{\mathcal{D}_a \omega_0^2 x}{2(1-2\mathcal{D}_m/x)} \left\{ 1 - \frac{8}{(1-2\mathcal{D}_m/x)} \frac{\mathcal{D}_m \mathcal{T}_m}{x} \right\}; \quad (4.2.2.8b)$$

Reescrevendo a eq.(4.2.2.7) nos parâmetros reescalonados, encontramos:

$$\mathcal{D}_m^*(\mathcal{T}_m, x) \cong \frac{x}{2} \left(1 + 4 \frac{\mathcal{T}_m}{x} \right). \quad (4.2.2.9)$$

Esta equação conjuntamente com a eq.(4.2.1.13) e a eq.(4.2.1.14b) nos permitem estudar o diagrama de regimes na aproximação de τ_m curto. Tomando o limite de ruído branco (neste caso, $\lambda_m \rightarrow \infty$ ou $\tau_m \rightarrow 0$), recuperamos os parâmetros críticos calculados para o caso I e caso II.

A figura 31 apresenta o diagrama de regimes do oscilador sujeito ao ruído multiplicativo dicotômico. A curva $\mathcal{D}_m^{CRIT}(\mathcal{T}_m, x)$ separa os regimes estáveis sub e superamortecidos. Estes regimes são limitados pela curva de estabilidade energética $\mathcal{D}_m^*(\mathcal{T}_m, x)$.

Figura 31 – Diagrama de regimes para ruído multiplicativo colorido (vermelho) em comparação com o de ruído branco (preto). A curva $\mathcal{D}_m^{CRIT}(\mathcal{T}_m, x)$ separa os regimes sub (I) e super (II) amortecidos. A curva $\mathcal{D}_m^*(\mathcal{T}_m, x)$ separa estes regimes da região energeticamente instável (III). As curvas tracejadas representam os resultados fora do limiar da aproximação $\gamma\tau_m \ll 1$.

4.3.

Resumo dos resultados para o oscilador com amortecimento aleatório

Nesta seção iremos fazer uma síntese dos resultados apresentados nas seções anteriores. Para isto, lembramos que estamos considerando a sequência de ruídos dicotômicos que satisfaçam o vínculo $\sigma_m^2 = \lambda_m D_m$ ou $D_m = \sigma_m^2 \tau_m$.

Inicialmente, consideremos os valores médios (primeiros momentos). Foi visto que a solução formal para qualquer valor dos parâmetros ω_0 ($\tau_0 = 2\pi/\omega_0$), γ ($\tau_r = 1/\gamma$), λ_m e σ_m (ou D_m) pode ser obtida de duas maneiras diferentes, pela eq.(4.2.1.3) ou pela eq.(4.1.1.14). Entretanto, dependendo do alcance do tempo de correlação do ruído multiplicativo, os valores médios podem ser obtidos por equações simplificadas. Como pode ser visto esquematicamente na figura 32, apresentamos as equações que regem as soluções de $\langle\varphi(t)\rangle$ para quatro regimes

de τ_m , o de tempos de correlação ultracurtos, curtos, intermediários e longos, nas cores preta, azul, magenta e laranja, respectivamente.

Para tempos de correlação ultracurtos, o ruído multiplicativo é branco. A solução para $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle \equiv \langle \dot{\varphi}(t) \rangle$ é dada pela eq.(4.1.1.8) ou pelo sistema da eq.(4.1.1.15), ou seja, temos o caso I estudado na seção 4.1.1. Neste caso, o valor médio tem o comportamento de um oscilador harmônico amortecido usual, mas com parâmetro de amortecimento efetivo $\gamma_{ef} = (1 - 2\gamma D_m)$.

Figura 32 – Diagrama de equações para obtenção de $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle$ como função do tempo de correlação do ruído multiplicativo (ver texto).

Com o aumento do tempo de correlação τ_m para regimes curtos ($\gamma\tau_m \ll 1$) $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle$ podem ser aproximados pelo comportamento usual de oscilador amortecido. Entretanto, de acordo com a eq.(4.2.11), tanto o amortecimento quanto o termo de frequência são modificados para $\Gamma_{ef} < \gamma_0$ e $\Omega_0 < \omega_0$, o que significa um tempo de relaxação efetivo maior que o tempo de relaxação fundamental τ_r e um maior período de oscilação, se forem comparados com o caso de ruído multiplicativo branco.

Para tempos de correlação de ruído multiplicativo intermediários, não é possível definir parâmetros efetivos que satisfaçam a equação de oscilador harmônico amortecido usual. Isto se deve ao fato de termos um sistema acoplado de quatro equações diferenciais de primeira ordem dado pela eq.(4.1.1.14), o que equivale a uma equação diferencial de quarta ordem em $\langle \varphi \rangle$ (se o sistema puder ser reescrito como uma equação diferencial única). Como a equação de oscilador é de segunda ordem, não é possível fazer a equivalência dos coeficientes entre as duas equações diferenciais e, portanto, não existem equivalentes físicos para o coeficiente de amortecimento e o coeficiente de oscilação. Portanto, no caso de

tempos de correlação arbitrários deve-se utilizar a solução do sistema dinâmico, ainda que numericamente.

No regime de tempos de correlação longos, o ruído multiplicativo tende a permanecer, em média, por um longo tempo em um dos valores possíveis. Este valor “privilegiado” é dado pelo valor inicial do ruído. Assim, a dinâmica do oscilador pode ser aproximada por:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma[1 + \xi(0)]\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \zeta_{wn}(t) , \quad (4.3.1a)$$

com, $\xi(0) = \pm\sigma_m$. Tais valores tem mesma probabilidade de ocorrência no início do processo, se não existe correlação entre os ruídos aditivo e multiplicativo. Assim, podemos aproximar a solução neste regime a partir da média estatística entre os dois estados iniciais:

$$\langle\varphi\rangle = \langle\langle\varphi\rangle_{wn}\rangle_{dn} \cong \frac{1}{2}[\langle\varphi|\xi(0) = +\sigma_m\rangle_{wn} + \langle\varphi|\xi(0) = -\sigma_m\rangle_{wn}] , \quad (4.3.1b)$$

$$\langle y\rangle = \langle\langle y\rangle_{wn}\rangle_{dn} \cong \frac{1}{2}[\langle y|\xi(0) = +\sigma_m\rangle_{wn} + \langle y|\xi(0) = -\sigma_m\rangle_{wn}] , \quad (4.3.1c)$$

As expressões da eq.(4.3.1) devem ser entendidas como: toma-se primeiramente a média $\langle \rangle_{wn}$ sobre o ruído aditivo branco ζ_{wn} para um valor $\xi(0)$ arbitrário. A forma das soluções será determinada pela eq.(4.1.1.11), fazendo-se $\gamma_{ef} \rightarrow \gamma + \xi(0)$. A partir desta solução toma-se a média $\langle \rangle_{dn}$ sobre as amplitudes $\pm\sigma_m$ do ruído multiplicativo dicotômico (dados que são independentes entre si).

O comportamento dos primeiros momentos para ruído branco, tempos de correlação curtos, intermediários e longos são mostrados nas figuras 33 e 34, nas cores preta, azul, magenta e laranja respectivamente.

Figura 33 – Comportamento de $\langle \varphi(t) \rangle$ para regimes de tempo de correlação ultracurtos, curtos, intermediários e longos com ensemble inicial localizado em $(\langle \varphi(t=0) \rangle = 0, \langle y(t=0) \rangle = 0,01)$. Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2, \omega_0 = 2.1, D_m = 0.1$.

Figura 34 – Comportamento de $\langle \varphi^2(t) \rangle$ para regimes de tempo de correlação ultracurtos, curtos, intermediários e longos com ensemble inicial localizado em $(\langle \varphi(t=0) \rangle = 0, \langle y(t=0) \rangle = 0,01)$. Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2, \omega_0 = 2.1, D_m = 0.1$.

Para os segundos momentos, o diagrama da figura 35 mostra o sistema de equações que regem as soluções de $\langle \varphi^2(t) \rangle$ para os quatro regimes de τ_m , segundo o mesmo critério de cores. Para ruído multiplicativo branco, os momentos quadráticos são dados pela eq.(4.1.2.4a). Para tempos curtos e intermediários, temos o caso geral de um sistema de seis equações de primeira ordem.

Figura 35 – Diagrama de equações para obtenção de $\langle \varphi^2 \rangle$ e $\langle y^2 \rangle$ como função do tempo de correlação do ruído multiplicativo (ver texto).

Para tempos de correlação longos, é possível utilizar o mesmo raciocínio desenvolvido para a aproximação dos primeiros momentos descrito anteriormente.

$$\langle \varphi^2 \rangle = \langle \langle \varphi^2 \rangle_{wn} \rangle_{dn} \cong \frac{1}{2} [\langle \varphi^2 | \xi(0) = +\sigma_m \rangle_{wn} + \langle \varphi^2 | \xi(0) = -\sigma_m \rangle_{wn}] , \quad (4.3.2a)$$

$$\langle y^2 \rangle = \langle \langle y^2 \rangle_{wn} \rangle_{dn} \cong \frac{1}{2} [\langle y^2 | \xi(0) = +\sigma_m \rangle_{wn} + \langle y^2 | \xi(0) = -\sigma_m \rangle_{wn}] , \quad (4.3.2b)$$

$$\langle \varphi y \rangle = \langle \langle \varphi y \rangle_{wn} \rangle_{dn} \cong \frac{1}{2} [\langle \varphi y | \xi(0) = +\sigma_m \rangle_{wn} + \langle \varphi y | \xi(0) = -\sigma_m \rangle_{wn}] . \quad (4.3.2c)$$

Tomando-se inicialmente a média $\langle \rangle_{wn}$ sobre o ruído branco ζ_{wn} para um valor $\xi(0)$ arbitrário, chega-se ao sistema:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle_{wn} = 2\langle \varphi y \rangle_{wn} \\ \langle \dot{y}^2 \rangle_{wn} = -4\gamma(1 + \xi(0))\langle y^2 \rangle_{wn} - 2\omega_0^2\langle \varphi y \rangle_{wn} + 2\langle \zeta y \rangle_{wn} \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle_{wn} = \langle y^2 \rangle_{wn} - 2\gamma(1 + \xi(0))\langle \varphi y \rangle_{wn} - \omega_0^2\langle \varphi^2 \rangle_{wn} + \langle \zeta \varphi \rangle_{wn} \end{cases} , \quad (4.3.2.d)$$

que é análogo ao sistema da eq.(3.2.3), com $\langle \zeta y \rangle_{wn} = D_a$, $\langle \zeta \varphi \rangle_{wn} = 0$, para o caso de ruído branco, conforme obtido anteriormente. A solução deste sistema é a mesma do oscilador com amortecimento constante sujeito a ruído aditivo, dadas pela eq.(3.1.11) e pela eq.(3.2.14) obtidas no capítulo 3, com a substituição $\gamma \rightarrow \gamma + \xi(0)$.

As curvas de $\langle \varphi^2 \rangle$ e $\langle y^2 \rangle$ para cada regime de tempo de correlação são mostradas nas figuras 36 e 37. Na medida em que se diminui o tempo de correlação do ruído multiplicativo, as curvas demonstram uma maior flutuação em suas estruturas. Como estamos comparando curvas com mesmo valor de $D_m = \sigma_m^2 \tau_m$, quanto maior o tempo de correlação, menor deve ser a amplitude do ruído dicotômico, o que explica as diferenças de patamares para os regimes estacionários nos gráficos.

Figura 36 – Perfis característicos de $\langle \varphi^2(t) \rangle$ para regimes de tempo de correlação ultracurtos, curtos, intermediários e longos com ensemble inicial localizado em $(\langle \varphi(t=0) \rangle = 0, \langle y(t=0) \rangle = 0,01)$. Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 2.1$, $D_m = 0.1$, $D_a = 0.01$.

Figura 37 – Perfis característicos de $\langle y^2(t) \rangle$ para regimes de tempo de correlação ultracurtos, curtos, intermediários e longos com ensemble inicial localizado em $(\langle \varphi(t=0) \rangle = 0, \langle y(t=0) \rangle = 0,01)$. Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 2.1$, $D_m = 0.1$, $D_a = 0.01$.

Por ultimo, é importante ressaltar a variabilidade do regime transiente em função dos ensembles (condições) iniciais, que ocorre em todos os casos

estudados. As figuras 38 e 39 mostram a diversidade de comportamento das variâncias $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ para o caso III, quando temos ensembles iniciais localizados em outros pontos do espaço de fase.

Figura 38 – Perfis transientes de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para diferentes ensembles localizados. Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1.5$, $D_m = 0.11$, $\tau_m = 1$, $D_a = 0.1$.

Figura 39 – Perfis transientes de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ para diferentes ensembles localizados. Os parâmetros do sistema são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1.5$, $D_m = 0.11$, $\tau_m = 1$, $D_a = 0.1$.

4.4.

Diferentes regimes de dependência temporal da variância de acordo com a magnitude relativa das escalas temporais características

Nesta seção, faremos análise análoga à apresentada na seção 3.3 no caso de oscilador com amortecimento não-perturbado e sujeito a ruído aditivo colorido para o caso de oscilador com amortecimento com perturbação dicotômica e sujeito a ruído aditivo. Será obtido o comportamento transiente da variância, de acordo com o valor relativo entre o tempo de observação e as escalas temporais características do sistema. O objetivo é investigar a influência de cada parâmetro original sobre o comportamento do oscilador no curto, médio e longo prazo. Os resultados mostrados a seguir são originais.

Considere a equação diferencial estocástica que rege a dinâmica do oscilador sujeito a ruído multiplicativo dicotômico:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma[1 + \xi_{dn}(t)]\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \varsigma_{wn}(t). \quad (4.4.1)$$

Existem três escalas de tempo características: o tempo de relaxação ($\tau_r = 1/\gamma$), a escala natural de oscilação $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ e o tempo característico de autocorrelação do ruído multiplicativo ($\tau_m = 1/\lambda_m$). O ruído aditivo neste caso é branco, logo não existe escala temporal associada à sua presença.

Em sua forma mais geral, estudada na seção 4.2, a forma funcional da variância da resposta φ depende das constantes ω_0 , γ , λ_m e σ_m (ou D_m). A introdução de ruído multiplicativo tem o efeito de aumentar a escala característica efetiva de amortecimento (τ'_r), ou seja, diminuir a constante efetiva de amortecimento (veja, por exemplo, na eq.(4.2.1.11a) a influência dos parâmetros D_m e τ_m). Este efeito é mais forte quanto maior for a amplitude D_m e é atenuado à medida que τ_m cresce. Desta forma, devemos considerar que em geral $\tau'_r > \tau_r$ nas análises a seguir, utilizando uma ou outra escala como referência.

Mostraremos a seguir que a variância vai apresentar comportamentos distintos de acordo com a relação entre o tempo de observação t e o valor de τ_r (ou τ'_r), τ_0 e τ_m .

Quando o tempo de observação é muito maior do que as escalas de oscilação e de amortecimento ($t \gg \tau'_r, \tau_0$), a variância assume o valor

estacionário do oscilador sujeito a ruído multiplicativo colorido dado pela eq.(4.2.2.4a).

Em outro extremo, nos estágios iniciais de evolução dinâmica ($t \ll \tau_r, \tau_0$), a técnica de **balanço dominante** [28] nos diz que $|\ddot{\varphi}| \gg \gamma|\dot{\varphi}|$ e $|\ddot{\varphi}| \gg \omega_0^2|\varphi|$, ou seja, os efeitos do amortecimento e da mola são desprezíveis e a eq.(4.4.1) se transforma em:

$$\ddot{\varphi} = \zeta_{wn}(t) . \quad (4.4.2a)$$

A equação acima implica que:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = \frac{2}{3} D_a t^3 . \quad (4.4.2b)$$

Quando a escala do tempo de observação é bem menor do que a escala de tempo da memória do ruído $t \ll \tau_m$, os ruídos sucessivos estão fortemente correlacionados e a probabilidade de que ele troque de valor é pequena. Isto significa que é quase certo que $\xi_{an}(t) = \xi(0)$, ou seja, o amortecimento pode ser tomado como determinístico para cada realização inicial de ruído multiplicativo. A eq.(4.4.1) toma a forma

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma[1 + \xi(0)]\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \zeta_{wn}(t) , \quad (4.4.3)$$

com $\xi(0) = \pm\sigma_m$. Fixando-se um destes valores, esta equação representa um oscilador sujeito apenas a ruído aditivo, o qual foi estudado no capítulo 3. Neste caso, para obtermos as soluções para os momentos, vamos considerar osciladores com ruído aditivo gaussiano tomando-se a média sobre os possíveis valores do ruído dicotômico. Para isto, estamos considerando que os ruídos aditivo e multiplicativo são independentes. Considerando ruído dicotômico com valores simétricos e de mesma probabilidade:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = \frac{1}{2} [\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 | \xi(0) = +\sigma_m \rangle_{wn} + \langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 | \xi(0) = -\sigma_m \rangle_{wn}] , \quad (4.4.4a)$$

onde $\langle \dots \rangle_{wn}$ significa que estamos tomando a média apenas sobre o ruído aditivo branco. Da eq.(3.1.11), obtém-se (considerando-se $\gamma > \omega_0$):

$$\begin{aligned} \langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 | \xi(0) \rangle_{wn} = \\ = \frac{D_a}{2\gamma(1+\xi(0))\omega_0^2} \left\{ 1 - \left[1 + \gamma(1 + \xi(0)) \left(\frac{\sinh 2\sqrt{\gamma^2(1+\xi(0))^2 - \omega_0^2} t}{\sqrt{\gamma^2(1+\xi(0))^2 - \omega_0^2}} + 2\gamma(1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \xi(0)) \frac{\sinh^2 \sqrt{\gamma^2(1+\xi(0))^2 - \omega_0^2} t}{\gamma^2(1+\xi(0))^2 - \omega_0^2} \right) \right] e^{-2\gamma(1+\xi(0))t} \right\} \quad (4.4.4b) \end{aligned}$$

A figura 40 mostra a comparação entre a solução dada pela eq.(4.4.4b) e a solução exata obtida a partir da eq.(4.2.2.3), no regime para o qual o tempo de correlação do ruído multiplicativo é muito maior do que as outras escalas temporais do sistema. É possível notar neste gráfico a validade do cálculo da eq.(4.4.4b).

Figura 40 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para τ_m muito maior do que as outras escalas temporais. Os parâmetros utilizados são: $\gamma = 2$ ($\tau_r = 0,5$), $\omega_0 = 1,5$ ($\tau_0 = 4,2$), $\lambda_m = 0,01$ ($\tau_m = 100$), $\sigma_m = 0,02$ ($D_m = 0,05$) e $D_a = 0,01$.

Em outro extremo, $t \gg \tau_m$, a dinâmica passa a ser governada por ruído multiplicativo branco (caso I da seção 4.1.2):

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma[1 + \xi_{wn}(t)]\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \varsigma_{wn}(t). \quad (4.4.5)$$

Vale notar que na prática este regime pode não ser observado, uma vez que o sistema pode já ter atingido o equilíbrio.

Em muitas situações, o coeficiente de amortecimento γ é muito grande, de tal forma que $t \gg \tau'_r$ ($t \gg \tau_r$ ou $\gamma t \gg 1$). O termo de aceleração $\ddot{\varphi}$ se torna desprezível e a eq.(4.4.1) pode ser aproximada por:

$$2\gamma[1 + \xi_{dn}(t)]\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \varsigma_{wn}(t). \quad (4.4.6)$$

Assim como no capítulo 3, vamos fazer uma análise das escalas características do oscilador sujeito a amortecimento aleatório, quando estas escalas não são comparáveis. De forma a podermos comparar os novos resultados com os anteriores para ruído branco, apresentaremos resultados numéricos para ruídos dicotômicos cujos parâmetros satisfazem ao vínculo $\sigma_m^2/\lambda_m = D_m$, que são levados, nos limites $\lambda_m \rightarrow \infty$, $\sigma_m \rightarrow \infty$ ao ruído gaussiano branco com mesmo parâmetro D_m . Deve-se ressaltar, no entanto, que neste caso, a influência do ruído multiplicativo sobre o comportamento das soluções das situações analisadas não será a mesma. A razão fundamental é que o limiar do parâmetro D_m para o qual as variâncias são estáveis, de acordo com a eq.(4.2.2.6),

$$D_m^* = \left(\frac{1}{4\gamma} + \frac{1}{2\lambda_m} \right) \frac{[\lambda_m(\lambda_m + 4\gamma) + 4\omega_0^2]}{[\lambda_m(\lambda_m + 2\gamma) + 2\omega_0^2]}, \quad (4.4.7)$$

depende de outros parâmetros característicos. Vamos então apresentar também resultados numéricos para parâmetros D_m proporcionais à D_m^* , isto é, considerar um percentual fixo de D_m^* para as situações analisadas. Nas figuras a seguir, estamos utilizando como condição inicial ensembles localizados na origem do espaço de fase.

Serão consideradas seis situações de interesse, a saber:

I) $\tau_0 \ll \tau_r \ll \tau_m$ – O movimento é subamortecido ($\tau_r > \tau_0$) e o tempo de autocorrelação do ruído multiplicativo é a maior das escalas envolvidas. Podemos considerar duas situações intermediárias:

a) $\tau_0 \ll t < \tau_r \ll \tau_m$ – Definindo-se o tempo adimensional $t' = t/\tau_0$, é possível mostrar que a eq.(4.4.3) toma a forma:

$$\varphi'' + 2 (\tau_0/\tau_r) [1 + \xi(0)]\varphi' + 4\pi^2\varphi = \tau_0^2\zeta_{wn}(t'), \quad (4.4.8a)$$

onde φ' representa diferenciação com respeito à t' e $\zeta(t')$ é o ruído colorido transformado. Como $\tau_0/\tau_r \ll 1$, pode-se desprezar o termo em φ' . A dinâmica pode ser então aproximada por:

$$\varphi'' + 4\pi^2\varphi = \tau_0^2\zeta_{wn}(t'), \quad (4.4.8b)$$

ou, na variável temporal original,

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \varsigma_{wn}(t). \quad (4.4.8c)$$

A solução desta equação é análoga ao regime V-b do capítulo 3. Pode-se mostrar que:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle = \frac{D_a}{\omega_0^2} \left[t - \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right]. \quad (4.4.8d)$$

O limite $t \ll \tau_0$ ($\omega_0 t \ll 1$) da eq.(4.3.7d) fornece $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle \cong \frac{2}{3} D_a t^3$, de acordo com o resultado da eq.(4.4.2b) para o regime temporal inicial.

b) $\tau_0 \ll \tau_r < t \ll \tau_m$ – A análise deste regime é análoga ao do regime anterior. Portanto, nos dois regimes, o comportamento da variância é dominado pelo modo oscilatório.

O gráfico da figura 41 a seguir ilustra o comportamento típico da variância nos regimes inicial, regimes intermediários a e b e regime estacionário. Em

particular, são obtidos os comportamentos previstos pela eq.(4.4.2b) para o regime inicial e pela eq.(4.4.8d) para o regime intermediário a. Pode-se notar pelo gráfico que no regime b existe uma forte dependência do comportamento da variância com o parâmetro D_m . Isto pode ser explicado através do seguinte argumento: como o tempo de correlação é a maior das escalas envolvidas, podemos aproximar a variância pela eq.(4.4.4a) em conjunto com a eq.(4.4.4b) (considerando-se o oscilador subamortecido), sendo evidente a variação da amplitude do resultado de acordo com $\xi(0) = \pm\sigma_m = \pm\lambda_m D_m$.

Figura 41 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso I: $\tau_0 \ll \tau_r \ll \tau_m$ ($\tau_0 = 1$, $\tau_r = 10$, $\tau_m = 100$ ($\lambda_m = 0,01$), $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura.

II) $\tau_0 \ll \tau_m \ll \tau_r$ – Nesta condição, o movimento também será subamortecido, com a mesma condição $\tau_0/\tau_r \ll 1$ do caso anterior. Logo, em intervalos de observação intermediários, a dinâmica será regida pela eq.(4.4.8c), tanto em

$\tau_0 \ll t < \tau_m \ll \tau_r$ quanto em $\tau_0 \ll \tau_m < t \ll \tau_r$ ou seja, a dinâmica também é dominada pelo modo oscilatório.

O gráfico da figura 42 a seguir ilustra o comportamento típico da variância nos regimes inicial, regimes a, b e estacionário. Em particular, são obtidos os comportamentos previstos pela eq.(4.4.2b) e pela eq.(4.4.8d) para o regime inicial e para os regimes intermediários, respectivamente. Nota-se que o regime estacionário ainda não foi atingido para $t \gtrsim \tau_r$. Sendo τ_r a maior das escalas naturais envolvidas, o atraso na aproximação ao equilíbrio é devido ao tempo de relaxação efetivo τ'_r ser ainda maior.

Figura 42 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso II: $\tau_0 \ll \tau_m \ll \tau_r$ ($\tau_0 = 1$, $\tau_m = 10$ ($\lambda_m = 0,1$), $\tau_r = 100$, $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura.

III) $\tau_m \ll \tau_r \ll \tau_0$ – Nesta condição, o movimento será superamortecido ($\tau_r < \tau_0$). A autocorrelação do ruído é de curto alcance, o que significa poder utilizar a aproximação de ruído branco para os intervalos de observação intermediários entre as escalas características do sistema. Temos duas possíveis situações de transiente, de acordo com t :

a) $\tau_m \ll t < \tau_r \ll \tau_0$ – O termo aleatório $\xi(t)$ age como ruído branco e o sistema é regido pela equação ($\tau_r \ll \tau_0$):

$$\ddot{\phi} + 2\gamma[1 + \xi_{wn}(t)]\dot{\phi} = \varsigma_{wn}(t) . \quad (4.4.9a)$$

Podemos mostrar que:

$$\begin{aligned} \langle [\phi - \langle \phi \rangle]^2 \rangle = & \frac{D_a}{2\gamma^2(1-4\gamma D_m)(1-2\gamma D_m)} \left\{ t - \frac{1}{(1-6\gamma D_m)} \left[-\frac{(1-4\gamma D_m)e^{-2\gamma(1-2\gamma D_m)t}}{\gamma(1-2\gamma D_m)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1-2\gamma D_m)e^{-4\gamma(1-4\gamma D_m)t}}{4\gamma(1-4\gamma D_m)^2} \right] - \frac{(3-10\gamma D_m)}{4\gamma(1-4\gamma D_m)(1-2\gamma D_m)} \right\} . \end{aligned} \quad (4.4.9b)$$

b) $\tau_m \ll \tau_r \ll t < \tau_0$ – Neste regime, $t \gg \tau_r$ e o sistema é governado pela Eq. (4.4.6), onde o termo de segunda derivada é desprezado comparado ao de primeira derivada. Definindo-se o tempo adimensional $t' = t/\tau_r$, a eq.(4.4.6) toma a forma:

$$2[1 + \xi_{wn}(t')]\varphi' + 4\pi^2(\tau_r/\tau_0)^2\varphi = \tau_r^2\zeta_{wn}(t') , \quad (4.4.10a)$$

onde φ' representa diferenciação com respeito à t' e $\zeta_{wn}(t')$ é o ruído branco transformado. Como $\tau_r/\tau_0 \ll 1$, pode-se desprezar também o termo em φ . A dinâmica pode ser então aproximada por:

$$2[1 + \xi_{wn}(t')]\varphi' = \tau_r^2\zeta_{wn}(t') . \quad (4.4.10b)$$

ou, na variável temporal original,

$$2\gamma[1 + \xi_{wn}(t)]\dot{\phi} = \varsigma_{wn}(t) . \quad (4.4.10c)$$

Lembramos que, de acordo com a eq.(4.1.2.5), a presença do ruído multiplicativo branco gera como efeito para os momentos quadráticos assintóticos um amortecimento efetivo $\gamma_{ef} \equiv \gamma(1 - 4\gamma D_m)$ em relação ao sistema sem ruído multiplicativo. Analogamente, podemos esperar que a solução da eq.(4.4.10c) seja equivalente a de uma marcha aleatória com parâmetro de amortecimento modificado.

De fato, pode-se mostrar que para sistema regido pela eq.(4.4.10c):

$$\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle = \frac{D_a}{2\gamma(1-4\gamma D_m)} ; \quad (4.4.10d)$$

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle \cong \frac{D_a}{4\gamma^3(1-4\gamma D_m)(1-2\gamma D_m)^2} \{2\gamma(1-2\gamma D_m)t + e^{-2\gamma(1-2\gamma D_m)t} - 1\} . \quad (4.4.10e)$$

Neste regime, onde ($t \gg \tau_r$):

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle \cong \frac{D_a}{2\gamma^2(1-4\gamma D_m)(1-2\gamma D_m)} t . \quad (4.4.10f)$$

O gráfico da figura 43 a seguir ilustra o comportamento típico da variância nos regimes inicial, regimes a, b e estacionário. São obtidos os comportamentos previstos pelas eq.(4.4.2b), e pela eq.(4.4.10f) para o regime inicial e para o regime intermediário b, respectivamente. Analisando a eq.(4.4.9b) para D_m próximo a D_m^* ($1 - 4\gamma D_m \equiv \varepsilon$) obtém-se série de potências regular em ε . Isto está de acordo com o mostrado pelo gráfico no regime a, no qual se observa dependência fraca com o valor de D_m . Já para a eq.(4.4.10f), a expansão em ε fornece:

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle \cong \frac{D_a}{\gamma^2} \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) t , \quad (4.4.10g)$$

de acordo com a forte dependência com o valor de D_m para o regime b mostrada no gráfico.

Figura 43 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso III: $\tau_m \ll \tau_r \ll \tau_0$ ($\tau_m = 1$ ($\lambda_m = 1$), $\tau_r = 10$, $\tau_0 = 100$; $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura.

IV) $\tau_r \ll \tau_m \ll \tau_0$ – O movimento continua sendo superamortecido e, como no caso anterior, temos duas situações de transiente distintas:

a) $\tau_r \ll t < \tau_m \ll \tau_0$ – Usando procedimento análogo ao regime III-b para $t/\tau_r \gg 1$ e $\tau_r/\tau_0 \ll 1$, chega-se à equação equivalente à eq.(4.4.10c), mas com ruído multiplicativo dicotômico:

$$2\gamma[1 + \xi_{dn}(t)]\dot{\varphi} = \zeta_{wn}(t) . \quad (4.4.11a)$$

Pode-se mostrar que, no início deste processo,

$$\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle \cong \frac{D_a}{2\gamma} t^2 - \frac{D_a}{3} (1 - 2\sigma_m^2) t^3 , \quad (4.4.11b)$$

caracterizando um processo de difusão anômala.

b) $\tau_r \ll \tau_m \ll t < \tau_0$ – Como o tempo de observação nesta situação é maior que os tempos de relaxação e de memória do ruído, o termo aleatório multiplicativo pode ser aproximado pelo ruído branco e a dinâmica pode ser descrita similarmente ao regime III-b, governado pela eq.(4.4.10c), cujo comportamento previsto para a variância é linear, dado pela eq.(4.4.10f).

O gráfico da figura 44 a seguir ilustra o comportamento típico da variância nos regimes inicial, regimes *a*, *b* e estacionário. Em particular, são obtidos os comportamentos previstos pela eq.(4.4.2b), e pela eq.(4.4.10f) para o regime inicial e intermediário *b*, respectivamente. É possível observar para o regime *a* a dependência com amplitude do ruído multiplicativo $\sigma_m = \frac{D_m}{\lambda_m}$, de acordo com o previsto pela eq.(4.4.11b).

Figura 44 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso IV: $\tau_r \ll \tau_m \ll \tau_0$ ($\tau_r = 1$, $\tau_m = 10$ ($\lambda_m = 0,1$), $\tau_0 = 100$, $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura.

V) $\tau_m \ll \tau_0 \ll \tau_r$ – A dinâmica é subamortecida e temos dois regimes intermediários:

a) $\tau_m \ll t < \tau_0 \ll \tau_r$ – Neste regime, o tempo de relaxação é grande comparado ao tempo de observação e o amortecimento pode ser desprezado. A dinâmica é governada pelos modos oscilatórios assim como no regime I-a:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \varsigma_{wn}(t) . \quad (4.4.12a)$$

No início deste processo ($t \ll \tau_0$), a dinâmica é descrita pela eq.(4.4.2a):

$$\ddot{\varphi} = \varsigma_{wn}(t) , \quad (4.4.12b)$$

com evolução temporal da variância dada pela equação (4.4.2b).

b) $\tau_m \ll \tau_0 < t \ll \tau_r$ – Neste regime, o tempo de relaxação ainda é grande comparado ao tempo de observação e o amortecimento também pode ser desprezado. A dinâmica também é governada pela eq.(4.4.12a) com comportamento da variância dado pela eq.(4.4.8d).

O gráfico da figura 45 a seguir ilustra o comportamento típico da variância nos regimes inicial, regimes *a*, *b* e estacionário. Em particular, são obtidos os comportamentos previstos pela eq.(4.4.2b) para os regimes inicial e intermediário *a*, e pela eq.(4.4.8d) para o regime intermediário *b*.

Figura 45 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso V: $\tau_m \ll \tau_0 \ll \tau_r$ ($\tau_m = 1$ ($\lambda_m = 1$), $\tau_0 = 10$, $\tau_r = 100$, $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes *a*, *b* e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura.

VI) $\tau_r \ll \tau_0 \ll \tau_m$ – Nesta condição, a dinâmica é superamortecida e o tempo de memória do ruído é a maior das escalas envolvidas. Podemos distinguir 2 regimes

a) $\tau_r \ll t < \tau_0 \ll \tau_m$ – temos situação análoga ao regime IV-a no qual $t/\tau_r \gg 1$ e $\tau_r/\tau_0 \ll 1$. O ruído está fortemente correlacionado e podemos considerar que $\xi(t) = \xi(0)$ para cada realização inicial do ruído. Logo, a equação de evolução pode ser aproximada pela eq.(4.4.9c):

$$2\gamma[1 + \xi(0)]\dot{\phi} = \zeta_{wn}(t), \quad (4.4.13a)$$

Para diferentes realizações do ruído multiplicativo, o sistema é descrito por uma marcha aleatória, cuja variância é $\langle [\phi - \langle \phi \rangle]^2 \rangle = \frac{D_a}{2\gamma^2} t$. Assim, considerando-se a eq.(4.4.4a), obtém-se:

$$\langle [\phi - \langle \phi \rangle]^2 \rangle \cong \frac{D_a(1+\sigma_m^2)}{2\gamma^2(1-\sigma_m^2)^2} t. \quad (4.4.13b)$$

b) $\tau_r \ll \tau_0 \ll t < \tau_m$ – Neste regime, o tempo de observação é muito maior do que as escalas de oscilação e de amortecimento, e a variância assume o valor estacionário do oscilador sujeito a ruído multiplicativo colorido dado pela eq.(4.2.2.4a).

O gráfico da figura 46 a seguir ilustra o comportamento típico da variância nos regimes inicial, regimes a, b e estacionário. Em particular, são obtidos os comportamentos previstos pelas eq.(4.4.2b), para o regime inicial e o comportamento linear para o regime intermediário a. Para o regime b, observa-se que o oscilador ainda não atingiu o equilíbrio e apresenta uma forte componente de sub-amortecimento. Isto pode ser explicado através do seguinte argumento: como o tempo de correlação é a maior das escalas envolvidas, podemos aproximar a variância pela eq.(4.4.4a) em conjunto com a eq.(4.4.4b). Para D_m próximo de D_m^* (através da variação de $\xi(0) = \pm\sigma_m = \pm\lambda_m D_m$), a contribuição de $\xi(0) = -\sigma_m$ na eq.(4.4.4b) tem amplitude majorada assim como o tempo de relaxação efetivo τ'_r (menor γ_{ef}).

Figura 46 – Comportamento de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ para o caso VI: $\tau_r \ll \tau_0 \ll \tau_m$ ($\tau_r = 1$, $\tau_0 = 10$, $\tau_m = 100$ ($\lambda_m = 0,01$), $D_a = 0,01$). Os gráficos destacam sucessivamente os regimes temporais: estágio inicial, regimes a, b e de longo prazo. Os valores de D_m estão mostrados na legenda da figura.

A partir dos seis casos estudados nesta seção, podemos concluir que, dependendo da magnitude relativa das escalas temporais características do sistema, a evolução dinâmica do oscilador atravessa regimes bem definidos para tempos de observação ultra-curtos, de curto, médio ou longo prazo.

Como resultado geral, dada uma taxa de correlação λ_m , conforme variamos o parâmetro D_m (através da variação da amplitude do ruído multiplicativo σ_m), há mudança na estabilidade nas soluções, tanto para os valores médios quanto para as variâncias. Esta influência é observável a partir de $t \gtrsim \tau_r$. Quaisquer que sejam as escalas características do sistema, o aumento de D_m (ou de σ_m) faz com que a aproximação ao equilíbrio torne-se cada vez mais lenta, pois a razão τ'_r/τ_r cresce.

4.5.

Considerações energéticas para o oscilador com amortecimento estocástico sujeito a ruído aditivo

Assim como foi feito no capítulo 3, faremos brevemente uma descrição estatística (dependente do tempo) da potência injetada e dissipada no oscilador sujeito a ruído multiplicativo dicotômico.

Considere a energia média do oscilador sendo φ a posição e y sua velocidade ($m = 1$):

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \omega_0^2 \varphi^2 \rangle. \quad (4.5.1)$$

O regime transiente para a energia média é calculada utilizando os momentos quadráticos médios dados pelo sistema da eq.(4.2.2.3a)

Como já comentado, a solução para os momentos de segunda ordem (no regime transiente), tanto para o caso de ruído dicotômico quanto para o caso de ruído branco, são extensas para serem mostradas no texto e serão obtidas numericamente. Entretanto, para o regime estacionário, é possível calcular analiticamente a energia média, a partir da eq.(4.2.2.4):

$$[\langle E \rangle]_{est} = \frac{D_a \{ [\lambda_m(\lambda_m + 4\gamma) + 4\omega_0^2] (\lambda_m + 2\gamma) + 4\lambda_m \gamma^2 \sigma_m^2 \}}{2\gamma \{ [\lambda_m(\lambda_m + 4\gamma) + 4\omega_0^2] (\lambda_m + 2\gamma) - 4\gamma \sigma_m^2 [\lambda_m(\lambda_m + 2\gamma) + 2\omega_0^2] \}}. \quad (4.5.2a)$$

Para o regime no qual o ruído multiplicativo é branco (caso I), podemos tomar o limite $\sigma_m \rightarrow \infty$, $\lambda_m \rightarrow \infty$, $\sigma_m^2/\lambda_m = D_m$ e obter:

$$[\langle E \rangle]_{est} = \frac{D_a}{2\gamma(1 - 4\gamma D_m)}. \quad (4.5.2a)$$

Note que a energia estacionária do sistema diverge para $D_m = D_m^*$ ($\sigma_m = \sigma_m^*$), assim como os momentos de segunda ordem. Isto justifica utilizarmos o termo estabilidade energética para definir este limiar.

Figura 47 – Perfis do regime transiente (obtidos numericamente) para a $\langle E \rangle$ para diferentes valores do parâmetro D_m . Foram utilizados ensembles localizados na origem do espaço de fase. Os parâmetros são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$, $D_a = 0,1$, $\lambda_m = 0,1$ ($D_m^* = 10,20$; $\sigma_m^* = 1,01$).

Considere o gráfico da figura 47 onde é mostrado o perfil transiente da energia média para o oscilador com perturbação multiplicativa dicotômica no amortecimento e sujeito a ruído aditivo Gaussiano,. Para $D_m < D_m^*$ as curvas de energia média tendem ao regime estacionário.

Para a análise do balanço energético do sistema, vamos considerar a potência média gerada pela força motriz estocástica ζ_{wn} , que para qualquer instante vale $\langle P \rangle_\zeta \equiv \langle \zeta_{wn} y \rangle = D_a$, conforme calculado anteriormente. A potência média dissipada pelo termo de amortecimento é dada por:

$$\langle P \rangle_{diss} = \langle [-2\gamma[1 + \xi]y]y \rangle = -2\gamma\langle y^2 \rangle - 2\gamma\langle \xi y^2 \rangle. \quad (4.5.3)$$

Para calcularmos $\langle P \rangle_{diss}$ no regime estacionário, devemos obter, além do termo $\langle y^2 \rangle_{est}$ dado pela eq.(4.2.2.4b), o termo $\langle \xi y^2 \rangle_{est}$, obtido a partir da eq.(4.2.2.3a):

$$\langle \xi y^2 \rangle_{est} = -\frac{4\gamma\sigma_m^2[\lambda_m(\lambda_m+2\gamma)+2\omega_0^2]}{(\lambda_m+2\gamma)[\lambda_m(\lambda_m+4\gamma)+4\omega_0^2]}\langle y^2 \rangle_{est}. \quad (4.5.4a)$$

Para ruído multiplicativo branco, teremos:

$$\langle \xi y^2 \rangle_{est} = -4\gamma D_m \langle y^2 \rangle_{est}. \quad (4.5.4b)$$

Apresentamos na figura 48 o comportamento transiente da potência total $\langle P \rangle = \langle P \rangle_\zeta + \langle P \rangle_{diss}$ para diferentes valores do parâmetro D_m . Observa-se que para parâmetros de ruído multiplicativo que violam a condição de estabilidade energética, a relaxação da potência total ao valor nulo não é verificada.

Figura 48 – Regime transiente (obtidos numericamente) para a potência total $\langle P \rangle$, para diferentes valores do parâmetro D_m . Foram utilizados ensembles localizados na origem do espaço de fase. Os parâmetros são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$, $D_a = 0,1$, $\lambda_m = 0,1$ ($D_m^* = 10,20$; $\sigma_m^* = 1,01$).

O próximo passo é calcular o trabalho total médio $\langle W \rangle$ realizado pelas forças microscópicas sobre o sistema integrando $\langle P \rangle$ no tempo para compará-lo com a energia média obtida da eq.(4.5.1). Considerando, sem perda de generalidade, uma distribuição inicial localizada na origem do espaço de fase, verifica-se que $\langle E \rangle = \langle W \rangle$, ilustrado numericamente na figura 49.

Figura 49 – Perfis do regime transiente (obtidos numericamente) para $\langle W \rangle$ e $\langle E \rangle$ para diferentes valores do parâmetro D_m . Foram utilizados ensembles localizados na origem do espaço de fase. Os parâmetros são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$, $D_a = 0,1$, $\lambda_m = 0,1$ ($D_m^* = 10,20$; $\sigma_m^* = 1,01$).

Vamos fazer agora uma análise do comportamento da potencia total média para regimes criticamente instáveis energeticamente. Devemos notar primeiramente que a energia média para $D_m = D_m^*$ é linear no tempo, de acordo com o gráfico da figura 47. Isto implica que a potencia média total deve ser aproximadamente constante nesta condição. Uma vez que a potência injetada é sempre constante, se houver dependência temporal da potência dissipada, tal dependência deve relaxar rapidamente para um valor constante.

Para avaliarmos esta hipótese, vamos considerar os casos extremos de λ_m ($\lambda_m \rightarrow \infty$ e $\lambda_m \rightarrow 0$) para os quais podemos calcular o valor de $\langle P \rangle_{diss}$ no regime transiente.

O primeiro se refere ao caso de ruído multiplicativo branco, $\lambda_m \rightarrow \infty$. Neste caso,

$$\langle P \rangle_{diss} = -2\gamma(1 - 4\gamma D_m) \langle y^2 \rangle. \quad (4.5.5)$$

Para $D_m = D_m^*$, $\langle P \rangle_{diss} = 0$ em qualquer instante t , ou seja, no caso de ruído multiplicativo branco, mesmo havendo amortecimento ($\gamma_{ef} = \gamma(1 - 2\gamma D_m^*) = \gamma/2$), não haverá potencia dissipada média. Neste caso a potência total é fornecida apenas pelo termo de ruído aditivo, o que implica no crescimento linear da energia total média: $\langle E \rangle = D_a t$.

Para $\lambda_m \rightarrow 0$, temos um regime quase determinístico. A potência dissipada será dada por:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_{diss} &= \langle -2\gamma[1 + \xi(0)]y^2 \rangle = \\ &= -\gamma[\langle [1 + \xi(0)]y^2 | \xi(0) = +\sigma_m \rangle_{wn} + \langle [1 + \xi(0)]y^2 | \xi(0) = -\sigma_m \rangle_{wn}], \quad (4.5.6) \end{aligned}$$

onde $\langle y^2 \rangle_{wn}$ é igual à variância dada pela eq.(3.4.1.2) obtida na seção 3.4.1. Deste cálculo, é possível mostrar que:

$$\langle P \rangle_{diss} = -\frac{D_a}{2} \left\{ 1 + \left[\frac{\omega_0^2}{4\gamma^2 - \omega_0^2} + \frac{2\gamma \sinh 2\sqrt{4\gamma^2 - \omega_0^2} t}{\sqrt{4\gamma^2 - \omega_0^2}} - \frac{4\gamma^2 \cosh 2\sqrt{4\gamma^2 - \omega_0^2} t}{4\gamma^2 - \omega_0^2} \right] e^{-4\gamma t} \right\} \quad (4.5.7)$$

Para $t > 1/4\gamma$, $\langle P \rangle_{diss} = -D_a/2$. Assim, para tempos de correlação longos, a energia total terá comportamento linear no tempo: $\langle E \rangle = \frac{D_a}{2} t$.

Com esta análise, é possível concluir que, para taxa de correlação intermediária do ruído dicotômico, no caso $D_m = D_m^*(\gamma, \omega_0, \lambda_m)$ (dado pela eq.(4.2.2.6)), a potência dissipada no longo prazo é aproximadamente constante e deve ser limitada, ou seja, $-\frac{D_a}{2} < \langle P \rangle_{diss} < 0$.

Figura 50 – Perfis do regime transiente (obtidos numericamente) para $\langle P \rangle_{diss}$ em curvas cheias, quando $D_m = D_m^*(\gamma, \omega_0, \lambda_m)$, variando-se λ_m (ver legenda). Os casos limítrofes (obtidos analiticamente) mencionados no texto estão ilustrados por $\lambda_m = 0$ (quase determinístico) e $\lambda_m = \infty$ (ruído branco). Os parâmetros são $\gamma = 2$, $\omega_0 = 2$, $D_a = 0,1$.

Para exemplificar este resultado, a figura 50 exibe, em curvas sólidas, o comportamento para $\langle P \rangle_{diss}$ obtido numericamente a partir do sistema dado pela eq.(4.2.2.3a) para diferentes valores do parâmetro λ_m , em contraste com as curvas em símbolos, que representam os resultados para ruído multiplicativo branco da eq.(4.5.5) (em dourado) e da eq.(4.5.7) (em preto).

Como conclusão de nossa análise, mostramos que a perturbação dicotômica deve estar abaixo do limiar D_m^* , para que as oscilações sejam energeticamente estáveis.

Lembramos que no sistema analisado neste capítulo, as flutuações geradas pela força estocástica ζ_{wn} são brancas, enquanto a dissipação é não-local (no tempo) devido à presença da perturbação ξ_{dn} . Tais ruídos não tem portanto a mesma origem microscópica e portanto, não são regidos pela relação de flutuação-dissipação usual. No entanto, verificamos que é possível encontrar um regime estacionário, o que sugere o estabelecimento de uma relação flutuação-dissipação envolvendo parâmetros efetivos do sistema.

5

Aplicação de modelo harmônico estocástico ao mercado financeiro

Nesta seção, analisamos a formação do preço especulativo de um único ativo, em um modelo simplificado do mercado financeiro real com o objetivo de descrever o comportamento de curto-prazo dos preços.

5.1.

Modelagem para a dinâmica dos preços intradiários

A dinâmica dos preços no mercado financeiro envolve várias escalas temporais. Os negociadores – agentes do mercado – são heterogêneos, atuando com objetivos envolvendo horizontes temporais de curto e de longo prazo. Em horizontes temporais mais longos (escala anual), fatores macroeconômicos devem ser levados em consideração, enquanto em horizontes ultracurtos (escala de segundos, duração típica de uma transação), a estrutura detalhada da atividade do mercado deve ser incluída (microestrutura do mercado), onde são levados em conta detalhes do fluxo de ordens de compra e venda dos participantes do mercado e as regras específicas de formação de preços.

Vamos descrever a dinâmica coletiva do mercado em uma escala temporal “mesoscópica”, isto é, a um nível intermediário entre o nível macroeconômico e o nível das transações do agente individual. A escala temporal de observação considerada é a intradiária, e portanto não é longa o suficiente para que os preços eventualmente alcancem um regime estacionário. Estamos assim privilegiando o comportamento transiente dos preços intradiários.

No modelo considerado, os agentes negociam emitindo ordens de compra e/ou venda de um único ativo. As transações ocorrem com o mercado fora de equilíbrio, isto é, com um desequilíbrio entre a demanda e a oferta de ações, caracterizado pela grandeza chamada excesso de demanda $\Delta\Phi$ (diferença entre a demanda e a oferta de ações),

O preço corrente do ativo é aquele da última transação, que se supõe constante até a próxima transação. Em época de crescimento econômico, o preço ao longo do tempo t , $S(t)$, tende a crescer rapidamente. Considera-se então seu logaritmo $x(t) = \ln S(t)$. A vantagem dessa medida é que a variação do preço em escala logarítmica fornece a variação relativa dos preços ($\Delta(\ln S) = \ln S/S_0$), o que torna a análise independente da moeda utilizada no mercado.

O estado do mercado pode ser caracterizado pelo conjunto de ordens de compra e venda que ainda não foram realizadas, com seus respectivos valores, de preços. O chamado *order-book* armazena as ordens dos vários agentes, realizando a negociação quando ocorre uma correspondência entre os preços de compra e venda. Os preços são dados por múltiplos de uma variação mínima chamado de *tick*. Consideramos a janela temporal unitária (1 minuto), ao longo da qual as ordens emitidas são acumuladas. O movimento dos preços do ativo é governado pela dinâmica do *order-book*. Abaixo, na figura 51, mostramos uma representação esquemática.

Figura 51 – Ilustração de uma configuração do *order-book* caracterizada pelo número N de ordens de compra (em vermelho) e ordens de venda (em azul) ao longo do eixo de preços. A faixa de preços correspondente ao nível interno está mostrada em cinza. Após Δt , a configuração do *order-book* é modificada.

Identificamos dois tipos de níveis de ordens de compra/venda de acordo com a dinâmica do *order-book*:

- Níveis Internos – as ordens de compra (venda) compreendem negociações em potencial na janela temporal presente. Elas estão fortemente correlacionadas ao próximo movimento do preço. Estas ordens estarão fora do *order-book* no próximo intervalo Δt .
- Níveis externos – as ordens de compra (venda) apresentam um atraso no ajuste da configuração do *order-book* em resposta ao recente movimento dos preços.

O excesso de demanda $\Delta\Phi$ muda a cada intervalo unitário Δt de acordo com as principais contribuições:

- $\Delta\Phi_{int}$ – de ordens que são criadas e executadas nos níveis internos;
- $\Delta\Phi_{ext}$ – de ordens que aparecem (desaparecem) nos (dos) níveis internos provenientes (para) dos (os) níveis externos – carregam memória dos preços passados;
- $\Delta\Phi_{sta}$ – de ordens postas por agentes especuladores que negociam de acordo com um preço-alvo x_0 . Essas ordens podem ser consideradas como componentes ‘estáticas’ da configuração do *order-book*;
- $\zeta(t)$ – devido a perturbações externas ou desinformação do mercado.

O conjunto dessas contribuições nos leva à seguinte equação para a evolução do excesso de demanda:

$$\Delta\Phi(t + \Delta t) - \Delta\Phi(t) = -\Delta\Phi_{int}(t) + \Delta\Phi_{ext}(t) + \Delta\Phi_{sta}(t) + \zeta(t). \quad (5.1.1)$$

Vamos a seguir, detalhar cada contribuição, utilizando nas interpretações que o excesso de demanda atual é positivo. No caso em que é negativa, a interpretação análoga deve ser cuidadosa, com saída de ordens de compra e venda sendo substituída por entrada de ordens, etc.

Consideramos inicialmente o efeito das ordens de compra e venda que foram executadas no instante t e que saíram do *order-book* pelo menos temporariamente. Estas ordens têm preços ofertados que estão em uma faixa de valores próximos, nos níveis internos, fornecendo o excesso de demanda

$\Delta\Phi_{int}(t)$. A maneira mais simples de modelar este efeito é considerar que o número de ordens de compra ou venda que saem do mercado na próxima janela temporal é proporcional, respectivamente, ao excesso de demanda total, ou seja:

$$\Delta\Phi_{int}(t) = 2\gamma\Delta\Phi(t) . \quad (5.1.2)$$

Um fator importante na determinação do preço ofertado para compra ou venda é que, como a informação sobre o preço “verdadeiro” de uma ação é incompleta, seu valor tem que ser estimado (antecipado) pelos agentes a cada instante. Alguns agentes constroem suas estratégias de compra/venda baseadas nas flutuações passadas dos preços, pois consideram que a série histórica fornece informações relevantes sobre o ativo. Denotaremos o excesso de demanda desta classe de agentes no instante t por $\Delta\Phi_{ext}(t)$. Esta avaliação da série histórica privilegia os valores de preços realizados nas transações do passado mais recente, mas não apenas o preço da última transação. Desta forma, em nosso modelo, estão também incluídos efeitos de memória na atuação dos agentes através do *feedback* das flutuações de preços passadas com um *kernel* exponencial.

O impacto desta avaliação sobre o número de ordens de compra ou venda depende do tipo de estratégia do agente: se são agentes *trend-followers*, contribuem para o aumento do excesso de demanda e se são agentes *contrarians*, contribuem para a diminuição do excesso de demanda. O efeito agregado da atuação desses agentes pode ser descrito por $\Delta\Phi_{ext}(t) = \theta(t)\Delta\Phi(t)$, onde $\theta(t) > 0$ ($\theta(t) < 0$) quando a maioria dos agentes são *trend-followers* (*contrarians*). Vamos modelar a saída de ordens de compra ou venda do mercado para o intervalo temporal seguinte devido a essa classe de agentes por:

$$\Delta\Phi_{ext}(t) = -2\gamma\xi(t)\Delta\Phi(t) . \quad (5.1.3)$$

onde $\xi(t) = \pm\sigma$, para maioria de agentes *contrarians* ou *trend-followers*, respectivamente.

As flutuações do parâmetro $\xi(t)$ do mercado ao longo do tempo são devidas a vários fatores endógenos, entre os quais: heterogeneidade de estratégias e de horizontes temporais de negociação, necessidades idiossincráticas dos agentes do

mercado (necessidade individual de dinheiro, etc.) ou ainda o aparecimento espontâneo de novos agentes. Isto nos leva a modelar o comportamento de $\xi(t)$ por um ruído dicotômico, no qual há uma alternância dos valores $\xi = \pm\sigma$ com tempo característico τ_m . De fato, podemos pensar na existência de duas subpopulações de negociadores, compradores e vendedores, que trocam partículas a uma taxa τ_m^{-1} segundo um processo interno espontâneo. Em resumo, a eq.(5.1.3) descreve o efeito da antecipação dos preços pelos agentes especulativos, de acordo com suas estratégias, na variação do excesso de demanda, cujo efeito de memória é representado pelo ruído colorido $\xi(t)$.

Os agentes que contribuem para $\Delta\Phi_{sta}(t)$, colocam suas ordens em função do desvio do preço presente em relação ao preço-alvo x_0 . Podemos representar a atuação desses agentes por uma resposta linear, no sentido de trazer os preços para o “valor-alvo” x_0 , emitindo ordem de compra (venda) se $x < x_0$ ($x > x_0$). Assim, a contribuição desta classe de agentes para a variação do excesso de demanda é descrita por ($K > 0$):

$$\Delta\Phi_{sta}(t) = -K(x(t) - x_0) . \quad (5.1.4)$$

A variação do número de compradores e/ou vendedores sofre também a influência de novas informações que chegam ao mercado, sendo modeladas por um ruído externo $\epsilon(t)$ com dado tempo de correlação τ_ϵ . Uma abordagem realista do mercado consiste em considerar que as notícias externas também são interpretadas e replicadas de maneira pessoal pelos agentes, que fazem o papel de um banho térmico. Assim, de acordo com a seção 2.1.3 o sistema será governado por um ruído aditivo efetivo $\zeta(t)$ dado por $\zeta(t) = \eta(t) + \pi(t)$, onde $\eta(t)$ é um ruído branco (representando o banho térmico) e $\pi(t)$ representa o ruído externo modulado (“vestido”) pelo banho térmico. Considerando ruído externo colorido com memória exponencial, o ruído resultante $\zeta(t)$ terá novo valor de tempo de correlação τ_{ef} . Por outro lado, para ruído externo branco ($\tau_\epsilon = 0$), representado o caso de informações desconstruídas ou desinformação do mercado, o ruído efetivo $\zeta(t)$ também será branco.

Levando em conta as contribuições mencionadas, a eq.(5.1.1) é levada em:

$$\Delta\Phi(t + \Delta t) - \Delta\Phi(t) = -2\gamma[1 + \xi(t)] \Delta\Phi(t) - K(x(t) - x_0) + \zeta(t). \quad (5.1.5)$$

O movimento dos preços do ativo entre t e $t + \Delta t$ depende do excesso de demanda $\Delta\Phi(t)$. Denotando a variação do logaritmo do preço por $u(t)$ (retorno):

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = u(t) = \mathcal{F}(\Delta\Phi(t)), \quad (5.1.6)$$

onde $\mathcal{F}$ é uma função crescente tal que $\mathcal{F}(0) = 0$. Como primeira aproximação, consideraremos a forma linear para $\mathcal{F}(\Delta\Phi)$.

Para analisar o efeito das transações sobre a dinâmica dos preços, consideramos um mercado líquido, onde os preços negociados variam pouco de acordo com a “pressão” exercida pelo excesso de demanda. Assim,

$$u(t) = \frac{\Delta\Phi}{\mu}, \quad (5.1.7)$$

onde μ é chamado de *market depth*, que dá a medida de quanto a pressão exercida pelo excesso de demanda para mudar o preço é “absorvida” pelo mercado. Além disso, devido aos valores pequenos de retorno, podemos considerar sua evolução em tempo contínuo a partir da variação do excesso de demanda no intervalo unitário Δt :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\Delta\Phi(t+\Delta t) - \Delta\Phi(t)}{\mu \Delta t}. \quad (5.1.8)$$

Assim, chega-se a um modelo que descreve o movimento de um oscilador harmônico com amortecimento aleatório ($m = 1$; $K = \omega_0^2$):

$$\ddot{x} + 2\gamma[1 + \xi(t)]\dot{x} + \omega_0^2(x - x_0) = \zeta(t). \quad (5.1.9)$$

onde o parâmetro μ foi absorvido nos coeficientes γ e K assim como na amplitude do ruído $\zeta(t)$.

Conforme justificado na modelagem apresentada, na eq. (5.1.9) o ruído aditivo $\zeta(t)$ é um ruído Gaussiano branco ou colorido:

$$\langle \varsigma_{wn}(t) \rangle = 0 ; \quad \langle \varsigma_{wn}(t) \varsigma_{wn}(t') \rangle = 2D_a \delta(t - t') , \quad (5.1.10a)$$

$$\langle \varsigma_{cn}(t) \rangle = 0 ; \quad \langle \varsigma_{cn}(t) \varsigma_{cn}(t') \rangle = \sigma_a^2 \exp(-\lambda_a |t - t'|) . \quad (5.1.10b)$$

O ruído multiplicativo $\xi(t)$ é um ruído dicotômico:

$$\langle \xi_{dn}(t) \rangle = 0 ; \quad \langle \xi_{dn}(t) \xi_{dn}(t') \rangle = \sigma_m^2 \exp(-\lambda_m |t - t'|) . \quad (5.1.11)$$

Ambos os ruídos são descorrelacionados.

Note que em um mercado cuja maioria é de agentes *trend-followers* ($\xi(t) = -\sigma$), há um enfraquecimento do termo de dissipação. Por outro lado, quando o mercado tem maioria de agentes *contrarians* ($\xi(t) = +\sigma$), há o fortalecimento do termo de dissipação.

De forma geral, podemos dizer que se $2\tilde{\gamma}(t) = 2\gamma[1 + \xi(t)] < 0$ por um longo período de tempo, existe uma tendência de crescimento dos preços, não necessariamente real e sim induzida pelo fato de que $\frac{du}{dt} > 0$ motiva a maioria dos agentes (*trend-followers*) a comprar, formando uma bolha especulativa de preços. No entanto, vamos considerar aqui o regime normal de flutuações de preços, onde patamar dessas flutuações (medida pela grandeza chamada de volatilidade) está dentro de um nível histórico. Desta forma, consideramos $\gamma > 0$ e parâmetros σ_m , λ_m do ruído dicotômico, com ênfase no regime normal de mercado.

Nosso objetivo a seguir é analisar a eq.(5.1.9) obtendo o valor esperado dos preços e dos retornos, respectivamente, ao longo do tempo assim como a magnitude das flutuações quadráticas, de acordo com as realizações do ruído. Esta última grandeza provê estimativa da volatilidade do ativo, que representa o risco associado ao investimento.

5.2. Análise estatística do Ibovespa

Será feita uma análise estatística dos dados intradiários do Índice Bovespa (Ibovespa), que é o principal indicador da economia brasileira, através do

desempenho médio das cotações das ações com maior volume negociado nos últimos meses na BM&FBovespa. O Ibovespa é o resultado de uma carteira teórica de ativos, formado pelas ações das principais empresas brasileiras, tais quais bancos, empresas do ramo energético, automobilísticas, entre outras. Para informação sobre a participação de cada um dos papéis na composição total do índice, veja [33]

Foram analisados inicialmente os dados intradiários dos anos de 2006 a 2008, período pré-crise que se estende até hoje. Para os cálculos realizados, os dados foram tratados em intervalos de um minuto. Assim, ao longo de um dia de pregão teremos em torno de 400 dados observados.

Para efeitos de análise, estaremos considerando cada dia de pregão ao longo do ano como uma realização do processo estocástico dos preços. Assim, a abertura do pregão de cada dia é tomada como o instante inicial ($t = 0$). Ao longo de um ano, teremos em torno de 250 realizações estocásticas associadas à série financeira considerada. A descrição estatística será feita a partir de médias sobre o *ensemble* dessas realizações diárias.

Para cada dia i de pregão tem-se um preço S_{0i} inicial. Os preços ao longo de cada dia são normalizados pelo respectivo valor inicial, ou seja, considera-se $S_i^{Norm} = S_i(t)/S_{0i}$. A variável estocástica analisada será:

$$X_i(t) \equiv \ln \left(\frac{S_i(t)}{S_{0i}} \right); \quad (5.2.1)$$

Com esta prescrição, $X_i(0) \equiv X_0$ será sempre zero e a variância desses valores iniciais também será zero. Portanto, estamos tratando de um *ensemble* de log-preços $X(t)$ intradiários com distribuição inicial localizada $P(X, t = 0) = \delta(X)$.

Os retornos de cada dia serão dados por $R_i(t) = X_i(t + \Delta t) - X_i(t)$ para $\Delta t = 1$ min. Note que os retornos não serão afetados pelo procedimento de normalização da série de preços.

Definidas as variáveis financeiras, as médias estatísticas serão calculadas sobre o *ensemble* dos dias de pregão, ou seja:

$$\langle A(t) \rangle = \frac{1}{N_{dias}} \sum_{dia i} A_i(t), \quad (5.2.2)$$

onde $A_i(t)$ representa o valor da grandeza considerada (log-preço normalizado X_i ou retorno R_i) no instante t . Além disso, será calculado o desvio padrão, definido por $SD(A(t)) \equiv \sqrt{\langle A^2(t) \rangle - \langle A(t) \rangle^2}$.

Consideremos inicialmente $\langle X(t) \rangle$. O comportamento nos anos de 2006, 2007 e 2008 é mostrado na figura 52, assim como no biênio 2006-2007. Isto será justificado posteriormente nesta seção. É possível notar que os resultados para 2008 apresentam um comportamento ligeiramente diferente dos anos anteriores, principalmente para tempos acima de 200 min.

O comportamento de $SD(X(t))$ é mostrado na figura 53. É possível notar que o perfil das curvas é similar, entretanto, a magnitude das flutuações é bem maior no ano de 2008.

Figura 52 – Série temporal de $\langle X(t) \rangle$ (intervalos de 1 min) para os anos de 2006 (preto), 2007 (vermelho), 2008 (azul) e biênio 2006-2007 (marrom).

Figura 53 – Série temporal de $SD(X(t))$ (intervalos de 1 min) para os anos de 2006 (preto), 2007 (vermelho), 2008 (azul) e biênio 2006-2007 (marrom).

Para o valor médio do retorno de um minuto, os resultados são mostrados na figura 54. As séries temporais são bastante ruidosas, porém é possível notar que as flutuações também são maiores para o ano de 2008.

Figura 54 – Série temporal de $\langle R(t) \rangle$ (intervalos de 1 min) para os anos de 2006 (preto), 2007 (vermelho), 2008 (azul) e biênio 2006-2007 (marrom).

Considerando-se os resultados empíricos de $SD(R(t))$, nota-se que existem maiores flutuações no início do pregão. Estas flutuações estão associadas ao fato que entre o fechamento do dia anterior e a abertura do dia considerado, informações novas chegam e são interpretadas pelos agentes. Assim, existe um “aquecimento” maior no início dos dias. À medida que estas informações são incorporadas, as flutuações nos retornos tendem a diminuir, permanecendo praticamente em torno de um valor constante. Os comportamentos para os anos considerados são exibidos na figura 55. Note que novamente, o ano de 2008 apresenta maior patamar de flutuação em relação aos outros anos.

Figura 55 – Série temporal de $SD(R(t))$ (intervalos de 1 min) para os anos de 2006 (preto), 2007 (vermelho), 2008 (azul) e biênio 2006-2007 (marrom).

Diante dos dados apresentados, é possível concluir que o ano de 2008, por se tratar de um ano relacionado ao início da crise financeira, apresenta comportamento diferente dos anos anteriores, em particular com maior incerteza de preços e evolução segundo um patamar mais alto de volatilidade. Por conseguinte, para fazer a comparação com nosso modelo teórico, que pressupõe um regime normal de mercado conforme definido anteriormente, iremos considerar apenas os anos de 2006 e 2007, analisando simultaneamente os dados do biênio 2006-2007 para que haja um maior número de realizações das grandezas consideradas.

5.3.

Ajuste do modelo teórico aos dados do Ibovespa

Vamos agora comparar a análise estatística dos dados apresentada na seção anterior com o modelo de oscilador sujeito a ruído multiplicativo dicotômico em presença de ruído aditivo branco dado pela equação diferencial estocástica mostrada na eq.(5.1.9), que corresponde ao caso III discutido no capítulo 4.

O preço logarítmico normalizado é a resposta do mercado, equivalente à resposta do oscilador. Assim, a eq.(5.1.9) toma a forma:

$$\ddot{X} + 2\gamma[1 + \xi_{dn}(t)]\dot{X} + \omega_0^2(X - X_{ref}) = \zeta_{wn}(t), \quad (5.3.1)$$

onde X_{ref} é um preço de referência médio considerando-se os diversos preços-alvo utilizados pelos agentes especuladores em cada dia de pregão.

Vamos calcular o valor de $\langle X(t) \rangle$ e $\langle R(t) \rangle = \langle \dot{X}(t) \rangle$ a partir do método adotado na seção 4.2.1.

Os segundos momentos, $\langle X^2(t) \rangle$ e $\langle R^2(t) \rangle$ serão obtidos numericamente a partir do sistema de equações diferenciais discutido na seção 4.2.2. Os dados iniciais do sistema são calibrados pelos valores empíricos. Já sabemos que, segundo os dados analisados do Ibovespa, a distribuição de log-preços normalizada é localizada, ou seja, $\langle X(t=0) \rangle = 0$ e $SD(X(t=0)) = 0$. Para os retornos, as séries temporais tomadas ao longo do biênio 2006-2007 fornecem os dados iniciais: $\langle R(t=0) \rangle = R_0$ e $SD(R(t=0)) = 1,589 \times 10^{-3}$.

As figuras abaixo apresentam os ajustes ótimos encontrados para os resultados empíricos de $\langle X(t) \rangle$, $SD(X(t))$, $\langle R(t) \rangle$ e $SD(R(t))$. Mostramos primeiramente o comportamento no início do pregão ($t < 100$ min) e em seguida o comportamento intradiário ($t < 300$ min), excluindo-se o final do pregão para melhor visualização dos gráficos.

Figura 56 – Série temporal intradiária de $\langle X(t) \rangle$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo.

Figura 57 – Série temporal intradiária de $\langle X(t) \rangle$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo.

Figura 58 – Série temporal intradiária de $SD(X(t))$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo.

Figura 59 – Série temporal intradiária de $SD(X(t))$ no biênio 2006- 2007 e ajuste do modelo.

Figura 60 – Série temporal intradiária de $\langle R(t) \rangle$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo.

Figura 61 – Série temporal intradiária de $\langle R(t) \rangle$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo.

Figura 62 – Série temporal intradiária de $SD(R(t))$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo.

Figura 63 – Série temporal intradiária de $SD(R(t))$ no biênio 2006-2007 e ajuste do modelo.

Os valores dos parâmetros ajustados estão nas seguintes faixas:

$$0,23 \leq \gamma \leq 0,26$$

$$0,07 \leq \omega_0 \leq 0,12$$

$$0,6 \leq \lambda_m \leq 0,8$$

$$6 \times 10^{-9} \leq Da \leq 9 \times 10^{-9}$$

$$1,19 \leq \sigma_m < 1,34$$

Uma observação importante é que sem a presença de ruído multiplicativo, não foi possível o ajuste dos dados empíricos. Em particular, os valores ótimos de σ_m estão próximos do limiar de estabilidade, o que mostra a relevância da alternância das estratégias especulativas dominantes na escala intradiária do mercado representada pelo ruído dicotômico.

É interessante notar que $SD(X(t))$ mostrado na figura 59 ainda não atingiu o valor estacionário. Em analogia com o resultado obtido na seção 4.4 para o regime III(b), no qual o tempo de observação satisfaz a $\tau_m < \tau_r \ll t$, espera-se forte dependência de $[SD(R(t))]^2$ de acordo com a proximidade de D_m a D_m^* , em particular, um atraso no alcance do valor estacionário.

Por outro lado, a presença do ruído externo é fundamental para a obtenção de um regime estacionário. Conforme análise do capítulo 2, os parâmetros do ruído aditivo correspondem às informações externas já interpretadas (amplificadas/atenuadas) pelos agentes do mercado. Efeitos de amplificação ocorrem em épocas de crise, de incerteza do mercado, o que não é o caso do período analisado. No entanto, apesar do aparente pequeno valor de D_a encontrado ($D_a \cong 10^{-8}$), este não deve ser considerado como desprezível pois deve ser comparado, por exemplo, com o patamar de $[SD(R(t))]^2 \cong 10^{-7}$ obtido a partir da figura 63.

Em termos das escalas temporais características ($\tau_r = 1/\gamma$, $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$, $\tau_m = 1/\lambda_m$), obtivemos:

$$3,9 \text{ min} \leq \tau_r \leq 4,4 \text{ min};$$

$$52,4 \text{ min} \leq \tau_0 \leq 89,7 \text{ min};$$

$$1,3 \text{ min} \leq \tau_m \leq 1,7 \text{ min}.$$

Na ausência de ruído multiplicativo, o parâmetro τ_r é identificado com o tempo característico de decaimento da função de correlação da resposta do sistema [3]. O valor encontrado está de acordo com a escala típica observada nas séries temporais financeiras de mercados líquidos, que é da ordem de vários minutos [34, 35].

O valor de τ_0 indica a escala temporal a partir da qual o regime de preços é governado pelo efeito “confinante” de um preço-alvo, como evidenciado na Figura 57. Naturalmente, trata-se de uma localização estocástica, devido à existência de $SD(X(t))$.

Os argumentos acima indicam que o modelo adotado explica várias propriedades observadas nas séries temporais intradiárias de log-preço e de retorno do Ibovespa. Aponta ainda as prováveis fontes dos parâmetros do modelo, em termos da atuação agregada dos agentes especuladores. É um modelo promissor como ponto de partida para a inclusão de outros fatores que influenciam a dinâmica intradiária dos preços, como por exemplo, a aversão ao risco.

6 Conclusões e perspectivas futuras

Neste trabalho, investigamos a dinâmica de um oscilador harmônico sujeito à dissipação estocástica e a uma força estocástica Gaussiana. O objetivo foi analisar em detalhe o efeito das flutuações estocásticas do amortecimento sobre o regime transiente de seu comportamento dinâmico.

Para isso recorreu-se à técnica de sistemas dinâmicos, onde é possível identificar de forma simples a influência de cada termo particular na evolução das grandezas envolvendo médias de primeira e segunda ordem da resposta do sistema assim como correlações entre a resposta e os ruídos presentes.

A solução geral destes sistemas para o regime transiente é extensa para ser exibida no texto. Nestes casos, recorreremos a soluções numéricas, ilustrando as soluções para parâmetros particulares.

Isto permitiu apresentarmos gráficos das soluções transientes, analisando a influência de condições iniciais, do tempo de correlação do ruído, etc. e explorando os resultados físicos. Em particular, observou-se uma forte dependência do comportamento transiente das variâncias com as condições iniciais nos casos onde havia a presença de ruído multiplicativo no sistema.

A técnica de sistemas dinâmicos provê ainda soluções para grandezas auxiliares que permitem o cálculo do trabalho das forças aleatórias que injetam e dissipam energia, propiciando análise do balanço energético transiente.

O efeito dominante da perturbação no amortecimento é a diminuição do coeficiente de amortecimento efetivo, podendo levar a uma instabilidade energética.

Encontramos que, na presença de ruído aditivo, independentemente se é branco ou colorido, o oscilador com amortecimento aleatório branco apresenta regime estável para os valores médios $\langle \varphi(t) \rangle$ e $\langle y(t) \rangle$, limitado pelo valor $D_m^{max} = 1/2\gamma$ enquanto o regime estável dos momentos quadráticos $\langle \varphi^2(t) \rangle$ e

$\langle y^2(t) \rangle$ é limitado pelo valor $D_m^* = 1/4\gamma$, a partir do qual uma instabilidade energética ocorre. Este resultado contrasta com o caso de sistema apenas com ruído aditivo, no qual só existe instabilidade para valores negativos de γ , tanto para momentos de primeira ordem quanto para os de segunda ordem.

Utilizando o reescalonamento dos parâmetros, ou seja, $x \equiv \omega_0/\gamma$, $\mathcal{D}_m \equiv 2\omega_0 D_m$, $\mathcal{D}_a \equiv D_a/\omega_0^3$ e $\mathcal{T}_m \equiv \omega_0 \tau_m$, verificaremos a invariância de escala em relação à ω_0 das expressões da variância (comportamento transiente e assintótico), mantendo-se fixos os valores de x , $\mathcal{D}_m$, $\mathcal{D}_a$ e $\mathcal{T}_a$. Ilustramos esta invariância com o colapso das curvas de $\langle [\varphi - \langle \varphi \rangle]^2 \rangle$ e de $\langle [y - \langle y \rangle]^2 \rangle$ na variável temporal reescalada $t' = \omega_0 t$.

O reescalonamento também permitiu obter um diagrama de regimes universal das soluções energeticamente estáveis no plano $x \times D$ para os casos estudados I e II.

Passamos a analisar o modelo principal deste trabalho, que consiste do oscilador com amortecimento aleatório dicotômico sujeito a ruído aditivo branco.

Calculamos uma solução aproximada de $\langle \varphi(t) \rangle$ para ruído multiplicativo dicotômico com tempo de correlação curto, na aproximação de primeira ordem. Mostramos que é análoga à solução do oscilador harmônico amortecido, com parâmetros efetivos Γ_{ef} e Ω_0 , sujeito a condições iniciais modificadas. Concluimos que o advento da memória de curto alcance tem o efeito de mudar o amortecimento e a frequência característicos do sistema.

Utilizando o mesmo reescalonamento dos parâmetros citados anteriormente, também verificaremos a invariância de escala em relação à ω_0 das expressões de $\langle \varphi(t) \rangle$ e de $\langle \varphi^2(t) \rangle$.

No caso de $\langle \varphi(t) \rangle$, o reescalonamento permitiu obter um controle geral sobre o erro relativo da aproximação de primeira ordem em $\mathcal{T}_m$: (i) ele é o mesmo para cada classe de sistemas associados ao par de parâmetros reescalados $(x; \mathcal{D}_m)$; (ii) à medida que a classe de sistemas $(x; \mathcal{D}_m)$ se aproxima da classe de sistemas instáveis caracterizados por $(x; \mathcal{D}_m^{max}(\mathcal{T}_m, x))$, o erro da aproximação de primeira ordem é cada vez maior.

No caso de $\langle \varphi^2(t) \rangle$, o reescalonamento permitiu obter novas curvas de estabilidade energética $\mathcal{D}_m^*(\mathcal{T}_m, x)$ e novo diagrama de regimes para $\langle \varphi(t) \rangle$, mostrando que a introdução de efeito de memória curta na componente ruidosa do amortecimento produz um aumento de estabilidade do sistema, permitindo que maiores amplitudes de ruído multiplicativo ocorram.

Por outro lado, em nossa análise da variância da resposta no caso em que as escalas temporais características τ_r , τ_0 e τ_m não são comparáveis e tem ordenamento arbitrário, vimos que o aumento da amplitude de ruído multiplicativo faz com que a aproximação ao equilíbrio torne-se cada vez mais lenta, devido à diminuição do parâmetro de amortecimento efetivo.

Mostramos também neste caso que, dependendo da magnitude relativa das escalas temporais características do sistema, a evolução dinâmica do oscilador atravessa regimes de ultra-curto, curto e médio prazos bem definidos.

Em resumo, os resultados obtidos neste trabalho mostraram a relevância que a natureza da aleatoriedade do amortecimento tem sobre o comportamento típico do sistema no regime transiente.

Obtivemos resultados numéricos para um rico espectro de regimes transientes que podem ser de interesse experimental. Neste trabalho, aplicamos o modelo ao comportamento intradiário de preços do mercado de ações.

Para tal, consideramos uma modelagem do mercado no qual a atuação coletiva dos agentes ocorre em uma escala temporal mesoscópica, intermediária entre o nível macroeconômico e o nível das transações individuais. O movimento dos preços do ativo é governado pela emissão de ordens de compra/venda de ações pelos agentes especuladores de acordo com suas várias estratégias, incluindo-se os que assumem um preço-alvo e os que levam em conta as flutuações de preços passadas. Em particular, esta última classe de agentes foi dividida em duas principais subpopulações de negociadores, os que seguem e os que vão contra a tendência recente dos preços, fazendo flutuar a tendência majoritária. Neste cenário, este efeito é modelado por um ruído dicotômico. Considera-se também que o preço do ativo sofre a influência de novas informações que chegam ao mercado e que são interpretadas ou replicadas de

maneira pessoal pelos agentes. Neste cenário, este efeito é modelado por um ruído aditivo.

A presença dos ruídos aditivo e multiplicativo foi essencial para fazermos o ajuste dos dados empíricos do Ibovespa, onde os parâmetros obtidos se mostraram consistentes com escalas as características do mercado.

O modelo de oscilador harmônico com amortecimento aleatório dicotômico sujeito a ruído Gaussiano branco explica várias propriedades observadas nas séries temporais intradiárias de log-preço e retorno. Aponta ainda as prováveis fontes dos parâmetros do modelo, em termos da atuação agregada dos agentes especuladores. Em particular, os valores ótimos para a amplitude do ruído multiplicativo estão próximos do limiar de estabilidade, o que mostra a relevância da existência de alternância das estratégias especulativas na escala intradiária do mercado, representada pelo ruído dicotômico.

As perspectivas teóricas deste estudo através da técnica de sistemas dinâmicos são inúmeras, entre elas, a introdução de correlação entre os ruídos e o estudo com outros tipos de ruídos Markovianos. Além disso, a análise presente pode ser estendida ao cálculo da função de correlação da resposta do sistema assim como ao estudo dos momentos de ordem superior.

7

Referências bibliográficas

- 1 MOSHINSKI, M.; SMIRNOV, Y. E. The Harmonic Oscillator in Modern Physics. 1 ed. Hardwood academic publishers, 1996. 414p.
- 2 LINDENBERG, K.; WEST, B. J. The Nonequilibrium Statistical Mechanics of open and closed Systems. 1 ed. VCH, 1990. 448p.
- 3 BOUCHAUD, J. P.; CONT, R. A Langevin approach to stock market fluctuations and crashes. The European Physical Journal B, v.6, p.543-550, jul. 1998.
- 4 LINDENBERG, K.; SESHADRI V.; WEST, B. Brownian motion of harmonic systems with fluctuating parameters: III scaling and moment instabilities. Physica, v. 105A. p.455-471, ago. 1988.
- 5 GITTERMAN, M. The Noisy Oscillator: Random mass, frequency, damping. 2.ed. World Scientific, 2013. 174p.
- 6 GAMMAITONI, L. et al. Stochastic Ressonance. Reviews of Modern Physics, v.70, i.1, p.223, mar. 1998.
- 7 GITTERMAN, M., Harmonic Oscillator with fluctuating damping parameter. Physical Review E, v. 69, 041101, abr. 2004
- 8 GITTERMAN, M. Classical harmonic oscillator with multiplicative noise. Physica A, v.352, p.309-304, fev. 2005.
- 9 WANG, M. C.; UHLENBECK, G. E. On theory of Brownian motion II. Reviews of Modern Physics, v.2-3, p.323-342, abr.-jul. 1948.
- 10 MAUSOLIVER, J.; PORRÀ, J. M. Harmonic oscillators driven by colored noise: crossovers, ressonances, and spectra. Physical Review E, v.48, p.4309-4319, dez. 1993.
- 11 CALDEIRA, A. O.; LEGGETT, A. J. Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems. Physical Review Letters, v.46, p.211-214, jan. 1981.
- 12 UHLENBECK, G. E.; ORNSTEIN, L. S. On theory of brownian motion. Physical Review, v.36, p.823-841, set 1930.
- 13 LINDENBERG K.; SESHADRI V. Dissipative contributions of internal multiplicative noise: I. Mechanical oscillator. Physica, v. 109A, p.483-499, abr. 1981.
- 14 FARIAS R. L. S.; RAMOS, R. O.; da SILVA, L. A. Nonlinear effects in the dynamics governed by non-Markovian stochastic Langevin-like equations. Journal of Physics: Conference Series, v. 246, 012029, 2009.

- 15 CHAUDHURI, J. R.; CHAUDHURI, P.; CHATTOPADHYAY, S. Harmonic oscillator in presence of nonequilibrium environment. *The Journal of Chemical Physics*, v.130, 234109, jun 2009.
- 16 BENA, I. Dichotomous markov noise: exact results for out-of-equilibrium systems (a brief overview), fev, 2008. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0606116v3.pdf>>. Acesso em: 5 jul. 2016.
- 17 VAN KAMPEN, N. G. Stochastic processes in physics and chemistry. 3 ed. North Holland Personal Library, 1992. 463p.
- 18 VAN DEN BROECK, C. On the relation between white shot noise, gaussian white noise, and the dichotomic markov process. *Journal of Statistical Physics*, v.31, n.3, p.467-483, dez. 1982.
- 19 HORSTHEMKE, W.; LEFEVER, R. Noise-induced transitions: theory and applications in physics, chemistry, and biology. 1.ed. Springer, 2006. 330p.
- 20 NOVIKOV, E. A. Functionals and the random-force method in turbulence theory. *Soviet Physics JETP*, v.29, p.1290-1294, mai. 1965.
- 21 SHAPIRO, V. E.; LOGINOV, V. M. "Formulae of differentiation" and their use for solving stochastic equations. *Physica*, v.91A, p.563-574, jul. 1977.
- 22 KUBO R.; TODA, M.; HASHITSUME, H. Statistical physics II: nonequilibrium statistical mechanics. 2 ed. Springer-Verlag, 1991. 279p.
- 23 TOMÉ T.; OLIVEIRA, M. J. Dinâmica estocástica e irreversibilidade. 2.ed. EDUSP, 2014. 363p.
- 24 GITTERMAN, M. Noisy oscillator: theory and application. *Proc. SPIE* 6603, Noise and fluctuations in photonics, quantum optics, and communications, 660309, jun. 2007.
- 25 HURST, A. W. Stochastic simulation of volcanic tremor Ruapehu. *Journal of volcanology and geothermal research*, v.51, p.185-198, 1992.
- 26 STRATONOVICH, R. L. A new representation for stochastic integrals and equations. *J. SIAM Control*, v.4, n.2, p.362-371, 1966.
- 27 BOYCE, W.; DI PRIMA R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 10 ed. Livros Técnicos Científicos, 2015. 680p.
- 28 BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A. Advanced methods for scientists and engineers. 1 ed. McGraw-Hill, 1978. 593p.
- 29 GITTERMAN, M. Phase transitions in moving systems. *Physical Review E*, v.70, 036116, set. 2004.
- 30 BOURRET, R.; FRISCH, U.; POUQUET, A. Brownian motion of harmonic oscillator with stochastic frequency. *Physica*, v.65, p.303-320, ago. 1973.

- 31 VAN KAMPEN, N. G. Itô versus Stratonovich, *Journal of Statistical Physics*, v.24, n. 1, p.175-197, 1981.
- 32 BOURRET, R. Energetic stability of the harmonic oscillator with random parametric driving. *Physica*, v.54, p.623-629. 1973.
- 33 Índice Ibovespa: composição de carteiras. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-composicao-da-carteira.htm>. Acesso em: 5 jul. 2016.
- 34 MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance. 1.ed. Cambridge University Press, 1999, 148p.
- 35 CORTINES, A. A. G.; RIERA, R. Non-extensive behavior of a stock market index at microscopic time scales. *Physica A*, v.377, p.181-192, nov. 2006.

8 Apêndices

8.1. Demonstração da autocorrelação de ruído colorido Gaussiano a partir de um processo de Ornstein-Uhlenbeck

Seja o processo definido por:

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -\lambda[\xi(t) - \alpha\zeta(t)] , \quad (8.1.1)$$

onde o ruído $\zeta(t)$ é branco e possui média nula. Vamos multiplicar a eq.(8.1.1) por $\xi(t')$, considerando $t > t'$ e tomar a média sobre realizações do ruído. Assim,

$$\frac{d}{dt}\langle \xi(t')\xi(t) \rangle = -\lambda[\langle \xi(t')\xi(t) \rangle - \alpha\langle \xi(t')\zeta(t) \rangle] . \quad (8.1.2)$$

Vamos considerar para a demonstração a formulação de Itô, na qual o ruído ζ na eq.(8.1.1) afeta ξ em um instante posterior a t . Isto implica que o termo $\langle \xi(t')\zeta(t) \rangle$ seja nulo. É possível provar de outras formas este fato, independente de interpretações. Portanto:

$$\frac{d}{dt}\langle \xi(t')\xi(t) \rangle = -\lambda\langle \xi(t')\xi(t) \rangle . \quad (8.1.3)$$

Considere $\tau = |t - t'|$ onde t' é um instante particular. Para $t > t'$, temos

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \text{ e:}$$

$$\frac{d}{d\tau}\langle \xi(t')\xi(t' + \tau) \rangle = -\lambda\langle \xi(t')\xi(t' + \tau) \rangle , \quad (8.1.4)$$

o que implica em:

$$\langle \xi(t') \xi(t' + \tau) \rangle = A e^{-\lambda \tau} . \quad (8.1.5)$$

Para $\tau = 0$, é possível reconhecer a constante A como a variância de ξ . Nas variáveis originais:

$$\langle \xi(t') \xi(t) \rangle = A e^{-\lambda |t-t'|} . \quad (8.1.6)$$

8.2.

Obtenção da eq.(2.1.1.8)

Considere o termo de amortecimento não local definido por

$$\Gamma(t) = \int_{t_0}^t dt' \phi^n(t') D(t-t') \dot{\phi}(t') , \quad (8.2.1)$$

onde $D(t-t') = 2\gamma\nu \exp(-\nu |t-t'|)$. Temos que derivar a expressão acima em relação à t . Assim,

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \phi^n(t) D(0) \dot{\phi}(t) + \int_{t_0}^t dt' \phi^n(t') \frac{dD(t-t')}{dt} \dot{\phi}(t') . \quad (8.2.2)$$

O primeiro termo à direita é o próprio integrando avaliado em t . A derivada do kernel no segundo termo é dada por $-\nu D(t-t')$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(t) &= -\nu \int_{t_0}^t dt' \phi^n(t') D(t-t') \dot{\phi}(t') + \phi^n(t) D(0) \dot{\phi}(t) = \\ &= -\nu \Gamma(t) + \phi^n(t) D(0) \dot{\phi}(t) , \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

8.3.

Obtenção da matriz de probabilidade de transição do processo Markoviano de dois estados

Considere o processo Markoviano de dois estados definido na seção 2.2, $\xi(t) = \{a_1, a_2\}$, que se alternam aleatoriamente com taxa de transição λ_1 quando $a_2 \rightarrow a_1$ e taxa λ_2 quando $a_1 \rightarrow a_2$. A probabilidade de transição do estado i

para o estado j $P_{ij} \equiv Pr\{\xi(t) = a_i | \xi(0) = a_j\}$, $i=1,2$ satisfaz a seguinte equação mestra:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_{1j} = \lambda_1 P_{2j} - \lambda_2 P_{1j} \\ \frac{\partial}{\partial t} P_{2j} = \lambda_2 P_{1j} - \lambda_1 P_{2j} \end{cases}, \quad (8.3.1)$$

onde é considerado que o estado inicial do processo é sempre o mesmo (neste caso, a_j).

O sistema acima deve satisfazer também à conservação de probabilidade, $P_{1j} + P_{2j} = 1$. Além disso, temos que $[P_{ij}]_0 \equiv Pr\{\xi(0) = a_i | \xi(0) = a_j\} = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é a delta de Kronecker. Assim, a solução do sistema da eq.(8.3.1) será:

$$P_{1j} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2 \delta_{1j} - \lambda_1 \delta_{2j}}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]; \quad (8.3.2a)$$

$$P_{2j} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_2 \delta_{1j} - \lambda_1 \delta_{2j}}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]. \quad (8.3.2b)$$

Em notação matricial, temos,

$$P_{ij} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t], \quad (8.3.3)$$

que reproduz os resultados mostrados pela eq.(2.2.3).

8.4.

Dedução da correlação estacionária do processo Markoviano de dois estados

O cálculo da correlação estacionária do processo Markoviano de dois estados, definido na seção 2.2 será dado por:

$$\langle \xi(\tau) \xi(0) \rangle = \sum_{i,j=1,2} a_i a_j P_{ij} P_j^{est}, \quad (8.4.1)$$

onde $P_{ij} \equiv \text{Pr}\{\xi(\tau) = a_i | \xi(0) = a_j\}$ é a probabilidade de transição $j \rightarrow i$ e P_j^{est} é a probabilidade estacionária do estado j . Em notação matricial, podemos escrever a eq.(8.4.1) como:

$$\langle \xi(\tau) \xi(0) \rangle = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau]}{\lambda_1 + \lambda_2} & \frac{\lambda_1 - \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau]}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \frac{\lambda_2 - \lambda_2 \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau]}{\lambda_1 + \lambda_2} & \frac{\lambda_2 + \lambda_1 \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau]}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_1 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \frac{a_2 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{bmatrix}. \quad (8.4.2)$$

Para processos de dois estados que possuem média nula, pela eq.(2.2.6) temos que $a_1 \lambda_1 = -a_2 \lambda_2$. Desta forma, a eq.(8.4.2) fornece:

$$\langle \xi(\tau) \xi(0) \rangle = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{[\lambda_1 + \lambda_2]^2} (a_1 - a_2)^2 \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau]. \quad (8.4.3)$$

8.5. Obtenção da eq.(3.1.8b)

Vamos partir da integral:

$$I = \int_0^t ds \int_0^t ds' G(t-s) G(t-s') \langle \zeta(s) \zeta(s') \rangle, \quad (8.5.1)$$

onde a função de correlação $\langle \zeta(s) \zeta(s') \rangle \equiv C(|s - s'|)$. Note que a integral acima é invariante através da permutação entre s e s' . Vamos fazer a substituição $u = t - s$ e $u' = t - s'$. Note que, neste caso $0 \leq u, u' \leq t$. Assim,

$$I = \int_0^t du \int_0^t du' G(u) G(u') C(|u - u'|). \quad (8.5.2)$$

A integral acima pode ser reescrita como

$$I = \int_0^t du \int_0^u du' G(u) G(u') C(|u - u'|) + \int_0^t du \int_u^t du' G(u) G(u') C(|u - u'|). \quad (8.5.3)$$

Vamos demonstrar que as duas integrais no lado direito da eq.(8.5.3) são iguais.

Considere o primeiro termo, na região em que $u' < u$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t du \int_0^u du' G(u) G(u') C(|u - u'|) = \\ &= \int_0^t du \int_0^t du' \theta(u - u') G(u) G(u') C(|u - u'|) . \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

Substituindo $x = u - u'$, $dx = -du'$, podemos reescrever a eq.(8.5.4) como:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t du \int_u^{u-t} -dx \theta(x) G(u) G(u - x) C(|x|) = \\ &= \int_0^t du \int_{u-t}^u dx \theta(x) G(u) G(u - x) C(|x|) = \\ &= \int_0^t du \int_0^u dx G(u) G(u - x) C(|x|) . \end{aligned} \quad (8.5.5)$$

Para o segundo termo, teremos:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^t du \int_u^t du' G(u) G(u') C(|u - u'|) = \\ &= \int_0^t ds \int_0^t ds' \theta(u' - u) G(u) G(u') C(|u - u'|) . \end{aligned} \quad (8.5.6)$$

Neste caso, a substituição é $x = u' - u$, $dx = -du$. A eq.(8.5.6) será então:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{u'}^{u'-t} -dx \int_0^t du' \theta(x) G(u' - x) G(u') C(|-x|) = \\ &= \int_0^t du' \int_{u'-t}^{u'} dx \theta(x) G(u' - x) G(u') C(|x|) = \\ &= \int_0^t du \int_0^{u'} dx G(u') G(u' - x) C(|x|) . \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

As expressões dadas pela eq.(8.5.5) e pela eq.(8.5.7) são equivalentes. Com isto, provamos que as integrais do lado direito da eq.(8.5.3) são iguais e concluimos que é possível reescrever a integral da eq.(8.5.1) como:

$$I = 2 \int_0^t ds \int_0^s ds' G(s) G(s') \langle \zeta(s) \zeta(s') \rangle . \quad (8.5.8)$$

8.6.**Dedução da variância $\langle[\varphi - \langle\varphi\rangle]^2\rangle$ para o oscilador sujeito a ruído aditivo colorido no regime de tempo de correlação longo**

Para estudar o comportamento da variância da eq.(3.1.2), vamos considerar o termo $\varsigma(0) \equiv F_0$ de uma dada realização do ruído que persiste no tempo. Assim, temos inicialmente que determinar a solução de:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = F_0, \quad (8.6.1)$$

que, com condições iniciais $\varphi(0) = 0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$, é dada por:

$$\varphi(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right] \right\}. \quad (8.6.2)$$

Considerando que o ruído é governado por uma distribuição que possui média nula e variância σ_a^2 ,

$$\langle(\varphi - \langle\varphi\rangle)^2\rangle = \frac{\langle(F_0 - \langle F_0 \rangle)^2\rangle}{\omega_0^4} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right] \right\}^2. \quad (8.6.3)$$

Substituindo $\langle(F_0 - \langle F_0 \rangle)^2\rangle = \sigma_a^2$, temos:

$$\langle(\varphi - \langle\varphi\rangle)^2\rangle = \frac{\sigma_a^2}{\omega_0^4} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left[\frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right] \right\}^2. \quad (8.6.4)$$

Esta aproximação é equivalente a tomarmos o limite $\lambda_a \rightarrow 0$ nas eq.(3.1.10) para ruído aditivo colorido, considerando-se uma escala temporal de correlação de alcance infinito. Abaixo mostramos na figura 64 o comportamento da variância com o tempo, obtido para determinados parâmetros de controle, utilizando a eq.(8.6.4) (força externa constante) e expressões dadas pela eq.(3.1.10). No limite $\lambda_a \rightarrow 0$, observa-se a superposição dos gráficos obtidos.

Figura 64 – Gráfico comparativo da variância $\langle (\phi - \langle \phi \rangle)^2 \rangle$ entre a solução exata (em azul) e solução de força constante dada pela eq.(8.6.4) (em vermelho). Parâmetros $\sigma_a^2 = 0,01$, $\omega_0 = 6,28$, $\gamma = 0,1$. Primeiro painel: $\lambda_a = 0,02$ (apenas para a solução exata). Segundo painel: o limite $\lambda_a \rightarrow 0$ para a solução exata coincide com a solução de força constante.

De maneira análoga ao método descrito acima, é possível obter soluções para a variância quando $\tau_{ef} \equiv 1/\lambda_a$ é longo, nos regimes nos quais o tempo de observação não é comparável a outras escalas características do problema. Por exemplo, quando $t \gg \tau_r$, podemos aproximar a eq.(8.6.1) por:

$$2\gamma\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = F_0. \quad (8.6.5)$$

Neste caso, a variância será dada por:

$$\langle (\phi - \langle \phi \rangle)^2 \rangle = \frac{\sigma_a^2}{\omega_0^4} \left(e^{-\frac{\omega_0^2}{2\gamma}t} - 1 \right)^2. \quad (8.6.6)$$

Nos estágios iniciais de evolução dinâmica ($t \ll \tau_r, \tau_0$), os efeitos do amortecimento e da mola são desprezíveis, a solução no limite $\lambda_a \rightarrow 0$ pode ser dada pela equação:

$$\ddot{\phi} = F_0, \quad (8.6.7)$$

a qual, segundo o método apresentado anteriormente, possui solução para a variância da forma:

$$\langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle = \frac{\sigma_a^2}{4} t^4 . \quad (8.6.8)$$

8.7.

Exemplificação numérica da resolução do sistema de equações dada pela eq.(4.1.2.4a)

Considere o sistema da eq.(4.1.2.4a). Será feita uma ilustração numérica para os parâmetros $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$, $D_m = 0,1$, $D_a = 0,1$. Iremos utilizar as condições iniciais $\langle \varphi^2(t=0) \rangle = 0$, $\langle y^2(t=0) \rangle = y_0^2 + V_{y0}$, onde V_{y0} representa a variância de y_0 . Desta forma, teremos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -1,6\langle y^2 \rangle - 4,5\langle \varphi y \rangle + 0,2 \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 2,4\langle \varphi y \rangle - 2,25\langle \varphi^2 \rangle \end{cases} . \quad (8.7.1)$$

Utilizando o MAPLE, é possível obter a solução para as condições iniciais citadas acima. Será mostrado aqui apenas a solução para $\langle \varphi^2(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(t) \rangle = & 0.0556 + e^{-0,6805t} [0,2276(y_0^2 + V_{y0}) - 0,0669] + \\ & -e^{-1,6598t} [(y_0^2 + V_{y0})(0,2276 \cos 2,798t + 0,0797 \sin 2,798t) - \\ & 0,0114 \cos 2,798t + 0,0095 \sin 2,798t] . \end{aligned} \quad (8.7.2)$$

Note que existe dependência com o valor y_0^2 . Na ausência de variância (distribuição localizada em y_0) é possível concluir que, ainda assim, haverá dependência com condições iniciais. Para distribuições localizadas na origem, a solução é mais simples.

8.8.

Exemplificação numérica da resolução do sistema de equações dada pela eq.(4.1.2.8b)

Considere o sistema da eq.(4.1.2.8b). Será feita uma ilustração numérica para os parâmetros $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$, $D_m = 0,1$, $\sigma_a = 0,1$ e $\lambda_a = 0,1$. Iremos

utilizar as condições iniciais $\langle \varphi^2(t=0) \rangle = 0$, $\langle y^2(t=0) \rangle = y_0^2 + V_{y0}$, onde V_{y0} representa a variância de y_0 . Desta forma, teremos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -1,6\langle y^2 \rangle - 4,5\langle \varphi y \rangle + 2\langle \zeta y \rangle \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 2,4\langle \varphi y \rangle - 2,25\langle \varphi^2 \rangle + \langle \zeta \varphi \rangle \\ \langle \dot{\zeta} y \rangle = -4,1\langle \zeta y \rangle - 2,25\langle \zeta \varphi \rangle + 0,01 \\ \langle \dot{\zeta} \varphi \rangle = \langle \zeta y \rangle - 0,1\langle \zeta \varphi \rangle \end{cases} \quad (8.8.1)$$

Utilizando o MAPLE, é possível obter a solução para as condições iniciais citadas acima. Será mostrado aqui apenas a solução para $\langle \varphi^2(t) \rangle$:

$$\langle \varphi^2(t) \rangle = 0,0018 - 0,0062e^{-0,7771t} + e^{-0,6805t} [0,2276(y_0^2 + V_{y0}) - 0,003] - e^{-1,6598t} [(y_0^2 + V_{y0})(0,2276 \cos 2,798t + 0,0797 \sin 2,798t)] \quad (8.8.2)$$

8.9.

Exemplificação numérica da resolução do sistema de equações dada pela eq.(4.2.2.3)

Vamos exemplificar numericamente a solução do sistema de equações diferenciais para o caso de ruído multiplicativo dicotômico (caso III). Antes disso, como a solução para os valores médios para este caso também não foram extraídos a partir de uma expressão analítica (apenas mencionamos que a solução pode ser obtida através de uma transformada de Laplace), iremos exibir, para os parâmetros considerados neste exemplo, a forma funcional da solução para $\langle \varphi(t) \rangle$ considerando-se uma distribuição localizada para y . Os parâmetros são: $\gamma = 2$, $\omega_0 = 1,5$, $\sigma_m = 0,1$, $\lambda_m = 0,1$ e $D_a = 0,1$. A transformada de Laplace da eq. (4.2.1.7) toma a forma:

$$\Phi(s) = \frac{[s^2 + 4,2s + 2,66]y_0}{s^4 + 8,2s^3 + 21,55s^2 + 20,08s + 5,99} \quad (8.9.1)$$

Desta forma, a inversa é dada por:

$$\langle \varphi(t) \rangle = -0,1372e^{-3,8619t} - 0,2689e^{-2,8424t} +$$

$$+0,1627e^{-0,8665t} + 0,2434e^{-0,6292t} . \quad (8.9.2)$$

Considere o sistema da eq.(4.2.2.3). Iremos utilizar as condições iniciais $\langle \varphi^2(t=0) \rangle = 0$, $\langle y^2(t=0) \rangle = y_0^2 + V_{y0}$, onde V_{y0} representa a variância de y_0 . As demais condições iniciais serão nulas. Desta forma, teremos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \varphi y \rangle \\ \langle \dot{y}^2 \rangle = -8\langle y^2 \rangle - 8\langle \xi y^2 \rangle - 4,5\langle \varphi y \rangle + 0,2 \\ \langle \dot{\varphi} y \rangle = \langle y^2 \rangle - 4\langle \varphi y \rangle - 4\langle \xi \varphi y \rangle - 2,25\langle \varphi^2 \rangle \\ \langle \xi \dot{\varphi}^2 \rangle = 2\langle \xi \varphi y \rangle - 0,2\langle \xi \varphi^2 \rangle \\ \langle \xi \dot{y}^2 \rangle = -8,1\langle \xi y^2 \rangle - 0,08\langle y^2 \rangle - 4,5\langle \xi \varphi y \rangle \\ \langle \xi \dot{\varphi} y \rangle = \langle \xi y^2 \rangle - 4,1\langle \xi \varphi y \rangle - 0,04\langle \varphi y \rangle - 2,25\langle \xi \varphi^2 \rangle \end{cases} . \quad (8.9.3)$$

Utilizando o MAPLE, é possível obter a solução para as condições iniciais citadas acima. Será mostrado aqui apenas a solução para $\langle \varphi^2(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(t) \rangle = & 0,0112 + e^{-1,2252t} [0,0668(y_0^2 + V_{y0}) - 0,0109] + \\ & e^{-1,6662t} [0,1075(y_0^2 + V_{y0}) - 0,0129] - e^{-3,6464t} [0,2719(y_0^2 + V_{y0}) - 0,0149] + \\ & - e^{-4,4536t} [0,0749(y_0^2 + V_{y0}) - 0,0034] + \\ & + e^{-5,6385t} [0,1274(y_0^2 + V_{y0}) - 0,0045] + e^{-7,6699t} [0,0451(y_0^2 + V_{y0}) - 0,0012] \end{aligned} \quad (8.9.4)$$