



**Bruno Nogueira Cardoso**

## **Grafos Eulerianos na educação básica**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro  
Julho de 2017



**Bruno Nogueira Cardoso**

## **Grafos Eulerianos na educação básica**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Profa. Christine Sertã Costa**

Orientadora

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Profa. Patrícia Erthal de Moraes**

Colégio Pedro II

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 13 de julho de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e da orientadora.

### **Bruno Nogueira Cardoso**

Graduou-se em licenciatura em Matemática na Universidade Federal Fluminense (UFF). Atualmente é professor do ensino básico na Prefeitura da cidade do Rio de Janeiro e na Prefeitura da cidade de Nova Iguaçu.

#### Ficha Catalográfica

Cardoso, Bruno Nogueira

Grafos eulerianos na educação básica / Bruno Nogueira Cardoso; orientadora: Christine Sertã Costa. – 2017.

64 f.; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2017.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Grafos. 3. Grafos eulerianos. 4. Grafos na educação básica. 5. Ensino da matemática. I. Costa, Christine Sertã. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## **Agradecimentos**

À minha mãe, Sueli Nogueira, minha avó, Elza dos Santos Nogueira e meu avô, João Acelino Nogueira, pela educação, atenção e carinho com que me criaram

À minha orientadora, professora Christine Sertã, pela paciência e dedicação, pela disponibilidade de seu tempo durante todo o processo de produção deste trabalho.

A CAPES e à PUC-Rio, pela oportunidade de realização desse curso, e pelo auxílio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Aos professores que estiveram presentes durante essa caminhada.

Aos familiares e amigos que contribuíram, estimularam e me apoiaram durante toda a minha jornada acadêmica.

## Resumo

Cardoso, Bruno Nogueira; Costa, Christine Sertã (Orientadora). **Grafos Eulerianos na Educação Básica**. Rio de Janeiro, 2017. 64p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

O presente trabalho busca apresentar uma proposta de inclusão de tópicos elementares da teoria de Grafos, com destaque para os Grafos Eulerianos, na educação básica. Iniciamos com uma introdução a essa teoria destacando algumas definições importantes que fundamentam o trabalho além de concepções teóricas relevantes para tratar da questão específica dos Grafos Eulerianos. Posteriormente, algumas sugestões de atividades sobre o tema, que podem ser aplicadas em qualquer nível da educação básica desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, são apresentadas com o intuito de auxiliar e inspirar o professor desse segmento que esteja interessado em utilizar novas propostas na sua prática pedagógica. Assim, esse profissional pode se valer do presente trabalho como um recurso motivador para novas construções ou simplesmente adaptá-lo, alterá-lo e/ou utilizá-lo na realidade da sua sala de aula. Algumas das atividades propostas foram aplicadas com alunos do sétimo ano de uma escola pública do Rio de Janeiro e a metodologia e avaliação desta aplicação encontram-se também descritas no presente estudo. Desta forma, pretende-se promover uma reflexão sobre novas estratégias que incrementem o processo de ensino-aprendizagem da Matemática na busca de uma educação Matemática mais autônoma e mais significativa.

## Palavras-chave

Grafos; Grafos Eulerianos; Grafos na Educação Básica; Grafos no Ensino Fundamental.

## Abstract

Nogueira Cardoso, Bruno; Costa, Christine Sertã (Advisor). **Eulerian Graphs in basic education**. Rio de Janeiro, 2017. 64p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This paper seeks to show a proposal of inclusion of elementary topics of Graphs theory, with emphasis in Eulerian graphs, on basic school. We begin with an introduction to this theory highlighting some important definitions which underpin this paper beyond relevant theoretical conceptions to deal with the specific issue of Eulerian graphs. In addition, some suggestions of activities on the subject, which can be applied in any level of basic education, from Elementary to High School, are presented with the intention of help teachers interested in using new proposals on their pedagogical practice. So they can use this material as a motivating resource for new constructions or just adapt it, change it and/or use it in his classroom routine. Some of the proposed activities were applied with seventh year students from a public school of Rio de Janeiro and the methodology and evaluation of this application are also described on this present work. Therefore it is intended to promote a reflection about new strategies that increase the teaching-learning process of Mathematics in the searching for more autonomy and more meaningful mathematical education.

## Keywords

Graphs; Eulerian Graphs; Graphs in basic education; Graphs in the elementary school.

# Sumário

1. Introdução	12
2. Justificativas	14
3. Teoria dos Grafos	19
3.1. Alguns aspectos da teoria dos Grafos	19
3.2. Definições Básicas da Teoria dos Grafos	22
3.3. Grafos Eulerianos	34
3.3.1. O Teorema de Euler	34
3.3.2. Dois problemas clássicos relacionados a Grafos Eulerianos:	37
4. Atividades Propostas	42
4.1. Atividade 1 – Mapas e Grafos	42
4.2. Atividade 2 – Caminhos.	44
4.3. Atividade 3 - Desafio do Carteiro	46
4.4. Atividade 4 – Fuga da Prisão	47
5. Aplicações: metodologia e resultados.	50
5.1. Aplicação da atividade do carteiro	51
5.2. Atividade da Prisão	53
5.3. Resultados	56
6. Considerações Finais	58
7. Referências bibliográficas	60
Anexo I – Solução das Atividades Propostas	61

## Lista de Figuras

Figura 1: A cidade de Königsberg	20
Figura 2: Grafo que representa a cidade de Königsberg	20
Figura 3 : Árvore de Cayley associada a valência de cada vértice	21
Figura 4: Exemplo de Grafo simples.	23
Figura 5: Exemplo de multiGrafo com laço.	24
Figura 6: Exemplo de Grafo Regular – todos os vértices têm grau 3.	27
Figura 7: Exemplo de Grafo Completo de 5 vértices: $K_5$	28
Figura 8: Grafo $K$	29
Figura 9: Grafo $L$ e um ciclo destacado.	29
Figura 10: Grafo $H$	29
Figura 11: Grafo $G$ , subGrafo de $H$	30
Figura 12: Grafo $J$ , não subGrafo de $H$	30
Figura 13: Grafo $T$ : um Grafo simples	31
Figura 14: Grafo $T'$ , o complementar de $T$	31
Figura 15: Grafo $W$	32
Figura 16: Grafo $Z$	33
Figura 17: Grafo $P$ : Exemplo de Grafo não conexo.	33
Figura 18 : Grafo $Q$ : Exemplo de Grafo conexo.	34
Figura 19 : Grafo $A$ : euleriano, Grafo $B$ : semi-euleriano.	36
Figura 20: Desenho enviado a Euler em 9 de março de 1973.	37
Figura 21: Construindo um ciclo euleriano em um Grafo euleriano.	38
Figura 22: Uma aplicação do problema do Carteiro Chinês.	40
Figura 23: Mapa modelo da Atividade 1.	43
Figura 24: Grafos para a Atividade 2 - exercício 1	45
Figura 25 : Grafo para a atividade 2 – exercício 2.	45
Figura 26: Grafo para a atividade 2 – exercício 3.	45
Figura 27: Mapa do Vilarejo da atividade 3.	47
Figura 28: Mapa da Prisão – atividade 4.	49
Figura 29: Mapa detalhado da Prisão – atividade 4.	49
Figura 30: Caminho desenvolvido por um aluno, onde sobram duas pontes.	51



Figura 31: Solução proposta por um aluno.	52
Figura 32: Grafo associado ao mapa do vilarejo.	53
Figura 33: Alunos retiraram a Cella 3, tornando o Grafo Euleriano.	54
Figura 34: Solução encontrada por uma das duplas.	55
Figura 35: Grafo associado ao mapa da prisão.	55
Figura 36: Resposta do questionário de um aluno.	57

## **Lista de Tabelas**

Tabela 1: Grau dos Vértices do Grafo da Figura 4	24
Tabela 2: Grau dos Vértices do Grafo 5	25
Tabela 3: Matriz Adjacência	46

## **Lista de Gráficos**

Gráfico 1: Aceitação dos alunos as atividades	56
---	----

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.

**Freire, Paulo**

## Introdução

A Teoria dos Grafos é um ramo da Matemática relativamente antigo, muito associada à Topologia e à Álgebra. Porém, avanços relativamente recentes nessa área, dão a essa teoria destaques contemporâneos. Sua aplicação em diversos campos de estudo, como Economia, Biologia, Logística, Transportes, entre outros, além da sua utilização em tópicos da Matemática pura e aplicada, referendam sua importância e relevância nos dias atuais.

O presente trabalho busca propor uma reflexão sobre a inclusão desse tema no currículo da educação básica. Esse debate torna-se importante pois, apesar de toda a grandiosidade de estudos e aplicações dessa teoria a problemas de difícil solução, é possível desenvolver uma série de atividades simples, significativas e motivadoras para o alunado com essa base teórica contribuindo na sua formação em diversas áreas do conhecimento. A teoria dos Grafos favorece a organização do raciocínio lógico, a construção de estruturas visuais, a enumeração de casos, o desenvolvimento de diferentes estratégias de solução, a criação de relações, ou seja, permite que uma série de competências importantes sejam trabalhadas sem que muitos pré-requisitos sejam necessários.

No contexto de um cenário educacional que busca por mudanças e adaptações a uma nova realidade, é preciso encontrar alternativas para despertar o interesse dos alunos trazendo significância a partir de propostas que, de certa forma, possam ser contextualizadas ao cotidiano do discente. Frente a isso, sugerimos a presente proposta como mais uma alternativa de incorporação do lúdico na educação básica, através da criação de algumas atividades aqui apresentadas, que podem ser aplicadas em e/ou adaptadas para qualquer série da educação básica.

O tema particular escolhido, os Grafos Eulerianos, surgiu em 1736, através de um enigma que intrigava os moradores de Königsberg, cidade fundada em 1255 que foi capital e centro cultural e econômico da Prússia de meados do século XV a meados do século XX. O nome euleriano foi dado em

homenagem a Leonhard Euler que resolveu o enigma em questão. O enigma e sua solução são apresentados no capítulo 3 desse trabalho. Esse tópico foi o escolhido para dar fundamentação a proposta aqui apresentada justamente por ser um problema bem resolvido, bastante didático, fácil de ser assimilado e que possibilita construções lúdicas promovendo assim uma alternativa de inovação no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

O trabalho aqui descrito tem a seguinte organização: no próximo capítulo, mostramos os motivos que levaram a escolha da proposta e fazemos algumas reflexões sobre a necessidade de se pensar e agir na promoção de transformações do modelo educacional atual. No terceiro capítulo falamos sobre a Teoria dos Grafos, um breve histórico, alguns de seus aspectos básicos e resultados importantes sobre, especificamente, Grafos Eulerianos. O capítulo quatro propõe quatro atividades relacionadas ao tema, expostas como sugestões para que professores da educação básica possam escolher e adaptar aquelas que melhor se enquadrem à realidade das suas salas de aula. Temos o intuito aqui também de incentivar esses professores a similarmente construírem outras propostas por esses caminhos. O quinto capítulo descreve a aplicação de duas dessas atividades em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública e mostra os resultados dessa aplicação. Por fim, considerações finais sobre o trabalho são apresentadas.

## Justificativas

Um dos principais desafios encontrado pelos educadores atualmente, é a busca por temas e atividades que despertem a atenção dos discentes. Vivemos na era digital e a geração de jovens com quem trabalhamos se notabiliza pela praticidade em obter informações e pela dinâmica com que essas informações se atualizam. E, com tanta variedade de informações e estratégias para buscar o conhecimento, o currículo pedagógico e o modelo educacional necessitam cada vez mais de adaptações. Vários estudiosos sobre o tema destacam que precisamos adaptar, inovar e potencializar nossa prática pedagógica, para alcançar essa geração e defendem que nós professores passemos a exercer um papel cada vez maior de mediadores no processo ensino-aprendizagem e não mais de (apenas) transmissores do conhecimento. A questão de ordem agora é ajudar nossos alunos a filtrar todo esse conhecimento que eles têm acesso, refletir sobre esses saberes e transferi-los para situações diversas de modo que consigam não só compreender a realidade a sua volta, mas também sejam capazes de transformá-la num mundo melhor para todos.

Há uma exigência visível de mudança na identidade profissional e nas formas de trabalho dos professores. O tipo de trabalho convencional do professor está mudando em decorrência das transformações no mundo do trabalho, na tecnologia, nos meios de comunicação e informação, nos paradigmas do conhecimento, nas formas de exercício da cidadania, nos objetivos de formação geral que hoje incluem com mais força a sensibilidade, a criatividade, a solidariedade social, a qualidade de vida, o reconhecimento da diversidade cultural e das diferenças, a preservação do meio ambiente. Isso afeta os saberes pedagógicos e didáticos, os modos de formação, os métodos de ensino, as técnicas. [...] (LIBÂNEO, 2002, p. 34)

É nítido que o currículo escolar atual deve ser revisto e adaptado à realidade da nova geração de alunos e do novo mundo, mas sem abandonar conceitos importantes, aqueles que são fundamentais tanto no decorrer da vida acadêmica do aluno quanto na sua formação como cidadão. Pensando nesse aspecto de mudança curricular, nossa proposta é possibilitar experimentos sobre a inclusão de novos temas na educação básica que motivem a construção de estratégias para solucionar problemas significativos e propiciem o

desenvolvimento do raciocínio, subsidiando vários saberes disciplinares. A ideia aqui é a reflexão sobre a inclusão de conceitos básicos da Teoria dos Grafos no ensino básico. A teoria de Grafos é um tema pouco explorado e com alguns conteúdos de fácil entendimento e com facilidade de aplicação, pois os conceitos podem ser abordados de maneira bastante lúdica, através de desafios, jogos, labirintos, etc.

De uma forma geral o lúdico vem a influenciar no desenvolvimento da criança, é através do jogo que a criança aprende a agir, há um estímulo da curiosidade, a criança adquire iniciativa e demonstra autoconfiança, proporciona o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração. (VIGOTSKY, 1994, p. 81)

Pensando em inovar e motivar o aluno a aprender, acreditamos que a Teoria dos Grafos seja uma importante ferramenta, pois possibilita a construção de propostas pedagógicas interessantes e que podem relacionar vários saberes, promovendo a interdisciplinaridade tão almejada nos dias atuais. Além disso, permite enfoques sobre problemas reais do cotidiano do alunado – uma resposta ao constante questionamento sobre a aplicabilidade de determinados conceitos matemáticos, o famoso “*Pra que serve isso?*”. Essa teoria também permite, de forma simples, a implementação e compreensão de algoritmos matemáticos, dando contemporaneidade ao estudo. Alia-se a tudo isso, o fato de precisar apenas de conceitos prévios que podem ser facilmente ser apresentados.

Optamos por abordar o tema através da resolução de problemas, estratégia que usualmente desperta interesse e curiosidade no aluno e o ajuda a desconstruir a imagem apenas algébrica da Matemática, fazendo com que compreenda que a resolução de um problema de labirinto, por exemplo, pode também ser modelada através de conceitos matemáticos.

Em função de seus valores formadores do desenvolvimento de estratégias de pensamento e raciocínio, a Matemática é o idioma das ciências e tecnologias. Nesse sentido, aprender a resolver problemas matemáticos e a analisar como os especialistas e os não-especialistas resolvem esse tipo de tarefas pode contribuir para um aumento do conhecimento científico e tecnológico de maneira geral. A complexidade do mundo atual faz com que esse tipo de conhecimento seja uma ferramenta muito útil para analisar certas tarefas mais ou menos cotidianas como, por exemplo, pedir um empréstimo, analisar os resultados eleitorais, jogar na Loteria Esportiva ou tomar decisões no âmbito do consumo diário. (POZZO, ECHEVERRIA, 1998, p. 45).

Aprender a analisar uma estrutura gráfica, pensar no que ela representa, identificar as relações que a destaca também são competências importantes que podem ser trabalhadas nessa teoria e se aliam com as tendências atuais descritas por exemplo nos PCN's.

Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória. Embora nestes Parâmetros a Lógica não se constitua como bloco de conteúdo a ser abordado de forma sistemática no ensino fundamental, alguns de seus princípios podem ser tratados de forma integrada aos demais conteúdos, desde as séries iniciais. Tais elementos, construídos por meio de exemplos relativos a situações-problema, ao serem explicitados, podem ajudar a compreender melhor as próprias situações. (PCNs, [3, p. 34])

A Teoria dos Grafos possibilita a construção de estratégias simples para solução de alguns problemas que num primeiro olhar podem parecer complexos. A teoria por trás dos Grafos Eulerianos, especialmente, proporciona a apreensão de uma nova estrutura Matemática bem elaborada, bem fundamentada e possível de ser trabalhada na educação básica. Ela influencia positivamente na estruturação e organização do conhecimento através da construção de um modelo matemático, que, uma vez compreendido, pode ser aplicado em outras áreas da Matemática ou de outras disciplinas.

Dentro dos campos da Matemática abordados no ensino fundamental e vistos como primordiais no desenvolvimento intelectual do discente estão presentes a Aritmética, a Álgebra, a Lógica e a Geometria. Acreditamos ser possível avançar em alguns temas desses campos usando a Teoria dos Grafos. Muito ainda pode se criar introduzindo essa teoria na educação básica.

Outro ponto favorável é o uso de estratégias variadas para resolver um único problema, mostrando que uma mesma questão pode ter diferentes abordagens para sua resolução. Despertar no aluno um olhar crítico, para analisar as estratégias necessárias para resolver situações problemas, em qualquer disciplina é um dos principais desafios da arte de ensinar.

Um diferencial da Teoria dos Grafos, em relação a algumas outras inserções no currículo escolar, é que a aplicação desse conceito não necessita de estrutura diferenciada na escola, ou seja, é possível desenvolver um trabalho interessante sem o uso de materiais especiais, de laboratórios de informática ou



de softwares educacionais (cabe ressaltar que muitas escolas públicas ainda são deficitárias nesses quesitos). Qualquer professor, em qualquer espaço, pode aplicar e desenvolver as atividades com seus alunos. Uma aplicação fácil e democrática, que não requer necessariamente a utilização de recursos específicos. Não queremos aqui abrir mão da luta por esses espaços e recursos mas sabemos que umas das grandes dificuldades da prática de novas metodologias de ensino é a precariedade da maioria das escolas, onde falta estrutura, materiais de apoio, laboratórios.

Um outro desafio encontrado em inovar a prática pedagógica, é a resistência que alguns professores têm em se atualizar, em buscar novos métodos de ensino, em compreender que devemos sempre buscar aperfeiçoar nossa prática pedagógica. O processo de ensino-aprendizagem é dinâmico e deve estar sempre se atualizando. A inserção de conceitos novos no currículo e a exclusão de alguns que talvez não tenham mais tanta relevância na vida acadêmica do aluno, é um tema polêmico e que sempre gera grande discussão. Mas a necessidade de mudar é latente e, portanto, devemos buscar alternativas responsáveis para melhorar o ensino da Matemática e nos adaptar a essa nova realidade.

A reforma do currículo escolar passa primordialmente pelos docentes e estes, algumas vezes, reagem negativamente a mudança ou adaptações. Não aceitam que a prática pedagógica precisa estar sempre em movimento. O mundo contemporâneo vem sofrendo mudanças continuamente e nossa prática de ensino também deve se regenerar e progredir continuamente.

Os parâmetros curriculares nacionais são diretrizes que nós, enquanto professores da educação básica, somos orientados a seguir. Mas temos que fazer valer a nossa autonomia e inovar e adaptar novas práticas à nossa sala de aula que caminhem na direção da realidade da comunidade escolar. Portanto, mais que uma sugestão de alteração do currículo escolar, o presente trabalho é uma proposta de mudança de atitude dos docentes incentivando-os a buscar melhor qualificação e melhorias na prática docente fazendo cursos, conversando com os colegas, colocando sugestões de novas abordagens, criticando o próprio trabalho, ouvindo os alunos, tudo isso visando melhorar a qualidade do ensino do país.

Diante da necessidade de adaptações do currículo escolar, visto que a última alteração feita nos parâmetros curriculares da Matemática foi em 1998, concluímos que alguns conceitos da Teoria dos Grafos podem ser inseridos em qualquer série do ensino fundamental ou médio, sendo adaptado para cada caso. Como já mencionado, essa abordagem estimula o raciocínio lógico, confere autonomia ao aluno, permite contextualizações e enfoques interdisciplinares.

O presente trabalho então busca apresentar condições de trabalhar conceitos básicos da Teoria dos Grafos, com ênfase na questão dos Grafos Eulerianos, na educação básica. Pretende assim incentivar professores desse segmento a construir projetos neste caminho. Espera-se que esse trabalho seja mais uma ferramenta a contribuir para a melhoria do ensino da Matemática na Educação Básica.

## 3

### Teoria dos Grafos

Neste capítulo vamos abordar alguns aspectos básicos da Teoria dos Grafos, assim como um breve histórico dessa teoria, falando um pouco sobre alguns dos matemáticos que trabalharam no seu desenvolvimento além de algumas definições importantes, suas aplicações e o tema principal desse trabalho que são os Grafos Eulerianos.

#### 3.1

##### Alguns aspectos da Teoria dos Grafos

A teoria dos Grafos é um tema de destaque recente na Matemática em comparações com questões da Matemática do contínuo. Sua primeira abordagem remonta a um problema solucionado pelo grande matemático **Euler**<sup>1</sup> em 1736, quando conheceu a cidade de Königsberg (cidade localizada na Prússia, atualmente Kaliningrad, localizada na Rússia). **Euler** foi informado sobre um desafio que estava sendo amplamente discutido pelos intelectuais da cidade, um problema aparentemente simples, mas ainda sem solução.

A cidade era cortada pelo rio Pregel e havia duas ilhas ligadas entre si por uma ponte. Essas ilhas também eram conectadas com o continente por outras seis pontes, conforme a Figura 1.

---

<sup>1</sup> Leonhard Paul Euler matemático e físico suíço que passou a maior parte de sua vida na Alemanha e na Rússia, com grandes contribuições na física e na Matemática.

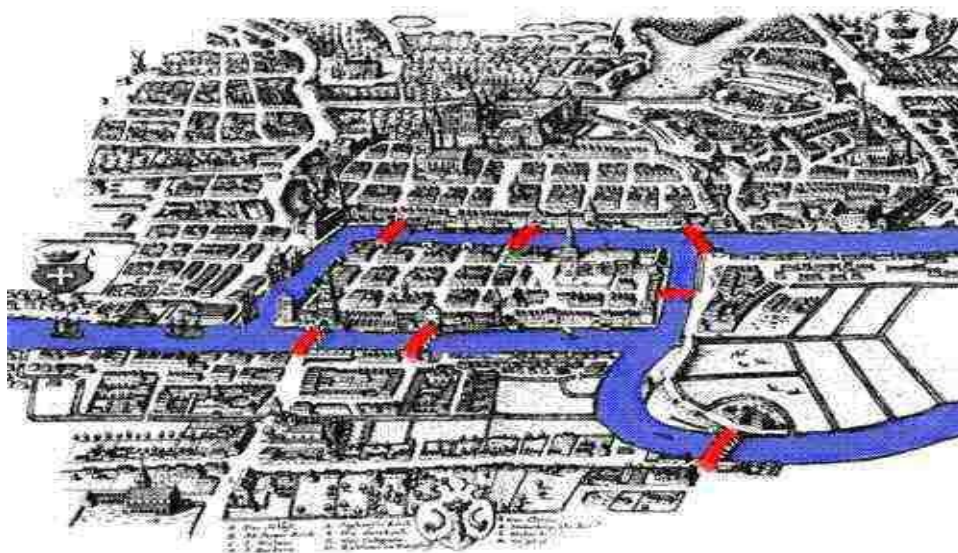


Figura 1: A cidade de Königsberg.

O problema proposto e debatido na cidade era a possibilidade de se encontrar um trajeto que permitisse partir de um ponto qualquer de terra, passar uma única vez em cada uma das sete pontes, e retornar ao ponto de partida. Tal façanha havia se tornado uma lenda popular na região. Em 1736, porém, Euler provou que tal trajeto não era possível. Ele usou uma representação gráfica bem simples para desenhar a situação - associou as pontes a linhas e as regiões de terra a pontos, criando possivelmente o primeiro Grafo da história.

Assim, este problema pôde ser modelado (e resolvido) utilizando-se da Teoria dos Grafos. Uma representação gráfica da região pode ser expressa pelo que chamamos de representação gráfica de um Grafo e está expressa na Figura 2.

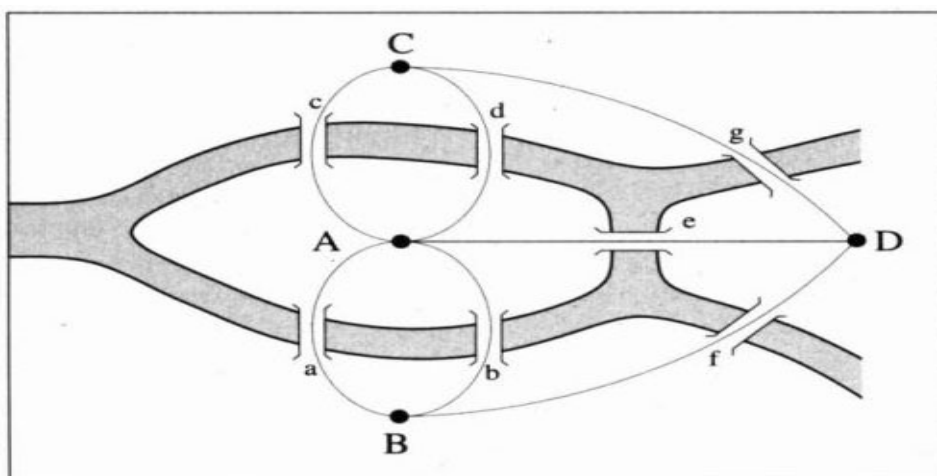


Figura 2: Grafo que representa a cidade de Königsberg.

Euler percebeu que um trajeto com as restrições colocadas no desafio só seria possível se em cada ponto incidisse um número par de linhas, pois, diante das restrições, é sempre preciso uma linha para "entrar" e outra para "sair".

Devemos ter em mente que um Grafo é um conceito abstrato, o modelo apresentado na Figura 2 é uma forma de representar um Grafo. Mas, intuitivamente, podemos pensar em Grafos como uma estrutura composta por dois conjuntos, um que denominamos conjunto de vértices (usualmente representados por pontos num plano) e o outro composto pela relação entre esses vértices (usualmente representados por linhas que ligam esses pontos), denominado de conjunto de arestas. Quando dois vértices tem uma ligação, temos uma aresta unindo esses dois vértices.

No entanto, após o problema de **Königsberg** ser solucionado, a Teoria dos Grafos não se desenvolveu mais por um bom tempo, ficando este problema, também conhecido como Problema das 7 Pontes, como um caso isolado dessa teoria ou visto como um desafio matemático solucionado.

Apenas em 1847, um físico chamado Kirchhoff usou novamente alguns modelos de Grafos para demonstrar resultados sobre circuitos elétricos. Esse estudo levou a criação da Teoria das Árvores, uma classe de Grafos conexos e sem ciclos.

Dez anos depois, **Cayley**, um matemático britânico, desenvolveu um modelo matemático para determinar o número de diferentes isômeros de compostos de carbono e hidrogênio com cadeias abertas que também podem ser representados por Grafos.

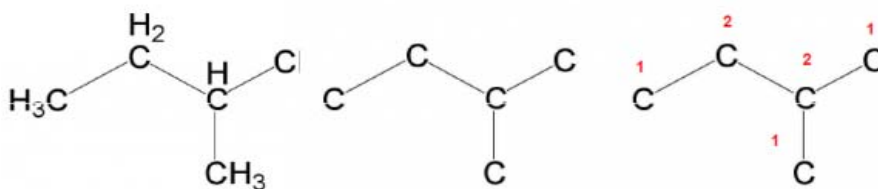


Figura 3: Árvore de Cayley associada a valência de cada vértice.

O desenvolvimento da teoria dos Grafos veio ocorrer de forma mais significativa a partir de 1950, com o aumento do número de pesquisas relacionadas à otimização, que usavam modelos de Grafos para buscar soluções para problemas em projetos. Esse desenvolvimento só foi viável devido ao uso do computador.

O desenvolvimento da teoria dos Grafos veio se dar finalmente, sob o impulso das aplicações a problemas de otimização organizacional, dentro do conjunto de técnicas que forma hoje a pesquisa operacional, já na segunda metade do século XX. Evidentemente, tal desenvolvimento não se teria dado sem a invenção do computador, sem o qual a imensa maioria das aplicações de Grafos seria totalmente impossível. (BOAVENTURA, 2006, p. 2).

Atualmente a teoria dos Grafos vem crescendo em aplicações nos mais variados campos, como traçado de rotas, projetos de processadores eletrônicos, estudos relacionados à estrutura de DNA, entre outras.

### 3.2

#### Definições Básicas da Teoria dos Grafos

Já vimos que a definição de um Grafo requer a existência de dois conjuntos: o de vértices e o de arestas onde,

**Vértice** – é a unidade fundamental do Grafo.

**Aresta** – representa a existência de ligação entre um par de vértices (iguais ou distintos). Arestas que ligam um vértice a ele mesmo são chamadas de laços.

Pode-se então definir um Grafo como uma estrutura Matemática composta por esses dois conjuntos que iremos notar por V e A. Assim,  $G(V,A)$  é um Grafo formado pelos conjuntos (V,A), onde:

V é o conjunto dos n vértices de G,  $V = V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  e

A é o conjunto das m arestas de G,  $A = A(G) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ .

Para efeito de simplificação, se tivermos dois vértices, u e v relacionados por uma aresta chamaremos essa aresta de (u,v),  $\{u,v\}$  ou simplesmente uv.

Dizemos que dois vértices de um Grafo são adjacentes se existir uma aresta que incide sobre ambos.

**Grafo não orientado** – são os Grafos cujas arestas não têm direção, ou seja, podemos partir do vértice **a** para o vértice **b** e do vértice **b** para o vértice **a**. Caso contrário, os Grafos são chamados de **Grafos orientados** e suas arestas (usualmente chamadas de arcos) indicadas por setas na representação gráfica do mesmo.

**Grafos Orientados** – Um Grafo é dito orientado quando o sentido das ligações entre os vértices é importante. Nesse caso, as arestas possuem um sentido marcado por uma seta e recebe o nome de arco.

**Grafo Simples** – são Grafos que não possuem laços e nem arestas paralelas (também chamadas de multiarestas), ou seja, cada vértice é ligado a outro vértice apenas por, no máximo, uma aresta.

Para representar graficamente um Grafo, usamos pontos do plano para representar os vértices e linhas para representar as arestas.

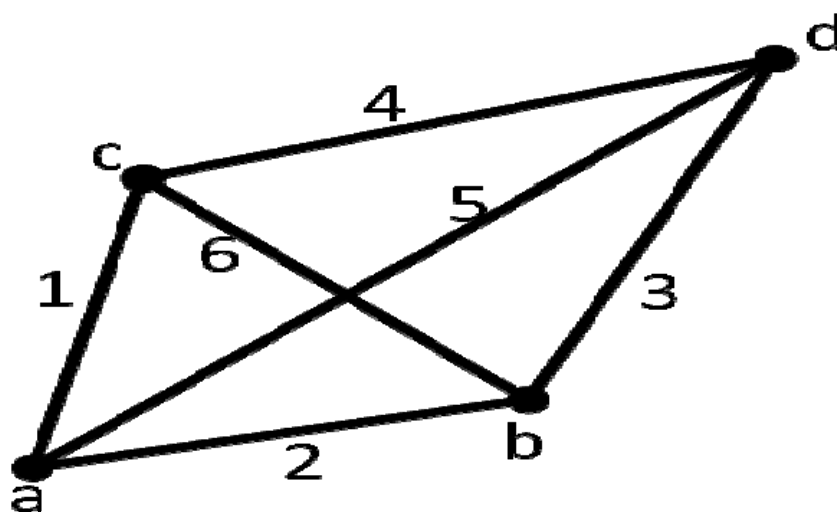


Figura 4: Exemplo de Grafo simples.

Na Figura 4 observamos o Grafo composto pelos vértices  $V=\{a,b,c,d\}$  e as arestas  $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ .

**Arestas paralelas** – são arestas que incidem sobre o mesmo vértice.

**Multigrafo** – Grafo que possui arestas paralelas – pelo menos dois vértices ligados por mais de uma aresta.

Na Figura 5, tem-se  $V=\{1,2,3,4\}$  e  $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ . Observe que a aresta  $a_3$  só incide sobre o vértice 2. A aresta  $a_3$  é um laço. Além disso,

podemos observar que as arestas  $a_1$  e  $a_2$  incidem sobre os mesmos vértices, são chamadas de arestas paralelas.

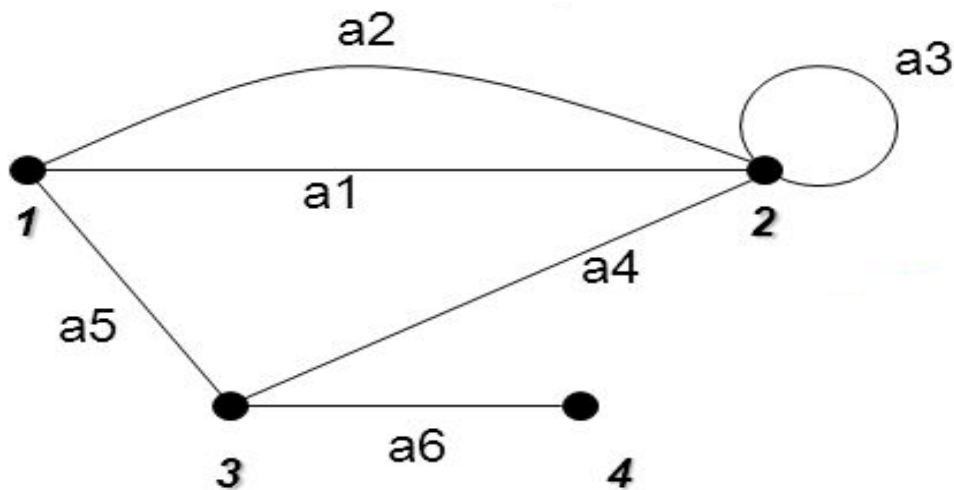


Figura 5: Exemplo de multigrafo com laço.

**Ordem de um Grafo** – é o número de vértices que ele possui, e **dimensão do Grafo** é seu número de arestas. Cada vértice tem um **grau**.

**Grau** – é o número de arestas que incidem em um determinado vértice. Um vértice terá grau zero, quando nenhuma aresta incidir sobre ele. Um laço contribui com 2 unidades no grau do vértice que incide.

No Grafo da Figura 4:

A ordem do Grafo é 4, pois temos 4 vértices.

A dimensão do Grafo é 6, pois temos 6 arestas.

E quanto aos graus de cada vértice, tem-se:

Tabela 1: Grau dos Vértices do Grafo da Figura 4.

VÉRTICE	GRAU
A	3
B	3
C	3
D	1

No Grafo da Figura 5:

A ordem do Grafo é 4, pois temos 4 vértices.

A dimensão do Grafo é 6, pois temos 6 arestas.



E quanto aos graus de cada vértice, tem-se:

Tabela 2: Grau dos Vértices do Grafo da Figura 5.

VÉRTICE	GRAU
1	3
2	5
3	3
4	1

**Propriedade 1:** A soma dos graus de todos os vértices de um Grafo é sempre um número par.

Demonstração: Vamos fazer essa demonstração por indução sobre o número de arestas. Seja  $G$  um Grafo não orientado e com todos os vértices com grau zero,  $m=0$ . Logo, a soma dos graus de todos os vértices é zero (par).

Agora vamos supor que um Grafo  $G_m$  tem  $m$  arestas e a soma do grau de todos os vértices é um número par. Seja essa soma igual a  $2p$ .

Queremos mostrar que em um Grafo  $G_{m+1}$ , com  $m+1$  arestas, a soma dos graus de todos os vértices também é um número par. O Grafo  $G_{m+1}$  tem 1 aresta a mais do que o Grafo  $G_m$ . Observe que quando acrescentamos uma aresta ao Grafo  $G_m$ , essa aresta obrigatoriamente contribui com 2 unidades na soma dos graus de todos os vértices do Grafo (uma unidade em cada vértice que incide caso não seja um laço ou duas unidades no vértice que incide, caso seja um laço). Como, pela hipótese de indução, a soma dos graus de todos os vértices de  $G_m$  é  $2p$ , temos que a soma dos graus de todos os vértices de  $G_{m+1}$  fica igual a  $2p+2$ , que também é um número par. Assim mostramos que a propriedade também é válida para  $m+1$ , concluindo a prova por indução.

**Propriedade 2:** A soma dos graus de todos os vértices de um Grafo é igual ao dobro do número de arestas do Grafo.

Demonstração: Iremos realizar essa demonstração por indução sobre o número de vértices e sobre o número de arestas do Grafo.

Queremos mostrar que em um Grafo  $G$  a soma dos graus de todos os vértices, que vamos denotar por  $\sum(v)$ , é igual a  $2m$ , onde  $m$  é o número de arestas de  $G$ .

Seja  $G$  um Grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Nosso caso inicial é um Grafo com  $n=1$  vértice e  $m=0$  arestas. Logo a propriedade é verdadeira, pois a soma dos graus de todos os vértices desse Grafo é zero, que é igual ao dobro do número de arestas que também é zero.

Vamos supor, por hipótese de indução, que a propriedade é válida para um Grafo  $G$ , com um número  $n$  de vértices e  $m$  de arestas, onde  $\sum(v) = 2m$ .

Agora, seja  $G'$  um Grafo obtido a partir de  $G$  por uma das operações que se seguem:

I - Adição de 1 vértice: O vértice adicionado, tem grau 0 pois não está conectado a nenhum outro vértice. Logo a quantidade de arestas não é alterada, assim  $\sum(v+1) = 2m$ , ou seja, a soma dos graus de todos os vértices de  $G'$  é igual ao dobro do número de arestas de  $G'$ .

II - Adição de 1 aresta: A aresta adicionada, conecta dois vértices distintos de  $G'$  ou é um laço. No primeiro caso há o acréscimo de 1 unidade no grau de cada um dos dois vértices conectados por esta aresta, e no segundo caso são acrescidas 2 unidades no grau do vértice que contém o laço. Nos dois casos o número de arestas aumenta 1 unidade e a soma dos graus dos vértices aumenta de duas unidades. Assim,  $\sum(v) + 2 = 2m + 2 = 2(m+1)$ , ou seja, a soma dos graus de todos os vértices de  $G'$  é igual ao dobro do número de arestas de  $G'$ .

Logo a propriedade é verdadeira para qualquer Grafo  $G$ .

**Propriedade 3:** Um Grafo tem sempre um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração: Seja  $G$  um Grafo com  $n$  vértices de grau ímpar e  $m$  vértices de grau par, onde  $n$  e  $m$  são números inteiros não negativos. Queremos mostrar que  $n$  é par.

Se  $n=0$ ,  $G$  tem um número par de vértices de grau ímpar.

Seja  $n \geq 1$ .

Sejam:

$P$  a soma dos graus de todos os vértices de grau par.

$I$  a soma dos graus de todos os vértices de grau ímpar.

$T$  a soma de todos os graus de  $G$ .

Sejam  $p_1, p_2, \dots, p_m$  os vértices de grau par e  $i_1, i_2, \dots, i_n$  os vértices de grau ímpar. Temos que:

$$P = \text{grau}(p_1) + \text{grau}(p_2) + \dots + \text{grau}(p_m)$$

$$I = \text{grau}(i_1) + \text{grau}(i_2) + \dots + \text{grau}(i_n)$$

$$T = \text{grau}(p_1) + \text{grau}(p_2) + \dots + \text{grau}(p_m) + \text{grau}(i_1) + \text{grau}(i_2) + \dots + \text{grau}(i_n) = P + I, \text{ que pela propriedade 1, deve ser um número par.}$$

Temos que  $P$  é par, pois é uma soma de números pares.

E temos que,  $T = P + I$ , logo,  $I = T - P$ . Como  $P$  é par (soma de números pares) e  $T$  também é par (Propriedade 1), concluímos que  $I$  é a diferença de dois inteiros pares, logo  $I$  é um número par.

Assim,  $I = \text{grau}(i_1) + \text{grau}(i_2) + \dots + \text{grau}(i_n)$ , é um número par, e é a soma de  $n$  números inteiros ímpares, logo a quantidade de parcelas dessa soma tem que ser um número par. Concluímos que  $n$  é um número par.

A teoria dos Grafos inclui ainda diversas definições e classificações, citaremos algumas a seguir.

**Grafo Regular** – Grafo onde todos os vértices possuem o mesmo grau.

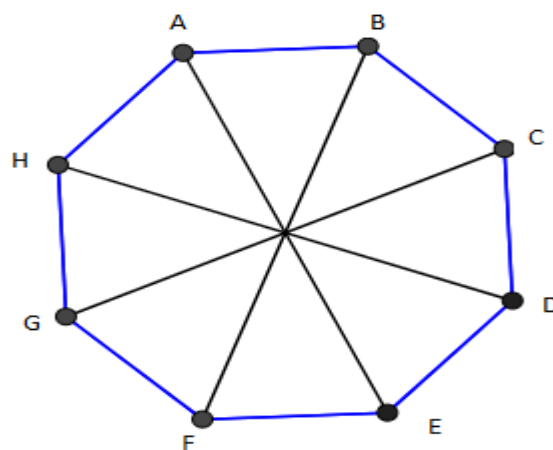


Figura 6: Exemplo de Grafo Regular – todos os vértices têm grau 3.

**Grafo Completo** – Grafo simples onde todo par de vértice é unido por uma aresta, ou seja é um Grafo sem laços e sem multiarestas, onde  $n$  é o número de vértices do Grafo. Usualmente é notado por  $K_n$ .

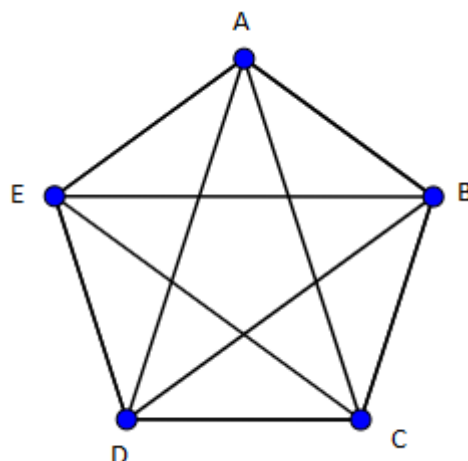


Figura 7: Exemplo de Grafo Completo de 5 vértices:  $K_5$

Ainda dentro dessa teoria, definições de percurso, caminho, ciclo, trilha, merecem destaque. Cabe ressaltar que, algumas vezes essas definições têm alterações de autor para autor. Aqui, vamos considerar:

**Percurso** – é um conjunto de vértices sequencialmente adjacentes (vértices adjacentes são aqueles unidos por uma aresta), o primeiro vértice é adjacente ao segundo, o segundo é adjacente ao terceiro, e assim sucessivamente até o último vértice. O comprimento de um percurso é o número de arestas que possui. Na Figura 8 (A-B-E-C-E-D) é um percurso de comprimento 5.

**Trilha** – é um percurso onde todos os vértices são distintos, ou seja, quando iniciamos o percurso só passamos por cada vértice da trilha uma única vez, exceção feita ao último vértice, pois caso o percurso se encerre no mesmo vértice que iniciamos, teremos uma trilha fechada. No Grafo K representado na Figura 8 temos que (A-B-C-D) é uma trilha de comprimento 3 e (A-B-C-D-A) é uma trilha fechada de comprimento 4.

**Trilha** – é um percurso onde todas as arestas são distintas. No Grafo K (A-B-C-E-D-A-E) é um caminho de comprimento 6. Se o vértice inicial for igual ao final, chamamos de caminho fechado ou **ciclo**. No Grafo K, (A-B-C-D-A) é um ciclo de comprimento 4.

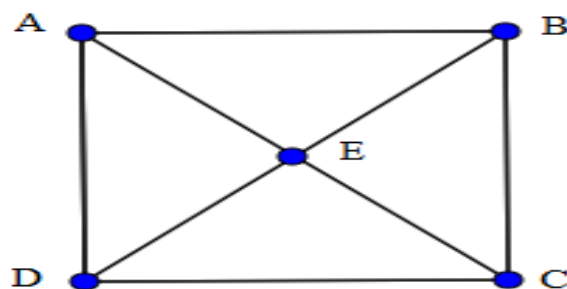


Figura 8: Grafo K.

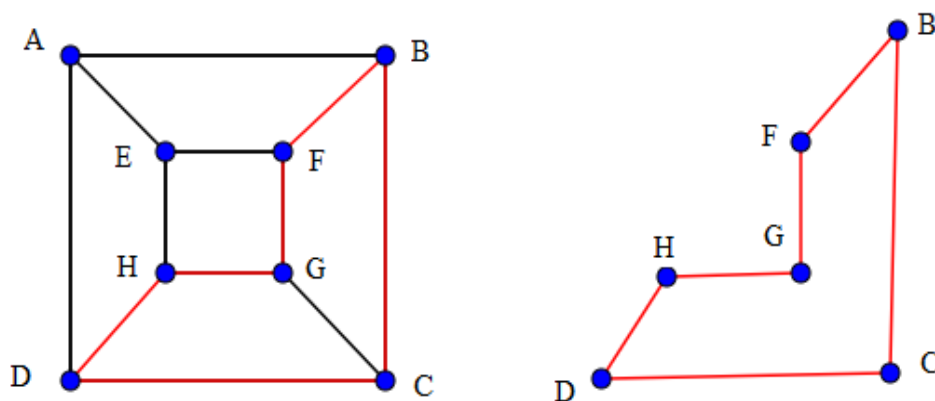


Figura 9: Grafo L e um ciclo destacado.

Na Figura 9 está destacado o ciclo (B-C-D-H-G-F-B) pertencente ao Grafo L. Esta Figura representa o que chamamos de subGrafo de L, assim definido:

**Subgrafo** – Sejam os Grafos  $G = (V, A)$  e  $H = (V', A')$  de modo que  $V'$  e  $A'$  sejam subconjuntos respectivamente de  $V$  e  $A$ , ou seja,  $V' \subseteq V$  e  $A' \subseteq A$ . Nestas condições diz-se que  $H$  é subgrafo de  $G$ .

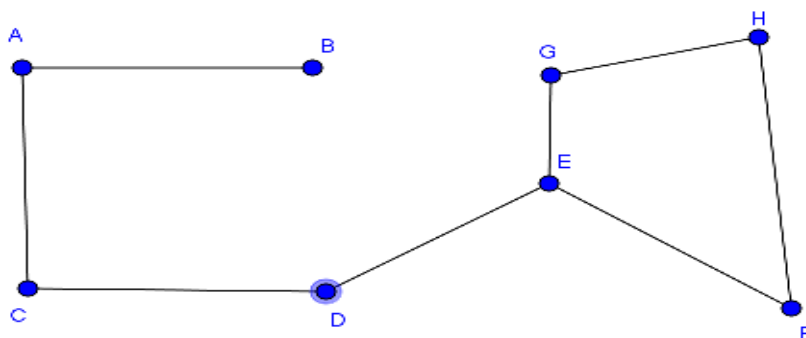


Figura 10: Grafo H.

Observando o Grafo H da Figura 10, podemos notar que o Grafo G da Figura 11 é subgrafo de H, pois todos os vértices e arestas de G pertencem a H.

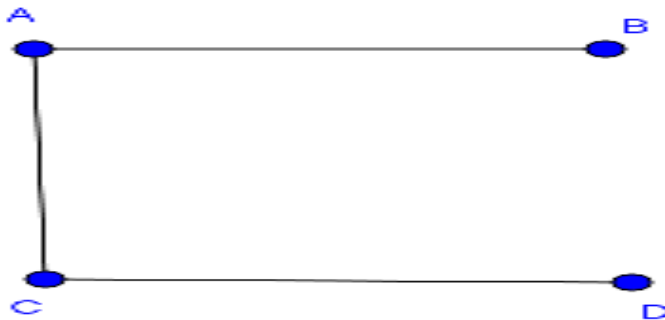


Figura 11: Grafo G, subGrafo de H

Já o Grafo J da Figura 12, não é um subgrafo de H, pois a aresta DG não pertence a H.

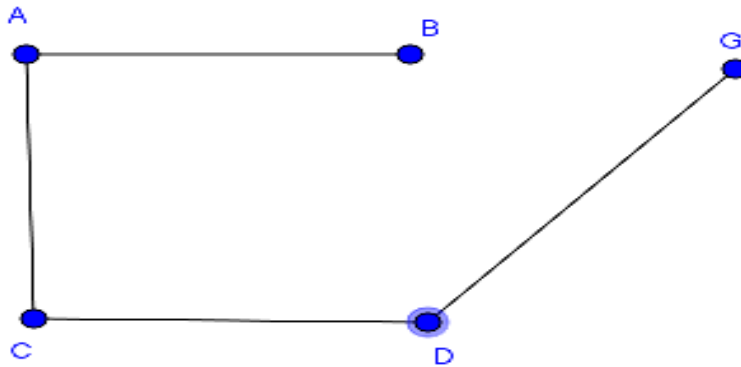


Figura 12: Grafo J, não subgrafo de H.

**Grafo Complementar de n vértices** – Seja  $G(V,A)$  um Grafo simples de  $n$  vértices. O Grafo complementar de  $G$ ,  $G'(V',A')$  é tal que  $V'=V$  e  $A'$  contém as arestas de  $K_n$  que não existem em  $G$ . Assim  $G'$  também é um Grafo simples.

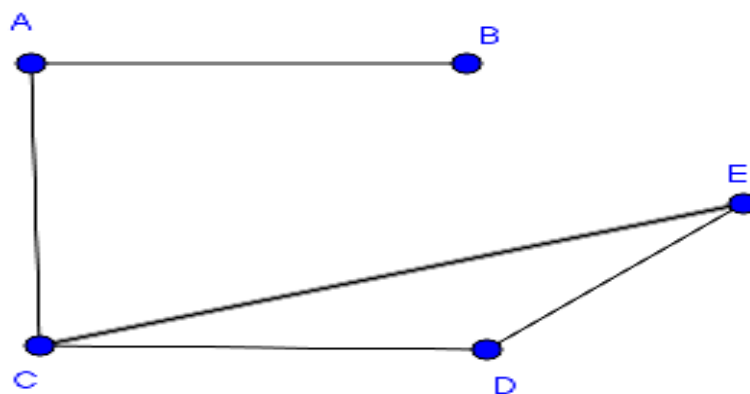


Figura 13: Grafo T: um Grafo simples.

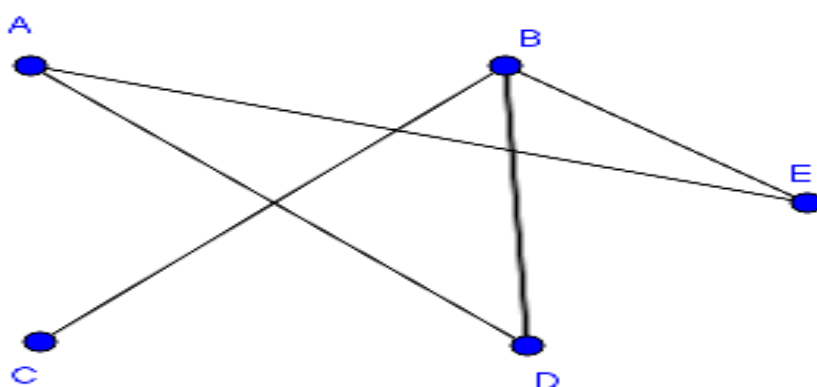


Figura 14: Grafo T', o complementar de T.

Cabe agora ressaltar que além de podermos definir um Grafo  $G$  explicitando seus conjuntos  $V$  e  $A$  ou apresentado sua representação gráfica, ele também fica completamente determinado se usamos uma representação matricial. Há diversas formas de associar um Grafo a uma matriz e essa associação busca facilitar a realizações de cálculos estruturais. As mais comuns são a matriz de adjacência e a matriz de incidência, a seguir definidas.

**Matriz de adjacência** – Seja  $G$  um Grafo de ordem  $n$  (número de vértices). A matriz de adjacência do Grafo  $G$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , na qual associamos a cada linha e a cada coluna um vértice. São atribuídos valores nulos quando não há ligações entre os vértices, e um valor diferente de zero, quando há ligações, ou seja, quando os vértices são adjacentes.

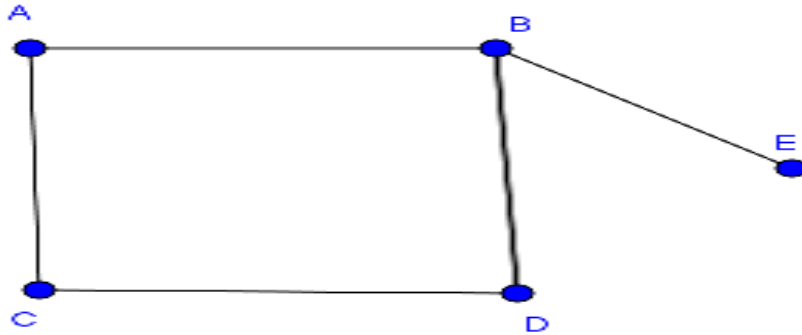


Figura 15: Grafo W.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma é a matriz de adjacência do Grafo W (simples) representado na Figura 15.

Pode-se observar que a diagonal da matriz de adjacência só terá valores diferentes de 0 se o Grafo tiver laços. Define-se a matriz de adjacência de um Grafo simples G como:

$$M = (m_{ij})_{i,j \in V(G)} \quad \text{onde } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in A(G) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde  $A(G)$  representa o conjunto das arestas de G e  $i...j$  representa vértices de G.

**Matriz de Incidência** – Seja Z um Grafo de ordem n e dimensão m, ou seja, n vértices e m arestas. A matriz de incidência relativa a Z é uma matriz n x m, onde cada linha representa um vértice e cada coluna representa uma aresta. Da mesma forma que a matriz de adjacência, quando uma aresta incidir sobre um vértice colocaremos a quantidade de arestas que incidem nesse vértice, se a aresta não incide no vértice, colocamos o zero.



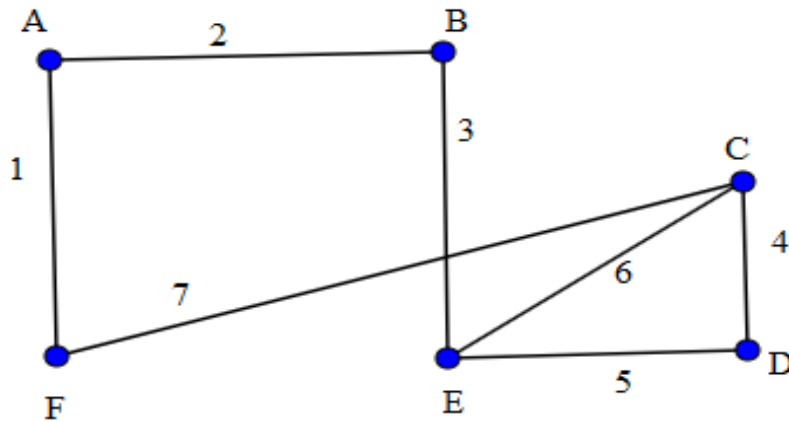


Figura 16: Grafo Z.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz de incidência do Grafo Z é  $M' =$

Um outro conceito importante dentro da teoria dos Grafos é o de conexidade.

**Conexidade de um Grafo** – Diz-se que um Grafo  $G(V,A)$  é conexo se existir um caminho ligando qualquer par de vértices de  $V$ . Se existir algum vértice que não pode ser ligado a outro por um caminho, então diz-se que o Grafo é desconexo ou não conexo.

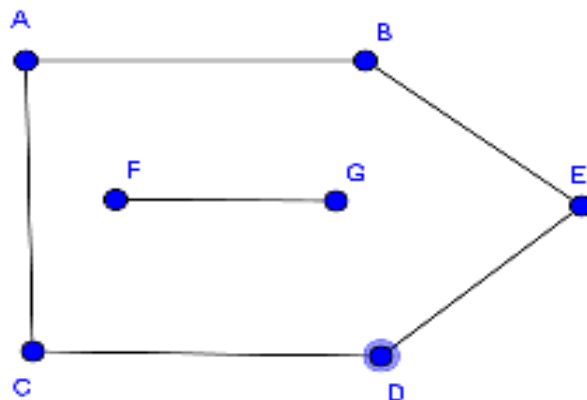


Figura 17: Grafo P: Exemplo de Grafo não conexo.

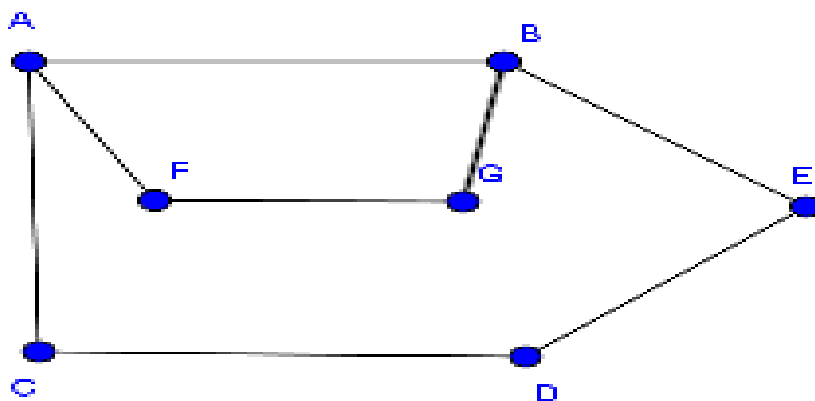


Figura 18: Grafo Q: Exemplo de Grafo conexo.

O Grafo P é não conexo, pois, por exemplo, não existe em P nenhum caminho entre os vértices A e F. Já o Grafo Q é conexo, pois existe um caminho entre qualquer par de vértices de Q.

### 3.3

#### Grafos Eulerianos

Essa seção se propõe a apresentar questões relativas aos Grafos Eulerianos, tema central desse trabalho. Como já foi dito, escolhemos esse tema pois, além de ser de fácil entendimento, apresenta diversas aplicações práticas como no problema das pontes de Königsberg mostrado na motivação da proposta, em traçado de rotas e circuitos elétricos, entre outras aplicações. Como\* as atividades são desenvolvidas para alunos da educação básica, iremos apresentar apenas as demonstrações e aplicações mais significativas sobre o tema para este público alvo.

#### 3.3.1

##### O Teorema de Euler

Vamos agora abordar o teorema principal desse trabalho, que é o teorema de Euler para Grafos conexos. Formulado e resolvido a partir do problema das pontes de Königsberg, esse teorema trata de uma classe especiais de Grafos e mostra como construir ou identificar esses Grafos.

Vale antes, destacar a diferença entre um Grafo dito euleriano e um chamado de semi-euleriano. O primeiro possui um ciclo (caminho fechado) de comprimento igual ao número de arestas do Grafo, ou seja, um ciclo que passa por todas as arestas do Grafo uma única vez, começando e terminando o percurso em um mesmo vértice. Grafos Eulerianos então são os que admitem o que chamamos de ciclo euleriano. Já o segundo possui um caminho aberto, ou seja, é possível percorrer todas as arestas do Grafo, passando uma única vez por cada uma delas, mas os vértices final e inicial deste percurso, são distintos. Grafos semi-Eulerianos são os que admitem caminhos Eulerianos.

**Teorema:** Seja  $G = (V, A)$  um Grafo conexo, diz-se que  $G$  é euleriano, se e somente se, os graus de todos os vértices de  $G$  forem pares.

Demonstração (Baseada em Boaventura (2006)):

( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  um Grafo euleriano, então  $G$  possui um ciclo euleriano. Por cada vértice desse ciclo, existe uma aresta que chega ao vértice e outra aresta que sai dele, pois não podemos repetir arestas, e como toda aresta pertence ao caminho, isso implica que o número de arestas em cada vértice é par, pois uma vez que chegamos nesse vértice por uma aresta, iremos sair por uma aresta diferente.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  é um Grafo onde todos os vértices têm grau par. Seja  $v_i$  um vértice qualquer de  $G$ . Vamos tentar, a partir de  $v_i$ , construir um caminho que não passe duas vezes pela mesma aresta. Como todos os vértices têm grau par, será sempre possível entrar e sair de um vértice, por arestas diferentes, percorrendo todas as arestas possíveis, retornaremos ao vértice  $v_i$ , se esse caminho, vamos chamá-lo de  $C$ , percorreu todas as arestas de  $G$  então a demonstração está concluída. Caso contrário, vamos retirar de  $G$  todas as arestas pertencentes a  $C$ , obtendo um novo Grafo  $G'$ , no qual todos os vértices continuam tendo grau par e obrigatoriamente, um desses vértices pertence a  $C$ , pois o Grafo  $G$  é conexo, logo sempre é possível construir um caminho que ligue todos os vértices, seja  $v_j$  o vértice comum ao caminho  $C$  e ao novo Grafo  $G'$ .

Partindo desse vértice vamos construir um novo caminho chamado  $C'$ , passando por todas as arestas e retornando a  $v_j$ . Unindo esses dois caminhos  $C$  e  $C'$  a partir do vértice comum, formamos um caminho único. Caso ainda

sobrem algumas arestas que não tenham sido visitadas, basta repetir o processo até que todas as arestas tenham sido percorridas. Assim o ciclo obtido é chamado euleriano, e o Grafo é, portanto, euleriano.

**Proposição 4:** Um Grafo conexo é dito semi-euleriano se, e somente se, possuir exatamente um par de vértices de grau ímpar.

Demonstração:

( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  um Grafo de dimensão  $m$  semi-euleriano, ou seja,  $G$  é um caminho aberto de comprimento  $m$  que começa em um vértice  $v_i$  e termina em um vértice  $v_j$  sem repetir arestas pois é um caminho. Como o caminho é aberto, temos que os vértices  $v_i$  e  $v_j$  são distintos. Logo, tanto  $v_j$  quanto  $v_i$  têm grau ímpar, pois a trilha não termina onde ela começou.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um Grafo conexo com um par de vértices de grau ímpar e sejam  $v_i$  e  $v_j$  esses vértices com grau ímpar. Se acrescentarmos uma aresta ligando  $v_i$  e  $v_j$  teremos todos os vértices com grau par, e pelo teorema de **Euler** teremos um ciclo euleriano de comprimento  $m+1$  em  $G$  e um caminho aberto de comprimento  $m$  que começa em  $v_i$  e termina em  $v_j$ .

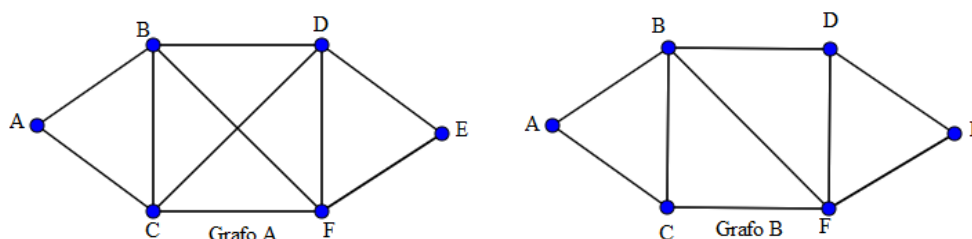


Figura 19: Grafo A é euleriano e o Grafo B é semi-euleriano.

Podemos observar que o Grafo A da Figura 19, tem todos os vértices de grau par, portanto é um Grafo euleriano. Já o Grafo B tem exatamente dois vértices com grau ímpar (C e D), logo é possível passar por todas as suas arestas uma única vez, começando por C (ou D) e terminando em D (ou C). O Grafo B é, portanto, um Grafo semi-euleriano. Observe que é possível redesenhar esses dois Grafos sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma aresta – esta é uma característica de Grafos Eulerianos e semi-eulerianos.

Grafo A: ciclo euleriano: (A-B-D-E-F-C-B-F-D-C-A).

Grafo B: caminho euleriano: (C-F-E-D-B-A-C-B-F-D).

### 3.3.2

#### Dois problemas clássicos relacionados a Grafos Eulerianos:

Alguns problemas clássicos envolvendo Grafos Eulerianos serviram de inspiração para o desenvolvimento desse trabalho. Vamos citar dois deles.

Começando com o problema resolvido por Euler na cidade de Königsberg, o famoso problema das sete pontes. Não se sabe exatamente como **Euler** tomou conhecimento do problema, mas algumas cartas, que se encontram na Academia de Ciência de São Petersburgo na Rússia, mostram que Euler se correspondia com o presidente da câmara municipal de uma cidade próxima a Königsberg e que atuava como um intermediário do professor de Matemática Heinrich Kuhn.

O Senhor prestaria a mim e ao nosso amigo Kuhn um serviço valioso, colocando-nos em dívida para consigo, erudito Senhor, se nos enviasse a solução, que conhece bem, do problema das sete pontes de Königsberg, juntamente com a prova. Seria um exemplo extraordinário do cálculo de posição (Calculi Situ), digno da sua grande genialidade. Acrescentei um desenho das ditas pontes... (HOPKINS, 2004, p. 201)

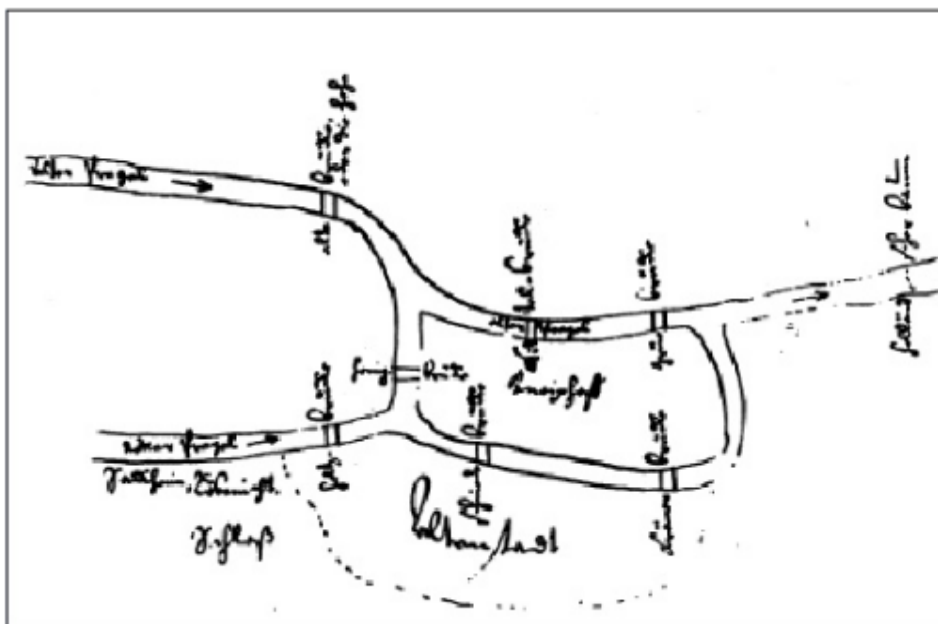


Figura 20: Desenho enviado a Euler em 9 de março de 1736.

Ainda no ano de 1736, Euler publicou um artigo com a solução do problema (Teorema de Euler). Observe que na Figura 2 todos os vértices do Grafo que modela a região têm grau ímpar, logo não é possível traçar um caminho que passe uma única vez por cada uma das sete pontes (arestas do Grafo).

Um aspecto importante desse teorema é que ele possibilita a construção de um algoritmo para identificar um ciclo euleriano em um Grafo euleriano. Considere por exemplo o Grafo ilustrado na Figura 21<sup>2</sup>.

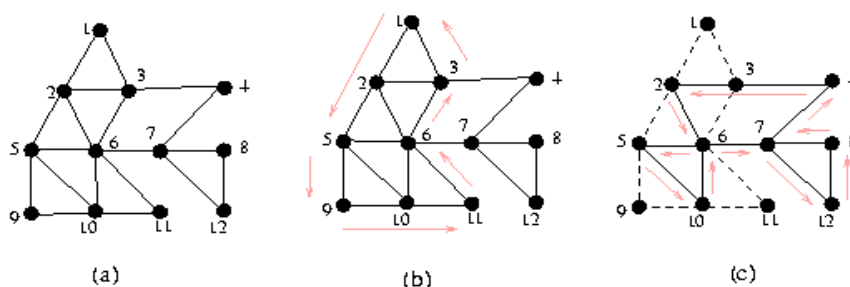


Figura 21: Construindo um ciclo euleriano em um Grafo euleriano.

Supondo que começamos pelo vértice 1, e escolhemos aleatoriamente uma aresta nunca visitada a cada vértice visitado, até voltar ao vértice 1 sem poder sair mais. A Figura 21b mostra um ciclo obtido, que consiste na sequência (1, 2, 5, 9, 10, 11, 6, 3, 1). Como sobram arestas não percorridas, devemos recomençar a partir de um vértice desse ciclo. Supondo que o vértice 6 foi escolhido, podemos obter, como ilustrado na Figura 21c, o ciclo (6, 7, 12, 8, 7, 4, 3, 2, 6, 5, 10, 6). Combinando esse ciclo com o que já tínhamos, obtemos um novo ciclo (1, 2, 5, 9, 10, 11, 6, 7, 12, 8, 7, 4, 3, 2, 6, 5, 10, 6, 3, 1). Como esse ciclo cobre o Grafo inteiro, não é preciso recomençar o processo: já temos o nosso ciclo euleriano.

Esse algoritmo é conhecido como o algoritmo de Hierholzer<sup>3</sup>. Suponhamos que um caminho de um vértice  $v_1$  até  $v_k$  é representado por uma

<sup>2</sup> Tanto a Figura 21 quanto a descrição do algoritmo encontram-se em [http://www.professeurs.polymtl.ca/michel.gagnon/Disciplinas/Bac/Grafos/EulerHam/euler\\_ham.html](http://www.professeurs.polymtl.ca/michel.gagnon/Disciplinas/Bac/Grafos/EulerHam/euler_ham.html).

<sup>3</sup> Carl Hierholzer, matemático alemão (1840-1871), aparentemente explicou a prova do teorema de Euler, antes de sua morte prematura, a um colega que então organizou sua publicação póstuma que apareceu em 1873.

lista  $[v_1, a_1, \dots, a_{k-1}, v_k]$ , que alterna vértices e arestas. Eis uma descrição do algoritmo de Hierholzer (supondo que já sabemos que o Grafo é euleriano):

**Função Hierholzer** ( $G(V, A)$ ): *Grafo*

$G_0' := G \setminus \{G_0' = (V_0', A_0')\}$

$v_0 :=$  um vértice de  $G'$

$C := [v_0]$  {Inicialmente, o caminho contém só  $v_0$ }

**Enquanto**  $A_0' \neq \emptyset$

$v_i :=$  um vértice de  $C$  tal que  $d(v_i) > 0$  em  $G_{i-1}'$

$C_i' :=$  Ciclo em  $G_{i-1}'$  que contém  $v_i$

$G_i' = (V_i', A_i')$

$G_i' := G_{i-1}' - \{a \mid a \text{ são as aresta contidas em } C_i'\}$

Em  $C$ , substituir o vértice  $v_i$  pelo caminho  $C_i'$

**Retornar**  $C$

Outro problema bastante conhecido na literatura é o Problema do Carteiro Chinês. Em 1962, o matemático chinês, nascido em Shangai, Kwan Mei-Ko, criou um problema parecido com o das pontes de Königsberg, inspirado no trabalho dos carteiros da cidade onde ele morava e os trajetos que eles percorriam para entregar as cartas. O problema consistia em definir um trajeto que passasse em todas as ruas da região (e, assim, sendo possível entregar as cartas em todas as casas), fazendo o “menor percurso possível”. Esse problema envolve o que chamamos de Grafos valorados. Para esses Grafos, associamos a cada aresta um número real usualmente chamado de “peso” da aresta, que pode ter diversos significados como por exemplo a distância entre dois vértices ligados por essa aresta ou o tempo gasto para percorrer a referida aresta.

Entendemos por menor percurso possível entre dois vértices, ao percurso cuja soma dos pesos de todas as suas arestas é a menor dentre todos os percursos que existem no Grafo entre os dois vértices considerados. Ora, se o Grafo for euleriano, o Problema do Carteiro Chinês está resolvido, o ciclo do carteiro é um ciclo euleriano e o (menor) percurso é a soma de todos os pesos de todas as arestas do Grafo. O que fazer caso o Grafo não seja euleriano? Nesse caso, o carteiro terá que passar em alguma(s) aresta(s) mais de uma vez, como se estivéssemos “eulerianizando” o Grafo. O objetivo então é escolher essas arestas de modo a minimizar o peso total do percurso.

O problema foi assim enunciado: “Um carteiro tem que cobrir o seu local de trabalho, saindo e retornando ao posto dos correios. Encontre a menor distância do percurso para o carteiro”. Ou seja, devemos apresentar o caminho mais curto considerando cada rua como uma aresta e cada cruzamento de ruas como um vértice e os pesos associados a cada aresta. Vamos supor que a região a ser coberta pelo carteiro seja a descrita na Figura abaixo (os números associados a cada aresta são os respectivos pesos considerados):

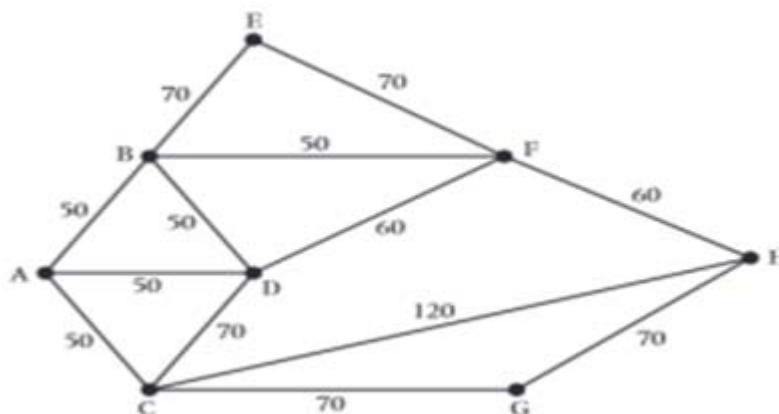


Figura 22: Uma aplicação do problema do Carteiro Chinês.

A Figura 22 representa um Grafo com 8 vértices (rotulados de A até H) e as arestas entre eles estão numeradas de acordo com os seus pesos (que no caso representam comprimentos). Observamos que o Grafo é semi-euleriano, pois os únicos vértices que tem grau ímpar são A e H, logo para percorrer um caminho euleriano devemos partir ou de A ou de H (e vamos finalizar o caminho em H ou A). Como o carteiro precisa sair e voltar ao mesmo vértice (posto dos correios), precisamos “eulerianizar” esse Grafo, ou seja, tornar todos os seus vértices de grau par e, para isso, precisamos “dobrar” o menor percurso do vértice A até o H (lembre-se que queremos minimizar a soma dos pesos do percurso realizado pelo carteiro).

O problema passou a ser então encontrar a menor rota possível, que ligue A até H e encaixar esse trajeto no percurso de retorno (ou ida) do carteiro. Uma menor rota possível entre A e H é  $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow H$ , com um comprimento de 160m (obtida por inspeção). Cabe ressaltar que existem algoritmos para encontrar o “menor” caminho possível de um vértice a todos os demais de um



Grafo (como o algoritmo de Dijkstra<sup>4</sup> por exemplo) que não são foco do presente estudo. Neste caso, apresentamos o menor caminho por inspeção (o que não seria possível realizar em Grafos muito grandes).

Devemos então encontrar uma rota que contenha esse trajeto, partindo de um dos vértices com grau ímpar (suponha o vértice H), percorrendo todas as outras arestas e chegando ao outro vértice de grau ímpar (vértice A), percorrendo assim um caminho euleriano. Para retornar ao ponto de partida usamos a rota  $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow H$ . Nesse caso, o peso do ciclo do carteiro é o peso de todas as arestas do Grafo acrescido dos pesos das arestas (A,B), (B,F), (F,H).

Destacamos que o problema vai se tornando cada vez mais difícil de ser tratado se o Grafo apresentado tiver 4, 6, 8, ...,  $2k$  vértices de grau ímpar. Neste caso, as possibilidades, que precisam ser analisadas para as escolhas dos “melhores caminhos” crescem significativamente, e intervenções computacionais tornam-se imprescindíveis.

O problema do carteiro chinês tem aplicações práticas e necessárias em diversas áreas, como desenvolvimento de trajetos otimizados para coletas de lixo e limpeza de ruas, entrega de cartas, otimização de sistemas de redes, entre outras aplicações.

---

<sup>4</sup> Edsger Wybe Dijkstra cientista da computação, matemático e físico holandês, teve grande importância no desenvolvimento da programação estruturada.

## 4

### Atividades Propostas

Esta seção apresenta sugestões de 4 aplicações possíveis de serem trabalhadas com alunos da educação básica. A proposta é que os professores possam analisá-las e adaptá-las às suas realidades. Duas delas foram aplicadas em duas turmas do fundamental II, e os resultados dessa experimentação serão apresentados no próximo capítulo. Uma possível solução para cada proposta encontra-se no ANEXO I.

#### 4.1

##### Atividade 1 – Mapas e Grafos

A primeira atividade proposta é a mais simples, e também pode ser aplicada em qualquer série do ensino básico, busca familiarizar o aluno com as noções básicas de Grafos, as definições de arestas e vértices e notações. Pretende-se que o aluno consiga associar um mapa a um Grafo e também verificar se o Grafo em questão é euleriano, admite caminho euleriano ou não possui nenhuma dessas características.

Seria interessante que o professor usasse um mapa de uma região que traga algum significado para sua turma - onde localiza-se a escola ou de alguma região bem conhecida pelos seus alunos. No mapa escolhido, solicitaria aos alunos que localizassem pontos de referências como igrejas, lojas, hospitais, museus, cinemas, restaurantes, entre outros. Um exemplo encontra-se na Figura a seguir que retrata a região de Nova Iguaçu, próxima ao bairro onde se localiza uma escola. O vértice A marca o local onde fica a escola, o vértice B é a padaria, C o mercado, D é o ponto de ônibus próximo a escola, E é a igreja, F a lanchonete, G uma lan-house, H uma loja de material de construção e I o hortifruti.

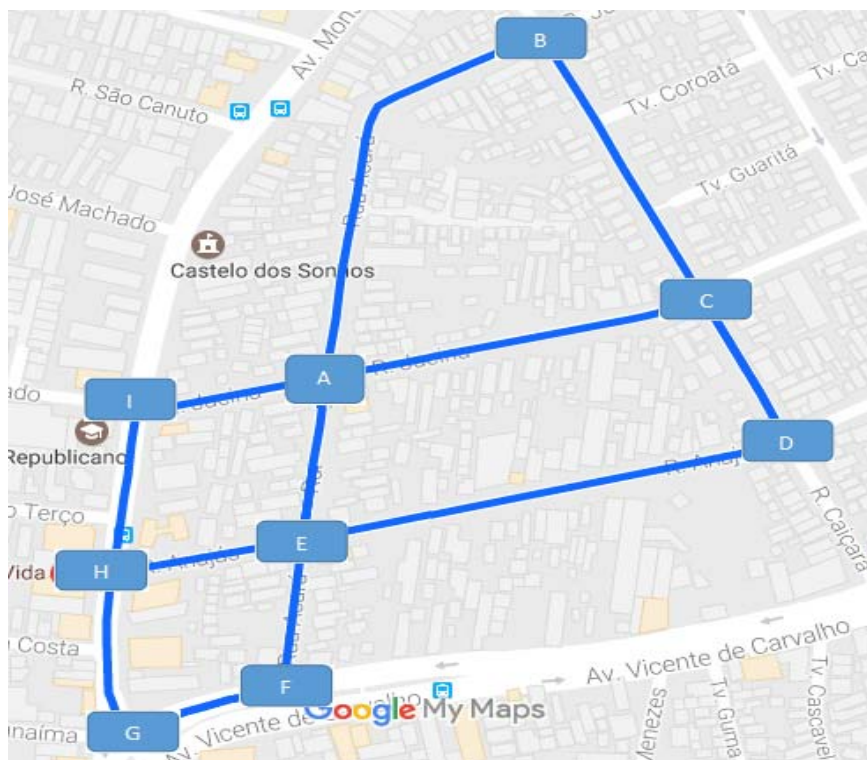


Figura 23: Mapa modelo da Atividade 1.

Feito isso, algumas questões podem ser propostas, como por exemplo:

- (1) Faça um modelo de Grafo representando cada local como um vértice (ponto) e cada rua como uma aresta (linha).
- (2) Conte o total de pontos (vértices) da sua representação (Grafo).
- (3) Quantas ruas (arestas) tem a sua representação (Grafo)?
- (4) Quantas ruas passam em cada local destacado?
- (5) Qual o grau de cada vértice?
- (6) Esse Grafo é regular?
- (7) O Grafo é euleriano? Se sim, apresente um ciclo euleriano.
- (8) O Grafo é semi-euleriano? Se sim, apresente um caminho euleriano.
- (9) Considerando que todas as arestas tenham o mesmo peso, 1, por exemplo, como poderia ser resolvido o problema do Carteiro?

A atividade desperta o interesse do aluno, pois transmite o conceito de Grafos aplicado a sua realidade, ao seu bairro, com um problema simples, que pode ser aplicado no seu cotidiano, como achar um menor trajeto para ir de casa para a escola, por exemplo.

Seria interessante também, marcar outros vértices, de modo que o Grafo agora não seja mais semi-euleriano e, por exemplo, torne-se euleriano.

**Pré-requisitos necessários** – Conceitos básicos da Teoria de Grafos

**Público-alvo** – Turmas do sexto ano do ensino fundamental até o terceiro ano do ensino médio.

## 4.2

### Atividade 2 – Caminhos.

Essa atividade seria uma aplicação direta de alguns princípios básicos da teoria dos Grafos, como encontrar o menor caminho, encontrar um caminho euleriano, encontrar o grau de cada vértice, construir as matrizes de adjacência e incidência e os Grafos complementares.

1 – Para cada um dos Grafos apresentados na Figura 24, faça:

- (a) Rotule os vértices dos Grafos a seguir associando a cada vértice uma letra do alfabeto a partir da letra A.
- (b) Todos os Grafos apresentados são simples? Por que?
- (c) Todos os Grafos apresentados são conexos? Por que?
- (d) Decida se são eulerianos, semi-eulerianos ou se não são nem eulerianos nem semi-eulerianos. No caso de serem eulerianos ou semi-eulerianos, apresente um ciclo ou caminho.
- (e) Construa as matrizes de adjacência e incidência do Grafo A.
- (f) O Grafo B é regular? Por quê?
- (g) Desenhe o complementar do Grafo A.
- (h) Considerando que, no Grafo D, todas as arestas têm peso 1, resolva o problema do carteiro apresentando o ciclo que o carteiro deve percorrer supondo que o posto dos correios está no vértice que você rotulou como vértice A.
- (i) Agora desenhe você um Grafo não regular, não simples e não conexo.

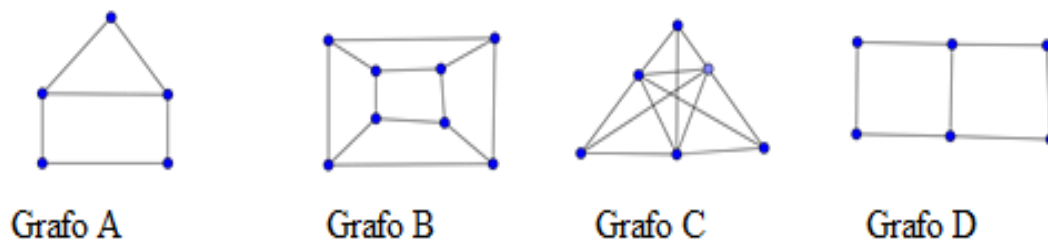


Figura 24: Grafos para a Atividade 2 – exercício 1.

2 – Resolva o Problema do Carteiro para o Grafo a seguir, explicitando o caminho que o carteiro deve percorrer e seu “custo total.

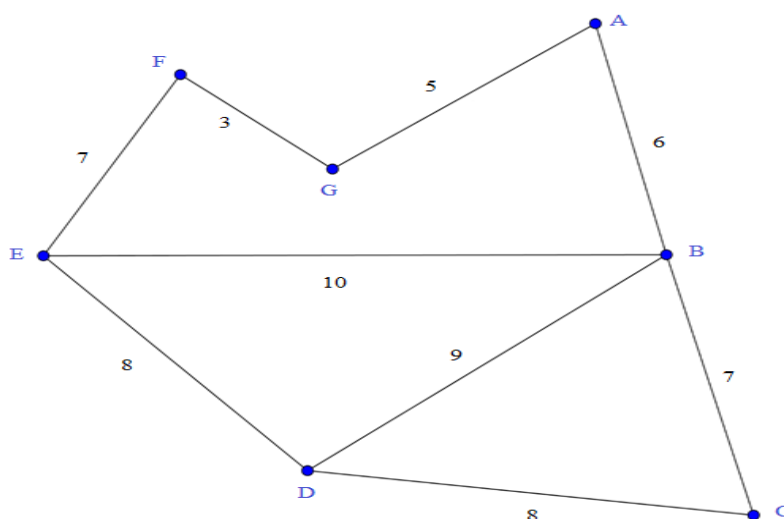


Figura 25: Grafo para a atividade 2 – exercício 2.

3 – Observe o Grafo abaixo e responda:

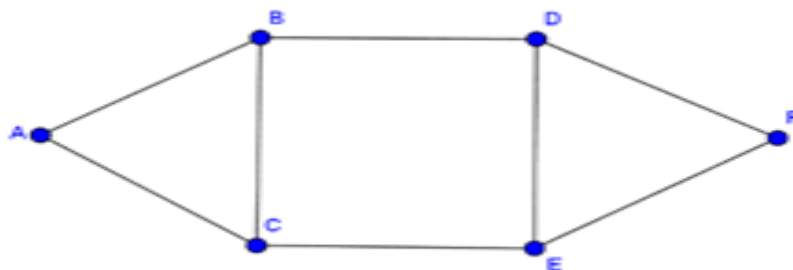


Figura 26: Grafo para a atividade 2 – exercício 3.

- a) Consegue desenhá-lo sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma aresta?
- b) Esse Grafo é euleriano? Justifique.
- c) Ele possui um caminho euleriano? Justifique.
- d) Complete a Tabela abaixo colocando 1 quando os vértices estão ligados por uma aresta e 0, caso contrário (ou seja, construa a matriz de adjacência desse Grafo).

Tabela 3: Matriz de Adjacência – atividade 2 – exercício 3.

Vértices	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

**Pré-requisitos necessários** – Conceitos básicos da Teoria de Grafos

**Público-alvo** – Turmas do sexto ano do ensino fundamental até o terceiro ano do ensino médio.

### 4.3

#### Atividade 3 - Desafio do Carteiro

O carteiro de um pequeno vilarejo está com um problema para entregar as cartas dos moradores. O vilarejo, que fica às margens de um rio, só tem nove casas. A configuração do vilarejo está expressa abaixo:

O carteiro, se possível, deve passar uma única vez por cada uma das 8 pontes e por cada uma das 4 ruas do vilarejo.

- 1 – Escolha uma das casas como ponto de partida para o carteiro;

2 – A partir dessa casa tente passar em todas as outras casas, mas você precisa passar por todas as pontes e ruas e somente uma vez por cada uma delas.

3 – Agora responda, foi possível realizar o trajeto descrito na questão 2?

4 – Se sua resposta anterior foi não, o que você alteraria no desenho para que isso se tornasse possível? Se pudesse retirar alguma(s) rua(s) e/ou ponte(s) do desenho, mantendo todas as casas, qual(is) você retiraria para tornar possível o desafio? Por onde você começaria? Onde terminaria?

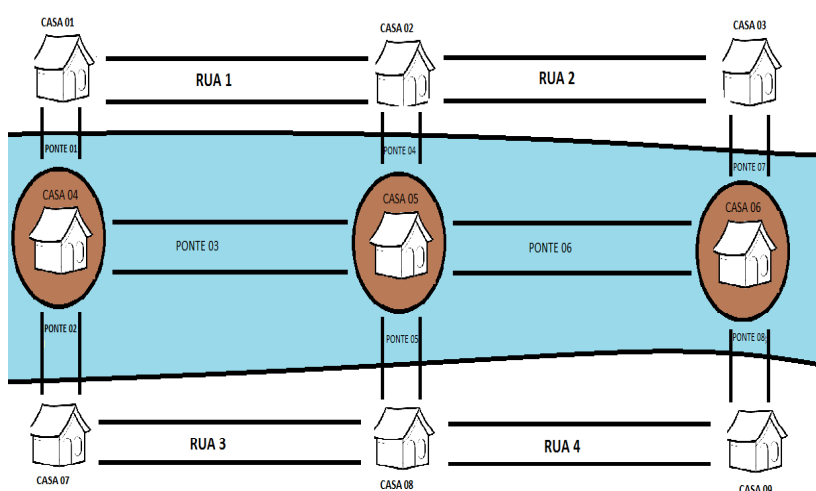


Figura 27: Mapa do Vilarejo da atividade 3.

**Pré-requisitos necessários** – Não necessita de pré-requisitos.

**Público-alvo** – Turmas do sexto ano do ensino fundamental até o terceiro ano do ensino médio.

#### 4.4

#### Atividade 4 – Fuga da Prisão <sup>5</sup>

Um prisioneiro está tentando fugir de uma prisão cujos mapas (geral e detalhado) estão expressos nas Figuras abaixo. Essa prisão contempla sete celas, um refeitório, uma sala de força e uma sala de comando.

<sup>5</sup> Baseado em Matemática discreta no ensino médio - Um trabalho com Grafos Eulerianos (COSTA, C.S., 2013)

O prisioneiro espera contar com a ajuda de um dos guardas para que a fuga tenha sucesso. O guarda preparou a fuga e passou as seguintes instruções ao prisioneiro:

1 – Para sair da prisão você terá que passar em todas as salas, por todas as celas e pelo refeitório. Cada um desses espaços tem uma chave dentro, e você precisará de todas essas 10 chaves para fugir.

2 – A saída está numa porta dentro da cela 1, que só abre com as 10 chaves.

3 – Você nunca deve sair de uma sala pela mesma porta que você entrou, caso contrário, o alarme irá disparar.

4 – Você também precisa passar, em todas as portas do presídio. Em cada uma delas existe um botão no canto superior esquerdo que você deve acionar. Novamente, caso isso não seja feito, o alarme dispara (lembre-se que a saída está dentro da cela 1 mas ela não conta como uma das portas, assim, para efeito da fuga, considere que a cela 1 tem duas portas. A saída você só vai usar ao final do processo).

Questionamentos:

- O guarda realmente ajudou o preso, ou seja, ele consegue realizar todos os comandos para conseguir a fuga com sucesso? Justifique.
- Se o guarda colocasse uma chave a menos, ou seja, se o prisioneiro não precisasse entrar em um desses espaços, ele conseguiria fugir? Que espaço(s) seria(m) esse(s)? Lembre-se que quando ele não precisa entrar em um espaço também não precisa passar por nenhuma das portas que esse espaço possui.
- No mapa original, sem fazer nenhuma alteração, se o preso estivesse no refeitório, e a saída não necessariamente estivesse na cela 1, onde deveria estar a saída para que a fuga tivesse sucesso?





Figura 28: Mapa da Prisão – atividade 4.

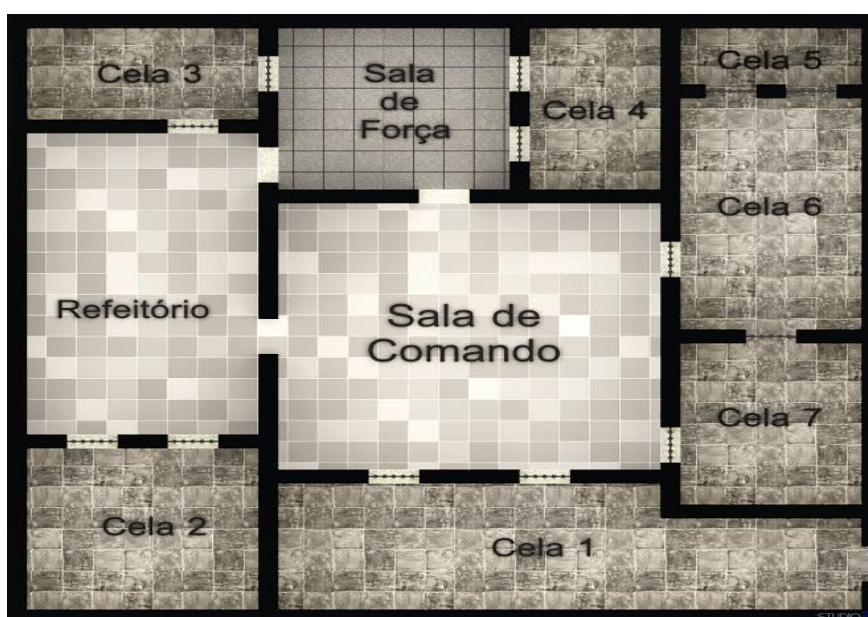


Figura 29: Mapa detalhado da prisão – atividade 4.

**Pré-requisitos necessários** – Não necessita de pré-requisitos.

**Público-alvo** – Turmas do sexto ano do ensino fundamental até o terceiro ano do ensino médio.

## Aplicações: metodologia e resultados

Essa seção apresenta a metodologia utilizada na aplicação de duas atividades, do Carteiro e da Prisão e os resultados alcançados. Essas aplicações se deram em turmas do sétimo ano do Ensino Fundamental da rede municipal de Nova Iguaçu, na escola Municipal Franklin Bolívar Fernandes. A faixa etária dos alunos varia de 12 a 16 anos e as atividades foram aplicadas nas duas turmas da escola, cada uma com 30 alunos. 52 alunos realizaram as atividades. O perfil do público da escola é composto na maioria por moradores do bairro, o qual não possui boa infraestrutura, e a maioria das famílias têm uma renda familiar baixa.

A primeira atividade proposta foi o desafio do Carteiro (atividade 3). A segunda atividade foi a fuga da Prisão (atividade 4). Essas atividades foram escolhidas por serem as mais contextualizadas, interessantes para o público e desafiadoras.

### Metodologia:

As atividades foram planejadas para serem aplicadas em 6 tempos de aula, com duração de 50 minutos cada. Nos quatro primeiros tempos (2 para cada atividade), aplicamos as atividades e nos dois últimos tempos, falamos sobre a teoria dos Grafos e suas aplicações.

A estratégia utilizada para a aplicação das duas atividades escolhidas foi a de não abordar anteriormente nenhuma teoria a respeito de Grafos. Buscamos apenas observar e/ou mediar as estratégias utilizadas pelos alunos para obter respostas às questões propostas pelos desafios. Acreditamos que dessa forma, conseguimos despertar o interesse do aluno e motivá-lo a procurar uma solução para um problema aparentemente simples, mas que, inclusive, pode não ter solução. Só depois das aulas reservadas para as tentativas de solução e discussões é que apresentamos a teoria discutida conjuntamente com as turmas. Posteriormente, voltamos aos problemas propostos, para mostrar a aplicabilidade da nova teoria como ferramenta que poderia auxiliar na construção de respostas aos questionamentos feitos em ambas as atividades.

A seguir, a descrição das aplicações de cada uma dessas atividades:

## 5.1

### Aplicação da atividade do carteiro

A atividade foi aplicada individualmente, e cada aluno teve liberdade para escolher o ponto de partida do carteiro. Foram distribuídas folhas com rascunho para os alunos tentarem os caminhos possíveis. Após algum tempo, alguns alunos relataram que sempre ficavam faltando passar por duas pontes, começaram a perguntar qual seria a solução correta – eles gostam de soluções imediatas. Insistimos na busca e depois de mais algumas tentativas, a maioria dos alunos, das duas turmas nas quais a atividade foi feita, relatavam que “sobravam” (ou seja, não conseguiam passar) nas pontes 3 e 6 ou nas pontes 4 e 5.

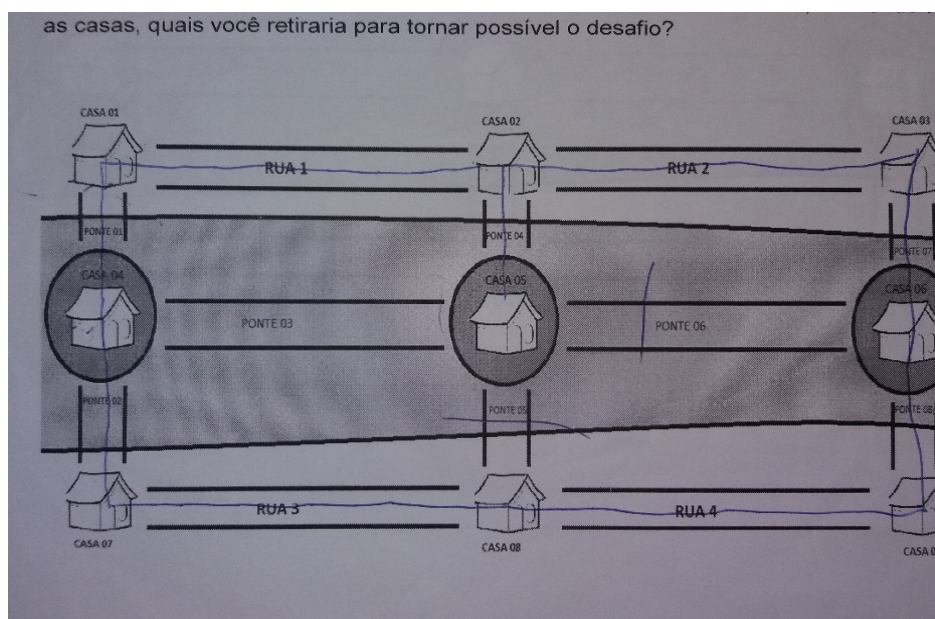


Figura 30: Caminho desenvolvido por um aluno, onde sobram três pontes.

Então solicitamos que eles respondessem o questionamento 3, se seria possível passar em todas as pontes e em todas as estradas apenas uma vez. A maioria respondeu que não, não era possível realizar o desafio.

Passamos para a última etapa, que era refletir sobre a pergunta 4 - se retirando uma ou mais pontes ou ruas, seria possível o carteiro cumprir a sua

tarefa. Primeiro permitimos a retirada de uma ponte ou uma estrada e todos os alunos escolheram umas das pontes 3,4,5 ou 6, nenhum deles retirou uma rua, e mesmo assim o desafio ainda não tinha solução.

No final da atividade permitimos a retirada de duas pontes ou estradas, dos cinquenta e dois alunos que fizeram a atividade, vinte e nove retiraram as pontes 3 e 6 e vinte e um retiraram as pontes 4 e 5, conseguindo resolver o desafio. Dois alunos não conseguiram completar a atividade.

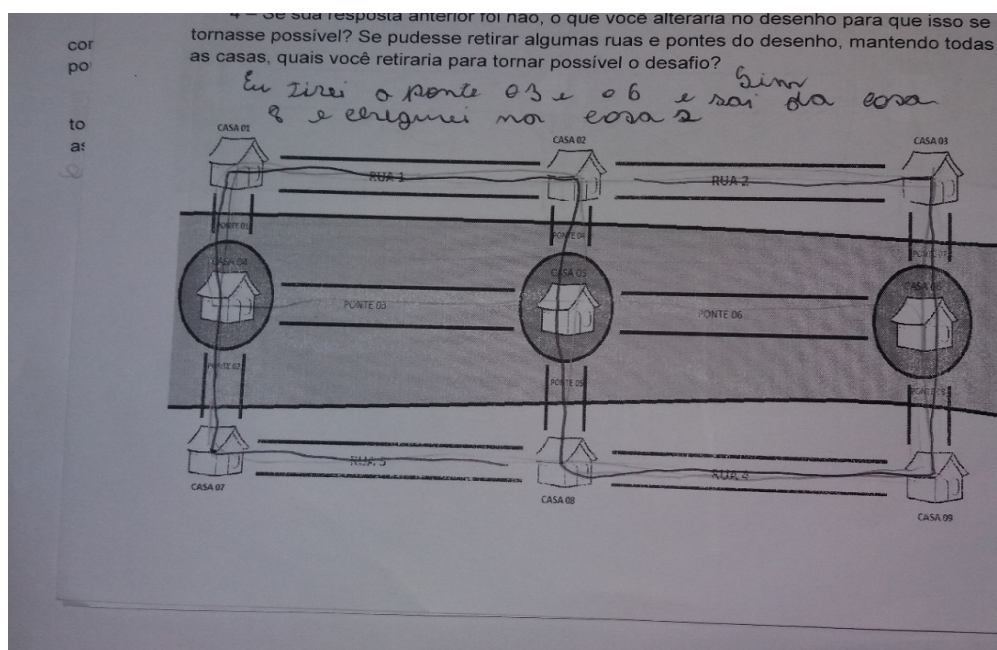


Figura 31: Solução proposta por um aluno.

O objetivo dessa atividade inicial era despertar a curiosidade do aluno, preparar o entendimento para a teoria dos Grafos e ter um exemplo concreto para ilustrar a teoria, que mostramos mais à frente. Outro fator importante é mostrar aos alunos que alguns problemas não têm solução e que às vezes precisamos adapta-los, modifica-los, para então encontrar alguma solução.

A maioria dos alunos respondeu positivamente ao desafio, mostrando interesse e empolgação com a atividade e curiosidade para o próximo desafio. A participação das turmas de modo geral foi excelente, mostrando que nossa intenção de inserir a Teoria dos Grafos, de uma maneira leve e direta, tem um potencial considerável dentro do currículo do Ensino Fundamental.

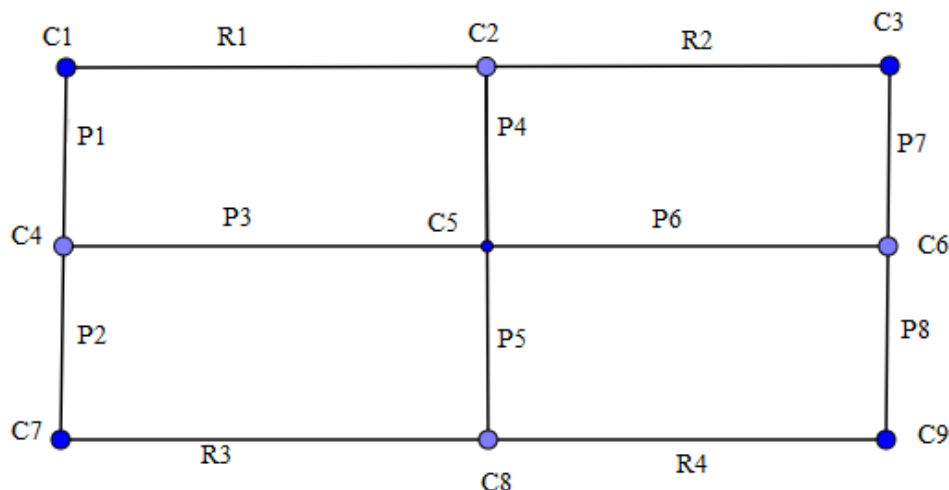


Figura 32: Grafo associado ao mapa do vilarejo.

Observando o Grafo acima, vemos que os vértices C2, C4, C6 e C8 tem grau ímpar (3), portanto precisamos transformar o grau de dois desses vértices para grau par. Para isso basta retirar uma aresta de cada um deles, tomando cuidado para não deixar mais de dois vértices com grau ímpar.

Assim retirando as arestas P3 e P6 ou as arestas P4 e P5, ficamos com apenas dois vértices com grau ímpar e o Grafo se torna semi-euleriano.

## 5.2

### Atividade da Prisão

No começo da atividade foi feita uma explicação do objetivo da tarefa e os alunos foram separados em duplas. Cada dupla recebeu uma folha com as instruções e mais duas folhas com os mapas da prisão para que eles tentassem a solução. Observe que o Grafo associado a esse mapa é semi-euleriano.

A primeira parte da atividade, era tentar encontrar a solução partindo da cela 1 e retornando para ela, o que não é possível de fazer pois o Grafo não é euleriano.

Na segunda parte foi sugerido que eles escolhessem uma sala para retirar do mapa, a maioria retirou a Cela 3, o que tornava o Grafo euleriano, pois o grau dos vértices, correspondentes as salas que eram ímpares (o



refeitório e a sala de força) ficaram pares. O Grafo ficou então com todos vértices com grau par.

Das vinte e seis duplas que realizaram a atividade, todas retiraram a Cella 3 e conseguiram resolver o problema.

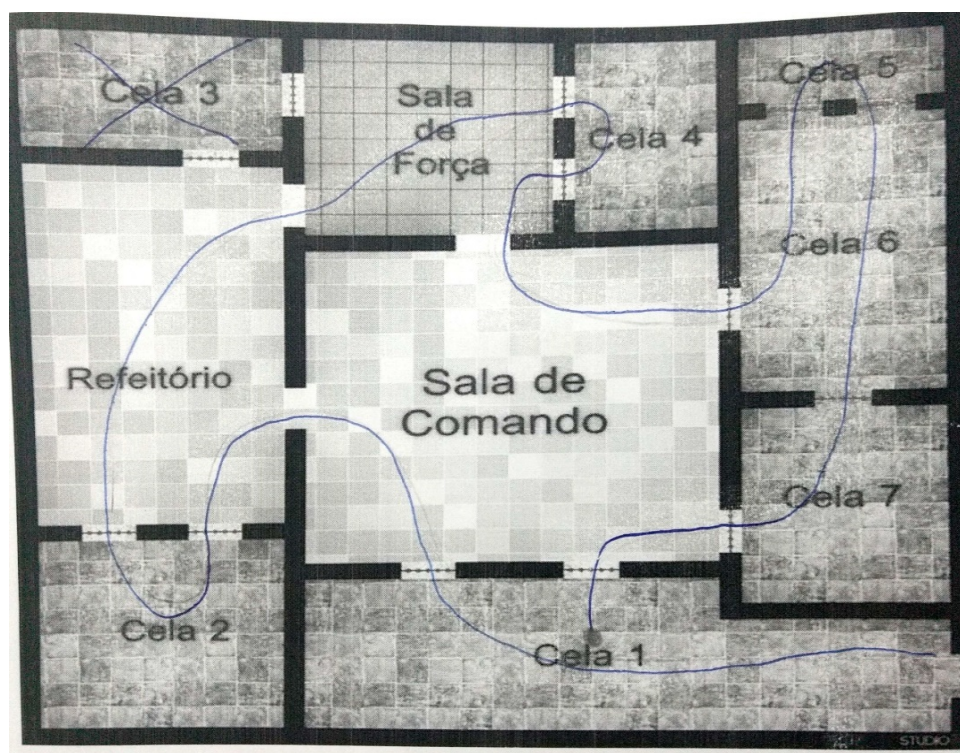


Figura 33: Alunos retiraram a Cella 3, tornando o Grafo Euleriano.

Na terceira parte, voltamos ao mapa original, mas agora o ponto de partida era no refeitório, e os alunos deveriam encontrar uma sala para colocar a saída, que tornasse possível resolver o desafio. A maioria conseguiu resolver o problema e colocou a saída na Sala de Força, que é o outro vértice de grau ímpar.



Figura 34: Solução encontrada por uma das duplas.

Das vinte e seis duplas, vinte e três conseguiram resolver o problema nessa terceira etapa.

Após essas duas atividades, fizemos a aula de exposição sobre Grafos, sempre fazendo a conexão da teoria com as atividades que eles já tinham feito, transformando-as em Grafos e associando aos mapas utilizados.

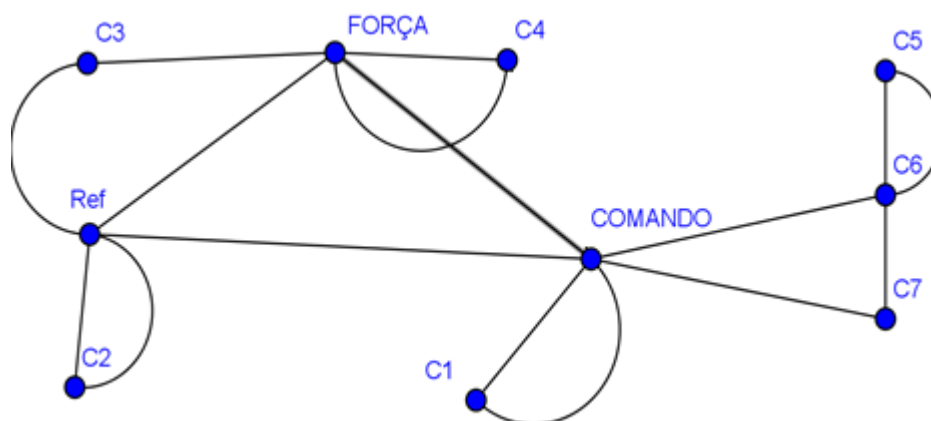


Figura 35: Grafo associado ao mapa da prisão.

Como podemos observar no Grafo acima, os vértices correspondentes ao refeitório e a Sala de Força têm grau ímpar, ambos têm grau 5. Logo, partindo de qualquer um deles e terminando no outro, conseguimos construir um

caminho euleriano. Todos os outros vértices do Grafo têm grau par, temos que o Grafo é semi-euleriano.

### 5.3

#### Resultados

Buscando avaliar a aceitação por parte dos alunos de uma maneira mais precisa, desenvolvemos um questionário simples, que foi aplicado com os alunos, descrito a seguir.

Com esse questionário queremos saber sua opinião sobre as atividades realizadas sobre Grafos Eulerianos.

1 – Você gostou das atividades propostas? Se sim, o que você mais gostou?

2 – Teve alguma dificuldade para realizar as atividades? Se sim, qual foi essa dificuldade?

3 – Conseguiu encontrar uma resposta nas duas atividades?

4 – Gostaria de ter mais aulas com atividades como essas?

5 – O que achou da atividade do Carteiro?

6 – O que achou da atividade da Prisão?

A maioria dos alunos respondeu de forma positiva ao questionário. Do total de alunos participantes, nenhum manifestou grande dificuldade em realizar as atividades e a maioria destacou que a aula não parecia uma aula de Matemática. De um total de 52 alunos que realizaram pelo menos uma das atividades e assistiram a aula teórica posteriormente, 48 responderam que gostaram da aula e gostariam de ter mais atividades do mesmo tipo.

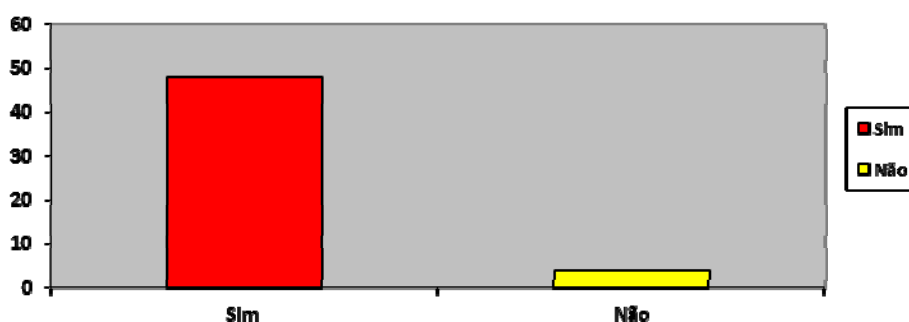


Gráfico 1: Aceitação dos Alunos às atividades



Durante a aplicação das atividades e da aula teórica, foi possível observar uma excelente interatividade com os alunos e um grande interesse deles em aprender e solucionar os desafios.

Com esse questionário queremos saber sua opinião sobre as atividades realizadas sobre Grafos Eulerianos.

1 – Você gostou das atividades propostas? Se sim, o que você mais gostou?  
☒ SIM   ☐ NÃO  
 Gostei mais do "desafio da prisão".

2 – Teve alguma dificuldade para realizar as atividades? Se sim, Qual dificuldade?  
☐ SIM   ☒ NÃO

3 – Conseguiu encontrar a resposta nas duas atividades?  
☒ SIM   ☐ NÃO

4 – Gostaria de ter mais aulas com atividades como essas?  
☒ SIM   ☐ NÃO

5 – O que achou da atividade do Carteiro?  
 Foi fácil, gostei de fazer e gostei de mais.

6 – O que achou da atividade da Prisão?  
 Acho muito legal e tem mais fácil de aprender.

Figura 36: Resposta do questionário de um aluno.

## Considerações Finais

Chegamos ao capítulo final deste trabalho, onde buscamos mostrar uma possibilidade de pequena renovação do currículo escolar e sugerimos um tema atual, com uma vasta aplicação em diversas áreas de estudo, como uma alternativa para se dar os primeiros passos nessa renovação. A Teoria dos Grafos é um tema com grande relevância na Matemática, mas pouco explorado nos cursos de licenciatura e sequer mencionado aos alunos do nível médio e fundamental.

Esse trabalho propõe a inclusão desse tema no currículo básico da educação Matemática, mencionando alguns conceitos básicos de Grafos e algumas aplicações e, mais especificamente, trabalha a questão dos Grafos Eulerianos. Entendemos que é um assunto que pode ser compreendido com facilidade por alunos da educação básica e abordado de uma maneira lúdica, atraente e em diversos graus de dificuldade, dependendo do público que se deseja atingir.

Como parte do trabalho, aplicamos algumas atividades de forma experimental em duas turmas do sétimo ano do ensino fundamental, e os resultados desse experimento foram considerados satisfatórios pelo professor/autor. A maior parte dos alunos mostrou um grande interesse em resolver os problemas que foram propostos, conseguiram desenvolver as atividades e encontrar a solução ou argumentar a não solução dos desafios. Observamos que esse tema estimula o raciocínio e desperta o interesse da turma, além de proporcionar possibilidades de contextualizar os problemas e construir aplicações interdisciplinares.

Temos consciência que a Teoria dos Grafos é um tema muito mais amplo e complexo do que o apresentado neste trabalho. Abordamos aqui apenas alguns dos conceitos mais básicos, um pequeno panorama histórico dessa teoria e procuramos mostrar um conceito novo e desconhecido para os alunos da educação básica. A dificuldade de encontrar uma bibliografia sobre o assunto voltada a esse segmento da educação mostra o quanto esse tema é

ainda pouco explorado na educação básica. Mas, certamente ainda podemos percorrer caminhos nessa direção.

Deixamos então uma reflexão sobre a proposta apresentada, buscando dar uma contribuição para o desenvolvimento e o crescimento do processo de ensino-aprendizagem da Matemática na educação básica brasileira.

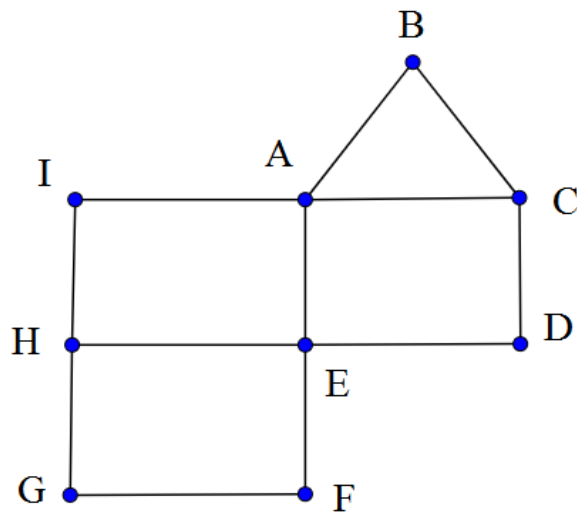
## Referências bibliográficas

1. BOAVENTURA NETTO, P.O. Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos. Ed. Blucher, 2006.
2. BOAVENTURA NETTO, P.O. e JURKIEWICZ, S. Grafos: Introdução e prática. Ed. Blucher, 2009.
3. BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.
4. COSTA, C.S. Matemática discreta no Ensino Médio um trabalho com Grafos Eulerianos. PUC-RIO, 2013.
5. ECHEVERRÍA, M.D.P. A solução de problemas em Matemática. In: POZO, J. I. (org.). A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.
6. HOPKINS, B.H.W. e ROBIN (2004). The Truth About Königsberg. The College Mathematics Journal, 35, 198-207.
7. LEITE LOPES, M.L.M. Grafos: Jogos e Desafios. Ed. IM-UFRJ, 2010.
8. LIBÂNEO, J.C. Didática: novos e velhos temas. Goiânia: Edição do Autor, 2002.
9. VIGOTSKY, L.S. A formação social da mente. Ed. Martins Fontes, 1994.

## ANEXO I – SOLUÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

### ATIVIDADE 1

1)



2) 9 vértices

3) 12 arestas

4) A – 4 ruas, B – 2 ruas, C – 3 ruas, D – 2 ruas,  
E – 4 ruas, F – 2 ruas, G – 2 ruas, H – 3 ruas, I – 2 ruas.

5) A – 4; B – 2; C – 3; D – 2; E – 4; F – 2; G – 2; H – 3; I – 2.

6) Não. Nem todos os vértices tem o mesmo grau

7) Não, pois possui dois vértices com grau ímpar.

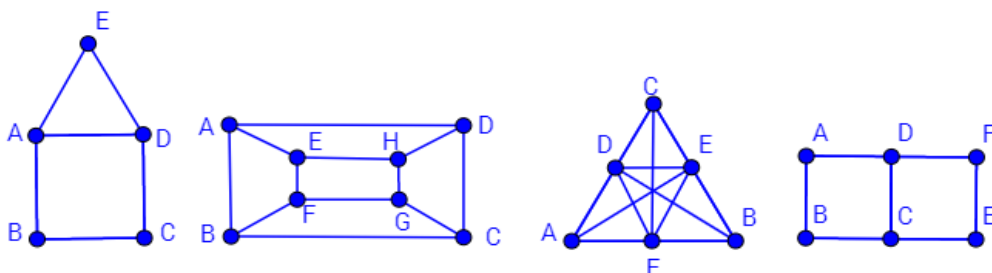
8) Sim, partindo de C ou de H e terminado ou em H ou C. Por exemplo:  
(C-B-A-I-H-C-F-E-D-C-A-E-H).

9) O caminho mais curto para o carteiro é percurso descrito acima acrescentando a aresta HC (pela qual o carteiro passaria duas vezes). (C-B-A-I-H-C-F-E-D-C-A-E-H-C).

## ATIVIDADE 2

1)

a)



b) Sim, pois não possuem laços nem arestas paralelas.

c) Sim, pois sempre existe um caminho entre quaisquer par de vértices do Grafo.

d) Grafo A – Semi-Euleriano; Grafo B – Não é euleriano nem semi-euleriano; Grafo C - Não é euleriano nem semi-euleriano; Grafo D - Semi-Euleriano.

e) Matriz de Adjacência:

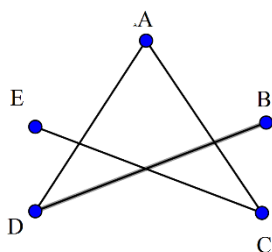
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Matriz de Incidência:

1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

f) Sim, todos os vértices do Grafo B têm grau 3.

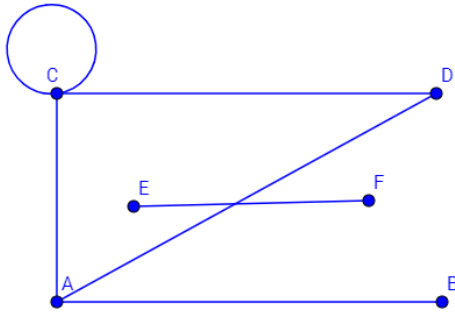
g)



h) Partindo de qualquer uma dos vértices de grau 3 retornando para a mesma.

(B-C-F-E-D-A-B-E-B)

- i) Qualquer Grafo com os vértices com graus distintos, arestas paralelas ou laços e algum vértice desconexo.



2 – O percurso mais curto é (D-E-F-G-A-B-C-D-B-E-D), Totalizando  $63+8=71$  (já que vai passar duas vezes na aresta ED de peso 8)

3 –

- a) Não é possível.  
 b) Não é euleriano pois possui vértices de grau ímpar.  
 c) Não, pois não é semi-euleriano.  
 d)

Vértices	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	0
B	1	0	1	1	0	1
C	1	1	0	0	1	0
D	0	1	0	0	1	1
E	0	0	1	1	0	1
F	0	0	0	1	1	0

## ATIVIDADE 3

1 e 2 – tentativas dos alunos.

3 – No mapa original, não é possível resolver, pois o Grafo associado ao mapa original não é Euleriano nem semi-euleriano.

4 – Retirando ou as pontes 4 e 5 ou as pontes 3 e 6, tornamos o Grafo associado ao novo mapa semi-euleriano, pois vai ficar com dois vértices de grau 3.

## ATIVIDADE 4

\* Não ajudou, pois não é possível realizar o trajeto solicitado já que o Grafo não é euleriano.

\* Sim, se retirarmos a Cela 3, o caminho fica possível, pois o Grafo se torna euleriano.

\* Sim. Partindo do Refeitório e terminando na Sala de Força, ou vice e versa. Pois o Grafo associado ao mapa da prisão é semi-euleriano, permitindo um caminho euleriano, começando num vértice de grau ímpar e terminando no outro.