

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Ericson Duarte do Nascimento**

**O Porismo de Poncelet**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro  
Abril de 2017



**Ericson Duarte do Nascimento**

## **O Porismo de Poncelet**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do departamento de Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Orientador  
Departamento de Matemática PUC-Rio

**Prof. Humberto Jose Bortolossi**

Instituto de Matemática – UFF

**Prof. Ralph Costa Teixeira**

Instituto de Matemática – UFF

**Prof. Renata Martins Rosa**

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Prof. Sinesio Pesco**

Departamento de Matemática PUC-Rio

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 17 de abril de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

## Ericson Duarte do Nascimento

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na UERJ (Universidade Estadual do Rio de Janeiro) em 2007. Trabalhou no período de 2007 a 2008 na Fundação Centro de Ciências e Educação Superior à Distância do Estado do Rio de Janeiro com tutor presencial. Atualmente faz parte do quadro efetivo de professores da Secretaria de Estado de Educação

### Ficha Catalográfica

Nascimento, Ericson Duarte do

O Porismo de Poncelet / Ericson Duarte do Nascimento; orientador: Nicolau Corção Saldanha. – 2017.

48 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2017.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Porismo de Poncelet. 3. Cônicas. 4. Geometria plana. 5. Geometria projetiva. I. Saldanha, Nicolau Corção. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Dedico essa dissertação à minha esposa Alcioni Rodrigues e ao meu filho Gustavo Mendes por terem sempre me apoiado e me mantido motivado.

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e aos meus pais Joceir e Eliete, por toda formação pessoal e ajuda na formação profissional que me deram e por sempre demonstrarem confiança em meus empreendimentos.

Agradeço a todos os professores da PUC – RIO que fizeram parte dessa etapa muito importante na minha formação, em especial, meu orientador Nicolau Saldanha, por todo ensinamento e disponibilidade.

Agradeço ainda a CAPES pelo apoio e oportunidade de realizar esse trabalho.

## Resumo

Nascimento, Ericson Duarte do; Saldanha, Nicolau Corção (Orientador). **O Porismo de Poncelet**. Rio de Janeiro, 2017. 48p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A proposta deste trabalho é apresentar e demonstrar o Porismo de Poncelet, tanto o caso base para triângulos quanto o caso geral para um polígono qualquer. Sendo o Porismo de Poncelet considerado um dos mais importantes teoremas da Geometria Projetiva, serão utilizados neste trabalho conceitos de Geometria Projetiva que muitas vezes não são familiares da maioria dos professores de matemática da rede básica de ensino. O caso base para triângulos juntamente com as cônicas podem ser bem explorados no ensino médio com a utilização de software de geometria como Geogebra que foi ferramenta fundamental na elaboração das figuras utilizadas nas demonstrações apresentadas nessa dissertação.

## Palavras-chave

Porismo de Poncelet; Cônicas; Geometria Plana; Geometria Projetiva.

## Abstract

Nascimento, Ericson Duarte do; Saldanha, Nicolau Corção (Advisor) . **The Poncelet's Porism**. Rio de Janeiro, 2017, 48p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The purpose of this work is to present and demonstrate the Poncelet's Porism, both the base case for triangles and the general case for any polygon. Being the Poncelet's Porism considered one of the most important theorems of Projective Geometry, we will use concepts of Projective Geometry that are not often familiar to most mathematics teachers in the basic teaching network. The base case for triangles together with the conics can be well explored in high school with the use of geometry software such as Geogebra that was a fundamental tool in the elaboration of the figures used in the demonstrations presented in this essay.

## Keywords

Poncelet's Porism; Conics; Plane Geometry; Projective Geometry.

## Sumário

1 - Introdução.....	11
Simbologia.....	13
2 - Conceitos básicos de Geometria Projetiva.....	14
Um breve histórico:.....	14
Definições e teoremas.....	15
Axiomas.....	18
Princípio da Dualidade.....	19
3 - O Porismo de Poncelet para triângulos.....	25
Teorema de Menelaus.....	26
Teorema de Pascal.....	27
Teorema de Brianchon.....	28
Teorema de Carnot.....	29
Teorema de Carnot Dual.....	31
Teorema de Poncelet para triângulos.....	34
4 - Porismo de Poncelet (Caso Geral).....	36
5 - Referências bibliográficas.....	48

## Lista de Figuras

Figura 1.1 – Triângulo inscrito e circunscrito	11
Figura 1.2 - Hexágono ABCDEF circunscrito a $\varepsilon$	12
Figura 1.3 - Quadrilátero ABCD circunscrito a H	13
Figura 2.1 – Seções Cônicas	14
Figura 2.2 - Triângulo ABC	15
Figura 2.3 – Triângulos ABC e A'B'C' perspectivos	15
Figura 2.4 – Quadrângulo Completo	16
Figura 2.5(a) – Feixe de retas	16
Figura 2.5(b) – Feixe de pontos	16
Figura 2.6 – Perspectividade entre dois feixes de pontos	17
Figura 2.7 – Projetividade entre feixes de pontos	17
Figura 2.8 – Teorema 2.2	20
Figura 2.9 – Cônica de pontos	21
Figura 2.10 – Hexágono ABCDEF	21
Figura 2.11 – Centro do feixe de retas – Pontos de uma cônica	22
Figura 2.12 – Colinearidade de pontos diagonais	23
Figura 3.1 – Porismo de Poncelet para $n=5$	25
Figura 3.2 – Teorema de Menelaus	26
Figura 3.3 – Teorema de Pascal	27
Figura 3.4 – Teorema de Brianchon	28
Figura 3.5 – Teorema de Carnot	29
Figura 3.6 – Demonstração do Teorema de Carnot	30

Figura 3.7 – Teorema de Carnot (versão 2)	31
Figura 3.8 – Teorema de Carnot Dual	32
Figura 3.9 – Teorema 3.1	33
Figura 3.10 – Demonstração do Teorema 3.1	34
Figura 4.1 – Porismo de Poncelet (Caso Geral)	36
Figura 4.2 – Lema 4.1	37
Figura 4.3 – Lema 4.1 para n par	37
Figura 4.4 – Lema 4.1 para n ímpar	38
Figura 4.5 – Proposição 4.1 – J, K e L colineares	39
Figura 4.6 – Proposição 4.1 – Pontos J' e L'	39
Figura 4.7 – Retas $\alpha, \gamma$ e $\varepsilon$	40
Figura 4.8 – Retas $\alpha, \beta$ e $\gamma$	41
Figura 4.9 – Retas $\beta, \varepsilon$ e $\delta$	41
Figura 4.10 – J', K e L' colineares	42
Figura 4.11 – J', K' e L' colineares	43
Figura 4.12 – Pontos I, J' e K	43
Figura 4.13 – Pontos I, K' e L'	44
Figura 4.14 – Pontos J, K e L colineares	45
Figura 4.15 – Pontos I, J, K, K' e L	46
Figura 4.16 – Teorema de Pascal no hexágono $A_1A_2B_{n-1}B_1B_2A_{n-1}$	46
Figura 4.17 – Teorema de Pascal no hexágono $A_{n-1}A_nB_1B_{n-1}B_nA_1$	47

# 1. Introdução

O Porismo de Poncelet, conhecido também por Teorema do Fechamento, é um dos mais importantes teoremas da Geometria Projetiva. Desenvolvido por Jean Vitor Poncelet (1788-1867) a mais de dois séculos, no período em que esteve prisioneiro na Rússia, o porismo é um grande estudo sobre polígonos que sejam inscritos e ao mesmo tempo circunscritos a cônicas distintas. (Ver Figura 1.1) Esse estudo foi publicado no livro *Traité de propriétés projectives des figures*.

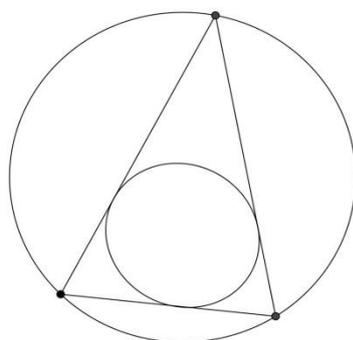


Figura 1.1 - Triângulo inscrito e circunscrito

Entre as inúmeras demonstrações do Porismo de Poncelet existentes, neste trabalho será feito um estudo sobre o porismo baseado no artigo “*A Simple Proof of Poncelet’s Theorem (on the occasion of its bicentennial)*” publicado em 2014, em comemoração ao bicentenário do estudo de Poncelet que resultou no porismo em questão. A demonstração reúne conceitos da Geometria Projetiva como o princípio da dualidade, os teoremas de Pascal, Brianchon e Carnot, e também conceitos de Geometria plana como retas concorrentes, pontos colineares e polígonos inscritos e circunscritos a uma cônica.

Para chegar à demonstração pretendida, será realizado no próximo capítulo um breve resumo histórico e uma revisão de conceitos de geometria projetiva, construindo uma base axiomática. No terceiro capítulo será feita uma demonstração para o caso base do porismo, quando o temos um triângulo bicêntrico, ou seja, inscrito e circunscrito a cônicas distintas, e no quarto capítulo

será demonstrado o caso geral, quando o polígono inscrito e circunscrito às cônicas tem uma quantidade arbitrária de vértices.

Alguns esclarecimentos preliminares tornam-se necessários para boa fluidez desse trabalho. Por exemplo, quando for citado que um polígono é circunscrito a uma cônica, pode ser que os prolongamentos dos lados sejam tangentes a tal cônica, não necessariamente o lado estar em contato com a cônica. Outro fato relevante é que um polígono representado no plano real projetivo pode ter seus lados se cruzando, conforme Figura 1.2.

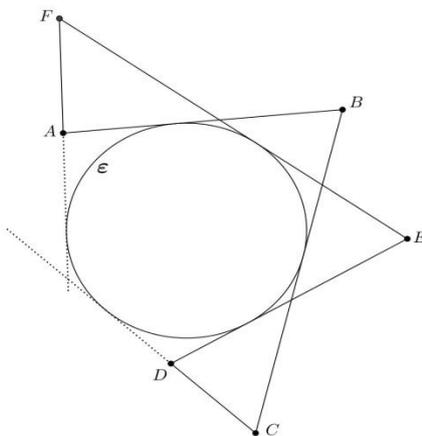


Figura 1.2 - Hexágono ABCDEF circunscrito a  $\epsilon$

Quando for dito que um polígono é inscrito e/ou circunscrito, as cônicas em questão podem ser círculos, elipses, hipérboles, parábolas, ou qualquer combinação entre elas. (Ver Figura 1.3)

Para facilitar a visualização nas demonstrações, e evitar pontos no infinito, nesse trabalho somente as elipses foram utilizadas. Tudo o que for feito para as elipses pode ser considerado para qualquer uma das outras cônicas.

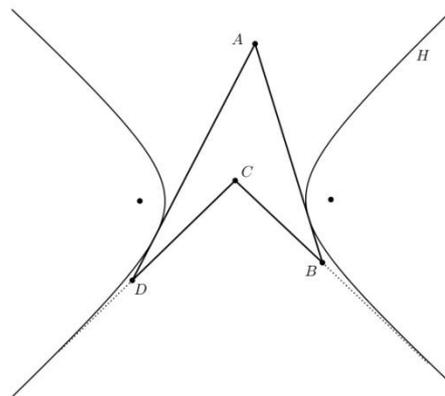


Figura 1.3 - Quadrilátero ABCD circunscrito a  $H$

Com o intuito de explorar o Porismo de Poncelet visando uma possível aplicação no ensino básico, a demonstração que será feita utiliza um grande número de figuras feitas no Geogebra. A escolha do aplicativo em questão deve-se ao fato de ser um software livre e de grande aceitação por parte dos professores.

## Simbologia

Neste trabalho serão utilizadas as seguintes notações:

$tgA$  – reta tangente, sendo  $A$  o ponto de tangência;

$\cdot$  – interseção. Por exemplo,  $I = AB \cdot CD$ , representa o ponto  $I$  sendo a interseção dos segmentos  $AB$  e  $CD$ ;

$\wedge$  - perspectividade. Por exemplo,  $ABC \wedge DEF$ , representa uma perspectividade entre os conjuntos de pontos  $ABC$  e  $DEF$ .

## 2 – Conceitos básicos de Geometria Projetiva.

### Um breve histórico:

Os primeiros trabalhos matemáticos a respeito de perspectivas datam de 1435 pelo italiano Leone Battista Alberti. Já os primeiros registros de projetividade aparecem por volta de 1604 com Kepler em seu livro *Ótica Astronômica*. Apolônio e Arquimedes haviam observado que as cônicas e o par de retas concorrentes podiam ser obtidos por seção em um cone circular reto.

Kepler, ao fazer variar o plano de seção do cone, percebe a transformação do círculo em uma elipse, que, ao variar o plano novamente, tem-se a transformação da elipse em parábola para, em seguida, obter uma hipérbole, conforme Figura 2.1.

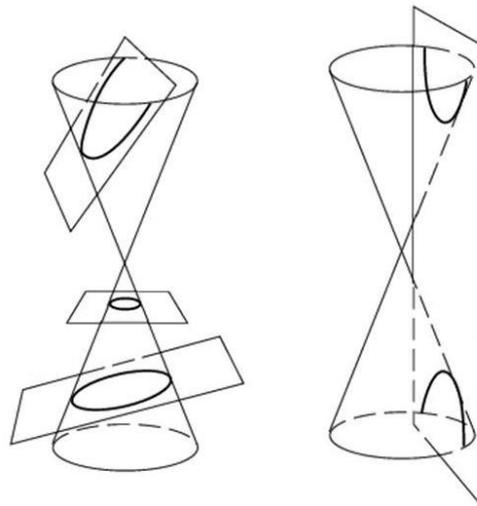


Figura 2.1 - Seções Cônicas

Girard Desargues (1591 – 1661) foi o primeiro a utilizar esse método descrito por Kepler. Desargues, para demonstrar teoremas sobre cônicas, demonstrava tais teoremas para um círculo, depois, por projeção e seção, transportava para cônica desejada. Além desse método, foi Desargues que

introduziu o conceito de Plano Projetivo Real, que esclarece a noção de pontos no infinito.

## Definições e teoremas

A partir desse momento serão descritos uma série de definições, observações e teoremas que servirão de base para demonstrar no capítulo seguinte os teoremas de Pascal, Carnot e Brianchon, que são as principais ferramentas utilizadas nessa dissertação para demonstrar o Porismo de Poncelet.

Definição 2.1 – Triângulo é um conjunto de três pontos não colineares e três retas determinadas por estes pontos. Os pontos são chamados de vértices e as retas são chamadas lados do triângulo. (Ver Figura 2.2)

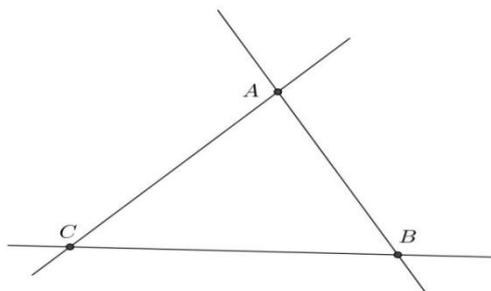


Figura 2.2 - Triângulo ABC

Definição 2.2 – Os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são perspectivos por um ponto se as três retas correspondentes aos vértices,  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes. Esses triângulos são perspectivos por uma reta se os três pontos de interseção correspondentes aos lados,  $AB \cdot A'B'$ ,  $AC \cdot A'C'$  e  $BC \cdot B'C'$ , são colineares. (Ver Figura 2.3)

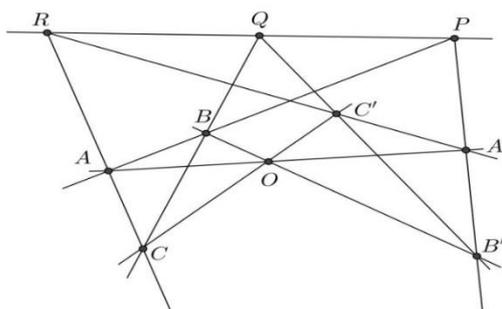


Figura 2.3 - Triângulos ABC e A'B'C' perspectivos

Definição 2.3 - Quadrângulo completo é um conjunto de quatro pontos, a cada três não colineares, e as seis retas determinadas por esses quatro pontos. Os pontos são chamados de vértices e as retas são chamadas de lados do quadrângulo. (Ver Figura 2.4)

Se A, B, C e D são os quatro pontos de um quadrângulo completo, então AB e CD, AC e BD, e AD e BC são denominados pares de lados opostos. Os pontos, nos quais, os pares de lados opostos se interceptam são chamados de pontos diagonais do quadrângulo.

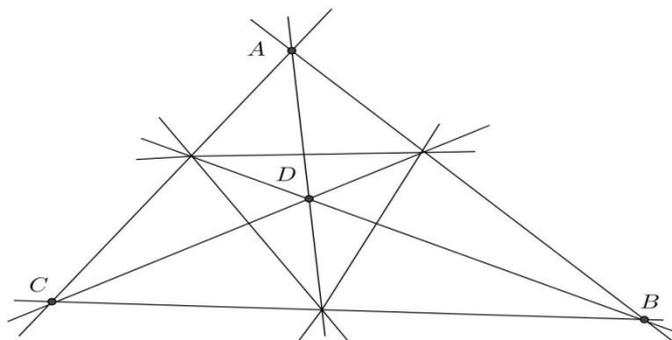


Figura 2.4 - Quadrângulo completo

Definição 2.4 – O conjunto de retas incidentes sobre um ponto P é chamado um feixe de retas com centro P, conforme Figura 2.5 (a), e o conjunto de todos os pontos sobre a reta p é chamado feixe de pontos com eixo p, conforme Figura 2.5 (b)

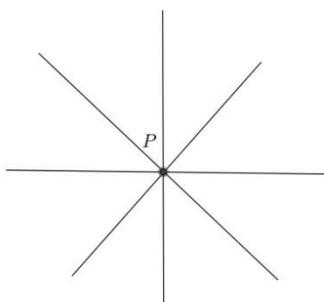


Figura 2.5 (a) - Feixe de retas



Figura 2.5 (b) - Feixe de pontos

Definição 2.5 – Uma aplicação bijetora entre dois feixes de pontos com eixo em  $p$  e  $p'$  é chamada de perspectividade se cada reta que une o ponto  $X$  sobre  $p$  com o ponto  $X'$  sobre  $p'$  é incidente sobre um ponto fixado  $O$ , chamado centro de perspectividade. (Ver Figura 2.6)

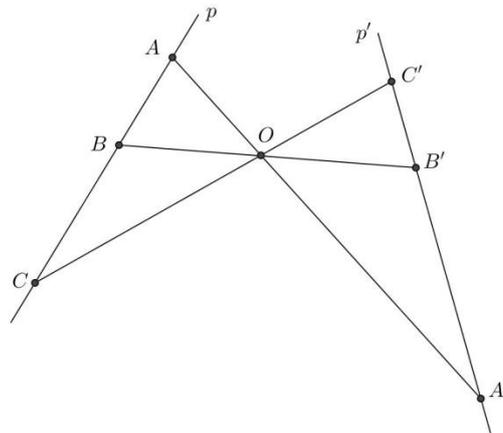


Figura 2.6 - Perspectividade entre dois feixes de pontos

Definição 2.6 – Uma aplicação bijetora entre os elementos de dois feixes é chamada uma projetividade se esta aplicação é o resultado de uma composição de um número finito de perspectividades. Quando uma projetividade existe entre dois feixes, dizemos que estes feixes estão relacionados projetivamente. Quando a projetividade tem o mesmo feixe como domínio e contradomínio, digamos  $F$ , simplesmente dizemos que é uma projetividade sobre  $F$ . (Ver Figura 2.7)

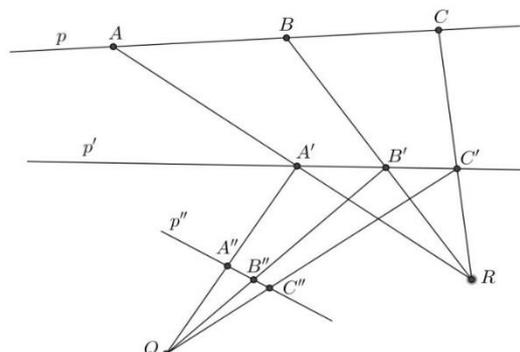


Figura 2.7 - Projetividade entre os feixes de pontos

## Axiomas

Abaixo será descrito um sistema axiomático para geometria projetiva:

Axioma 1 - Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.

Axioma 2 - Quaisquer duas retas distintas são incidentes com pelo menos um ponto.

Axioma 3 - Existem pelo menos quatro pontos, que a cada três não são colineares.

Axioma 4 - Os três pontos diagonais do quadrângulo completo nunca são colineares.

Axioma 5 - Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, estes são perspectivos por uma reta.

Axioma 6 - Se uma projetividade sobre um feixe mantém três elementos do feixe invariante, então esta mantém todo elemento do feixe invariante. Ou seja, uma projetividade sobre um feixe que mantém três elementos invariantes é necessariamente a aplicação identidade.

O Axioma 5 pode ser demonstrado no ambiente da geometria projetiva para um espaço tridimensional, em nosso caso, geometria projetiva plana, não é possível demonstrá-lo.

Definição 2.6 - Dizemos que um plano é um plano projetivo se este satisfaz os axiomas 1, 2, 3 e 4.

Teorema 2.1 (Teorema de Desargues – Dual do Axioma 5) – Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, eles são perspectivos por um ponto.

Demonstração. Suponha que  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  são triângulos perspectivos por uma reta, (Ver Figura 2.3). Consequentemente  $AB \cdot A'B' = P$ ,  $BC \cdot B'C' = Q$ , e  $AC \cdot A'C' = R$  são colineares.

Temos que mostrar que estes triângulos são perspectivos por um ponto, para tanto é preciso mostrar que  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são concorrentes.

Considere  $O = AA' \cdot BB'$ , então os triângulos são perspectivos por  $O$ . Com efeito, primeiramente veja que os triângulos  $\Delta RAA'$  e  $\Delta QBB'$  são perspectivos pelo ponto  $P$ , já que  $P$  está em  $RQ$  (pois  $P, Q$  e  $R$  são colineares) e  $P$  está em  $AB$  e em  $A'B'$  (pela definição de  $P = AB \cdot A'B'$ ).

Logo, segue do axioma 6 que os triângulos  $\Delta RAA'$  e  $\Delta QBB'$  são perspectivos por uma reta. Ou seja,  $RA \cdot QB = C$ ,  $RA' \cdot QB' = C'$ , e  $AA' \cdot BB' = O$  são colineares. Do fato de  $C$ ,  $C'$  e  $O$  serem colineares segue que  $O$  é incidente sobre  $CC'$ . Portanto,  $AA'$ ,  $BB'$ , e  $CC'$  são concorrentes.

## Princípio da Dualidade

Os pontos e retas do plano projetivo têm o mesmo comportamento em relação à incidência. Assim, qualquer propriedade envolvendo pontos, retas e incidência permanecem válidas ao trocarmos pontos por retas e retas por pontos. A nova propriedade assim obtida é denominada "dual" da primeira. Desse modo, para todo teorema da Geometria Projetiva temos outro recíproco, pelo Princípio da Dualidade, trocando a palavra "ponto" pela palavra "reta" e vice versa.

Por exemplo, uma reta  $t$  e um ponto  $A$  sobre ela, são transformados no ponto  $T$  sobre a reta  $a$ . De modo geral, a dualidade segue o seguinte esquema:

“ponto”  $\leftrightarrow$  troca-se por “reta”;

“está sobre”  $\leftrightarrow$  troca-se por “passa por”;

“reta por dois pontos”  $\leftrightarrow$  troca-se por “interseção de duas retas”;

“concorrentes”  $\leftrightarrow$  troca-se por “colineares”

“tangentes”  $\leftrightarrow$  troca-se por “pontos de contato”

Teorema 2.2 - Dados dois feixes quaisquer sempre existe uma projetividade entre estes. Além disso, esta projetividade é unicamente determinada por três pares de elementos correspondentes.

Demonstração.

Caso 1 - Dois feixes de pontos:

Sejam  $A, B$  e  $C$  elementos do feixe com eixo  $p$  e  $A', B', C'$  seus elementos correspondentes do feixe com eixo  $p'$  ( $p \neq p'$ ). Agora construímos a reta  $AA'$  e escolhemos um ponto  $P \neq A$  sobre esta reta.

Seja  $p'' \neq p'$  uma reta qualquer passando por  $A'$ . Considere  $B'' = BP \cdot p''$ ,  $C'' = CP \cdot p''$ . Desta forma,  $ABC$  e  $A'B''C''$  são perspectivos. Agora, defina  $Q = B''B' \cdot C''C'$ . Então,  $A'B''C''$  e  $A'B'C'$  são perspectivos, e, portanto,  $ABC$  e  $A'B'C'$  é a composição das duas perspectividades. Logo, existe uma projetividade. (Ver Figura 2.8)

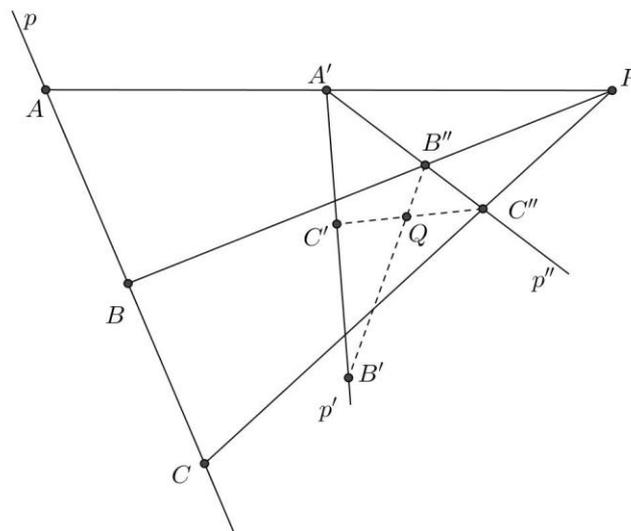


Figura 2.8 - Teorema 2.2

Caso 2 - Dois feixes de retas: Basta considerar a dualidade com o caso 1.

Caso 3 - Um feixe de pontos e um feixe de retas: Segue da combinação dos casos anteriores.

Definição 2.8– Uma cônica de pontos é o conjunto de pontos de interseção de retas correspondentes de cada duas projetividades (mas não perspectividade), as quais relacionam feixes de reta com centros distintos, conforme Figura 2.9.

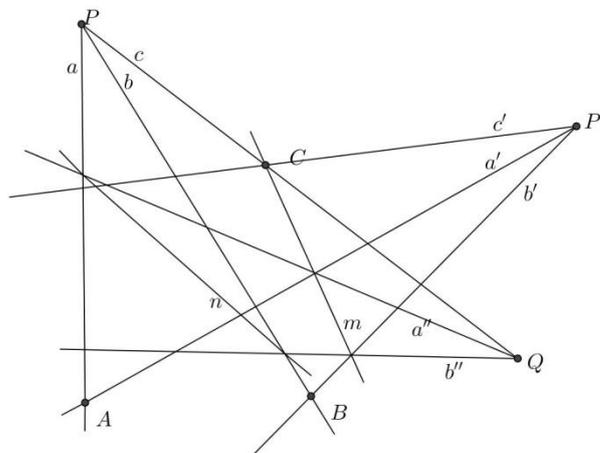


Figura 2.9 - Cônica de pontos

Definição 2.9 – Uma reta é tangente a uma cônica de pontos se possui exatamente um ponto em comum com a cônica de pontos. Esta reta é denotada por  $tgP$ , sendo P o ponto em comum da reta com a cônica.

Definição 2.10 - Um hexágono é um conjunto de seis pontos distintos chamados de vértices, digamos A, B, C, D, E e F e seis retas, AB, BC, CD, DE, EF e FA, chamados lados do hexágono. Não é exigido que cada três pontos sejam não colineares. Os pares de vértices A e D, B e E, C e F são ditos pares de vértices opostos. Da mesma forma os pares de lados AB e DE, BC e EF, CD e FA são ditos pares de lados opostos. Os três pontos de interseção de lados opostos são denominados pontos diagonais. (Ver Figura 2.10)

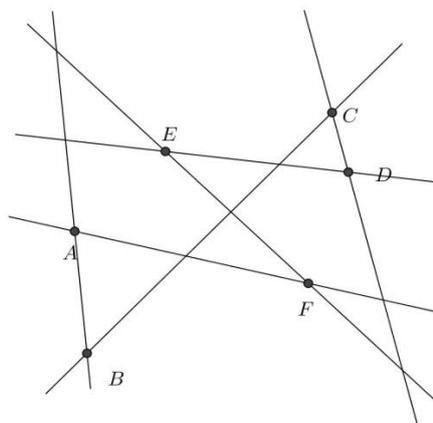


Figura 2.10 - Hexágono ABCDEF

Observação 2.1 - Dado um conjunto de seis pontos distintos, estes não determinam um único hexágono, uma vez que um hexágono é determinado pela ordem na qual seus vértices são nomeados. Assim, um conjunto de seis pontos pode determinar  $\frac{6!}{12} = 60$  hexágonos diferentes.

Teorema 2.3 – Os centros dos feixes de retas na projetividade que define uma cônica de pontos são pontos desta cônica.

Demonstração. Sejam  $P$  e  $P'$  os centros dos feixes de retas. Defina  $m = PP'$  e considere  $m$  como uma reta no feixe com centro  $P$ , conforme Figura 2.11.

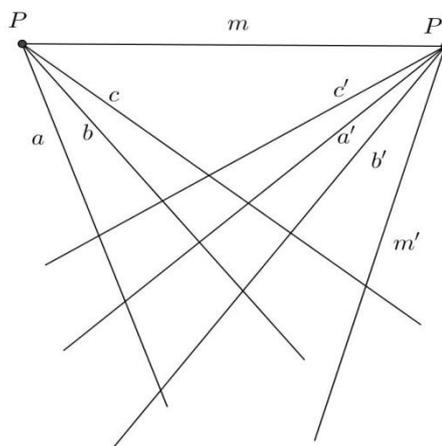


Figura 2.11 - Centros dos feixes de retas - Pontos de uma cônica

Então existe uma reta correspondente a  $m$ ,  $m'$ , no feixe de retas com centro em  $P'$ . Note que  $m \neq m'$  já que a projetividade não é uma perspectividade. Consequentemente,  $m \cdot m' = P'$ . Ou seja,  $P'$  é um ponto da cônica de pontos. Analogamente, considerando desta vez  $m = PP'$  como sendo uma reta no feixe de retas de centro  $P'$  e procurando a reta correspondente,  $n$ , a esta no feixe de retas de centro  $P$ , temos que  $n \cdot m = P$  e consequentemente  $P$  é um ponto da cônica de pontos.

Observação 2.2 - Com o Teorema 2.3 temos que, dados cinco pontos quaisquer  $A, B, C, D$  e  $E$ , (cada três não colineares), é possível determinar dois feixes de retas e uma projetividade entre estes de forma que  $A, B, C, D$  e  $E$  sejam pontos de uma cônica de pontos determinada por tais feixes e projetividade.

De fato. Escolhendo dois pontos, digamos, A e B, como centro dos feixes e construindo as retas AC, AD, AE e BC, BD, BE, podemos verificar que desta maneira, a projetividade entre (AC, AD, AE) e (BC, BD, BE) define uma cônica de pontos contendo os pontos A, B, C, D e E.

Teorema 2.4 - Se A, B, C, D são quatro pontos sobre uma cônica de pontos definida por uma projetividade entre feixes de retas de centros P e P', então os pontos diagonal do hexágono PBP'ACD são colineares, e reciprocamente, se os pontos diagonal do hexágono PBP'ACD são colineares então A,B,C,D são pontos de uma cônica de pontos determinada por projetividade entre feixes de centros P e P'.

Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) Sejam J, L, K os pontos diagonais, para o hexágono PBP'ACD dados pelas interseções de retas a seguir.

$$PB \cdot AC = J$$

$$BP' \cdot CD = L$$

$$P'A \cdot DP = K$$

Considere agora os pontos  $AC \cdot PD = M$  e  $AP' \cdot DC = N$ , conforme Figura 2.12

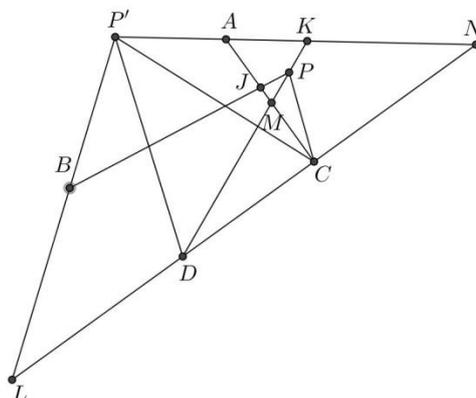


Figura 2.12 - Colinearidade de pontos diagonais

Neste contexto e pelo fato de que A, B, C e D são pontos de uma cônica de pontos obtemos a seguinte perspectividade:  $AJCM \wedge PA, PB, PC, PD \wedge P'A, P'B, P'C, P'D \wedge NLCD$ , ou  $AJCM \wedge NLCD$ . Uma vez que  $C \wedge C$  segue que esta projetividade é uma perspectividade entre os feixes de pontos AJCN e NLCD.

Consequentemente, como  $AN \cdot MD = JL \cdot AN = MD \cdot JL$  e  $AN \cdot MD = P'A \cdot PD = K$  segue que o centro de perspectividade é  $K$  e ainda que  $J, L$  e  $K$  são colineares.

( $\Leftarrow$ ) Segue pelos mesmos argumentos de ( $\Rightarrow$ ), mas no sentido contrário.

**Teorema 2.5** – Uma cônica de pontos é unicamente determinada por cinco pontos distintos, cada três não colineares.

**Demonstração.** Sejam  $A, B, C, D, E$ , cinco pontos, cada três não colineares. Então pela observação 2.2, existe uma cônica de pontos determinada pelos feixes de retas com centros  $A$  e  $C$  e pela projetividade  $(AC, AD, AE)$  com  $(BC, BD, BE)$ , a qual contém estes cinco pontos.

Seja  $F$  um sexto ponto qualquer sobre esta cônica de pontos. Para mostrar que a cônica é unicamente determinada, isto é, que o mesmo conjunto de pontos é determinado quando outros pontos diferentes de  $A$  e  $C$  são usados como os centros dos feixes, é suficiente mostrar que  $F$  pertence à cônica de pontos definida por feixes com centros em quaisquer outros dois pontos.

Para tanto, considere o hexágono  $ABCDEF$ . Pelo teorema 2.4, os pontos diagonais  $AB \cdot DE, BC \cdot EF, CD \cdot FA$  são colineares. Mas este hexágono é igual ao hexágono  $BCDEFA$  e consequentemente pela recíproca do teorema 2.4, segue que  $F$  é um ponto da cônica de pontos determinada pelos feixes com centros  $B$  e  $D$ . De modo análogo, usando outros hexágonos com centros de projetividade  $A$  e  $C$  como primeiro e terceiro vértices, podemos mostrar que  $F$  é um ponto da cônica de pontos determinada pelos feixes com centros em quaisquer outros dois pontos  $A, C, D, B$  e  $E$ .

### 3 - O Porismo de Poncelet para triângulos

Neste capítulo será feita uma demonstração para o caso base do porismo quando temos um triângulo inscrito e circunscrito a cônicas distintas. Para chegar a essa demonstração serão utilizados os teoremas de Pascal, Brianchon e Carnot.

O Porismo de Poncelet pode ser descrito da seguinte maneira:

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas cônicas não degeneradas em qualquer posição. Suponha que a partir de um ponto  $P_0$  qualquer de  $C_1$  seja traçada uma poligonal  $P_0P_1P_2P_3\dots P_n$ , onde  $P_1 \in C_1$  e  $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots$  sejam tangentes a  $C_2$ , com  $P_0 = P_n$ . Então qualquer ponto  $Q_0 \in C_1$ , com  $Q_0 \neq P_i$  é vértice de uma poligonal  $Q_0Q_1Q_2Q_3\dots Q_n$ ,  $Q_0 = Q_n$ , com  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n \in C_1$  e  $Q_0Q_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, \dots$  tangentes a  $C_2$ , conforme Figura 3.1.

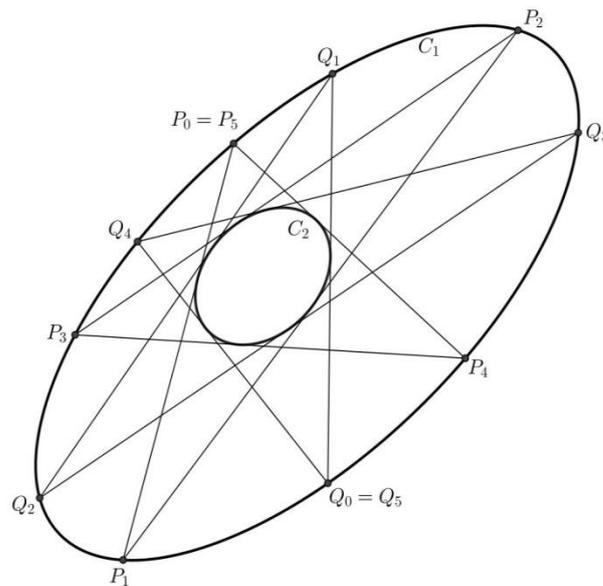


Figura 3.1 - Porismo de Poncelet para  $n = 5$

Em outras palavras, o Porismo de Poncelet nos diz que dadas duas cônicas  $C_1$  e  $C_2$ , que não se cruzam e supondo que exista um polígono de  $n$  lados inscrito em  $C_1$  e circunscrito a  $C_2$ , então qualquer outro ponto da cônica  $C_1$  será vértice de

um polígono de  $n$  lados, também inscrito a  $C_1$  e circunscrito a  $C_2$ . Para o caso base em questão basta restringir  $n = 3$  no texto descrito acima.

### Teorema de Menelaus

Se uma reta  $t$  qualquer intersecta as retas suportes dos três lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  de um triângulo  $ABC$  nos pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$ , respectivamente, então:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

Demonstração: Considere uma reta  $s$ , sendo  $s // t$  passando por  $B$ . Esta reta  $s$  intersecta o prolongamento do lado  $AC$  em um ponto  $Q$ . (Ver Figura 3.2)

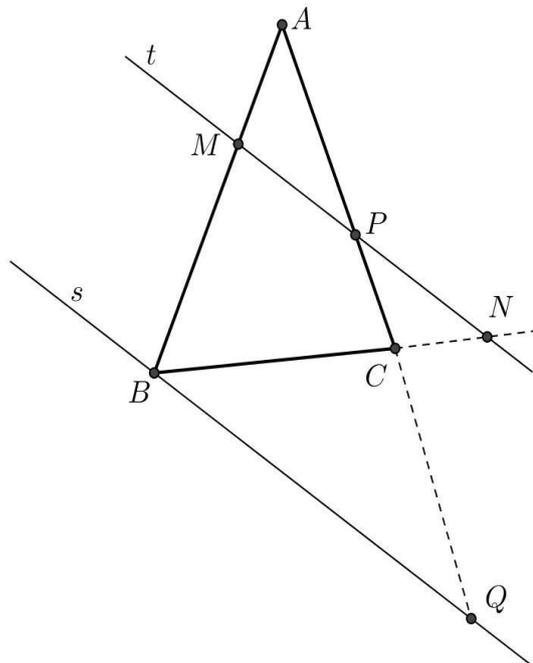


Figura 3.2 - Teorema de Menelaus

As paralelas  $s$  e  $t$  dividem as transversais  $\overleftrightarrow{AQ}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  em segmentos proporcionais.

Das transversais  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AQ}$  resulta:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PQ} \Rightarrow \frac{AM}{MB} \cdot \frac{PQ}{AP} = 1 \quad (1)$$

Das transversais QP e BN resulta:

$$\frac{PC}{PQ} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow \frac{PC}{PQ} \cdot \frac{NB}{NC} = 1 \quad (2)$$

Multiplicando as duas igualdades (1) e (2), temos:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{PQ}{AP} \cdot \frac{PC}{PQ} \cdot \frac{NB}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MB} \cdot \frac{PC}{AP} \cdot \frac{NB}{NC} = 1 \blacksquare$$

Observação 3.1 – O Teorema de Menelaus nos diz que dado um triângulo ABC, os pontos M, N e P pertencentes as retas suportes dos lados AB, BC e CA, respectivamente, são colineares, se e somente se é satisfeita a igualdade

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1.$$

## Teorema de Pascal

Dados seis pontos A, B, C, D, E e F, esses pontos estão sobre uma cônica se e somente se os pontos de interseção  $J = AB \cdot DE$ ,  $K = BC \cdot EF$  e  $L = CD \cdot FA$  são colineares. (Ver Figura 3.3)

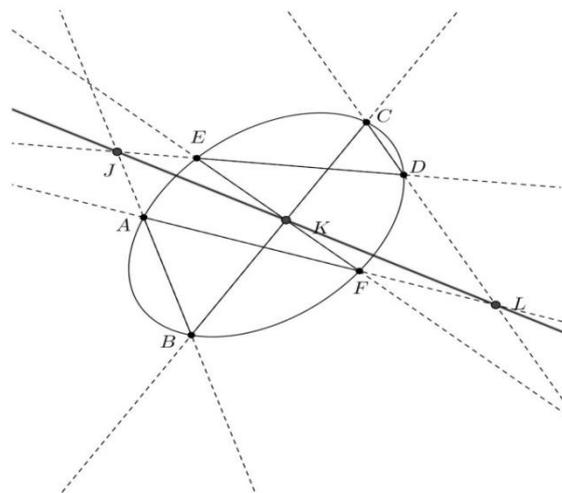


Figura 3.3 - Teorema de Pascal

Demonstração:

( $\Rightarrow$ ) Considere  $A, B, C, D, E$  e  $F$  seis pontos sobre uma cônica. Esses seis pontos formam o hexágono  $ABCDEF$ , cujos pontos diagonais são  $J = AB.DE$ ,  $K = BC.EF$  e  $L = CD.FA$ . Pelo Teorema 2.4,  $J, K$  e  $L$  são colineares.

( $\Leftarrow$ ) Considere os pontos  $A, B, C, D, E$  e  $F$  de modo que  $J = AB.DE$ ,  $K = BC.EF$  e  $L = CD.FA$ . Novamente pelo Teorema 2.4,  $J, K$  e  $L$  são pontos diagonais de um hexágono  $ABCDEF$ , mas, pelo Teorema 2.5, temos que  $A, B, C, D, E$  e  $F$  definem uma única cônica de pontos. ■

### Teorema de Brianchon

Utilizando o Princípio da Dualidade, o Teorema de Pascal tem como dual o Teorema de Brianchon com a seguinte configuração: um hexágono  $ABCDEF$  está circunscrito a uma cônica de pontos se e somente se as diagonais dos vértices opostos são simultaneamente concorrentes em um único ponto. (Ver Figura 3.4)

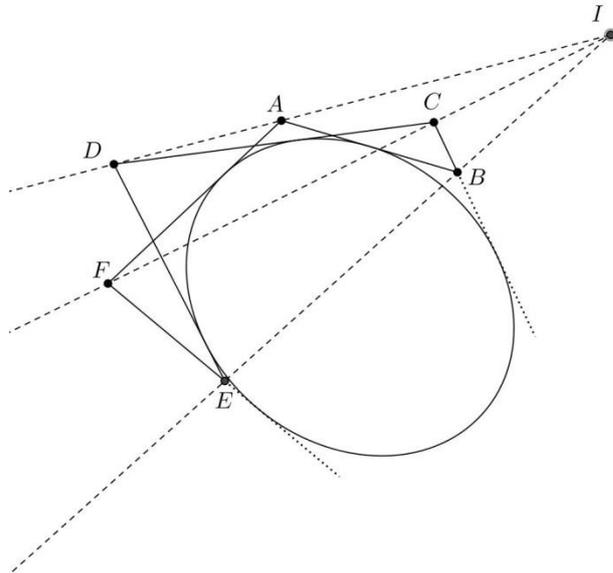


Figura 3.4 - Teorema de Brianchon

## Teorema de Carnot

Dado um triângulo  $ABC$  e os pontos  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$  tal que  $A_1$  e  $A_2$  pertencem ao lado  $BC$ ;  $B_1$  e  $B_2$  pertencem ao lado  $AC$  e  $C_1$  e  $C_2$  pertencem ao lado  $AB$ , conforme Figura 3.5, temos que os pontos  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$  são pontos de uma cônica de pontos se e somente se:

$$\left(\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2}\right) \cdot \left(\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_2}{CA_2}\right) \cdot \left(\frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_2}{AB_2}\right) = 1$$

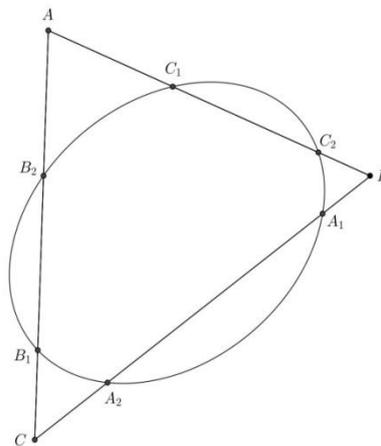


Figura 3.5 - Teorema de Carnot

Demonstração:

( $\Rightarrow$ ) Considere um triângulo  $ABC$  e os pontos  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$  pertencentes a uma cônica  $\varepsilon$  tal que  $A_1$  e  $A_2$  pertencem ao lado  $BC$ ,  $B_1$  e  $B_2$  pertencem ao lado  $AC$  e  $C_1$  e  $C_2$  pertencem ao lado  $AB$ .

Sejam ainda os pontos de interseção  $J = A_2B_1 \cdot AB$ ,  $K = B_2C_1 \cdot BC$  e  $L = A_1C_2 \cdot AC$ . (Ver Figura 3.6).

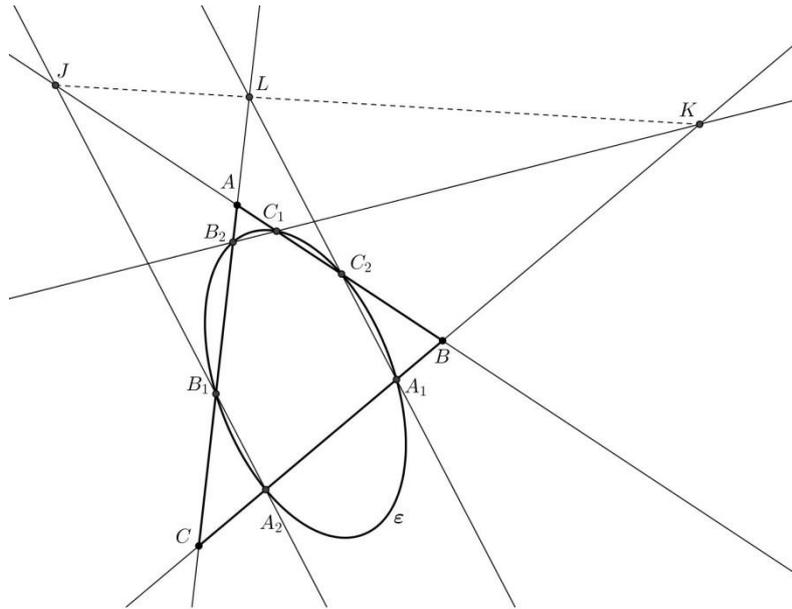


Figura 3.6 - Demonstração do Teorema de Carnot

Pelo Teorema de Pascal, temos que J, K e L são colineares. Assim, utilizando o Teorema de Menelaus temos que:

$$\frac{AL}{LC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BJ}{JA} = 1. \quad (1)$$

Aplicando o Teorema de Menelaus três vezes nas retas  $A_1C_2$ ,  $B_2C_1$  e  $A_2B_1$  e no triângulo ABC temos:

$$\frac{AL}{LC} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} \cdot \frac{BJ}{JA} = 1 \quad (4)$$

Multiplicando (2), (3) e (4) e dividindo por (1), obtemos que:

$$\left(\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2}\right) \left(\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_2}{CA_2}\right) \left(\frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_2}{AB_2}\right) = 1.$$

( $\Leftarrow$ ) A prova na direção contrária é semelhante. Considerando o triângulo  $ABC$  e os pontos  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$ , sendo  $A_1$  e  $A_2$  pontos do lado  $BC$ ,  $B_1$  e  $B_2$  pontos do lado  $AC$  e  $C_1$  e  $C_2$  pontos do lado  $AB$ , pelo Teorema de Menelaus, obtemos (2), (3) e (4). Com essas relações, (2), (3) e (4), podemos deduzir que  $\frac{AL}{LC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BJ}{JA} = 1$ . Assim, pelo inverso do Teorema de Menelaus,  $J, K$  e  $L$  são colineares. E pelo inverso do Teorema de Pascal, temos que os pontos  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$  estão em uma mesma cônica.

Observação 3.2 – O Teorema de Carnot, descrito acima, pode ser interpretado da seguinte forma:

“Considere os pontos  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$ . Considere ainda os pontos de interseção  $I = A_2B_1 \cdot B_2C_2$ ,  $I' = A_1B_1 \cdot C_1C_2$ . Os pontos  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$  são pontos de uma cônica se e somente se as retas  $II', A_1B_1, A_2C_1$  são simultaneamente concorrentes em um ponto  $K$ . (Ver Figura 3.7).

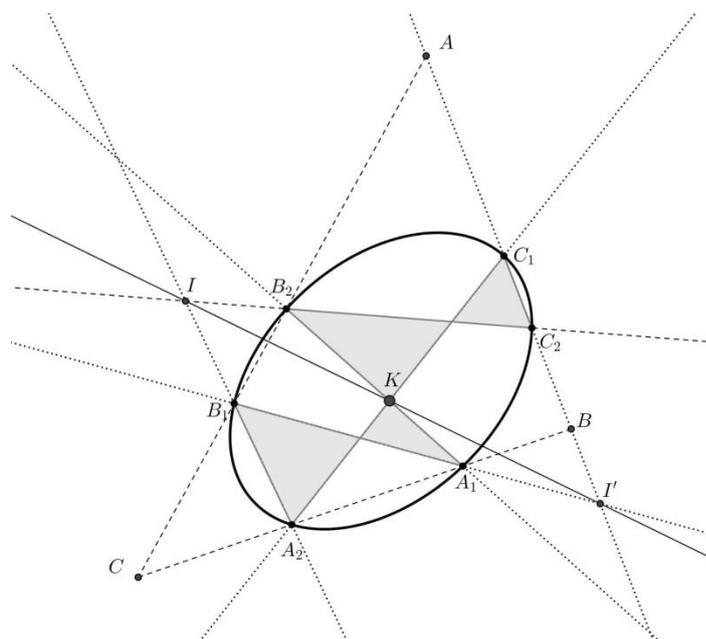


Figura 3.7 - Teorema de Carnot (versão 2)

### Teorema de Carnot Dual

Utilizando o Princípio da dualidade, podemos obter, a partir da interpretação do Teorema de Carnot, descrita acima, o seguinte teorema:

Considere as retas  $tgA_1$ ,  $tgA_2$ ,  $tgB_1$ ,  $tgB_2$ ,  $tgC_1$  e  $tgC_2$ , contendo os pontos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente. Essas seis retas são tangente a uma cônica  $\varepsilon$  se e somente se os pontos  $J$ ,  $K$  e  $L$  são colineares, sendo:

$$I = tgB_1.tgC_2 \quad I' = tgB_2.tgA_1$$

$$P = tgB_2.tgA_2 \quad P' = tgC_1.tgC_2$$

$$J = tgB_1.tgA_2 \quad K = II'.PP' \quad L = tgA_1.tgC_1$$

Ou seja, o hexágono formado pelas interseções das seis retas  $tgA_1$ ,  $tgA_2$ ,  $tgB_1$ ,  $tgB_2$ ,  $tgC_1$  e  $tgC_2$  está circunscrito a uma cônica se e somente se os pontos  $J$ ,  $K$  e  $L$  são colineares, conforme Figura 3.8.

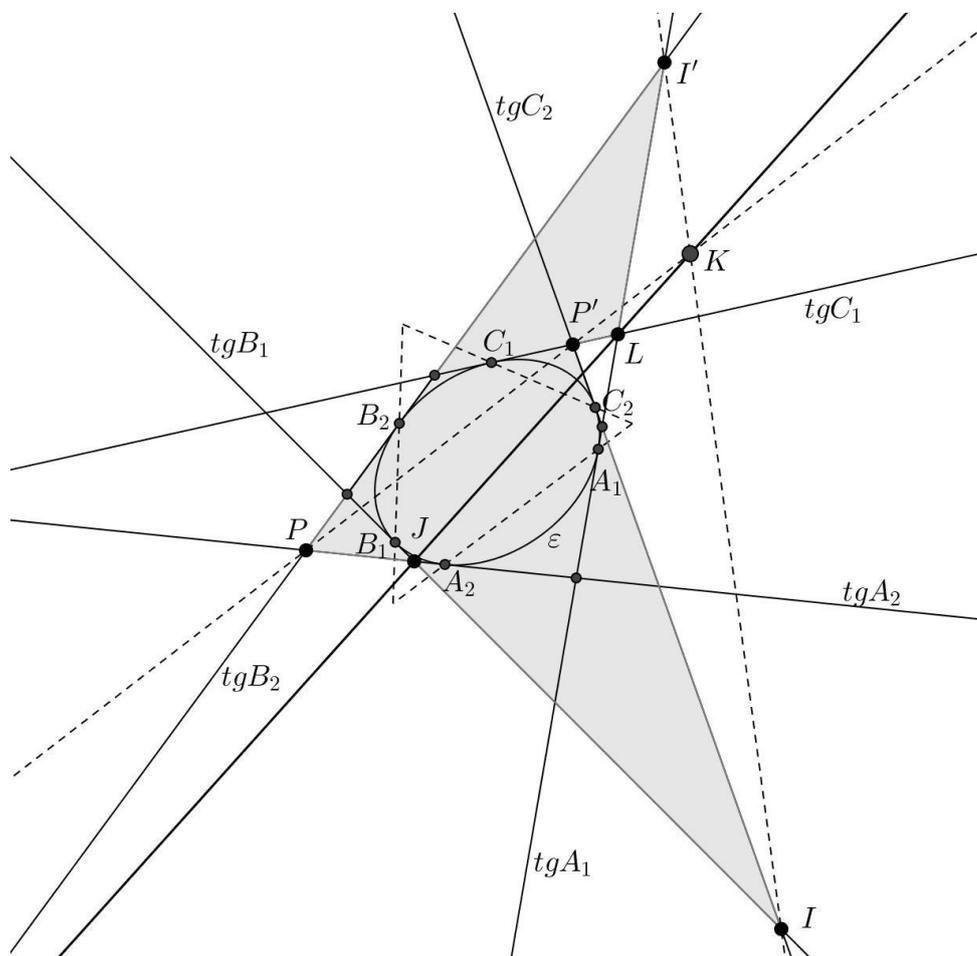


Figura 3.8 - Teorema de Carnot Dual

## Teorema 3.1

Se dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta DEF$  estão inscritos em uma cônica  $C_1$  e os dois triângulos não têm vértice comum, então os seis lados dos dois triângulos são tangentes a uma cônica  $C_2$ .

Demonstração:

Considere uma cônica  $C_1$  na qual estão inscritos os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta DEF$ , sem que os triângulos possuam vértice comum.

Considere, agora, o hexágono  $ABCDEF$ , formado pelos seis vértices dos dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta DEF$ , conforme na Figura 3.9 abaixo.

Temos que os pares de lados  $AB$  e  $DE$ ,  $BC$  e  $EF$ ,  $CD$  e  $FA$  são pares de lados opostos. Sendo assim, pelo Teorema de Pascal, os pontos  $J' = AB \cdot DE$ ,  $K' = CD \cdot FA$  e  $L' = BC \cdot EF$  são colineares.

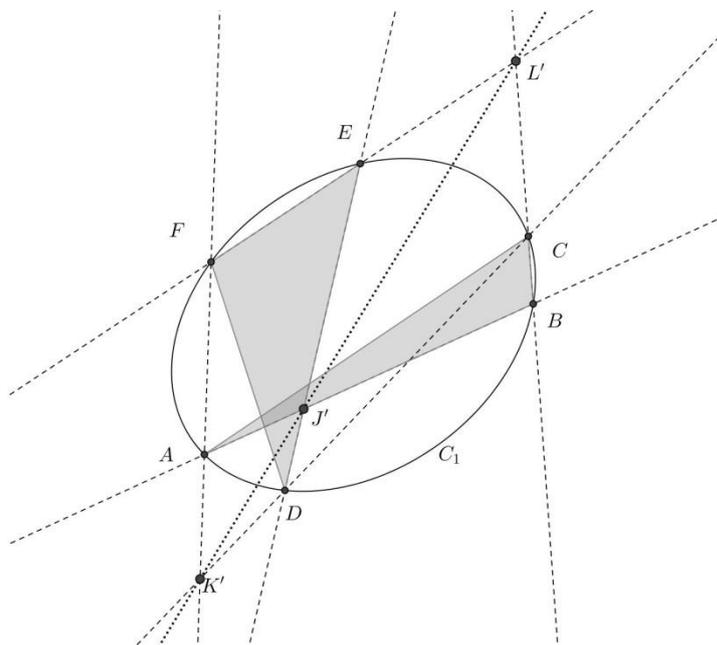


Figura 3.9 - Teorema 3.1

Façamos agora, uma correspondência dos seis lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ ,  $DE$ ,  $EF$  e  $DF$ , dos dois triângulos, respectivamente, com as retas  $tgA_2$ ,  $tgA_1$ ,  $tgB_2$ ,  $tgB_1$ ,  $tgC_1$  e  $tgC_2$ , da Figura 3.8. (Ver Figura 3.10).

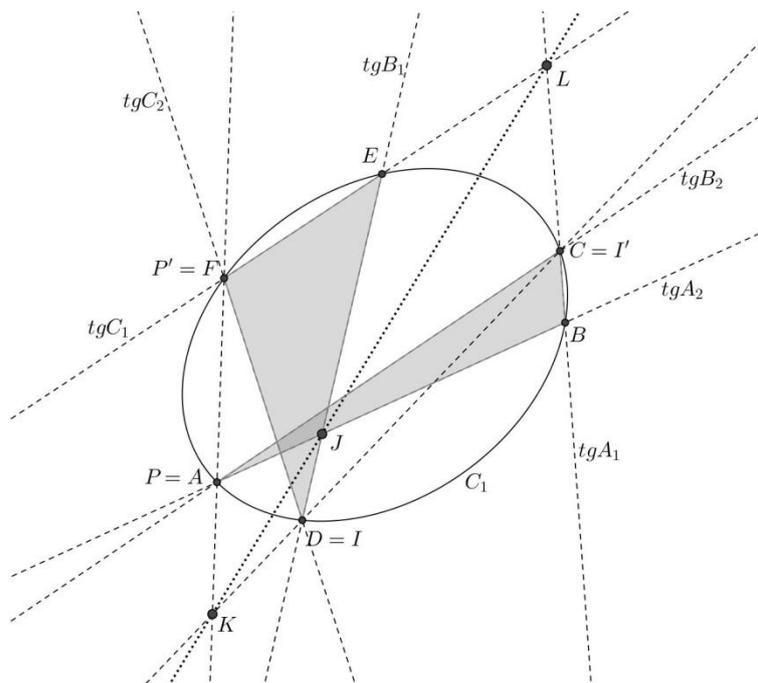


Figura 3.10 – Demonstração do Teorema 3.1

Pelo Teorema de Carnot Dual, os esses seis lados dos dois triângulos são tangentes a uma cônica se e somente se os pontos  $J$ ,  $K$  e  $L$  são colineares, sendo  $J = \text{tg}B_1.\text{tg}A_2$ ,  $K = \text{II}'.\text{PP}'$  e  $L = \text{tg}A_1.\text{tg}C_1$ , onde  $I = \text{tg}B_1.\text{tg}C_2$ ,  $I' = \text{tg}B_2.\text{tg}A_1$ ,  $P = \text{tg}B_2.A_2$  e  $P' = \text{tg}C_1.\text{tg}C_2$ . Mas  $J$ ,  $K$  e  $L$  são respectivamente  $J'$ ,  $K'$  e  $L'$ , que são colineares, como visto acima. Isto equivale dizer que  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  estão sobre uma cônica. ■

### Teorema de Poncelet para triângulos

O Teorema 2.6 acima nos diz que se  $C_1$  e  $C_2$  são duas cônicas não degeneradas e um triângulo  $\triangle ABC$  está inscrito em  $C_1$  e circunscrito a  $C_2$ , então para qualquer ponto  $D$  em  $C_1$  para o qual existam duas tangentes a  $C_2$ , existe um triângulo  $\triangle DEF$  que também é inscrito a  $C_1$  e circunscrito a  $C_2$ .

Demonstração:

Sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  pontos distintos de  $C_1$ , tais que  $DE$  e  $DF$  sejam tangentes a  $C_2$ . Por construção, temos que  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $DE$  e  $DF$  são tangentes a  $C_2$ . Mas, pelo Teorema 3.1, os seis lados dos dois triângulos são tangentes a uma cônica  $C_2'$ . Como visto no segundo capítulo, uma cônica é unicamente determinada por cinco pontos (ou por cinco tangentes), o que implica  $C_2 = C_2'$ . Logo, o triângulo  $\triangle DEF$  é circunscrito a  $C_2$ . ■

## 4 - Porismo de Poncelet - Caso Geral

Neste capítulo será feita uma demonstração do caso geral do Porismo de Poncelet.

Consideremos duas cônicas  $C_1$  e  $C_2$  não degeneradas, em qualquer posição, que não se cruzem, e que exista um polígono  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_n$  inscrito em  $C_1$ , de modo que seu “n” lados,  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ , sejam tangentes a  $C_2$ . Sendo n mínimo com esta propriedade.

Seja  $B_1B_2B_3 \dots B_n$  um outro polígono inscrito em  $C_1$ , com  $B_i \neq A_i$  e seus “n-1” lados  $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_{n-1}B_n$  tangentes a  $C_2$  temos que  $B_nB_1$  também será tangente a  $C_2$ . (Ver Figura 4.1)

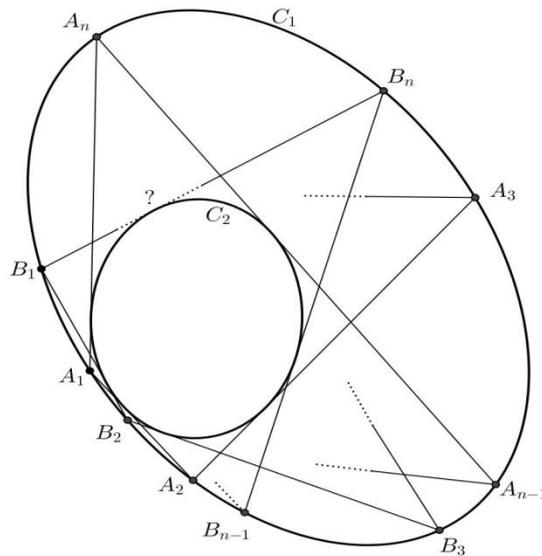


Figura 4.1 - Porismo de Poncelet (Caso Geral)

Para iniciar a demonstração vamos enunciar um lema que será utilizado na prova do porismo descrito acima.

Lema 4.1

Para  $n \geq 4$ , os pontos de interseção  $J = (A_1A_2) \cdot (B_1B_2)$ ,  $K = (A_2B_{n-1}) \cdot (B_2A_{n-1})$  e  $L = (A_{n-1}A_n) \cdot (B_{n-1}B_n)$  são distintos e colineares. (Ver Figura 4.2)

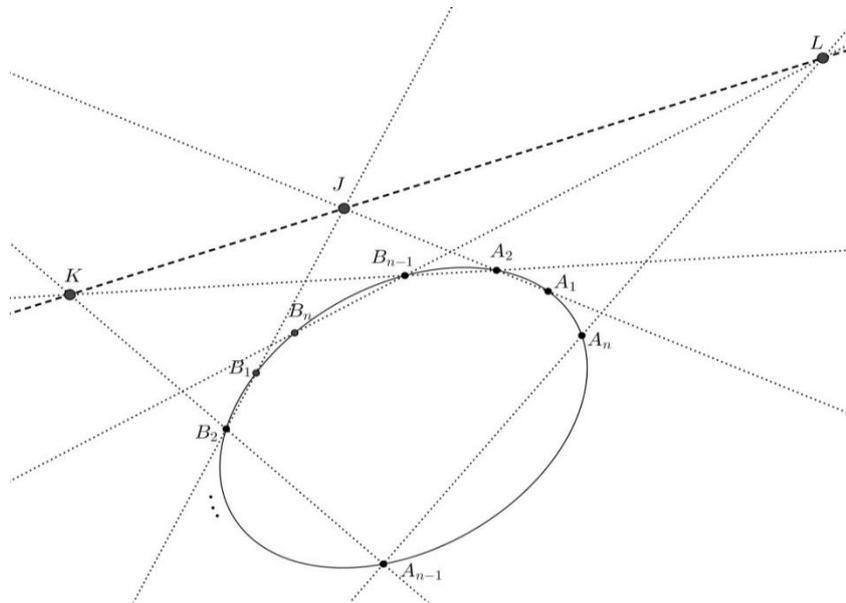


Figura 4.2 - Lema 4.1

Demonstração: Dependendo da paridade de  $n$  temos uma das seguintes ancoragens.

Se  $n$  for par, com  $k = \frac{n}{2}$ , conforme Figura 4.3, temos:

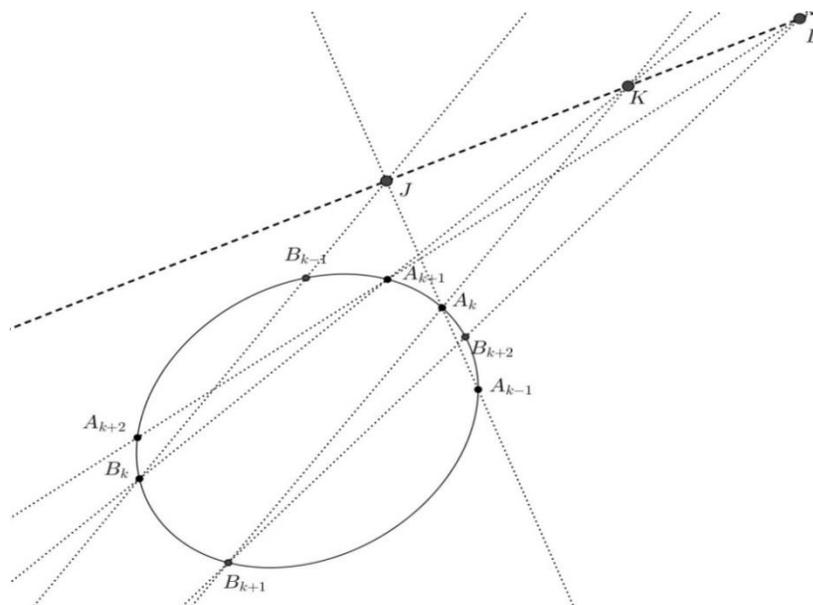


Figura 4.3 - Lema 3.1 para  $n$  par

Aplicando o Teorema de Carnot Dual nas retas  $A_k A_{k+1}$ ,  $A_{k-1} A_k$ ,  $B_{k+1} B_{k+2}$ ,  $B_k B_{k+1}$ ,  $B_{k-1} B_k$  e  $A_{k+1} A_{k+2}$ , temos que os pontos  $J$ ,  $K$  e  $L$  são colineares.

Se  $n$  é ímpar, com  $k = \frac{n+1}{2}$ , conforme Figura 4.4, temos:

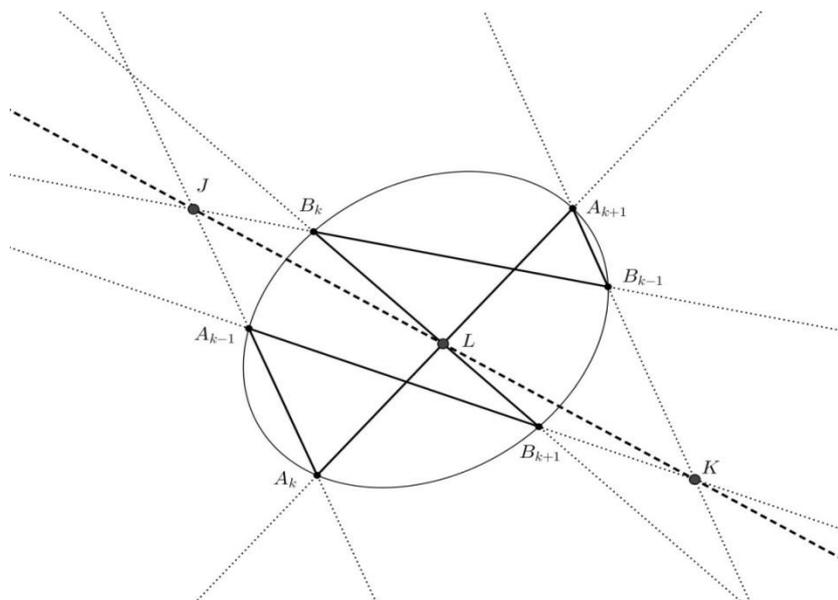


Figura 4.4 - Lema 4.1 para  $n$  ímpar

Aplicando o Teorema de Pascal no hexágono  $A_{k-1}A_kA_{k+1}B_{k-1}B_kB_{k+1}$  temos que  $J$ ,  $K$  e  $L$  são colineares. O que prova o lema para  $n = 4$ .

Para  $n \geq 5$ , o Lema 4.1 segue a partir de duas proposições.

**Proposição 4.1** – Sejam  $p$  e  $q$  dois inteiros de modo que  $2 \leq p < q \leq n-1$  e sejam definidos os seguintes pontos de interseção:

$$J' = (A_{p-1}A_p) \cdot (B_{p-1}B_p) \quad J = (A_pA_{p+1}) \cdot (B_pB_{p+1})$$

$$L = (A_{q-1}A_q) \cdot (B_{q-1}B_q) \quad L' = (A_qA_{q+1}) \cdot (B_qB_{q+1})$$

$$K = (A_pB_q) \cdot (B_pA_q)$$

Se  $J$ ,  $K$  e  $L$  são distintos e colineares, então  $J'$ ,  $K$  e  $L'$  também são.

Demonstração: Sejam  $J$ ,  $K$  e  $L$  pontos distintos e colineares, como descritos acima. (Ver Figura 4.5)

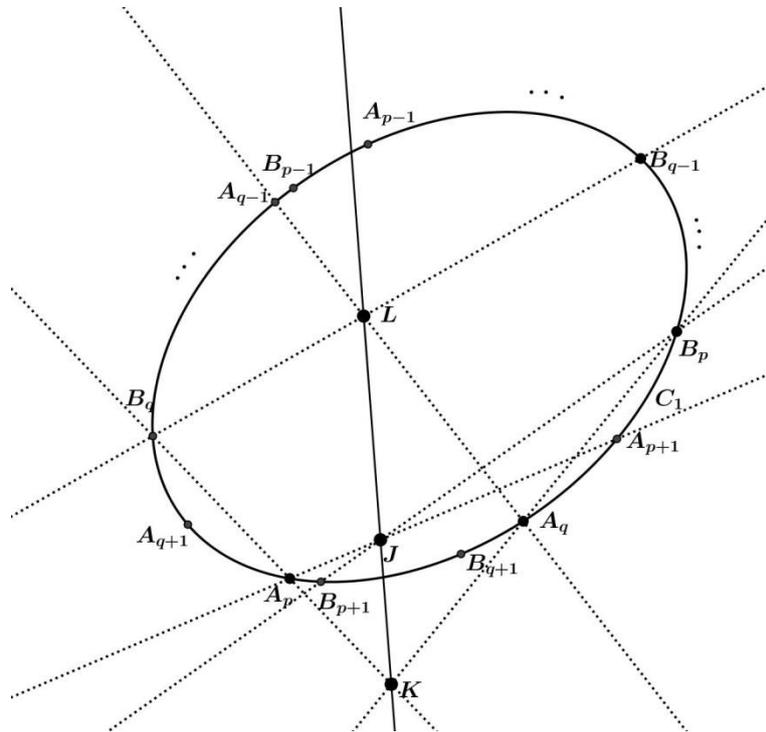


Figura 4.5 - Proposição 4.1 -  $J, K$  e  $L$  colineares

Considere os pontos  $J'$  e  $L'$  também descritos acima. (Ver Figura 4.6)

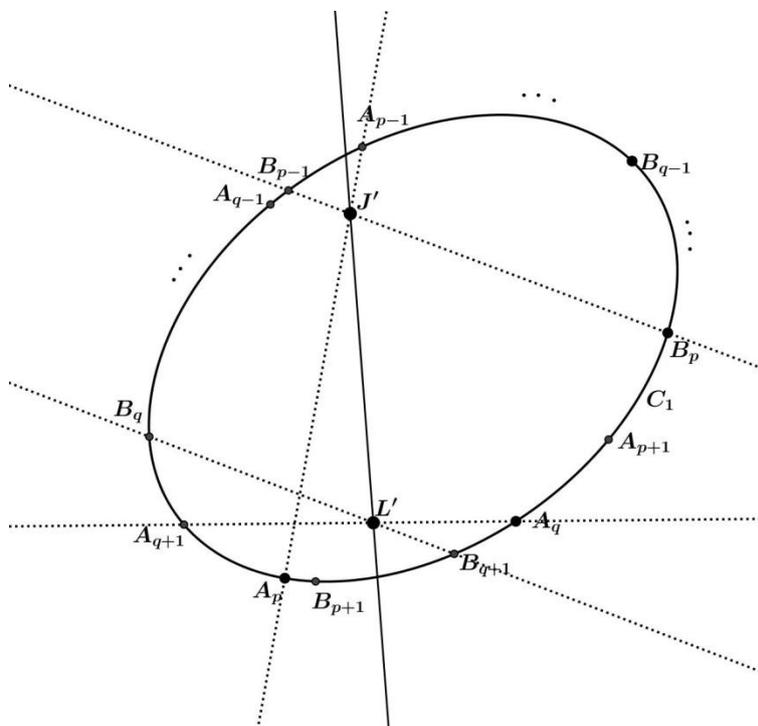


Figura 4.6 - Proposição 4.1 - Pontos  $J'$  e  $L'$

Na Figura 4.7 estão representadas as retas  $\alpha = B_p A_q$ ,  $\gamma = JL$  e  $\varepsilon = [(A_p A_{p+1}) \cdot (A_q A_{q+1})][(B_p B_{p-1}) \cdot (B_q B_{q-1})]$ .

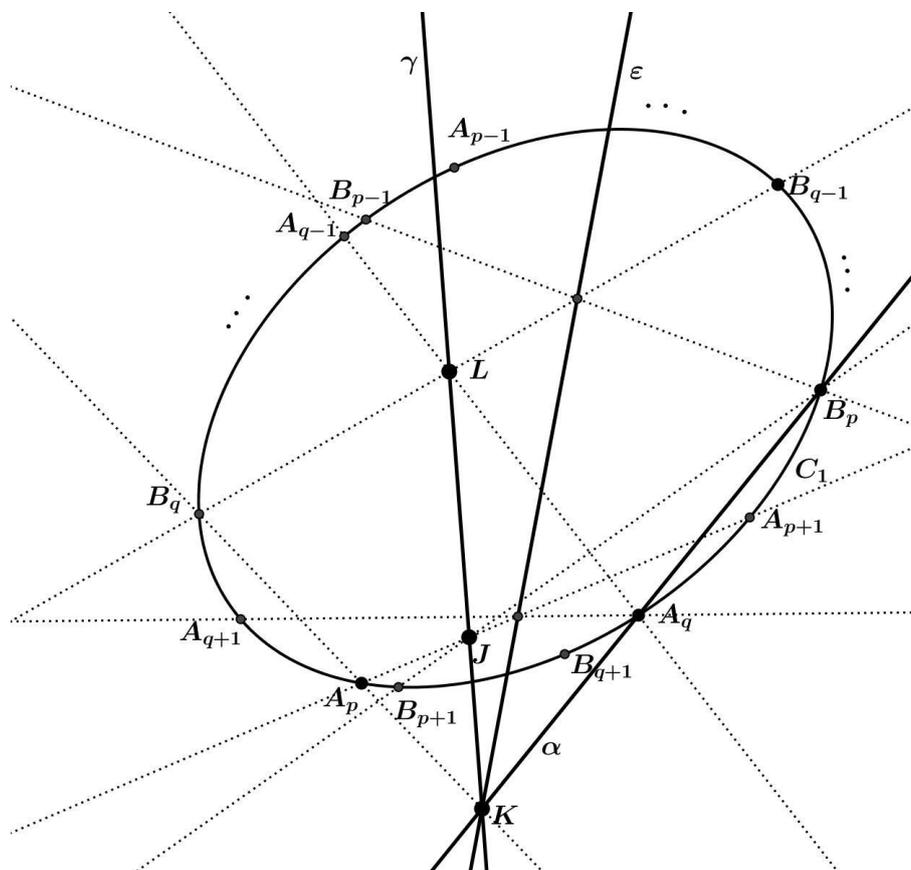


Figura 4.7 – Retas  $\alpha, \gamma$  e  $\varepsilon$

Aplicando o Teorema de Brianchon nas retas  $A_q A_{q+1}$ ,  $A_p A_{p+1}$ ,  $B_p B_{p+1}$ ,  $B_{p-1} B_p$ ,  $B_q B_{q-1}$  e  $A_{q-1} A_q$  temos que as retas  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\varepsilon$  são distintas e simultaneamente concorrentes no ponto K. (1)

Na próxima figura estão representadas as retas  $\alpha$  e  $\gamma$ , descritas acima, e também a reta  $\beta = A_p \cdot B_q$ .

As retas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  se encontram por suposição em K e são distintas. Por (1) temos que  $\alpha$  e  $\gamma$  são distintas, e por simetria  $\beta$  e  $\gamma$  também são distintas. Uma vez que uma reta encontra uma cônica não degenerada em dois pontos distintos, temos que  $\alpha$  e  $\beta$  também são distintas. (Ver Figura 4.8) (2)

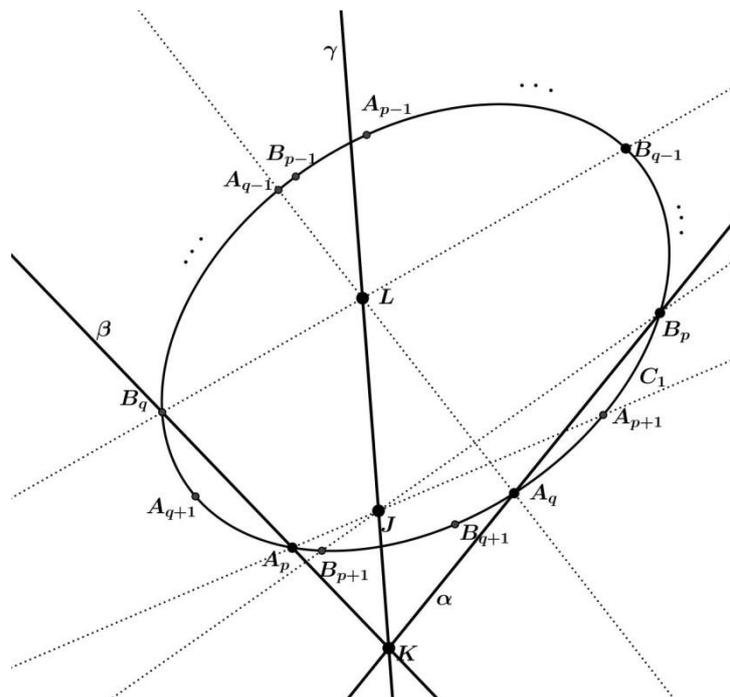


Figura 4.8 – Retas  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$

A Figura 4.9 abaixo traz, além das retas  $\beta$  e  $\varepsilon$  descritas anteriormente, uma nova reta  $\delta = J'L'$ .

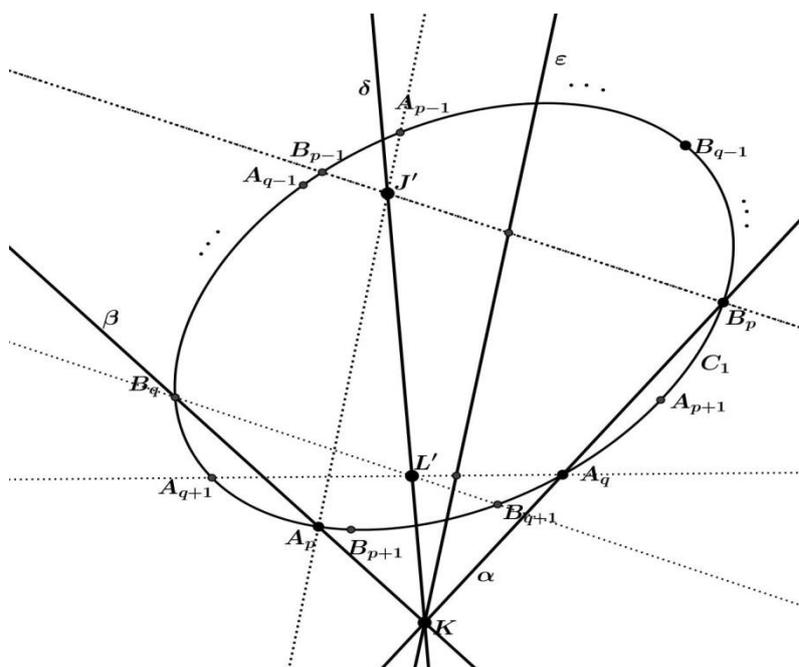


Figura 4.9 – Retas  $\beta$ ,  $\varepsilon$  e  $\delta$

Aplicando o Teorema de Brianchon nas retas  $A_{p-1}A_p$ ,  $A_pA_{p+1}$ ,  $A_qA_{q+1}$ ,  $B_qB_{q+1}$ ,  $B_{q-1}B_q$  e  $B_{p-1}B_p$ , temos que as retas  $\beta$ ,  $\varepsilon$  e  $\delta$  são distintas e concorrentes.

(3)

Por (1) e (2) temos que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\varepsilon$  se encontram em  $K$ , e por (3) obtemos que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  se encontram também em  $K$ , o que implica que  $J'$ ,  $K$  e  $L'$  são colineares e distintos.

Se  $J' = L'$ , então as quatro retas  $A_{p-1}A_p$ ,  $B_{p-1}B_p$ ,  $A_qA_{q+1}$  e  $B_qB_{q+1}$ , que são todas tangentes a  $C_2$ , seriam concorrentes, mas, então essas quatro retas não seriam distintas, e uma vez que os pontos  $A_{p-1}$ ,  $A_p$ ,  $A_q$ ,  $A_{q+1}$ ,  $B_{p-1}$ ,  $B_p$ ,  $B_q$  e  $B_{p+1}$  são distintos, pois  $2 \leq p < q \leq n-1$ , o que implica  $1 \leq p-1 < q+1 \leq n$ , isso contradiz a suposição de  $C_1$  não ser degenerada.

Por Argumento semelhante segue-se que tanto  $J'$  como  $L'$  são distintos de  $K$ .

**Proposição 4.2** – Sejam  $J'$ ,  $K$  e  $L'$  como descritos na Proposição 4.1 e defina um novo ponto  $K' = (A_{p-1}B_{q+1}) \cdot (B_{p-1}A_{q+1})$ . Desse modo temos que  $J'$ ,  $K'$  e  $L'$  são distintos e colineares.

A Figura 4.10 abaixo traz as condições da Proposição 4.2 com os pontos  $J'$ ,  $K$  e  $L'$ . Já na Figura 4.11 temos a situação que queremos chegar, que  $J'$ ,  $K'$  e  $L'$  são distintos e colineares.

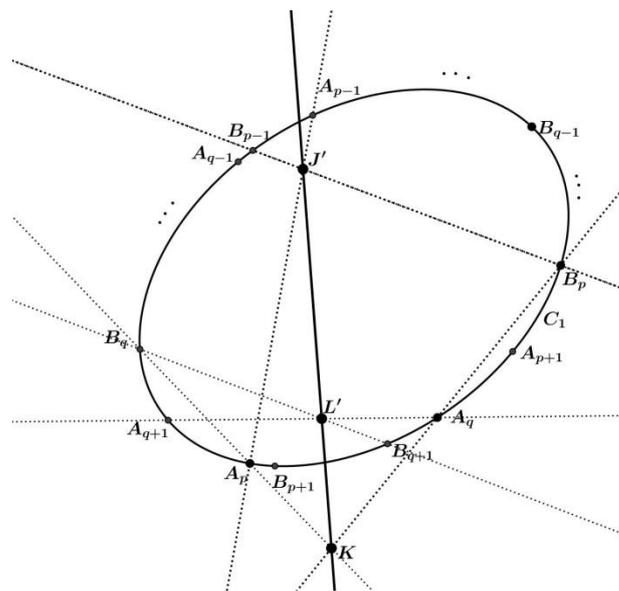


Figura 4.10 -  $J'$ ,  $K$  e  $L'$  colineares

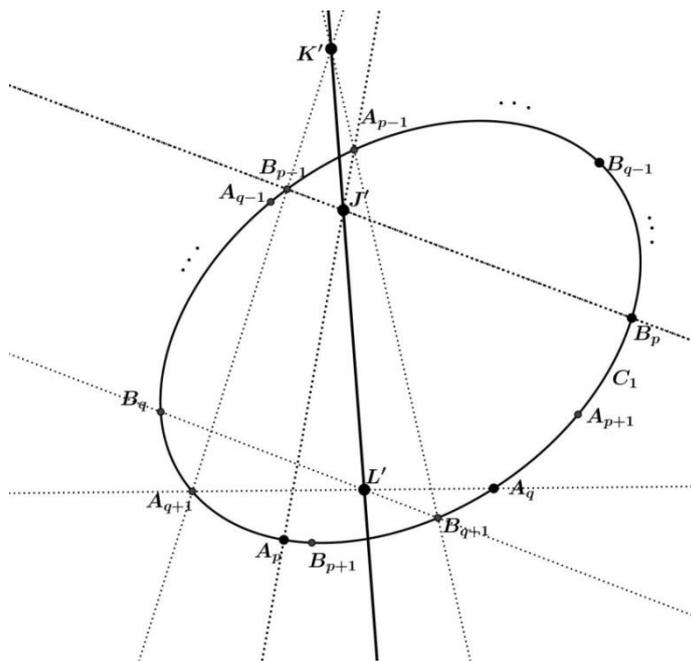


Figura 4.11 - J', K' e L' colineares

Demonstração: Por suposição, os pontos J', K e L' são distintos e colineares. (Ver Figura 4.10). (1)

Considere um ponto auxiliar I = (A\_q A\_{p-1}) \cdot (B\_q B\_{p-1}) ilustrado na Figura 4.12 abaixo.

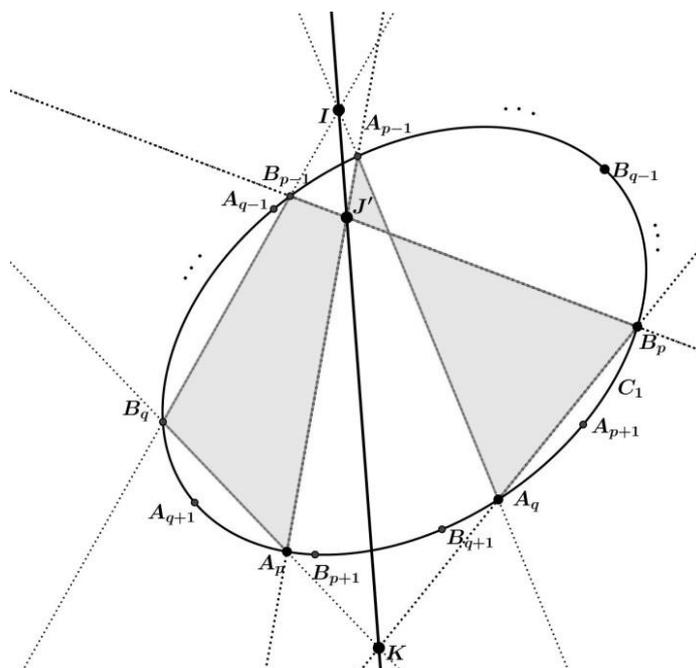


Figura 4.12 - Pontos I, J' e K

Aplicando o Teorema de Pascal no hexágono de vértices  $A_{p-1}A_pB_qB_{p-1}B_pA_q$  os pontos  $J'$ ,  $K$  e  $I$  são distintos e colineares. (2)

Se considerarmos os pontos  $I$ ,  $K'$  e  $L'$  na Figura 4.13 abaixo e aplicarmos agora o Teorema de Pascal no hexágono  $A_{p-1}A_qA_{q+1}B_{p-1}B_qB_{q+1}$ , temos que os pontos  $I$ ,  $K'$  e  $L'$  são distintos e colineares. (3)

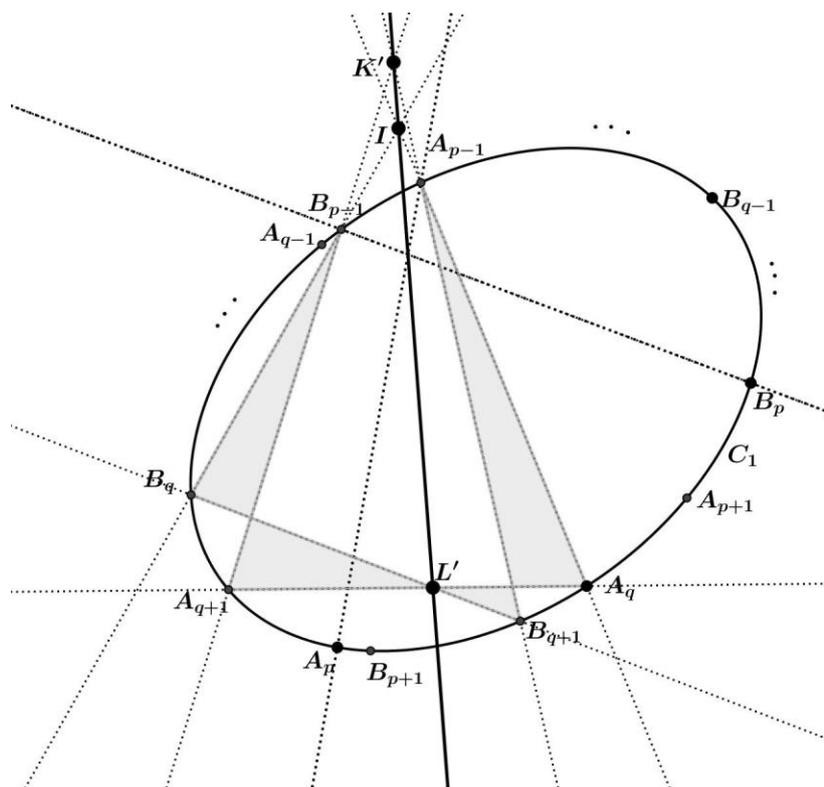


Figura 4.13 - Pontos  $I$ ,  $K'$  e  $L'$

Por (1) e (2) obtemos que os pontos  $J'$ ,  $I$  e  $L'$  são colineares, e por (3) obtemos que  $K'$  encontra-se na reta que passa por  $I$  e  $L'$ . Assim,  $J'$ ,  $K'$  e  $L'$  são colineares.

Por (1) e (2) e uma versão simétrica de (3) temos que os três pontos  $J'$ ,  $K'$  e  $L'$  são dois a dois distintos.

Por uma aplicação iterativa das proposições 4.1 e 4.2 obtemos que  $J'$ ,  $K'$  e  $L'$  são distintos e colineares (ver Figura 4.14).

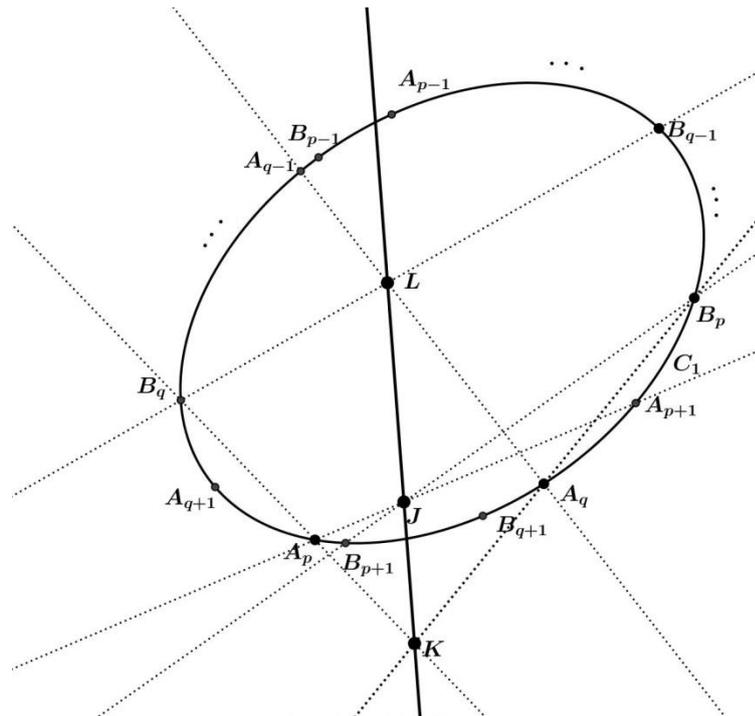


Figura 4.14 - Pontos J, K e L colineares

Essas são as informações que precisamos para demonstrar o caso geral do Porismo de Poncelet introduzido no início do capítulo.

Queremos mostrar que sendo  $A_1A_2A_3\dots A_n$  um polígono que está inscrito em  $C_1$  e circunscrito a  $C_2$  e a linha poligonal  $B_1B_2B_3\dots B_n$  tem seus “ $n-1$ ” lados tangentes a  $C_2$  e  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  pertencem a  $C_1$ ,  $B_nB_1$  é também tangente a  $C_2$ .

Demonstração: Pelo Lema 4.1, temos que J, K e L são distintos e colineares, onde:

$$J = (A_1A_2) \cdot (B_1B_2),$$

$$K = (A_2B_{n-1}) \cdot (B_2A_{n-1}) \text{ e}$$

$$L = (A_{n-1}A_n) \cdot (B_{n-1}B_n).$$

Vamos introduzir mais dois pontos de interseção:

$$I = (A_{n-1}A_1) \cdot (B_{n-1}B_1) \text{ e } K' = (A_nB_1) \cdot (B_nA_1)$$

Na Figura 4.15 abaixo estão representados os pontos I, J, K, K' e L.

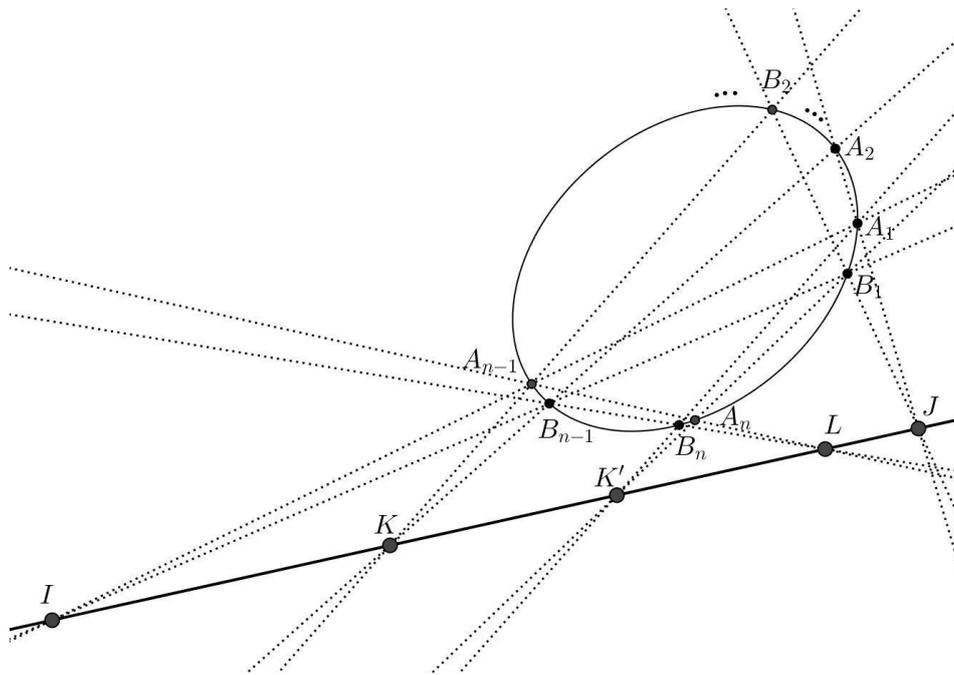


Figura 4.15 - Pontos I, J, K, K' e L

Vamos aplicar o Teorema de Pascal duas vezes, conforme a Figura 4.16 e a Figura 4.17.

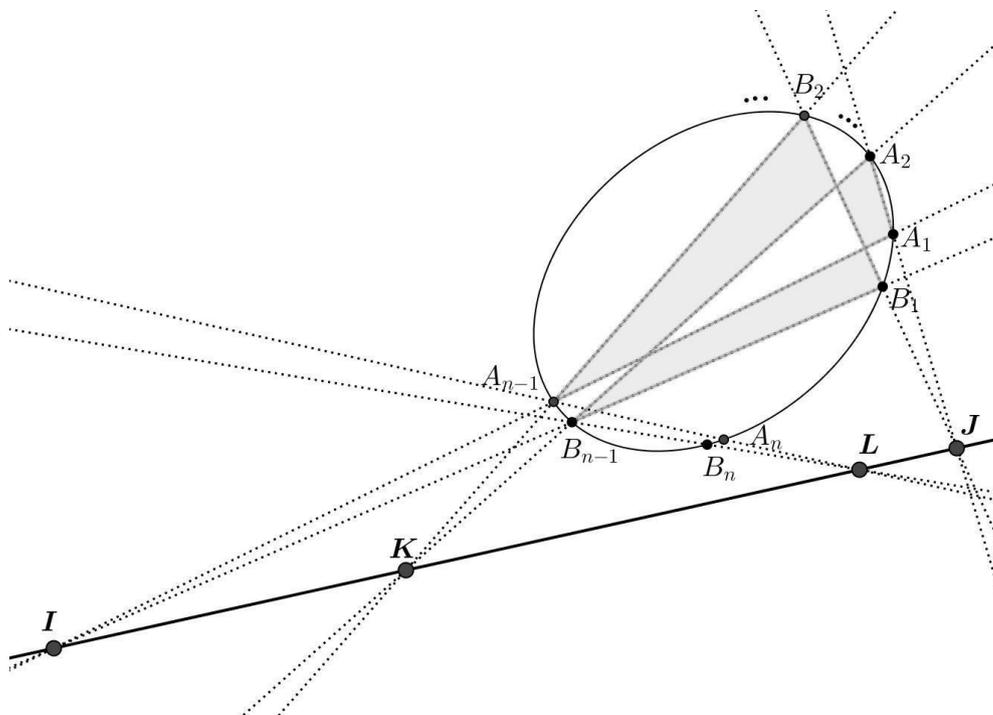


Figura 416 - Teorema de Pascal no hexágono  $A_1A_2B_{n-1}B_1B_2A_{n-1}$

Aplicando o Teorema de Pascal no hexágono  $A_1A_2B_{n-1}B_1B_2A_{n-1}$ , temos que os pontos I, J e K são distintos e colineares. (Ver Figura 4.16) (1)

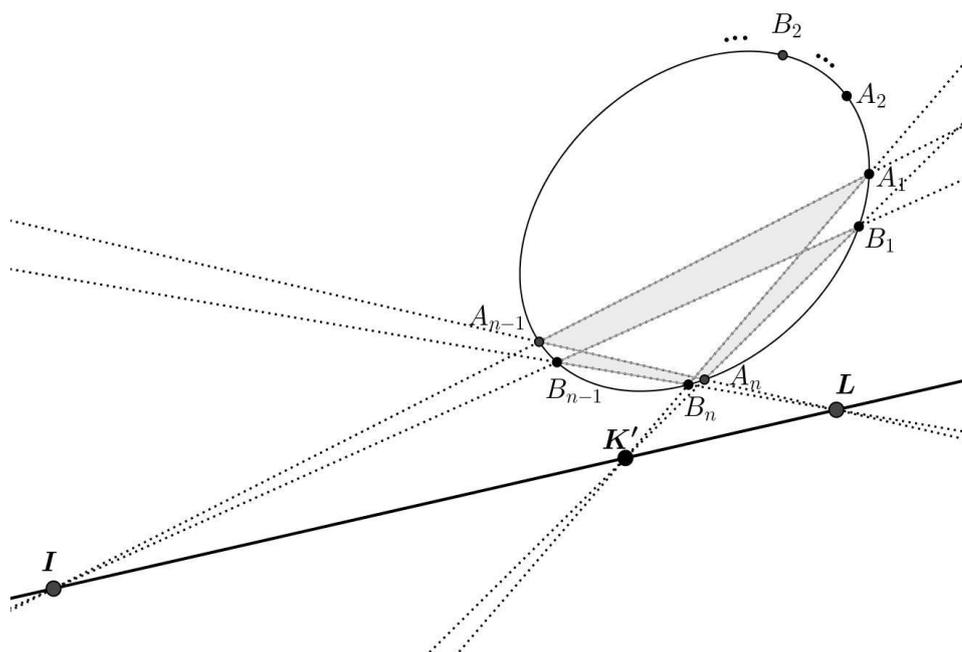


Figura 417 - Teorema de Pascal no hexágono  $A_{n-1}A_nB_1B_{n-1}B_nA_1$

Aplicando o Teorema de Pascal no hexágono  $A_{n-1}A_nB_1B_{n-1}B_nA_1$ , temos que os pontos  $I$ ,  $K'$  e  $L$  são distintos e colineares. (Ver Figura 4.17) (2)

Como já visto, o Lema 4.1 garante que os pontos  $J$ ,  $K$  e  $L$  são distintos e colineares. Por (1) temos que  $I$ ,  $J$ ,  $K$  e  $L$  são colineares, e finalmente por (2) obtemos que os pontos  $J$ ,  $K'$  e  $L$  são colineares.

Por último, aplicamos o Teorema de Carnot Dual nas seis retas  $A_1A_n$ ,  $A_{n-1}A_n$ ,  $B_1B_2$ ,  $B_1B_n$ ,  $B_{n-1}B_n$  e  $A_1A_2$ . Como os pontos  $J$ ,  $K'$  e  $L$  são colineares, temos que as seis retas  $A_1A_n$ ,  $A_{n-1}A_n$ ,  $B_1B_2$ ,  $B_1B_n$ ,  $B_{n-1}B_n$  e  $A_1A_2$  são tangentes a uma cônica  $C_2'$ . Mas como uma cônica é unicamente determinada por 5 pontos (ou tangentes), e  $A_1A_n$ ,  $A_{n-1}A_n$ ,  $B_1B_2$ ,  $B_{n-1}B_n$  e  $A_1A_2$  são tangentes a  $C_2$ , temos que  $C_2$  e  $C_2'$  coincidem. Isto implica que  $B_nB_1$  é tangente a  $C_2$ , como queríamos demonstrar.

## 5 – Referências bibliográficas

ANDRADE, L. N; A construção de cônica e o Teorema de Pascal, Revista do Professor de Matemática, 45, 2001

BARALIC, D; Around the Carnot theorem, Mathematical Institute SASA, Belgrade, Serbia, 2013.

CHAVES, J. A.; GRIMBERG, G. E; O Tratado sobre as Propriedades Projetivas das Figuras de Jean-Victor Poncelet: Elementos de uma Gênese, Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 14 no 28 - pág. 85 106 - Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

DE CASTRO, R. B; Tópicos da Geometria Projetiva, Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012.

HALBEISEN, L; HUNGERBUHLER, N; A Simple Proof of Poncelet's Theorem (on the occasion of its bicentennial), Mathematical Assoc. of America - September 1, 2014.

HEFEZ, A; Uma Introdução a História da Geometria Projetiva, Universidade Federal do Espírito Santo, outubro de 1985.

TANG, M; A quick introduction to (Ceva's and) Menelaus's Theorem, May 17, 2015.