7
Referências Bibliográficas

BARROS. M. **Processos Estocásticos**. Papel Virtual, Brasil, 2004.

BOWERS, N.L. et al. **Actuarial Mathematics.** Second Edition. SOA- Society of Actuaries, 1997.

DRAFT. **Advice to the European Commission in the Framework of the Solvency II Project on Pillar I issues – further advice.** CEIOPS-CP-09/06, 10 November 2006.

FELBLUM, S. NAIC **Property/Casualty Insurance Company Risk Based Capital Requerements. In: Procedings of Casualty Actuaries Society**, 83,1996,PP.297-435

FENASEG, Apresentações , **Modelo Interno - Capital Requerido para Risco de Subscrição**, ocorrido no dia 31 de maio de 2007. <http://www.fenaseg.org.br/main.asp?View=%7BE48C8F6F%2DF7CA%2D48B9%2DA006%2D6A91FB928FBF%7D&Team=&params=itemID=%7BD2D3D8BE%2D0C34%2D4934%2DB128%2DCCF2A5FB76A6%7D%3B&UIPartUID=%7B80714A74%2DABE0%2D496B%2DBCCD%2D266D2C64DE8C%7D>

FERREIRA, W.J. **Coleção introdução à ciência atuarial**. v. 1, Rio de Janeiro, 1985.

FERREIRA, W.J. **Coleção introdução à ciência atuarial**. v. 2, Rio de Janeiro, 1985.

FERREIRA, W.J. **Coleção introdução à ciência atuarial**. v. 3, Rio de Janeiro, 1985.

FRAGA.E. **Avaliação do Risco de Subscrição de Prêmio utilizando Inferência Bayesiana**. Revista Brasileira de Risco e Seguro, v.1, n.1, p.64-83.abr./jul.,2005.

GAMERMAN, D. **Simulação Estocástica via Cadeias de Markov.** XII SINAPE-ABE

GRUPO DE SUBSCRIÇÃO. **Regulação das linhas de Ações Preventivas e Capital de Subscrição do Mercado Segurador Brasileiro**. Instituída pela Portaria SUSEP nº1.885/04.

INTERNATIONAL ACTUARIAL ASSOCIATION. **A global framework for insurer solvency assessment**, July 2007.
<www.actuaries.org/LIBRARY/Papers/Global_Framework Insurer Solvency_Assessment-public.pdf>

JOHNSON, R. A., WINCHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis.** Fourth Edition – New Jersey, Prentice Hall, 1998.

KPMG. **Solvency II Briefing. Insurance Financial Service**. Second Edition, April 2007.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**; tradução de Ruy de C.B. Lourenço Filho. 2ª ed. – Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 1983.

MINISTÉRIO DA FAZENDA Conselho Nacional de Seguros Privados. Resolução **CNSP Nº178 de 2007**.

MINISTÉRIO DA FAZENDA Conselho Nacional de Seguros Privados. Resolução **CNSP Nº156 de 2006**.

MINISTÉRIO DA FAZENDA Conselho Nacional de Seguros Privados. Resolução **CNSP Nº157 de 2006**.

MINISTÉRIO DA FAZENDA Conselho Nacional de Seguros Privados. Resolução **CNSP Nº158 de 2006**.

MINISTÉRIO DA FAZENDA Superintendência de Seguros Privados. **Circular SUSEP Nº355** de 14 de dezembro de 2007.

ROSS,M.S., **Simulation**. Epstein Department of Industrial and Systems Engineering University of Southern California. Fourth Edition, Elsevier, 2006.

SLATER, D., GILLOTT, N. **Calibration of the General Insurance Risk Based Capital Model**. 2003.

TAYLOR, H.,KARLIN, S. **A introduction to Stochastic Modeling**. Academic Press, 1994.

VALDEZ, E. A.; TANG A. (2006). **Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas**. The 8th International Congress of Actuaries, Paris. Publicação eletrônica visualizada em dezembro, 2008.
<http://www.ica2006.com/Papiers/282/282.pdf>

8
Anexos e Apêndices

8.1
Cálculo da matriz de matrizes de variâncias e covariâncias

Variáveis de interesse:

$$y'_{it} = [e'_{it}, I_{it}f'_{it}, I_{it}g'_{it}, I_{it}h'_{it}, I_{it}]$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e & f & g & h & I \end{array} \\ \begin{array}{c} e \\ f \\ g \\ h \\ I \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{\Sigma_{e,e,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{e,f,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{e,g,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{e,h,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{e,I,t,s}^{(sx,id)}} \\ \Sigma_{f,e,t,s}^{(sx,id)} & \boxed{\Sigma_{f,f,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{f,g,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{f,h,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{f,I,t,s}^{(sx,id)}} \\ \Sigma_{g,e,t,s}^{(sx,id)} & \Sigma_{g,f,t,s}^{(sx,id)} & \boxed{\Sigma_{g,g,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{g,h,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{g,I,t,s}^{(sx,id)}} \\ \Sigma_{h,e,t,s}^{(sx,id)} & \Sigma_{h,f,t,s}^{(sx,id)} & \Sigma_{h,g,t,s}^{(sx,id)} & \boxed{\Sigma_{h,h,t,s}^{(sx,id)}} & \boxed{\Sigma_{h,I,t,s}^{(sx,id)}} \\ \Sigma_{I,e,t,s}^{(sx,id)} & \Sigma_{I,f,t,s}^{(sx,id)} & \Sigma_{I,g,t,s}^{(sx,id)} & \Sigma_{I,h,t,s}^{(sx,id)} & \boxed{\Sigma_{I,I,t,s}^{(sx,id)}} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Sigma_{e,e,t,s}^{(sx,id)} = E\{[e_{it} - E(e_{it})][e_{is} - E(e_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}\}$$

$$\Sigma_{e,f,t,s}^{(sx,id)} = E\{[e_{it} - E(e_{it})][I_{is}f_{is} - E(I_{is}f_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\}$$

$$\Sigma_{e,g,t,s}^{(sx,id)} = E\{[e_{it} - E(e_{it})][I_{is}g_{is} - E(I_{is}g_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}\}$$

$$\Sigma_{e,h,t,s}^{(sx,id)} = E\{[e_{it} - E(e_{it})][I_{is}h_{is} - E(I_{is}h_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, h_{i0} = 1_{h_0}\}$$

$$\Sigma_{e,I,t,s}^{(sx,id)} = E\{[e_{it} - E(e_{it})][I_{is} - E(I_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}\}$$

$$\Sigma_{f,f,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}f_{it} - E(I_{it}f_{it})][I_{it}f_{it} - E(I_{it}f_{it})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\}$$

$$\Sigma_{f,g,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}f_{it} - E(I_{it}f_{it})][I_{is}g_{is} - E(I_{is}g_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}\}$$

$$\Sigma_{f,g,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}f_{it} - E(I_{it}f_{it})][I_{is}g_{is} - E(I_{is}g_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}\}$$

$$\Sigma_{f,h,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}f_{it} - E(I_{it}f_{it})][I_{is}h_{is} - E(I_{is}h_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, h_{i0} = 1_{h_0}\}$$

$$\Sigma_{f,I,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}f_{it} - E(I_{it}f_{it})][I_{is} - E(I_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\}$$

$$\Sigma_{g,g,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}g_{it} - E(I_{it}g_{it})][I_{is}g_{is} - E(I_{is}g_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}\}$$

$$\Sigma_{g,h,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}g_{it} - E(I_{it}g_{it})][I_{is}h_{is} - E(I_{is}h_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}, h_{i0} = 1_{h_0}\}$$

$$\Sigma_{g,I,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}g_{it} - E(I_{it}g_{it})][I_{is} - E(I_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}\}$$

$$\Sigma_{h,h,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}h_{it} - E(I_{it}h_{it})][I_{is}h_{is} - E(I_{is}h_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, h_{i0} = 1_{h_0}\}$$

$$\Sigma_{h,I,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}h_{it} - E(I_{it}h_{it})][I_{is} - E(I_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, h_{i0} = 1_{h_0}\}$$

$$\Sigma_{I,I,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it} - E(I_{it})][I_{is} - E(I_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}\}$$

1. Covariância entre estados do titular nos períodos t e s:

$$\Sigma_{e,e,t,s}^{(sx,id)} \equiv \Sigma_{e,e,t,s}$$

$$\Sigma_{e,e,t,s} = E\{[e_{it} - E(e_{it})][e_{is} - E(e_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}\}$$

$$= E\{(e_{it} - p_{it})(e_{is} - p_{is})'|e_{i0} = 1_{e_0}\} =$$

$$= E\{(e_{it}e'_{is}) - (e_{it}p'_{is}) - (p_{it}e'_{is}) + (p_{it}p'_{is})|e_{i0} = 1_{e_0}\} =$$

$$= E(e_{it}e'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}) - E(e_{it}p'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}) - E(p_{it}e'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}) + E(p_{it}p'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}) =$$

$$= E(e_{it}e'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}) - E(e_{it}|e_{i0} = 1_{e_0})p'_{is} - p_{it}E(e'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}) + p_{it}p'_{is}$$

$$= E(e_{it}e'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}) - p_{it}p'_{is} - p_{it}p'_{is} + p_{it}p'_{is}$$

$$= E(e_{it}e'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}) - p_{it}p'_{is}$$

O cálculo desta esperança depende das relações entre t e s, que pode ser t=s, t>s ou t<s. Como as probabilidades devem evoluir no tempo, deve-se saber a relação entre os estados no decorrer dos meses. Se t=t observa-se a relação entre os estados em um mesmo instante de tempo, ou seja, em um mesmo mês.

- *t=s*

$$E\left(e_{it}e'_{it}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=\left\{P\left(e_{itk}=1,e_{itl}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)\right\}_{k,l}$$

$$E\left(e_{it}e'_{it}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=\begin{cases}\left\{P\left(e_{itk}=1,e_{itl}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)\right\}_{k,l}=0, se\ k\neq l\\ P\left(e_{itk}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right), se\ k=l\end{cases}$$

Em um mesmo instante de tempo, apenas um estado recebe um, apenas um estado ocorre por unidade de tempo. Logo,

$$E\left(e_{it}e'_{it}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} P\{e_{it1}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & P\{e_{it1}=1,e_{it2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & \dots & P\{e_{it1}=1,e_{it12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{it2}=1,e_{it1}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & P\{e_{it2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & \dots & P\{e_{it2}=1,e_{it12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P\{e_{it12}=1,e_{it1}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & P\{e_{it12}=1,e_{it2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & \dots & P\{e_{it12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\end{bmatrix}$$

$$E\left(e_{it}e'_{it}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} P\{e_{it1}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & 0 & \dots & 0\\ 0 & P\{e_{it2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & P\{e_{it12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\end{bmatrix}$$

$$E\left(e_{it}e'_{it}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=\begin{bmatrix} p_{it1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & p_{it2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & p_{it12}\end{bmatrix}=diag(p_{it})$$

O comando “diag” é o comando que coloca o vetor argumento, no caso p_{it}, na diagonal principal de uma matriz diagonal.

- *t>s*

$$E\left(e_{it}e'_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=\left\{P\left(e_{itl}=1,e_{itm}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)\right\}_{l,m}$$

$$E\left(e_{it}e'_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} P\{e_{it1}=1,e_{is1}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & P\{e_{it1}=1,e_{is2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & \dots & P\{e_{it1}=1,e_{is12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{it2}=1,e_{is1}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & P\{e_{it2}=1,e_{is2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & \dots & P\{e_{it2}=1,e_{is12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P\{e_{it12}=1,e_{is1}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & P\{e_{it2}=1,e_{is2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\} & \dots & P\{e_{it12}=1,e_{is12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\end{bmatrix}$$

$$E\left(e_{it}e'_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,12} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{12,1} & a_{12,2} & \cdots & a_{12,12} \end{bmatrix}$$

$$a_{l,m}=\left\{P\left(e_{itl}=1,e_{ism}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)\right\}_{l,m}$$

Lembrando que:

$$P(A|B)=\mathrm{P(A\cap B)/P(B)}$$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(\mathrm{A_1})\mathrm{P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)}$$

$$a_{l,m}=P\left(e_{itl}=1,e_{ism}=1,e_{i0}=1_{e_0}\right)/P\left(e_{i0}=1_{e_0}\right)$$

$$a_{l,m}=P\left(e_{itl}=1|e_{ism}=1,e_{i0}=1_{e_0}\right)P\left(e_{ism}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)P\left(e_{i0}=1_{e_0}\right)/P\left(e_{i0}=1_{e_0}\right)$$

$$a_{l,m}=P\left(e_{itl}=1|e_{ism}=1,e_{i0}=1_{e_0}\right)P\left(e_{ism}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)$$

Pela propriedade de Markov:

$$a_{l,m}=P(e_{itl}=1|e_{ism}=1)P\left(e_{ism}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)$$

Onde,

$$P(e_{itl}=1|e_{ism}=1)=1'_l\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}1_m$$

$1'_l -$ é o vetor (1x12)que recebe 1 na l − ésima posição e zero nas demais.

$1_m -$ é o vetor (12x1)que recebe 1 na m − ésima posição e zero nas demais.

$\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} -$ Matriz de probabilidades de transição de estados do tempo s para o tempo t.

$1'_l\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} -$ Seleciona a linha de probabilidades cujo estado será l em t.

$1'_l\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}1_m -$ seleciona a probabilidade de transição do estado m para o estado l ao mudar do instante s para t. Ou seja, seleciona a componente (m,l) da matriz.

$$P\left(e_{ism} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right) = 1'_m \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-0} 1_{e_0}$$

Esta probabilidade é o elemento (m,2) da matriz $\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s}$.

$$E\left(e_{it} e'_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}\right) = \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} diag(p_{is})$$

- t<s

$$= E\ \left(e_{it} e'_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}\right)\ =$$

Usando a propriedade: $E_y\left[E_{x|y} E(X|Y)\right] = E(X) = \sum_y E(X|Y)p(y)$

Portanto, chamando $X = e_{it} e'_{is}$ e $Y = e_{itk}$ temos:

$$\sum_{k=1}^{12} E[e_{it} e'_{is} | e_{itk} = 1] p(e_{itk} = 1) =$$

$$p(e_{itk} = 1) = 1'_k p_{it}$$

Indica que a linha do estado k do vetor de probabilidades p_{it} é que recebe um.

$$= \sum_{k=1}^{12} E[e_{it} e'_{is} | e_{itk} = 1] 1'_k p_{it} =$$

Em $E[e_{it} e'_{is} | e_{itk} = 1]$ o e_{it} deixa de ser variável aleatória, pois já tenho informação sobre qual estado k receberá o número um, ou seja, qual estado ocorrerá no tempo t. Então, já é possível representá-lo por um vetor do tipo 1_k para selecionar este estado, como pode ser verificado a seguir. Lembrando que o vetor 1_k é um vetor (12x1) que possui “1” na k-ésima linha e zero nas demais. 1_k é um vetor indicador de estado.

$$= \sum_{k=1}^{12} 1_k E[e'_{is} | e_{itk} = 1] 1'_k p_{it} =$$

$$E[e'_{is} | e_{itk} = 1] =$$

$$= \begin{bmatrix} P(e_{is1} = 1 | e_{itk} = 1) & \dots & P(e_{is12} = 1 | e_{itk} = 1) \end{bmatrix} = \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1'_k$$

$$= \sum_{k=1}^{12} 1_k \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1'_k 1'_k p_{it} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1'_1 1'_1 p_{it} \\ \vdots \\ 1_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1'_{12} 1'_{12} p_{it} \end{bmatrix} =$$

Para multiplicar por cada linha o elemento k correto, basta colocar as probabilidades p_{itk} como valores de uma matriz diagonal e multiplicá-la. Ou seja, colocar o vetor p_{it} na diagonal principal desta matriz.

$$= diag(p_{it}) \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} \end{bmatrix} =$$

Como $\begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} \end{bmatrix}$ é um escalar posso trocar a ordem para arrumar o cálculo.

$$= diag(p_{it}) \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} \end{bmatrix} =$$

$$= diag(p_{it}) \begin{bmatrix} 1'_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \end{bmatrix} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} =$$

$\begin{bmatrix} 1'_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade, logo,

$$= diag(p_{it})\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}$$

Assim,

$$\Sigma_{e,e,t,s} = \begin{cases} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} diag(p_{is}) - p_{it}p'_{is}\ , se\ t > s \\ diag(p_{it}) - p_{it}p'_{it}, se\ \ t = s \end{cases}$$

A fórmula final para qualquer período t, s = 1,2,...,12 é dada por:

$$\boxed{\Sigma_{e,e,t,s} = \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{|t-s|} diag\left(p_{i,\min(t,s)}\right) - p_{it}p'_{is}}$$

1 2 3

1. Para a primeira parte da fórmula final, no caso de t=s a matriz elevada à zero resulta em uma matriz identidade para a matriz de transição de probabilidades.

2. Para a segunda parte da fórmula final, se t=s em min(t,s) fica o t mesmo, mas se o t > s fica o s como podemos ver na fórmula da página anterior para $\Sigma_{e,e,t,s}$, acima da numerada em três partes.

3. Na terceira parte da fórmula se t=s fica t no lugar do s de p'_{is} e caso contrário continua assim mesmo.

Para a covariância entre estados do titular nos períodos t e s existe uma matriz destas para cada par de sexo e idade da base de dados. É importante lembrar que a matriz depende do sexo e da idade do indivíduo da apólice i. Expressando em termos das variáveis iniciais:

$$\boxed{\Sigma_{e,e,t,s} = \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{|t-s|} diag\left(\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{min\,(t,s)} 1_{e_0}\right) - \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t} 1_{e_0} 1'_{e_0} \left(P_{s(i),d(i)}\right)^{s}}$$

2. Covariância entre estados do titular e do cônjuge nos períodos t e s.

$$\Sigma_{e,f,t,s}^{(sx,id)} \equiv \Sigma_{e,f,t,s}$$

$$\Sigma_{e,f,t,s} = E\{[e_{it} - E(e_{it})][I_{is}f_{is} - E(I_{is}f_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\}$$

$$= E\{[e_{it} - p_{it}][I_{is}f_{is} - (p_{is}^{A}q_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\}$$

$$= E\left(e_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) - E\left(e_{it}p_{is}^{A}q'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right)$$

$$-E\left(p_{it}I_{is}f_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) + E\left(p_{it}p_{is}^{A}q'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) =$$

$$= E\left(e_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) - E\left(e_{it}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right)p_{is}^{A}q'_{is}$$

$$-p_{it}E\left(I_{is}f_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) + p_{it}p_{is}^{A}q'_{is} =$$

$$= E\left(e_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) - p_{it}p_{is}^{A}q'_{is} - p_{it}p_{is}^{A}q'_{is} + p_{it}p_{is}^{A}q'_{is}$$

$$= E\left(e_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) - p_{it}p_{is}^{A}q'_{is}$$

Por serem independentes é possível separar as variáveis $e_{it}, I_{is}\ e\ f'_{is}$ da seguinte maneira:

$$= E\left(e_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) =$$

$$= E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) E\left(f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) =$$

$$= E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) q'_{is} =$$

- t>s

Usando a propriedade: $E_y\left[E_{x|y}E(X|Y)\right] = E(X) = \sum_y E(X|Y)p(y)$.

Ao definir $X = e_{it}I_{is}$ e $Y = I_{is}$ tem-se:

$$E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) q'_{is} = \sum_{k=0}^{1} E(e_{it}I_{is}|I_{is} = k)P\left(I_{is} = k|e_{i0} = 1_{e_0}\right)$$

$$= E(e_{it} * 1|I_{is} = 1)P\left(I_{is} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\right) + E(e_{it} * 0|I_{is} = 0)\left[1 - P\left(I_{is} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\right)\right]$$

$$= E(e_{it} * 1|I_{is} = 1)p_{is}^{A} + E(e_{it} * 0|I_{is} = 0)[1 - p_{is}^{A}]$$

Então,

$$= E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) q'_{is} =$$

$$= E(e_{it}|I_{is} = 1)p_{is}^{A}q'_{is} = \begin{bmatrix} P\{e_{it1} = 1|I_{is} = 1\} \\ \vdots \\ P\{e_{it12} = 1|I_{is} = 1\} \end{bmatrix} p_{is}^{A}q'_{is} =$$

Pela lei das probabilidades totais: $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_{\mathrm{k}}|\mathrm{B})$.

Considerando $\mathrm{A} = \mathrm{e}_{\mathrm{it}1}, \mathrm{B} = \mathrm{I}_{\mathrm{is}}$ e $\mathrm{C}_{\mathrm{k}} = \mathrm{e}_{\mathrm{isk}}$ o k varia de 1 a 12.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1, e_{isk} = 1|I_{is} = 1\} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1, e_{isk} = 1|I_{is} = 1\} \end{bmatrix} p_{is}^{A}q'_{is}$$

Lembrando que:

$P(A|B) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})/\mathrm{P}(\mathrm{B})$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_3|\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} P\{e_{isk} = 1|I_{is} = 1\} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} P\{e_{isk} = 1|I_{is} = 1\} \end{bmatrix} p_{is}^{A}q'_{is}$$

Não há informação sobre $\mathrm{P}\{\mathrm{e}_{\mathrm{isk}} = 1|\mathrm{I}_{\mathrm{is}} = 1\}$. Então, para calculá-la utiliza-se novamente:

$P(A|B) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})/\mathrm{P}(\mathrm{B})$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_3|\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} \dfrac{P\{e_{isk} = 1, I_{is} = 1\}}{P\{I_{is} = 1\}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} \dfrac{P\{e_{isk} = 1, I_{is} = 1\}}{P\{I_{is} = 1\}} \end{bmatrix} p_{is}^{A}q'_{is}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} \dfrac{P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}P\{e_{isk} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\}}{P\{I_{is} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} \dfrac{P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}P\{e_{isk} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\}}{P\{I_{is} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\}} \end{bmatrix} p_{is}^{A} q'_{is}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} \dfrac{P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk}}{p_{is}^{A}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} \dfrac{P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk}}{p_{is}^{A}} \end{bmatrix} p_{is}^{A} q'_{is}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk} \end{bmatrix} q'_{is}$$

Como $P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\} = 1$, tem-se:

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} p_{isk} \end{bmatrix} q'_{is}$$

E $P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} = P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1\}$ para o estado do titular ocorrer no instante s, necessariamente a variável $I_{is} = 1$. Se $I_{is} = 1$ implica que $e_{isk} = 1$ aconteça. Eles são contemporâneos. Por isto fica redundante usar os dois na condicional acima.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,|e_{isk} = 1\} p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1 | e_{isk} = 1\} p_{isk} \end{bmatrix} q'_{is}$$

Sabe-se que $\mathrm{P}\{\mathrm{e}_{\mathrm{it}1} = 1 \,|\mathrm{e}_{\mathrm{isk}} = 1\}$ é uma probabilidade da matriz de transição de estados do titular i do instante t para o s, logo é possível escrevê-la assim:

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_k p_{isk} \end{bmatrix} q'_{is}$$

Os vetores $1_1, 1_{12}$ e 1_k são vetores de dimensão (12x1) onde o k-ésimo elemento recebe 1 e os demais recebem zero. Estes vetores indicam a ocorrência do evento/estado, que na notação fica no índice do vetor 1. Para facilitar os cálculos pode-se retirar a parte que não depende de k do somatório com isto obtém-se:

$$= \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=1}^{12} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=1}^{12} 1_k p_{isk} \end{bmatrix} q'_{is}$$

Pode-se retirar o primeiro elemento do somatório, pois ele é igual a zero. Pois a probabilidade do estado 1 é a probabilidade do indivíduo estar no fim da apólice.

$$= \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \end{bmatrix} q'_{is}$$

Desta forma escreve-se que:

$$\sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} =$$

$$\sum_{k=2}^{12} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(12x1)} P\{e_{isk} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\}_{(1x1)} =$$

O número um do vetor acima está na k-ésima posição.

$$\sum_{k=2}^{12} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ P\{e_{isk} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(12x1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} P\{e_{is2} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P\{e_{is3} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P\{e_{is12} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P\{e_{is2} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is3} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ \vdots \\ P\{e_{is12} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P\{e_{is1} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is2} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is3} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is4} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is5} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is6} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is7} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is8} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is9} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is10} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is11} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is12} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \end{bmatrix}$$

Definindo abaixo a notação, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is}$$

Então, escreve-se que:

$$= \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \end{bmatrix} q'_{is} = \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is} q'_{is}$$

Percebendo que

$$\begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \end{bmatrix} = \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}$$

Pode-se escrever que:

$$E\left(e_{it} I_{is} f'_{is} \middle| e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) = \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is} q'_{is}$$

- t<s

$$= E\left(e_{it} I_{is} \middle| e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) q'_{is} =$$

Usando a propriedade: $E_y\left[E_{x|y} E(X|Y)\right] = E(X) = \sum_y E(X|Y)p(y)$.

O raciocínio para t<s deve ser o seguinte: Precisa-se saber a informação sobre e_{itk} antes de saber sobre a variável $e_{it} I_{is}$. Lembrando que no caso anterior

para t>s coloca-se na parte conhecida, condicional, a variável com índice s $(\mathrm{I}_{\mathrm{is}})$. Portanto, chamando $\mathrm{X} = \mathrm{e}_{\mathrm{it}}\mathrm{I}_{\mathrm{is}}$ e $\mathrm{Y} = \mathrm{e}_{\mathrm{itk}}$ tem-se que:

$$\sum_{k=1}^{12} E[e_{it}I_{is}|e_{itk} = 1]p(e_{itk} = 1)q'_{is} =$$

$$p(e_{itk} = 1) = 1'_k p_{it}$$

Indica que a linha do estado k do vetor de probabilidades p_{it} é que recebe um.

$$= \sum_{k=1}^{12} E[e_{it}I_{is}|e_{itk} = 1]1'_k p_{it} q'_{is} =$$

Em $\mathrm{E}[\mathrm{e}_{\mathrm{it}}\mathrm{I}_{\mathrm{is}}|\mathrm{e}_{\mathrm{itk}} = 1]$ o e_{it} deixa de ser variável aleatória, pois já se tem informação sobre qual estado k receberá um, ou seja, qual estado ocorrerá no tempo t. Então, passa-se a poder representá-lo por um vetor do tipo 1_{k} para selecionar este estado, como veremos a seguir. Lembrando que o vetor 1_{k} é um vetor (12x1) que possui um na k-ésima linha e zero nas demais. 1_{k} é um vetor indicador de estado.

$$= \sum_{k=1}^{12} 1_k E[I_{is}|e_{itk} = 1]1'_k p_{it} q'_{is} =$$

$\mathrm{E}[\mathrm{I}_{\mathrm{is}}|\mathrm{e}_{\mathrm{itk}} = 1]$, esta parcela da conta representa o seguinte: dado que em t o estado k foi selecionado, qual a probabilidade da apólice i continuar ativa em s. Então,

$$E[I_{is}|e_{itk} = 1] = P(I_{is} = 1|e_{itk} = 1)\ 1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_k$$

$\mathrm{P}(\mathrm{I}_{\mathrm{is}} = 1|\mathrm{e}_{\mathrm{itk}} = 1)$ é a probabilidade de estar ativo em s, dado que estava no estado k no instante t. $\left(\mathrm{P}'_{\mathrm{s(i),d(i)}}\right)^{\mathrm{s-t}}$ é a matriz de probabilidades de transição de t para s. Seleciono o estado k com o vetor 1_{k} e assim se pega somente as probabilidades de estar ativo em s com o vetor $1'_{\mathrm{A}} = (0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, sendo o primeiro estado, o estado fim que, no caso, recebe zero.

$$= \sum_{k=1}^{12} 1_k 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_k 1'_k p_{it} q'_{is} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 1'_1 p_{it} \\ \vdots \\ 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} 1'_{12} p_{it} \end{bmatrix} q'_{is} =$$

Quando o objetivo é multiplicar por cada linha o elemento k correto, basta colocar as probabilidades p_{itk} como valores de uma matriz diagonal e multiplicá-la. Ou seja, colocar o vetor p_{it} na diagonal principal desta matriz.

$$= diag(p_{it}) \begin{bmatrix} 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 \\ \vdots \\ 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} \end{bmatrix} q'_{is} =$$

Como $\begin{bmatrix} 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 \\ \vdots \\ 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} \end{bmatrix}$ é um escalar posso trocar a ordem para arrumar o cálculo.

$$= diag(p_{it}) \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A \end{bmatrix} q'_{is} =$$

$$= diag(p_{it}) \begin{bmatrix} 1'_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \end{bmatrix} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A q'_{is} =$$

$\begin{bmatrix} 1'_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade, logo,

$$= diag(p_{it}) \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A q'_{is}$$

Então,

$$\boxed{\Sigma_{e,f,t,s} = \begin{cases} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is} q'_{is} - p_{it} p_{is}^{A} q'_{is} \,, se\ t \geq s \\ diag(p_{it}) \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A q'_{is} - p_{it} p_{is}^{A} q'_{is} \,, se\ t < s \end{cases}}$$

3. Covariância entre estados do titular e dos dois filhos entre os instantes s e t:

$$\Sigma_{e,g,t,s}^{(sx,id)} = E\{[e_{it} - E(e_{it})][I_{is}g_{is} - E(I_{is}g_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}\}$$

$$\Sigma_{e,h,t,s}^{(sx,id)} = E\{[e_{it} - E(e_{it})][I_{is}h_{is} - E(I_{is}h_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, h_{i0} = 1_{h_0}\}$$

$$\Sigma_{e,g,t,s}^{(sx,id)} = \Sigma_{e,h,t,s}^{(sx,id)} = \Sigma_{e,g,t,s} = \Sigma_{e,h,t,s}$$

$$\Sigma_{e,g,t,s} = E\{[e_{it} - p_{it}][I_{is}g_{is} - E(I_{is}g_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}\} =$$

$$= E\{(e_{it}I_{is}g'_{is}) - (e_{it}p_{is}^{A}u'_{is}) - (p_{it}I_{is}g'_{is}) + (p_{it}p_{is}^{A}u'_{is})|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}\} =$$

$$= E(e_{it}I_{is}g'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}) - E(e_{it}p_{is}^{A}u'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0})$$

$$-E(p_{it}I_{is}g'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}) + E(p_{it}p_{is}^{A}u'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}) =$$

$$= E(e_{it}I_{is}g'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}) - E(e_{it}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0})p_{is}^{A}u'_{is}$$

$$-p_{it}E(I_{is}g'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}) + p_{it}p_{is}^{A}u'_{is} =$$

$$= E(e_{it}I_{is}g'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}) - p_{it}p_{is}^{A}u'_{is} - p_{it}p_{is}^{A}u'_{is} + p_{it}p_{is}^{A}u'_{is} =$$

$$= E(e_{it}I_{is}g'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}) - p_{it}p_{is}^{A}u'_{is}$$

Por serem independentes as variáveis $e_{it}, I_{is}\ e\ g'_{is}$ podem ser separadas da seguinte maneira:

$$= E\left(e_{it}I_{is}g'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{g_0}\right) =$$
$$= E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{f_0}\right) E\left(g'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, g_{i0} = 1_{f_0}\right) =$$
$$= E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}\right) E\left(g'_{is}|g_{i0} = 1_{g_0}\right) =$$

$$= E\left(e_{it} I_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}\right) u'_{is} =$$

- t=s

Em um mesmo instante de tempo, apenas um estado recebe 1, apenas um estado ocorre por unidade de tempo. Logo,

$$E\left(e_{it} I_{it} | e_{i0} = 1_{e_0}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} p_{it} u'_{it}$$

- t>s

Usando a propriedade: $\mathrm{E_y}\left[\mathrm{E_{x|y}} \mathrm{E(X|Y)}\right] = \mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{y}} \mathrm{E(X|Y)p(y)}$

Ao definir $\mathrm{X} = \mathrm{e_{it}} \mathrm{I_{is}}$ e $\mathrm{Y} = \mathrm{I_{is}}$ tem-se:

$$E\left(e_{it} I_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}\right) u'_{is} = \sum_{k=0}^{1} E(e_{it} I_{is} | I_{is} = k) P\left(I_{is} = k | e_{i0} = 1_{e_0}\right)$$

$$= E(e_{it} * 1 | I_{is} = 1) P\left(I_{is} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right) + E(e_{it} * 0 | I_{is} = 0)\left[1 - P\left(I_{is} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right)\right]$$

$$= E(e_{it} * 1 | I_{is} = 1) p_{is}^{A} + E(e_{it} * 0 | I_{is} = 0)[1 - p_{is}^{A}]$$

Então,

$$= E\left(e_{it} I_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}\right) u'_{is} =$$

$$= E(e_{it} | I_{is} = 1) p_{is}^{A} u'_{is} = \begin{bmatrix} P\{e_{it1} = 1 | I_{is} = 1\} \\ \vdots \\ P\{e_{it12} = 1 | I_{is} = 1\} \end{bmatrix} p_{is}^{A} u'_{is} =$$

Pela lei das probabilidades totais: $P(A|B) = \sum_k P(A \cap C_k | B)$.

Considerando $A = e_{it1}, B = I_{is}$ e $C_k = e_{isk}$ o k varia de 1 a 12.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1, e_{isk} = 1 | I_{is} = 1\} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1, e_{isk} = 1 | I_{is} = 1\} \end{bmatrix} p_{is}^{A} u'_{is}$$

Lembrando que:

$$P(A|B) = \mathrm{P(A \cap B)/P(B)}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\mathrm{A_1}) \mathrm{P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 \cap A_2)}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} P\{e_{isk} = 1 | I_{is} = 1\} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1 | e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} P\{e_{isk} = 1 | I_{is} = 1\} \end{bmatrix} p_{is}^{A} u'_{is}$$

Não há informação sobre $\mathrm{P}\{\mathrm{e}_{\mathrm{isk}} = 1 | \mathrm{I}_{\mathrm{is}} = 1\}$. Então, para calculá-la utiliza-se novamente:

$P(A|B) = \mathrm{P(A \cap B)/P(B)}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_3|\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} \frac{P\{e_{isk} = 1, I_{is} = 1\}}{P\{I_{is} = 1\}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1 | e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} \frac{P\{e_{isk} = 1, I_{is} = 1\}}{P\{I_{is} = 1\}} \end{bmatrix} p_{is}^{A} u'_{is}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} \frac{P\{I_{is} = 1 | e_{isk} = 1\} P\{e_{isk} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\}}{P\{I_{is} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1 | e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} \frac{P\{I_{is} = 1 | e_{isk} = 1\} P\{e_{isk} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\}}{P\{I_{is} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\}} \end{bmatrix} p_{is}^{A} u'_{is}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} \frac{P\{I_{is} = 1 | e_{isk} = 1\} p_{isk}}{p_{is}^{A}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1 | e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} \frac{P\{I_{is} = 1 | e_{isk} = 1\} p_{isk}}{p_{is}^{A}} \end{bmatrix} p_{is}^{A} u'_{is}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,|e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} P\{I_{is} = 1 | e_{isk} = 1\} p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1 | e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} P\{I_{is} = 1 | e_{isk} = 1\} p_{isk} \end{bmatrix} u'_{is}$$

Como $P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\} = 1$, tem-se:

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\ |e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} p_{isk} \end{bmatrix} u'_{is}$$

E $P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} = P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1\}$ para o estado do titular i ocorrer no instante s, necessariamente a variável $I_{is} = 1$. Se $I_{is} = 1$ implica que $e_{isk} = 1$ aconteça. Eles são contemporâneos. Por isto fica redundante usar os dois na condicional acima.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\ |e_{isk} = 1\} p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1\} p_{isk} \end{bmatrix} u'_{is}$$

Sabe-se que $P\{e_{it1} = 1\ |e_{isk} = 1\}$ é uma probabilidade da matriz de transição de estados do titular i do instante t para o s, logo é possível escrevê-la assim:

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_k p_{isk} \end{bmatrix} u'_{is}$$

Os vetores $1_1, 1_{12}$ e 1_k são vetores de dimensão (12x1) onde o k-ésimo elemento recebe 1 e os demais recebem zero. Estes vetores indicam a ocorrência do evento/estado que na notação fica declarado no índice do vetor 1. Para facilitar os cálculos pode-se retirar a parte que não depende de k do somatório com isto obtém-se:

$$= \begin{bmatrix} 1'_1\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=1}^{12} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ 1'_{12}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=1}^{12} 1_k p_{isk} \end{bmatrix} u'_{is}$$

Pode-se retirar o primeiro elemento do somatório, pois ele é igual a zero. Pois, a probabilidade do estado um é a probabilidade do indivíduo estar no fim da apólice.

$$= \begin{bmatrix} 1'_1\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ 1'_{12}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \end{bmatrix} u'_{is}$$

Desta forma escreve-se que:

$$\sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} =$$

$$\sum_{k=2}^{12} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(12x1)} P\left\{e_{isk} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\}_{(1x1)} =$$

O número um do vetor acima está na k-ésima posição.

$$\sum_{k=2}^{12} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ P\left\{e_{isk} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(12x1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} P\left\{e_{is2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P\left\{e_{is3} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P\left\{e_{is12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P\left\{e_{is2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{is3} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ P\left\{e_{is12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P\{e_{is1} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is2} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is3} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is4} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is5} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is6} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is7} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is8} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is9} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is10} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is11} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is12} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\} \end{bmatrix}$$

Definindo abaixo a notação, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is}$$

Então, pode-se escrever:

$$= \begin{bmatrix} 1'_1\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ 1'_{12}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \end{bmatrix} u'_{is} = \begin{bmatrix} 1'_1\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \\ \vdots \\ 1'_{12}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is} u'_{is}$$

Percebendo que:

$$\begin{bmatrix} 1'_1\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \\ \vdots \\ 1'_{12}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \end{bmatrix} = \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}$$

Pode-se escrever:

$$E\left(e_{it}I_{is}g'_{is}|e_{i0}=1_{e_0},g_{i0}=1_{g_0}\right)=\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{(11x11)}\end{bmatrix}p_{is}u'_{is}$$

Ou,

$$E\left(e_{it}I_{is}g'_{is}|e_{i0}=1_{e_0},g_{i0}=1_{g_0}\right)=\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{(11x11)}\end{bmatrix}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s}1_{e_0}u'_{is}$$

Olhando mais de perto:

$$\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s}1_{e_0}=p_{is}$$

$$\begin{bmatrix}P\{e_{is1}=1|e_{i01}=0\} & P\{e_{is1}=1|e_{i02}=1\} & \dots & P\{e_{is1}=1|e_{i012}=0\}\\ P\{e_{is2}=1|e_{i01}=0\} & P\{e_{is2}=1|e_{i02}=1\} & \dots & P\{e_{is2}=1|e_{i012}=0\}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ P\{e_{is12}=1|e_{i01}=0\} & P\{e_{is12}=1|e_{i02}=1\} & \dots & P\{e_{is12}=1|e_{i012}=0\}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}P\{e_{is1}=1|e_{i02}=1\}\\ P\{e_{is2}=1|e_{i02}=1\}\\ \vdots\\ P\{e_{is12}=1|e_{i02}=1\}\end{bmatrix}$$

Apenas a condicional $e_{i02}=1$, pois segue o vetor de probabilidades iniciais.

- t<s

$$=E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)u'_{is}=$$

Usando a propriedade: $E_y\left[E_{x|y}E(X|Y)\right]=E(X)=\sum_y E(X|Y)p(y)$.

O raciocínio para t<s deve ser o seguinte: precisa-se saber a informação sobre e_{itk} antes de saber sobre a variável $e_{it}I_{is}$. Lembrando que no caso anterior para t>s coloca-se na parte conhecida, condicional, a variável com índice s (I_{is}). Portanto, chamando $X=e_{it}I_{is}$ e $Y=e_{itk}$ tem-se:

$$\sum_{k=1}^{12}E[e_{it}I_{is}|e_{itk}=1]p(e_{itk}=1)u'_{is}=$$

$$p(e_{itk}=1)=1'_kp_{it}$$

Indica que a linha do estado k do vetor de probabilidades p_{it} é que recebe um.

$$= \sum_{k=1}^{12} E[e_{it} I_{is} | e_{itk} = 1] 1'_k p_{it} u'_{is} =$$

Em $E[e_{it} I_{is} | e_{itk} = 1]$ o e_{it} deixa de ser variável aleatória, pois já se possui informação sobre qual estado k receberá um, ou seja, qual estado ocorrerá no tempo t. Então, é possível representá-lo por um vetor do tipo 1_k para selecionar este estado, como se vê a seguir. Lembrando que o vetor 1_k é um vetor (12x1) que possui um na k-ésima linha e zero nas demais. 1_k é um vetor indicador de estado.

$$= \sum_{k=1}^{12} 1_k E[I_{is} | e_{itk} = 1] 1'_k p_{it} u'_{is} =$$

$E[I_{is} | e_{itk} = 1]$, esta parcela da conta representa o seguinte: dado que em t o estado k foi selecionado, qual a probabilidade da apólice i continuar ativa em s. Então,

$$E[I_{is} | e_{itk} = 1] = P(I_{is} = 1 | e_{itk} = 1)\ 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_k$$

$P(I_{is} = 1 | e_{itk} = 1)$ é a probabilidade de estar ativo em s, dado que estava no estado k no instante t. $\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}$ é a matriz de probabilidades de transição de t para s Selecionando o estado k com o vetor 1_k e assim se pega somente as probabilidades de estar ativo em s com o vetor $1'_A = (0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, sendo o primeiro estado, o estado fim que, no caso, recebe zero.

$$= \sum_{k=1}^{12} 1_k 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_k 1'_k p_{it} u'_{is} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 1'_1 p_{it} \\ \vdots \\ 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} 1'_{12} p_{it} \end{bmatrix} u'_{is} =$$

Se quiser multiplicar por cada linha o elemento k correto, basta colocar as probabilidades p_{itk} como valores de uma matriz diagonal e multiplicá-la.Ou seja, colocar o vetor p_{it} na diagonal principal desta matriz.

$$= diag(p_{it})\begin{bmatrix} 1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_1 \\ \vdots \\ 1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_{12} \end{bmatrix} u'_{is} =$$

Como $\begin{bmatrix} 1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_1 \\ \vdots \\ 1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_{12} \end{bmatrix}$ é um escalar pode-se trocar a ordem para arrumar o cálculo.

$$= diag(p_{it})\begin{bmatrix} 1'_1\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_A \\ \vdots \\ 1'_{12}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_A \end{bmatrix} u'_{is} =$$

$$= diag(p_{it})\begin{bmatrix} 1'_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \end{bmatrix}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_A u'_{is} =$$

$\begin{bmatrix} 1'_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade, logo,

$$= diag(p_{it})\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_A u'_{is}$$

Então,

$$\boxed{\Sigma_{e,g,t,s} = \begin{cases} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is}u'_{is} - p_{it}p_{is}^{A}u'_{is}\ , se\ t \geq s \\ diag(p_{it})\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_A u'_{is} - p_{it}p_{is}^{A}u'_{is}\ , se\ t < s \end{cases}}$$

4. Covariância entre estados do titular e a variável de vigência entre os instantes s e t:

$$\Sigma_{e,I,t,s}^{(sx,id)} = E\left\{[e_{it} - E(e_{it})][I_{is} - E(I_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}\right\}$$

$$\Sigma_{e,I,t,s} = E\left\{[e_{it} - p_{it}][I_{is} - E(I_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}\right\} =$$

$$= E\left\{(e_{it}I_{is}) - \left(e_{it}p_{is}^{A}\right) - (p_{it}I_{is}) + \left(p_{it}p_{is}^{A}\right)|e_{i0} = 1_{e_0}\right\} =$$

$$= E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}\right) - E\left(e_{it}p_{is}^{A}|e_{i0} = 1_{e_0}\right)$$

$$-E\left(p_{it}I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)+E\left(p_{it}p_{is}^A|e_{i0}=1_{e_0}\right)=$$
$$=E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)-E\left(e_{it}|e_{i0}=1_{e_0}\right)p_{is}^A$$
$$-p_{it}E\left(I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)+p_{it}p_{is}^A=$$
$$=E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)-p_{it}p_{is}^A-p_{it}p_{is}^A+p_{it}p_{is}^A=$$
$$=E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)-p_{it}p_{is}^A$$

- t=s

Em um mesmo instante de tempo, apenas um estado recebe 1, apenas um estado ocorre por unidade de tempo. Logo,

$$E\left(e_{it}I_{it}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{(11x11)}\end{bmatrix}p_{it}$$

- t>s

Usando a propriedade: $\mathrm{E_y}\left[\mathrm{E_{x|y}E(X|Y)}\right]=\mathrm{E(X)}=\sum_{\mathrm{y}}\mathrm{E(X|Y)p(y)}$

Ao definir $\mathrm{X}=\mathrm{e_{it}I_{is}}$ e $\mathrm{Y}=\mathrm{I_{is}}$ tem-se:

$$E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)q'_{is}=\sum_{k=0}^{1}E(e_{it}I_{is}|I_{is}=k)P\left(I_{is}=k|e_{i0}=1_{e_0}\right)$$
$$=E(e_{it}*1|I_{is}=1)P\left(I_{is}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)$$
$$+E(e_{it}*0|I_{is}=0)\left[1-P\left(I_{is}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)\right]$$
$$=E(e_{it}*1|I_{is}=1)p_{is}^A+E(e_{it}*0|I_{is}=0)[1-p_{is}^A]$$

Então,

$$=E\left(e_{it}I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)p_{is}^A$$

Lembrando que, por ser uma cadeia de Markov :

$$E\left(e_{it}|I_{is}=1,e_{i0}=1_{e_0}\right)=E\left(e_{it}|I_{is}=1\right)$$

$$=E(e_{it}|I_{is}=1)p_{is}^A=\begin{bmatrix}P\{e_{it1}=1|I_{is}=1\}\\ \vdots\\ P\{e_{it12}=1|I_{is}=1\}\end{bmatrix}p_{is}^A=$$

Pela lei das probabilidades totais: $\mathrm{P(A|B)}=\sum_{\mathrm{k}}\mathrm{P(A\cap C_k|B)}$

Considerando $\mathrm{A}=\mathrm{e_{it1}},\mathrm{B}=\mathrm{I_{is}}$ e $\mathrm{C_k}=\mathrm{e_{isk}}$ o k varia de 1 a 12.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1, e_{isk} = 1 | I_{is} = 1\} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1, e_{isk} = 1 | I_{is} = 1\} \end{bmatrix} p_{is}^{A}$$

Lembrando que:

$P(A|B) = \mathrm{P(A \cap B)/P(B)}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\mathrm{A_1})\mathrm{P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)}$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,| e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} P\{e_{isk} = 1 | I_{is} = 1\} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1 | e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} P\{e_{isk} = 1 | I_{is} = 1\} \end{bmatrix} p_{is}^{A}$$

Não informação sobre $\mathrm{P\{e_{isk} = 1|I_{is} = 1\}}$. Então, para calculá-la utiliza-se novamente:

$P(A|B) = \mathrm{P(A \cap B)/P(B)}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\mathrm{A_1})\mathrm{P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)}$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,| e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} \dfrac{P\{e_{isk} = 1, I_{is} = 1\}}{P\{I_{is} = 1\}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1 | e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} \dfrac{P\{e_{isk} = 1, I_{is} = 1\}}{P\{I_{is} = 1\}} \end{bmatrix} p_{is}^{A}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1 \,| e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} \dfrac{P\{I_{is} = 1 | e_{isk} = 1\} P\{e_{isk} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\}}{P\{I_{is} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1 | e_{isk} = 1 I_{is} = 1\} \dfrac{P\{I_{is} = 1 | e_{isk} = 1\} P\{e_{isk} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\}}{P\{I_{is} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\}} \end{bmatrix} p_{is}^{A}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\ |e_{isk} = 1, I_{is} = 1\} \dfrac{P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk}}{p_{is}^{A}} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1I_{is} = 1\} \dfrac{P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk}}{p_{is}^{A}} \end{bmatrix} p_{is}^{A}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\ |e_{isk} = 1, I_{is} = 1\}P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1I_{is} = 1\}P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk} \end{bmatrix}$$

Como $P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\} = 1$, tem-se:

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\ |e_{isk} = 1, I_{is} = 1\}P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1I_{is} = 1\}P\{I_{is} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\ |e_{isk} = 1, I_{is} = 1\}p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1I_{is} = 1\}p_{isk} \end{bmatrix}$$

E $P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1I_{is} = 1\} = P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1\}$ para o estado do titular ocorrer no instante s, necessariamente a variável $I_{is} = 1$. Se $I_{is} = 1$ implica que $e_{isk} = 1$ aconteça. Eles são contemporâneos. Por isto fica redundante usar os dois na condicional acima.

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it1} = 1\ |e_{isk} = 1\}p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} P\{e_{it12} = 1|e_{isk} = 1\}p_{isk} \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que $P\{e_{it1} = 1\,|e_{isk} = 1\}$ é uma probabilidade da matriz de transição de estados do titular do instante t para o s, logo se escreve assim:

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{12} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{12} 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_k p_{isk} \end{bmatrix}$$

Os vetores $1_1, 1_{12}$ e 1_k são vetores de dimensão (12x1) onde o k-ésimo elemento recebe um e os demais recebem zero. Indicam a ocorrência do evento/estado, que na notação fica declarado no índice do vetor um. Para facilitar os cálculos pode-se retirar a parte que não depende de k do somatório com isto obtém-se:

$$= \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=1}^{12} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=1}^{12} 1_k p_{isk} \end{bmatrix}$$

Pode-se retirar o primeiro elemento do somatório, pois ele é igual a zero. Pois a probabilidade do estado 1 é a probabilidade do indivíduo estar no fim da apólice.

$$= \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \end{bmatrix}$$

Desta forma é possível escrever que:

$$\sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} = \sum_{k=2}^{12} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(12x1)} \qquad P\{e_{isk} = 1|e_{i0} = 1_{e_0}\}_{(1x1)} =$$

O número um do vetor acima está na k-ésima posição.

$$\sum_{k=2}^{12}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ P\{e_{isk}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{(12x1)} =$$

$$=\begin{bmatrix}P\{e_{is2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ P\{e_{is3}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ P\{e_{is12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}P\{e_{is2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is3}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ \vdots\\ P\{e_{is12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\end{bmatrix}$$ Logo,

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P\{e_{is1}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is2}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is3}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is4}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is5}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is6}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is7}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is8}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is9}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is10}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is11}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\\ P\{e_{is12}=1|e_{i0}=1_{e_0}\}\end{bmatrix}$$

Definindo abaixo a notação, tem-se:

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\ 0&I_{(11x11)}\end{bmatrix}$$

Assim,

$$=\begin{bmatrix}0&0\\ 0&I_{(11x11)}\end{bmatrix}p_{is}$$

Então é possível escrever:

$$= \begin{bmatrix} 1'_1\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \\ \vdots \\ 1'_{12}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \sum_{k=2}^{12} 1_k p_{isk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1'_1\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \\ \vdots \\ 1'_{12}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is}$$

Percebendo que

$$\begin{bmatrix} 1'_1\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \\ \vdots \\ 1'_{12}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \end{bmatrix} = \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}$$

Pode-se escrever:

$$E\left(e_{it} I_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}\right) = \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is}$$

- t<s

$$= E\left(e_{it} I_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}\right) =$$

Usando a propriedade: $E_y\left[E_{x|y} E(X|Y)\right] = E(X) = \sum_y E(X|Y)p(y)$

O raciocínio para t<s deve ser o seguinte: precisa-se saber a informação sobre e_{itk} antes de saber sobre a variável $e_{it} I_{is}$. Lembrando que no caso anterior para t>s coloca-se na parte conhecida, condicional, a variável com índice s (I_{is}). Portanto, chamando $X = e_{it} I_{is}$ e $Y = e_{itk}$ tem-se:

$$\sum_{k=1}^{12} E[e_{it} I_{is} | e_{itk} = 1] p(e_{itk} = 1) =$$

$$p(e_{itk} = 1) = 1'_k p_{it}$$

Indica que a linha do estado k do vetor de probabilidades p_{it} é que recebe um.

$$= \sum_{k=1}^{12} E[e_{it} I_{is} | e_{itk} = 1] 1'_k p_{it} =$$

Em $E[e_{it} I_{is} | e_{itk} = 1]$ o e_{it} deixa de ser variável aleatória, pois já tenho informação sobre qual estado k receberá 1, ou seja, qual estado ocorrerá no tempo t. Então, pode-se representá-lo por um vetor do tipo 1_k para selecionar este estado, como se vê a seguir. Lembrando que o vetor 1_k é um vetor (12x1) que possui 1 na k-ésima linha e zero nas demais. 1_k é um vetor indicador de estado.

$$= \sum_{k=1}^{12} 1_k E[I_{is}|e_{itk} = 1] 1'_k p_{it} =$$

$E[I_{is}|e_{itk} = 1]$, esta parcela da conta representa o seguinte: dado que em t o estado k foi selecionado, qual a probabilidade da apólice i continuar ativa em s. Então,

$$E[I_{is}|e_{itk} = 1] = P(I_{is} = 1|e_{itk} = 1)\ 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_k$$

$P(I_{is} = 1|e_{itk} = 1)$ é a probabilidade de estar ativo em s, dado que estava no estado k no instante t. $\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}$ é a matriz de probabilidades de transição de t para s. Selecionando o estado k com o vetor 1_k e assim se pega somente as probabilidades de estar ativo em s com o vetor $1'_A = (0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, sendo o primeiro estado, o estado fim que, no caso, recebe zero.

$$= \sum_{k=1}^{12} 1_k 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_k 1'_k p_{it} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 1'_1 p_{it} \\ \vdots \\ 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} 1'_{12} p_{it} \end{bmatrix} =$$

Para multiplicar por cada linha o elemento k correto, basta colocar as probabilidades p_{itk} como valores de uma matriz diagonal e multiplicá-la.Ou seja, colocar o vetor p_{it} na diagonal principal desta matriz.

$$= diag(p_{it}) \begin{bmatrix} 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 \\ \vdots \\ 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} \end{bmatrix} =$$

Como $\begin{bmatrix} 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_1 \\ \vdots \\ 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12} \end{bmatrix}$ é um escalar pode-se trocar a ordem para arrumar o cálculo.

$$= diag(p_{it}) \begin{bmatrix} 1'_1 \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A \\ \vdots \\ 1'_{12} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A \end{bmatrix} =$$

$$= diag(p_{it})\begin{bmatrix} 1'_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \end{bmatrix}\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A =$$

$\begin{bmatrix} 1'_1 \\ \vdots \\ 1'_{12} \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade, logo,

$$= diag(p_{it})\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A$$

Então,

$$\boxed{\Sigma_{e,I,t,s} = \begin{cases} \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{is} - p_{it}p_{is}^A \text{ , } se\ t \geq s \\ diag(p_{it})\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_A - p_{it}p_{is}^A \text{ , } se\ t < s \end{cases}}$$

5. Covariância nos estados do cônjuge entre os instantes s e t:

$$\Sigma_{f,f,t,s}^{(sx,id)} = E\{[I_{it}f_{it} - E(I_{it}f_{it})][I_{is}f_{is} - E(I_{is}f_{is})]'|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\}$$

$$\Sigma_{f,f,t,s} = E\{[I_{it}f_{it} - p_{it}^A q_{it}][I_{is}f_{is} - p_{is}^A q_{is}]'|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\} =$$

$$= E\{(I_{it}f_{it}I_{is}f'_{is}) - (I_{is}f_{is}p_{is}^A q'_{is}) - (p_{it}^A q_{it}I_{is}f'_{is}) + (p_{it}^A q_{it}p_{is}^A q'_{is})|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\} =$$

$$= E\left(I_{it}f_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) - E\left(I_{is}f_{is}p_{is}^A q'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right)$$

$$-E\left(p_{it}^A q_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) + E\left(p_{it}^A q_{it}p_{is}^A q'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) =$$

$$= E\left(I_{it}f_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) - E\left(I_{it}f_{it}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right)p_{is}^A q'_{is}$$

$$-p_{it}^A q_{it}E\left(I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) + p_{it}^A q_{it}p_{is}^A q'_{is} =$$

$$= E\left(I_{it}f_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) - p_{it}^A q_{it}p_{is}^A q'_{is} - p_{it}^A q_{it}p_{is}^A q'_{is} + p_{it}^A q_{it}p_{is}^A q'_{is} =$$

$$= E\left(I_{it}f_{it}I_{is}f'_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) - p_{it}^A q_{it}p_{is}^A q'_{is}$$

Por serem independentes as variáveis I_{it}, f_{it}, I_{is} e f'_{is} posso separar da seguinte maneira:

$$= E\left(I_{it} f_{it} I_{is} f'_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) =$$

$$= E\ \left(I_{it} I_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) E\ \left(f_{it} f'_{\ is} | e_{i0} = 1_{e_0}, f_{i0} = 1_{f_0}\right) =$$

$$= E\ \left(I_{it} I_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}\right) E\ \left(f_{it} f'_{\ is} | f_{i0} = 1_{f_0}\right) =$$

- t>s

Se t é maior ou igual a s pode-se dizer que $\mathrm{I_{is}} = 1$ significa que algum $\mathrm{e_{isk}} = 1$ ocorreu em s, então é possível escrever usando a propriedade $\mathrm{E_y}\left[\mathrm{E_{x|y}} \mathrm{E(X|Y)}\right] = \mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{y}} \mathrm{E(X|Y)p(y)}$, ao definir $\mathrm{X} = \mathrm{I_{it}} \mathrm{I_{is}}$ e $\mathrm{Y} = \mathrm{e_{isk}}$ que:

$$E\ \left(I_{it} I_{is} | e_{i0} = 1_{e_0}\right)\ = P\left(I_{it} = 1, I_{is} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{12} P\left(I_{it} = 1, e_{isk} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{12} P\left(I_{it} = 1 | e_{isk} = 1, e_{i0} = 1_{e_0}\right) P\left(e_{isk} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right) =$$

$$\left[P\left(I_{it} = 1 | e_{is2} = 1, e_{i0} = 1_{e_0}\right) \quad \dots \quad P\left(I_{it} = 1 | e_{is2} = 1, e_{i0} = 1_{e_0}\right)\right] \begin{bmatrix} P\left\{e_{is2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ P\left\{e_{is12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix}$$

$$= \left[P(I_{it} = 1 | e_{is2} = 1) \quad \dots \quad P(I_{it} = 1 | e_{is2} = 1)\right] \begin{bmatrix} P\left\{e_{is2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ P\left\{e_{is12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix}$$

$$= \left[1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_2 \quad \dots \quad 1'_A \left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_{12}\right] \begin{bmatrix} P\left\{e_{is2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ P\left\{e_{is12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P\{e_{is1} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is3} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is4} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is5} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is6} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is7} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is8} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is9} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is10} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is11} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ P\{e_{is12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \end{bmatrix} = p_{is}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} p_{is} = \begin{bmatrix} P\{e_{is2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \\ \vdots \\ P\{e_{is12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\} \end{bmatrix}$$

Pode-se escrever:

$$= \left[1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_2 \quad \dots \quad 1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} 1_{12}\right] \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} p_{is}$$

$$1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s} [1_2 \quad \dots \quad 1_{12}] \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} p_{is}$$

Definindo:

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&I_{(11x11)}\end{bmatrix}$$

Tem-se que,

$$[1_2 \quad \dots \quad 1_{12}]\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&I_{(11x11)}\end{bmatrix}$$

$$E\left(I_{it}I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{t-s}\begin{bmatrix}0&0\\0&I_{(11x11)}\end{bmatrix}p_{is}$$

$$E\left[f_{it}f'_{is}|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\right]=\left\{P\left\{f_{itl=1},f'_{ism}=1|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\right\}\right\}_{l,m}$$

$$a_{lm}=\left\{P\left\{f_{itl=1}|f'_{ism}=1,e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\right\}P\left\{f'_{ism}=1|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\right\}\right\}_{l,m}$$

$$P\left\{f_{itl=1}|f'_{ism}=1,e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\right\}=1'_l\left(Q'_{-s(i),d(i)+4s(i)}\right)^{t-s}1_m$$

$$P\left\{f'_{ism}=1|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\right\}=1'_m\left(Q'_{-s(i),d(i)+4s(i)}\right)^{s}1_{f_0}$$

$$E\left[f_{it}f'_{is}|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\right]=\left(Q'_{-s(i),d(i)+4s(i)}\right)^{t-s}diag(q_{is})$$

- t<s

Se t é menor que s pode-se dizer que $I_{it}=1$ significa que algum $e_{itk}=1$ ocorreu em t, então é possível escrever usando a propriedade $E_y\left[E_{x|y}E(X|Y)\right]=E(X)=\sum_y E(X|Y)p(y)$, ao definir $X=I_{it}I_{is}$ e $Y=e_{itk}$:

$$E\left(I_{it}I_{is}|e_{i0}=1_{e_0}\right)=P\left(I_{it}=1,I_{is}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)=$$

$$=\sum_{k=2}^{12}P\left(I_{is}=1,e_{itk}=1|e_{i0}=1_{e_0}\right)=$$

$$= \sum_{k=2}^{12} P\left(I_{is} = 1 | e_{itk} = 1, e_{i0} = 1_{e_0}\right) P\left(e_{itk} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right) =$$

$$\left[P\left(I_{is} = 1 | e_{it2} = 1, e_{i0} = 1_{e_0}\right) \quad \dots \quad P\left(I_{is} = 1 | e_{it2} = 1, e_{i0} = 1_{e_0}\right)\right] \begin{bmatrix} P\left\{e_{it2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ P\left\{e_{it12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix}$$

$$= \left[P(I_{is} = 1 | e_{it2} = 1) \quad \dots \quad P(I_{is} = 1 | e_{it2} = 1)\right] \begin{bmatrix} P\left\{e_{it2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ P\left\{e_{it12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix}$$

$$= \left[1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_2 \quad \dots \quad 1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t} 1_{12}\right] \begin{bmatrix} P\left\{e_{it2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ P\left\{e_{it12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P\left\{e_{it1} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it3} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it4} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it5} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it6} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it7} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it8} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it9} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it10} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it11} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ P\left\{e_{it12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix} = p_{it}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p_{it} = \begin{bmatrix} P\left\{e_{it2} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \\ \vdots \\ P\left\{e_{it12} = 1 | e_{i0} = 1_{e_0}\right\} \end{bmatrix}$$

Pode-se escrever:

$$= \left[1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_2 \quad \dots \quad 1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}1_{12}\right]\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} p_{it}$$

$$1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}\left[1_2 \quad \dots \quad 1_{12}\right]\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} p_{it}$$

Definindo:

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix}$$

Tem-se que,

$$\left[1_2 \quad \dots \quad 1_{12}\right]\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix}$$

$$E\left(I_{it}I_{is}|e_{i0} = 1_{e_0}\right) = 1'_A\left(P'_{s(i),d(i)}\right)^{s-t}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(11x11)} \end{bmatrix} p_{it}$$

$$E[f_{it}f'_{is}|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}]=\{P\{f_{itl=1},f'_{ism}=1|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\}\}_{l,m}$$

$$a_{lm}=\{P\{f_{ism=1}|f'_{itl}=1,e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\}P\{f'_{itl}=1|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\}\}_{l,m}$$

$$P\{f_{ism=1}|f'_{itl}=1,e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\}=1'_m\left(Q'_{-s(i),d(i)+4s(i)}\right)^{s-t}1_l$$

$$P\{f'_{itl}=1|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}\}=1'_l\left(Q'_{-s(i),d(i)+4s(i)}\right)^{t}1_{f_0}$$

$$E[f_{it}f'_{is}|e_{i0}=1_{e_0},f_{i0}=1_{f_0}]=\left(Q'_{-s(i),d(i)+4s(i)}\right)^{s-t}diag(q_{it})$$

Se $t=s$ a matriz$\left(Q'_{-s(i),d(i)+4s(i)}\right)^{s-t}=I$

Generalizando:

$$\Sigma_{f,f,t,s}=1'_A\left(P'_{sx,id}\right)^{|t-s|}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{(11x11)}\end{bmatrix}p_{i,min\,(t,s)}\left(Q'_{-s(i),d(i)+4s(i)}\right)^{|s-t|}$$

Então:

$$\boxed{\Sigma_{f,f,t,s}=\begin{cases}1'_A\left(P'_{sx,id}\right)^{|t-s|}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{(11x11)}\end{bmatrix}p_{i,min\,(t,s)}\left(Q'_{-s(i),d(i)+4s(i)}\right)^{|s-t|}\\ diag\left(q_{i,min\,(t,s)}\right)-p^A_{it}q_{it}p^A_{is}q'_{is}\end{cases}}$$

Os demais cálculos seguem o mesmo raciocínio que os cálculos já apresentados.

8.2
Programação Matlab

<u>Programas principais</u>

Programa aplicação do modelo normal

```
clear all

%ler base
load b90;

base=data;
N=size(base,1);


%ler pesos para prob de grupos
load peso90;

peso=data;
```

```
Np=size(peso,1);


%ler tabuas atuariais
load prob_m;

tabuas_M_val=data;
tabuas_M_inval=tabuas_M_val;

load prob_f;

tabuas_F_val=data;
tabuas_F_inval=tabuas_F_val;

Nt=size(tabuas_M_val,1);


%base sexo, idade e premio
sexo(:,1)  = base(:,1);  %sx

idade(:,1)  = base(:,2); %Id


%para idade ocupar menos memoria id 1000 vai ser id 122

y=find(idade==1000);
idade(y,1)=121;


%percentual do premio a ser utilizado
Per_premio=0.53;

r(:,1) = base(:,3);          %premio (base de dados)
r_real = Per_premio*r(:,1); %premio utilizado


%mes de inicio de vigencia do contrato
inicio_vig(:,1) = base(:,19);


%base titular
c(:,1)  = zeros(N,1);  %fim
c(:,2)  = zeros(N,1);  %valido
c(:,3)  = zeros(N,1);  %invalido
c(:,4)  = base(:,4);   %invalidez funcional permanente total por
doença
c(:,5)  = base(:,6);   %invalidez permanente parcial por acidente
c(:,6)  = base(:,8);   %invalidez permanente total por acidente
c(:,7)  = base(:,9);   %invalidez permanente total por doenca
c(:,8) = base(:,10);   %invalidez temporária por acidente
c(:,9) = base(:,11);   %morte por acidente
c(:,10) = base(:,13);  %morte qualquer causa
c(:,11) = base(:,16);  %qualquer tipo de acidente
c(:,12) = base(:,18);  %invalidez laboral permanente


%base conjuge
b(:,1)  = zeros(N,1);  %fim
b(:,2)  = zeros(N,1);  %valido
```

```
b(:,3)   = zeros(N,1);  %invalido
b(:,4)   = base(:,5);   %invalidez permanente parcial do cônjuge
por acidente
b(:,5)   = base(:,7);   %invalidez permanente total do cônjuge por
acidente
b(:,6)   = base(:,12);  %morte por acidente do cônjuge
b(:,7)   = base(:,14);  %morte qualquer causa do cônjuge
b(:,8)   = base(:,17);  %invalidez permanente total por doenca do
cônjuge


%base filhos
a(:,1)   = zeros(N,1);  %fim
a(:,2)   = zeros(N,1);  %valido
a(:,3)   = zeros(N,1);  %invalido
a(:,4)   = base(:,15);  %morte qualquer causa do filho


%vetor W
load pc90;

prod_cruz=data;

load correspondencia_var;

tab=data;

eta(:,:)=zeros(N,29^2);
eta(:,tab(:,1))=prod_cruz(:,tab(:,2));


%num de mulheres e homens por idade
idp(:,1)= peso(:,1);   %idade
F(:,1)   = peso(:,2);   %mulher
M(:,1)   = peso(:,3);   %homem

Sm=0;
Sh=0;
for i=1:Np
    Sm=Sm+F(i);       %total de mulheres
    Sh=Sh+M(i);       %total de homens
end



%tabuas atuariais
idt_M_val(:,1)=tabuas_M_val(:,1);
idt_M_inval(:,1)=tabuas_M_inval(:,1);
idt_F_val(:,1)=tabuas_F_val(:,1);
idt_F_inval(:,1)=tabuas_F_inval(:,1);

S_M_val(:,:)=tabuas_M_val(:,[2:10]);
S_M_inval(:,:)=tabuas_M_inval(:,[2:10]);
S_F_val(:,:)=tabuas_F_val(:,[2:10]);
S_F_inval(:,:)=tabuas_F_inval(:,[2:10]);

Sc_M_val=S_F_val(:,[2,3,6,7,4]);       %prob do conjuge de um
titular homem e igual a prob de um titular mulher
Sc_M_inval=S_F_inval(:,[2,3,6,7,4]);
```

```
Sc_F_val=S_M_val(:,[2,3,6,7,4]);
Sc_F_inval=S_M_val(:,[2,3,6,7,4]);

Sf_val=S_M_val(:,7);   %prob do filho homem
Sf_inval=S_M_val(:,7);

Pfim=1-(1-0.21).^(1/12); %probabilidade de fim mensal (1-
persistencia) --> anual 21%

Nsin=size(S_M_val,2);
Ncsin=size(Sc_M_val,2);
Nfsin=size(Sf_val,2);


%vetor de estado inicial
P0=[0;1;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
Q0=[0;1;0;0;0;0;0;0];
U0=[0;1;0;0];


%matriz de transicao titular (4 dim)
aux1_M=0;
aux1_F=0;
aux2_M=0;
aux2_F=0;
for j=1:Nsin
    aux1_M = aux1_M+S_M_val(:,j);
    aux1_F = aux1_F+S_F_val(:,j);

    aux2_M = aux2_M+S_M_inval(:,j);
    aux2_F = aux2_F+S_F_inval(:,j);

end
val_M = 1-(aux1_M+Pfim);        %prob de valido
val_F = 1-(aux1_F+Pfim);

inval_M = 1-(aux2_M+Pfim);      %prob de invalido
inval_F = 1-(aux2_F+Pfim);

for id=1:121
    for sx=1:2
        P(:,:,sx,id)=zeros(12,12);
        P(1,1,sx,id)=1;
        P(4,3,sx,id)=1;
        P(5,2,sx,id)=1;
        P(6,1,sx,id)=1;
        P(7,1,sx,id)=1;
        P(8,2,sx,id)=1;
        P(9,1,sx,id)=1;
        P(10,1,sx,id)=1;
        P(11,2,sx,id)=1;
        P(12,3,sx,id)=1;

        P(2,1,sx,id)=Pfim;
        P(3,1,sx,id)=Pfim;
    end

    P(2,2,1,id)=val_M(id);
    P(2,2,2,id)=val_F(id);
```

```
    P(3,3,1,id)=inval_M(id);
    P(3,3,2,id)=inval_F(id);

    for j=4:12
        P(2,j,1,id)=S_M_val(id,j-3);
        P(3,j,1,id)=S_M_inval(id,j-3);
        P(2,j,2,id)=S_F_val(id,j-3);
        P(3,j,2,id)=S_F_inval(id,j-3);
    end
end

Pm=0;
for i=1:Np
    Pm=Pm+((F(i)*P(:,:,2,(idp(i)+1)))+(M(i)*P(:,:,1,(idp(i)+1))));
end

Pm=Pm/(Sm+Sh);

for sx=1:3
    P(:,:,sx,122)=Pm;
end


%matriz de transicao conjuge (4 dim)
aux1_M=0;
aux1_F=0;
aux2_M=0;
aux2_F=0;
for j=1:Ncsin
    aux1_M = aux1_M+Sc_M_val(:,j);
    aux1_F = aux1_F+Sc_F_val(:,j);

    aux2_M = aux2_M+Sc_M_inval(:,j);
    aux2_F = aux2_F+Sc_F_inval(:,j);

end
valc_M = 1-(aux1_M+Pfim);         %prob de valido
valc_F = 1-(aux1_F+Pfim);

invalc_M = 1-(aux2_M+Pfim);       %prob de invalido
invalc_F = 1-(aux2_F+Pfim);

for id=1:121
    for sx=1:2
        Q(:,:,sx,id)=zeros(8,8);
        Q(1,1,sx,id)=1;
        Q(4,3,sx,id)=1;
        Q(5,1,sx,id)=1;
        Q(6,1,sx,id)=1;
        Q(7,1,sx,id)=1;
        Q(8,1,sx,id)=1;

        Q(2,1,sx,id)=Pfim;
        Q(3,1,sx,id)=Pfim;
    end

    Q(2,2,1,id)=valc_M(max(id-4,1));
    Q(2,2,2,id)=valc_F(min(id+4,121));
    Q(3,3,1,id)=invalc_M(max(id-4,1));
```

```
    Q(3,3,2,id)=invalc_F(min(id+4,121));

    for j=4:8
        Q(2,j,1,id)=Sc_M_val(max(id-4,1),j-3);
        Q(3,j,1,id)=Sc_M_inval(max(id-4,1),j-3);
        Q(2,j,2,id)=Sc_F_val(min(id+4,121),j-3);
        Q(3,j,2,id)=Sc_F_inval(min(id+4,121),j-3);
    end
end

Qm=0;
for i=1:Np
    Qm=Qm+((F(i)*Q(:,:,2,(idp(i)+1)))+(M(i)*Q(:,:,1,(idp(i)+1))));
end

Qm=Qm/(Sm+Sh);

for sx=1:3
    Q(:,:,sx,122)=Qm;
end


%matriz de transicao filhos (4 dim)
aux1=0;
aux2=0;
for j=1:Nfsin
    aux1 = aux1+Sf_val(:,j);

    aux2 = aux2+Sf_inval(:,j);

end
valf = 1-(aux1+Pfim);         %prob de valido
valf = 1-(aux1+Pfim);

invalf = 1-(aux2+Pfim);       %prob de invalido
invalf = 1-(aux2+Pfim);

for id=1:121
    for sx=1:2
        U(:,:,sx,id)=zeros(4,4);
        U(1,1,sx,id)=1;
        U(4,1,sx,id)=1;

        U(2,1,sx,id)=Pfim;
        U(3,1,sx,id)=Pfim;
    end

    U(2,2,1,id)=valf(15);
    U(2,2,2,id)=valf(15);
    U(3,3,1,id)=invalf(15);
    U(3,3,2,id)=invalf(15);

    U(2,4,1,id)=Sf_val(15,1);
    U(3,4,1,id)=Sf_inval(15,1);
    U(2,4,2,id)=Sf_val(15,1);
    U(3,4,2,id)=Sf_inval(15,1);
end

Um=0;
```

```
for i=1:Np
    Um=Um+((F(i)*U(:,:,2,(idp(i)+1)))+(M(i)*U(:,:,1,(idp(i)+1))));
end

Um=Um/(Sm+Sh);

for sx=1:3
    U(:,:,sx,122)=Um;
end


%Indicador de contrato ativo
Ia=[0;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];


%Beta
m=inicio_vig(1,1); %mes de inicio de vigencia dos contratos da
base corrente
%n=12-m+1;
x=[0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01;
0.01; 0.01];

for t=1:12
    Baux(t)=1/prod(1+x(1:t));
end

B(1,:)=zeros(1,12);
%B(1:n)=Baux(m:12);
B(m:12)=Baux(m:12);


%Valor Esperado
ET=0;Ec=0;Et=0;Ef=0;Er=0;Esin=0;Epremio=0;

for i=1:N
   sx=sexo(i,1);
   id=idade(i,1);
   if sx==1
       sxc=2;
   elseif sx==2
       sxc=1;
   else
       sxc=sx;
   end;
   if id==121
        idc=121;
   elseif sx==1
       idc=max(id-4,1);
   else
       idc=min(id+4,120);
   end
   for t=1:12


%parcelas mensais dividida assim para aplicar corretamente o beta
```

```
        Ett=(c(i,:)*(P(:,:,sx,id+1)^t)'*P0);

Ect=((b(i,:)*(Q(:,:,sxc,idc+1)^t)'*Q0)*(Ia'*(P(:,:,sx,id+1)^t)'*P0
));

Eft=((2*a(i,:)*(U(:,:,1,15)^t)'*U0)*(Ia'*(P(:,:,sx,id+1)^t)'*P0));
        Ert=(r_real(i)*(Ia'*(P(:,:,sx,id+1)^t)'*P0));



      %acumulado somatório horizonte/ano

        Et=Et+Ett;%media capital pago por sinistros com titular
        Ec=Ec+Ect; %media capital pago por sinistros com conjuge
        Ef=Ef+Eft; %media capital pago por sinistros com filhos
        Er=Er+Ert; %media premio recebido
        ET=ET+(B(t)*(Ett+Ect+Eft-Ert)); %valor esperado total
trazido a valor presente
        Esin=Esin+(B(t)*(Ett+Ect+Eft)); %valor esperado total de
sinistros trazido a valor presente
        Epremio=Epremio+(B(t)*Ert); %valor esperado total de premio
trazido a valor presente
   end
end



%Variancia
L=[0,zeros(1,11);zeros(11,1),eye(11)];
VT=0;

for i=1:N
   sx=sexo(i,1);
   id=idade(i,1);
   if sx==1
        sxc=2;
   elseif sx==2
        sxc=1;
   else
        sxc=sx;
   end;
   if id==121
         idc=121;
   elseif sx==1
        idc=max(id-4,1);
   else
        idc=min(id+4,120);
   end
   sparcial=zeros(29^2,1);

   for t=1:12
        for s=1:12
            pmin=((P(:,:,sx,id+1)')^min(t,s))*P0;
            pt=((P(:,:,sx,id+1)')^t)*P0;
            ps=((P(:,:,sx,id+1)')^s)*P0;
            pAt=Ia'*((P(:,:,sx,id+1)')^t)*P0;
            pAs=Ia'*((P(:,:,sx,id+1)')^s)*P0;
            qmin=((Q(:,:,sxc,idc+1)')^min(t,s))*Q0;
            qt=((Q(:,:,sxc,idc+1)')^t)*Q0;
```

```
            qs=((Q(:,:,sxc,idc+1)')^s)*Q0;
            umin=((U(:,:,1,15)')^min(t,s))*U0;
            ut=((U(:,:,1,15)')^t)*U0;
            us=((U(:,:,1,15)')^s)*U0;

            COVt=((P(:,:,sx,id+1)')^abs(t-s))*diag(pmin)-pt*ps';


%covariancia entre estados do titular em t e s

            COVc=Ia'*((P(:,:,sx,id+1)')^abs(t-
s))*L*pmin*((Q(:,:,sxc,idc+1)')^abs(t-s))*diag(qmin)-
pAt*pAs*(qt*qs'); %covariancia entre estados do conjuge em t e s

            COVf=Ia'*((P(:,:,sx,id+1)')^abs(t-
s))*L*pmin*((U(:,:,1,15)')^abs(t-s))*diag(umin)-pAt*pAs*(ut*us');
%covariancia entre estados do filho em t e s

            COVcf=Ia'*((P(:,:,sx,id+1)')^abs(t-s))*L*pmin*qt*us'-
pAt*pAs*(qt*us'); %covariancia entre estados do conjuge e dos
filhos em t e s

            COVff=Ia'*((P(:,:,sx,id+1)')^abs(t-s))*L*pmin*ut*us'-
pAt*pAs*(ut*us'); %covariancia entre estados do filho1 e do filho2
em t e s

            COVr=Ia'*((P(:,:,sx,id+1)')^abs(t-s))*L*pmin-pAt*pAs;
%covariancia entre premio em t e s

            COVcr=Ia'*((P(:,:,sx,id+1)')^abs(t-s))*L*pmin*qt-
pAt*pAs*qt; %covariancia entre conjuge e premio em t e s

            COVfr=Ia'*((P(:,:,sx,id+1)')^abs(t-s))*L*pmin*ut-
pAt*pAs*ut; %covariancia entre filho e premio em t e s

            if t>=s
                COVtc=((P(:,:,sx,id+1)')^(t-s))*L*ps*qs'-
pt*pAs*qs'; %covariancia entre estados do titular e do conjuge em
t e s

                COVtf=((P(:,:,sx,id+1)')^(t-s))*L*ps*us'-
pt*pAs*us'; %covariancia entre estados do titular e dos filhos em
t e s

                COVtr=((P(:,:,sx,id+1)')^(t-s))*L*ps-pt*pAs;
%covariancia entre titular e premio em t e s
            else
                COVtc=diag(pt)*((P(:,:,sx,id+1))^(s-t))*Ia*qs'-
pt*pAs*qs';

                COVtf=diag(pt)*((P(:,:,sx,id+1))^(s-t))*Ia*us'-
pt*pAs*us';

                COVtr=diag(pt)*((P(:,:,sx,id+1))^(s-t))*Ia-pt*pAs;
            end

            COV=[COVt,COVtc,COVtf,COVtf,COVtr;
                COVtc',COVc,COVcf,COVcf,COVcr;
                COVtf',COVcf',COVf,COVff,COVfr;
```

```
                  COVtf',COVcf',COVff',COVf,COVfr;
                  COVtr',COVcr',COVfr',COVfr',COVr];


              vec=reshape(COV,(size(COV,1))^2,1);

              sparcial=sparcial+B(t)*B(s)*vec;
          end
      end
      VT=VT+eta(i,:)*sparcial;
end


%limpando a memoria
clear B Baux COV COVc COVcf COVcr COVf COVff COVfr COVr COVt COVtc
COVtf COVtr Ect Eft Ert Ett F Ia L M N Ncsin Nfsin Np Nsin Nt P P0
Per_premio Pfim Pm Q Q0 Qm S_F_inval S_F_val S_M_inval S_M_val
Sc_F_inval Sc_F_val Sc_M_inval Sc_M_val Sf_inval Sf_val Sh Sm U U0
Um a aux1 aux1_M aux1_F aux2 aux2_F aux2_M b base c colheaders
data eta i id idade idc idp idt_F_inval idt_F_val idt_M_inval
idt_M_val inicio_vig inval_F inval_M invalc_F invalc_M invalf j m
pAs pAt peso pmin prod_cruz ps pt qmin qs qt r r_real s sexo
sparcial sx sxc t tab tabuas_F_inval tabuas_F_val tabuas_M_inval
tabuas_M_val textdata umin us ut val_F val_M valc_F valc_M valf
vec x;
% save resultado;
```

Programa de simulação da vida no período de um ano de parte da carteira

```
clear all
%le a base
load basesim;
base=data;
clear data;
%numero de individuos
N=size(base,1);


%numero de meses
mes=12;


%número equivale ao numero de anos simulados
Nsim=1000;


%ler pesos para prob de grupos
load conta_h_mb10;

peso=data;
Np=size(peso,1);

clear data;


%ler tabuas atuariais
load prob_m;
```

```
tabuas_M_val=data;
tabuas_M_inval=tabuas_M_val;

load prob_f;

tabuas_F_val=data;
tabuas_F_inval=tabuas_F_val;
Nt=size(tabuas_M_val,1);


%base sexo, idade e premio
sexo(:,1)  = base(:,1);  %sx

idade(:,1)  = base(:,2); %Id


%para idade ocupar menos memoria id 1000 vai ser id 122

y=find(idade==1000);
idade(y,1)=121;


%percentual do premio a ser utilizado

Per_premio=0.53;


%premio (base de dados)

r(:,1) = base(:,3);




%premio utilizado

r_real = Per_premio*r(:,1);


%base de valores referente ao titular
c(:,1)  = zeros(N,1);  %fim
c(:,2)  = zeros(N,1);  %valido
c(:,3)  = zeros(N,1);  %invalido
c(:,4)  = base(:,4);   %invalidez funcional permanente total por
doença
c(:,5)  = base(:,6);   %invalidez permanente parcial por acidente
c(:,6)  = base(:,8);   %invalidez permanente total por acidente
c(:,7)  = base(:,9);   %invalidez permanente total por doenca
c(:,8) = base(:,10);   %invalidez temporária por acidente
c(:,9) = base(:,11);   %morte por acidente
c(:,10) = base(:,13);  %morte qualquer causa
c(:,11) = base(:,16);  %qualquer tipo de acidente
c(:,12) = base(:,18);  %invalidez laboral permanente


%base de valores referente ao conjuge
b(:,1)  = zeros(N,1);  %fim
b(:,2)  = zeros(N,1);  %valido
b(:,3)  = zeros(N,1);  %invalido
```

```
b(:,4)  = base(:,5);   %invalidez permanente parcial do cônjuge
por acidente
b(:,5)  = base(:,7);   %invalidez permanente total do cônjuge por
acidente
b(:,6)  = base(:,12);  %morte por acidente do cônjuge
b(:,7)  = base(:,14);  %morte qualquer causa do cônjuge
b(:,8)  = base(:,17);  %invalidez permanente total por doenca do
cônjuge


%base de valores referentes aos filhos
a(:,1)  = zeros(N,1);  %fim
a(:,2)  = zeros(N,1);  %valido
a(:,3)  = zeros(N,1);  %invalido
a(:,4)  = base(:,15);  %morte qualquer causa do filho


%tabuas atuariais (probabilidades)
idt_M_val(:,1)=tabuas_M_val(:,1);
idt_M_inval(:,1)=tabuas_M_inval(:,1);
idt_F_val(:,1)=tabuas_F_val(:,1);
idt_F_inval(:,1)=tabuas_F_inval(:,1);

S_M_val(:,:)=tabuas_M_val(:,[2:10]);
S_M_inval(:,:)=tabuas_M_inval(:,[2:10]);
S_F_val(:,:)=tabuas_F_val(:,[2:10]);
S_F_inval(:,:)=tabuas_F_inval(:,[2:10]);

Sc_M_val=S_F_val(:,[2,3,6,7,4]);        %prob do conjuge de um
titular homem e igual a prob de um titular mulher
Sc_M_inval=S_F_inval(:,[2,3,6,7,4]);
Sc_F_val=S_M_val(:,[2,3,6,7,4]);
Sc_F_inval=S_M_val(:,[2,3,6,7,4]);

Sf_val=S_M_val(:,7);   %prob do filho homem
Sf_inval=S_M_val(:,7);


%num de mulheres e homens por idade para quando for grupo
idp(:,1)= peso(:,1);  %idade
F(:,1)  = peso(:,2);  %mulher
M(:,1)  = peso(:,3);  %homem

Sm=0;
Sh=0;
for i=1:Np
    Sm=Sm+F(i);     %total de mulheres
    Sh=Sh+M(i);     %total de homens
end


%probabilidade de fim mensal (1-rotatividade) --> anual 21%

Pfim=1-(1-0.21).^(1/12); %(1-(persistência))transformado em mensal
%preciso contar o numero de colunas formado para fazer o calculo
da prob de
%valido
Nsin=size(S_M_val,2);%conta quantas probabilidades foram
utilizadas da tabua para o titular
```

```
Ncsin=size(Sc_M_val,2);%quantas foram usadas para sinistro com
conjuge
Nfsin=size(Sf_val,2);%quantas foram utilizadas para sinistro com
filho


%mes de inicio de vigencia do contrato
inicio_vig(:,1) = base(:,19);
%Beta
m=inicio_vig(1,1); %mes de inicio de vigencia dos contratos da
base corrente
%n=12-m+1;
x=[0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01; 0.01;
0.01; 0.01];

for t=1:12
    Jaux(t)=1/prod(1+x(1:t));
end

J(1,:)=zeros(1,mes);
%J(1:n)=Jaux(m:12);
J(m:mes)=Jaux(m:mes);


%matriz de transicao titular (4 dim)
%cálculo da probabilidade de válido para cada idade da tábua
aux1_M=0;
aux1_F=0;
aux2_M=0;
aux2_F=0;
for j=1:Nsin
    aux1_M = aux1_M+S_M_val(:,j);
    aux1_F = aux1_F+S_F_val(:,j);

    aux2_M = aux2_M+S_M_inval(:,j);
    aux2_F = aux2_F+S_F_inval(:,j);
end
val_M = 1-(aux1_M+Pfim);        %prob de valido
val_F = 1-(aux1_F+Pfim);

inval_M = 1-(aux2_M+Pfim);      %prob de invalido
inval_F = 1-(aux2_F+Pfim);

for id=1:121
    for sx=1:2
        P(:,:,sx,id)=zeros(12,12);
        P(1,1,sx,id)=1;
        P(4,3,sx,id)=1;
        P(5,2,sx,id)=1;
        P(6,1,sx,id)=1;
        P(7,1,sx,id)=1;
        P(8,2,sx,id)=1;
        P(9,1,sx,id)=1;
        P(10,1,sx,id)=1;
        P(11,2,sx,id)=1;
        P(12,3,sx,id)=1;

        P(2,1,sx,id)=Pfim;
        P(3,1,sx,id)=Pfim;
    end
```

```
    P(2,2,1,id)=val_M(id);
    P(2,2,2,id)=val_F(id);
    P(3,3,1,id)=inval_M(id);
    P(3,3,2,id)=inval_F(id);

    for j=4:12
        P(2,j,1,id)=S_M_val(id,j-3);
        P(3,j,1,id)=S_M_inval(id,j-3);
        P(2,j,2,id)=S_F_val(id,j-3);
        P(3,j,2,id)=S_F_inval(id,j-3);
    end
end

Pm=0;
for i=1:Np
    Pm=Pm+((F(i)*P(:,:,2,(idp(i)+1)))+(M(i)*P(:,:,1,(idp(i)+1))));
end

Pm=Pm/(Sm+Sh);

for sx=1:3
    P(:,:,sx,122)=Pm;
end



%matriz de transicao conjuge (4 dim)
aux1_M=0;
aux1_F=0;
aux2_M=0;
aux2_F=0;
for j=1:Ncsin
    aux1_M = aux1_M+Sc_M_val(:,j);
    aux1_F = aux1_F+Sc_F_val(:,j);

    aux2_M = aux2_M+Sc_M_inval(:,j);
    aux2_F = aux2_F+Sc_F_inval(:,j);

end
valc_M = 1-(aux1_M+Pfim);        %prob de valido
valc_F = 1-(aux1_F+Pfim);

invalc_M = 1-(aux2_M+Pfim);      %prob de invalido
invalc_F = 1-(aux2_F+Pfim);

for id=1:121
    for sx=1:2
        Q(:,:,sx,id)=zeros(8,8);
        Q(1,1,sx,id)=1;
        Q(4,3,sx,id)=1;
        Q(5,1,sx,id)=1;
        Q(6,1,sx,id)=1;
        Q(7,1,sx,id)=1;
        Q(8,1,sx,id)=1;

        Q(2,1,sx,id)=Pfim;
        Q(3,1,sx,id)=Pfim;
    end
```

```
        Q(2,2,1,id)=valc_M(max(id-4,1));
        Q(2,2,2,id)=valc_F(min(id+4,121));
        Q(3,3,1,id)=invalc_M(max(id-4,1));
        Q(3,3,2,id)=invalc_F(min(id+4,121));

        for j=4:8
            Q(2,j,1,id)=Sc_M_val(max(id-4,1),j-3);
            Q(3,j,1,id)=Sc_M_inval(max(id-4,1),j-3);
            Q(2,j,2,id)=Sc_F_val(min(id+4,121),j-3);
            Q(3,j,2,id)=Sc_F_inval(min(id+4,121),j-3);
        end
    end

    Qm=0;
    for i=1:Np
        Qm=Qm+((F(i)*Q(:,:,2,(idp(i)+1)))+(M(i)*Q(:,:,1,(idp(i)+1))));
    end

    Qm=Qm/(Sm+Sh);
    for sx=1:3
        Q(:,:,sx,122)=Qm;
    end



    %matriz de transicao filhos (4 dim)
    aux1=0;
    aux2=0;
    for j=1:Nfsin
        aux1 = aux1+Sf_val(:,j);

        aux2 = aux2+Sf_inval(:,j);
    end
    valf = 1-(aux1+Pfim);          %prob de valido
    valf = 1-(aux1+Pfim);

    invalf = 1-(aux2+Pfim);        %prob de invalido
    invalf = 1-(aux2+Pfim);

    for id=1:121
        for sx=1:2
            U(:,:,sx,id)=zeros(4,4);
            U(1,1,sx,id)=1;
            U(4,1,sx,id)=1;

            U(2,1,sx,id)=Pfim;
            U(3,1,sx,id)=Pfim;
        end

        U(2,2,1,id)=valf(15);
        U(2,2,2,id)=valf(15);
        U(3,3,1,id)=invalf(15);
        U(3,3,2,id)=invalf(15);

        U(2,4,1,id)=Sf_val(15,1);
        U(3,4,1,id)=Sf_inval(15,1);
        U(2,4,2,id)=Sf_val(15,1);
        U(3,4,2,id)=Sf_inval(15,1);
```

```
end

clear F Jaux Per_premio Pfim S_F_inval S_F_val S_M_inval S_M_val
Sc_F_val;
clear Sc_F_inval Sc_M_val Sc_M_inval Sf_inval Sf_val Sh Sm aux1
aux1_F;
clear aux1_M aux2 aux2_F aux2_M colheaders data idt_F_inval
idt_F_val;
clear idt_M_inval idt_M_val inicio_vig inval_F inval_M invalc_F
invalc_M invalf;
clear j r tabuas_F_inval tabuas_F_val tabuas_M_inval tabuas_M_val
textdata val_F val_M;
clear valc_F valc_M valf x i sx t m M Np id idp peso Nsin Ncsin Nt
Nfsin;


%Criar as matrizes de probabilidade de transiçao
%de estados com as probabilidades acumuladas por linha


%matriz transiçao media acumulada titular
for sx=1:3
    for i=1:12
        for j=1:12
              Pac(i,j,sx,122)=sum(P(i,1:j,sx,122));
        end
    end
end

%matriz transiçao acumulada titular

for id=1:121
    for sx=1:3
        for i=1:12
               for j=1:12

                   Pac(i,j,sx,id)=sum(P(i,1:j,sx,id));

               end
         end
     end
end

for id=1:122
    for sx=1:3
        Pac(:,12,sx,id)=1;
    end
end

clear P;


%matriz transiçao media acumulada conjuge

for sx=1:3
    for i=1:8
        for j=1:8
            Qac(i,j,sx,122)=sum(Q(i,1:j,sx,122));
        end
```

```
    end
end



%matriz transiçao acumulada conjuge

for id=1:121
    for sx=1:3
        for i=1:8
               for j=1:8

                   Qac(i,j,sx,id)=sum(Q(i,1:j,sx,id));

               end
         end
     end
end

for id=1:122
    for sx=1:3
        Qac(:,8,sx,id)=1;
    end
end

clear Q;




%matriz transiçao acumulada filho

for i=1:4
    for j=1:4

        Uac(i,j,1,15)=sum(U(i,1:j,1,15));

    end
end
clear U;

Uac(:,4,1,15)=1;



%simulação da vida

%transiçao do estado 1 nos 10000 cenarios


%titular

aux=ones(N,1);
E=zeros(N,mes);

%AA para o primeiro cenário gero o estado do 1 mês
%para os individuos
aux1=aux*2;
```

```
t0=clock

%identifica o sexo do titular
auxtodos=find(sexo==1);%homem
auxtodos1=find(sexo==2);%mulher

%cria sexo conjuge
sexoc=ones(N,1)*3;%grupo
sexoc(auxtodos)=2;%feminino
sexoc(auxtodos1)=1;%masculino

%cria idade conjuge
idadec=ones(N,1)*121;%preenche tudo com a idade da matriz id e/ou
sx desconhecidos
idadec(auxtodos)=max(idade(auxtodos)-4,1);%idade do conjuge mulher
idadec(auxtodos1)=min(idade(auxtodos1)+4,120);%idade do conjuge
homem

T=zeros(Nsim,1);
Sin=zeros(Nsim,1);
Prem=zeros(Nsim,1);
npac=size(Pac,1);


%simula vida em um ano

for j=1:Nsim

    vsintot=zeros(N,mes);

    clear AA;
    %matriz onde cada linha indica as probabilidades
    %acumuladas referentes ao estado atual do individuo
    AA(:,:)=zeros(N,npac);
    %matriz onde cada elemento indica o prêmio pago
    %pelo individuo i no mês t
    R=zeros(N,mes);
    %matriz onde cada elemento indica o valor do sinistro gasto
    %pelo titular i no mês t
    valsin=zeros(N,mes);
    %matriz onde cada elemento indica o valor do sinistro gasto
    %pelo cônjuge do titular i no mês t
    valsinc=zeros(N,mes);
    %matriz onde cada elemento indica o valor do sinistro gasto
    %pelo filho do titular i no mês t
    valsinf=zeros(N,mes);

    %reinicia os auxiliares
     aux=ones(N,1);
     aux1=zeros(N,1);
     aux2=zeros(N,1);
     aux3=zeros(N,1);
     clear p;
     clear PP;

    %nova matriz de estados
     E=zeros(N,mes);%npac =12 pois representam os meses
     aux1=aux*2;%vetor de estados iniciais igual a válido
```

```
    for t=1:mes
        for i=1:N
            AA(i,:)=Pac(aux1(i),:,sexo(i),idade(i)+1);
        end

        p=rand(N,1);

        PP=[p p p p p p p p p p p p];
        aux2=(AA<PP);%retorna matriz Nx12 com valores lógicos 1
verdade e 0 para falso.
        aux3=sum(aux2,2)+ones(N,1);
        subst=find(aux3>12);%acerto, porque se for o estado 12
fica 13 (12+1)
        aux3(subst)=12;
        E(:,t)=aux3;%descoberta do estado no mês para cada
individuo

        %contar o dinheiro por individuo

        for d=1:N
            valsin(d,t)= c(d,aux3(d)).*J(t);
        end

        %premio pago no mes

        R(:,t)=r_real.*J(t);

        %troca de estado inicial
        aux1=aux3;
    end


    %verifica a ocorrência do sinitro 1 para o titular

     clear del;

     del=find(E==1);
     R(del)=0;


    %simulação conjuge

    %utilizar novamente esta matriz para não ocupar memoria
    clear AA;
    clear p;
    clear PP;

    %novo tamanho de estados
    nqac=size(Qac,1);

   %reinicia os auxiliares
    aux=ones(N,1);
    aux1=zeros(N,1);
    aux2=zeros(N,1);
    aux3=zeros(N,1);

    %nova matriz para as probabilidades acumuladas do cônjuge
    AA(:,:)=zeros(N,nqac);
```

```
    %nova matriz de estados
    E=zeros(N,mes);%npac =12 pois representam os meses
    aux1=aux*2;%vetor de estados iniciais igual a válido
    for t=1:mes %quantidade de meses observados
        for i=1:N%quantidade de individuos
            AA(i,:)= Qac(aux1(i),:,sexoc(i),idadec(i)+1);
        end
        p=rand(N,1);

        PP=[p p p p p p p p];
        aux2=(AA<PP);%responde com 1 se verdade e 0 se falso
        %soma as colunas de cada indivíduo + 1 para saber o estado
        aux3=sum(aux2,2)+ones(N,1);
        subst=find(aux3>8);%como se o estado for 8, 8+1 fica um
estado que não existe
        aux3(subst)=8;%localizo e troco para o numero do estado
correto
        %descoberta do estado no mês para cada individuo
        %preencimento da matriz de estados no mês t correspondente
        E(:,t)=aux3;
        %Cria matriz com os valores gastos com sinistro por
individuo em
        %cada mês, cada linha um individuo e cada coluna o mês.
Traz a
        %valor presente. Não faz para premio, pois so o titular
paga por
        %todos os dependentes
        for d=1:N
            valsinc(d,t)= b(d,aux3(d)).*J(t);
        end

        %troca de estado inicial
        aux1=aux3;
    end




    %verifica a ocorrência do sinitro 1 para o titular

     valsinc(del)=0;

    %simulação filho 1

    %utilizar novamente esta matriz para não ocupar memoria
    clear AA;
    clear p;
    clear PP;
    %novo tamanho de estados
    nuac1=size(Uac,1);

    %reinicia os auxiliares
     aux=ones(N,1);
     aux1=zeros(N,1);
     aux2=zeros(N,1);
     aux3=zeros(N,1);

     %nova matriz para as probabilidades acumuladas do filho
      AA(:,:)=zeros(N,nuac1);
```

```
      %nova matriz de estados
       E=zeros(N,12);%npac =12 pois representam os meses
       aux1=aux*2;%vetor de estados iniciais igual a válido

     for t=1:mes %quantidade de meses observados
         for i=1:N %quantidade de individuos
             AA(i,:)=Uac(aux1(i),:,1,15);
         end

         p=rand(N,1);%vetor de números aleatórios

         PP=[p p p p];%coloca na mesma dimensao para poder comparar
         aux2=(AA<PP);%responde com 1 se verdade e 0 se falso
         %soma as colunas de cada indivíduo + 1 para saber o estado
         aux3=sum(aux2,2)+ones(N,1);
         subst=find(aux3>4);%como se o estado for 4, 4+1 fica um
estado que não existe
         aux3(subst)=4;%localizo e troco para o numero do estado
correto
         %descoberta do estado no mês para cada individuo
         %preencimento da matriz de estados dos N individuos no mês
t correspondente
         E(:,t)=aux3;
         %Cria matriz com os valores gastos com sinistro por
individuo em
         %cada mês, cada linha um individuo e cada coluna o mês.
Traz a
         %valor presente. Não faz para premio, pois so o titular
paga por
         %todos os dependentes
         for d=1:N
             valsinf(d,t)= a(d,aux3(d)).*J(t);
         end
         %troca de estado inicial
         aux1=aux3;
     end


%verifica a ocorrência do sinitro 1 para o titular

      valsinf(del)=0;

%agora que as matrizes de valores do ano estão prontas
%Calcula-se os totais

vsintot= valsin+valsinc+(2*valsinf);
T(j)=sum(sum(vsintot-R),2);
Sin(j)=sum(sum(vsintot),2);
Prem(j)=sum(sum(R),2);
j
end
t1=clock

% histfit(T,100)
% ylabel('frequencia absoluta dos valores de T')
% xlabel('classes de valores de T');
% title('Histograma de 1000 simulações da variável T')
% normplot(T)
```

Programa de convolução e cálculo do capital

```
clear all
load T;
load ET90;
load VT90;

a=0.001;

N=size(T,1);

d=sqrt(VT);

xmax=max(T);

xmin=min(T);

z=norminv(0.999,0,1); % para alfa 0.001

tmin=z*d+xmin+ET;%e o limite max q  o t pode assumir

tmax=z*d+xmax+ET;% e o limite min q o t pode assumir

t1=tmin;
t2=tmax;

time0=clock

for k=1:100000

    k
    F=0;
    t(k)=(t1+t2)/2;

    for i=1:N;

        F=F+ 1/N *normcdf((t(k)-T(i)-ET)/d);

    end

    if abs(F-(1-a))<0.0001
        break

    elseif F>(1-a)

           t2=t(k);
       else
           t1=t(k);
    end
end

save resultado2;
time1=clock
```


Programa Gráfico da relação entre nível de significância e capital mínimo

```
clear all

load T;
load ET90;
load VT90;
load nivel;
a=nivel(:,1);%alfa, nivel de significancia
b=nivel(:,2);%1-alfa, nivel de confiança
na=size(a,1);
tresp=zeros(na,1);

N=size(T,1);

d=sqrt(VT);

xmax=max(T);

xmin=min(T);

time0=clock

for i=1:na

    z=norminv(b(i),0,1); % para alfa a(i)

    tmin=z*d+xmin+ET;%e o limite max q  o t pode assumir

    tmax=z*d+xmax+ET;% e o limite min q o t pode assumir


    t1=tmin;
    t2=tmax;

    for k=1:100000
        k
        F=0;
        t(k)=(t1+t2)/2;

        for j=1:N;

        F=F+ 1/N *normcdf((t(k)-T(j)-ET)/d);

        end

        if abs(F-(1-a(i)))<0.0001
           break

        elseif F>(1-a(i))

               t2=t(k);
        else
               t1=t(k);
        end
    end
tresp(i)=t(k);
end
time1=clock
```

```
plot(tresp,a)
xlabel('Valor do capital requerido')
ylabel('Valor de alfa, probabilidade de insolvência')

load ET;
load VT;
D=sqrt(VT);
z=zeros(na,1);
CMR=zeros(na,1);
for i=1:na
    z(i)=norminv(b(i),0,1);
    CMR(i)=ET+z(i)*D;
end

hold on
plot(tresp,a)
xlabel('Valor do capital requerido')
ylabel('Valor de alfa, probabilidade de insolvência')
plot(CMR,a,'r')
holf off
```

- Programa Gráfico Análise de sensibilidade

```
%analise macroeconomica
 A=[-8832001.18 0.02;
    -7504404.19 0.04;
    -6502181.63 0.06]

a=A(:,1);%valor obtido de CRM modelo híbrido
b=A(:,2);%cenário de juros ao ano

plot(b,a)
title('Comportamento do capital requerido')
xlabel('Cenários de juros anuais')
ylabel('Valores obtidos de capital requerido')

%analise rotatividade
B=[-10444902.16 0;
   -9571485.24  0.15;
   -7368947.84  0.40]

c=B(:,1);
d=B(:,2);
plot(d,c)
title('Comportamento do capital requerido')
xlabel('Cenários de rotatividades anuais')
ylabel('Valores obtidos de capital requerido')
```