2
Conceitos Básicos

2.1
Alguns Conceitos Básicos de Mercado Futuro

Uma operação de mercado Futuro pode ser entendida basicamente como um compromisso de compra ou venda de determinado ativo em certa data futura, sendo o preço do ativo objeto do contrato previamente fixado, ou seja, em uma operação a futuro há um compromisso, formalizado em contrato, de se comprar ou vender um bem em certa data no futuro.

A princípio, as operações de mercado futuro envolviam somente produtos agrícolas, como trigo, soja, café e açúcar (entre outros). Com o desenvolvimento da economia e do próprio mercado de capitais, as operações a futuro passaram a incorporar uma ampla variedade de contratos referenciados em ações, índices de preços, produtos pecuários, metais preciosos, moedas, taxa de câmbio e de juros etc. Os contratos, hoje, negociados na BM&F dividem-se em duas categorias: contratos agropecuários e contratos financeiros.

Os contratos futuros costumam ser padronizados pelas bolsas de valores em termos de quantidades de negociação, unidade de negociação, data de vencimento e forma de cotação. A padronização dos contratos tem por objetivo viabilizar a liquidez do mercado futuro.

Uma das funções principais desse mercado refere-se à possibilidade de proteção às variações adversas que podem ocorrer no preço de determinada *commodity* ou ativo financeiro numa data futura, promovendo certa repartição do risco numa espécie de seguro (*hedge*). No entanto, é possível notar que o preço de algumas commodities sofre grandes variações, estimulando a atuação de especuladores. Com o intuito de garantir o bom funcionamento das bolsas de valores são exigidos, dos investidores, depósitos de garantias, conhecidas como margem de garantia.

Podemos destacar, ainda, algumas características importantes dos contratos futuro como: comercialização realizada em bolsa, e por isso não carregam nenhum risco de contrapartida, tanto o comprador como o vendedor do contrato futuro negociam com a Câmara de Compensação (*Clearing House*) da bolsa. Marcação a mercado, pela qual as diferenças de preço são ajustadas diariamente, de forma a liquidar o contrato futuro diariamente, e os baixos custos de transação e de maior liquidez dos contratos.

Os participantes dos mercados futuros podem ser classificados de acordo com o propósito de suas operações. Podendo ser classificados como *Hedgers*, Especuladores e Arbitradores.

Hedgers: São os agentes de mercado diretamente relacionados com o ativo objeto, cuja atividade econômica básica consiste na produção, distribuição, processamento ou estocagem do produto. Sendo assim, o intuito desses indivíduos é reduzir ou eliminar o risco de perdas decorrente das variações de preços das commodities com que trabalham em detrimento a obtenção de lucro caso haja um movimento de mercado favorável. Exemplos de hedge podem ser tomados no caso de um pecuarista que vende contratos a termo para garantir-se contra uma queda das cotações, ou de um exportador que fixa um preço de compra de uma commodity que será vendida no exterior, bem como o de um fundo de investimento que na expectativa de valorização de uma determinada ação que pretende incluir em sua carteira compra índices de ações no mercado futuro a um preço preestabelecido.

Especuladores: São agentes com interesse em assumir os riscos de uma variação de preços na expectativa de se obter ganhos futuros decorrentes dos movimentos favoráveis. A atuação dos especuladores proporciona o bom funcionamento dos mercados futuros, colaborando para o aumento da liquidez das transações. Além de serem responsáveis pela transparência de preços e informações no mercado.

Arbitradores: Apresentam certa semelhança aos especuladores no sentido de contribuir para o aumento da liquidez do mercado e no processo de formação dos preços. Contudo, os arbitradores caracterizam-se por operarem simultaneamente em mais de um mercado, aproveitando as diferenças de preços para obter lucros tomando muito pouco risco. Oportunidades de arbitragem são raras e muito desejáveis. Elas surgem do desequilíbrio entre a oferta e a demanda do bem, em um ou outro mercado. O arbitrador comprará o produto onde o preço é mais baixo e irá vendê-lo onde for mais alto, auferindo lucro certo. Porém essa situação não dura muito tempo, forçando a volta ao equilíbrio e garantindo o estabelecimento de um preço justo. As arbitragens também podem ser feitas utilizando-se as distorções entre preço no mercado físico e futuro. Nessas condições a operação de arbitragem consiste na compra da mercadoria à vista e venda a futuro, valendo-se que os preços futuros são maiores que os do mercado físico e cobrem as despesas do carregamento do produto. É importante observar que a arbitragem desenvolve um importante papel no relacionamento entre preços à vista e futuro.

2.2
Convergência do Preço Futuro para o Preço à Vista

O preço de um contrato futuro deve convergir para o preço à vista, na data do seu vencimento, uma vez que o contrato futuro deve ser liquidado com as mesmas características do produto no mercado à vista, ou seja, os ativos tornam-se substitutos perfeitos. Caso contrário, surgiriam oportunidades de arbitragem, isto é, se o preço à vista estivesse mais alto do que o preço futuro, os participantes do mercado tomariam posições compradas nos contratos futuros e venderiam no mercado à vista. Da mesma forma, se os preços futuros estivessem mais altos, os investidores comprariam o ativo à vista e assumiriam posições vendidas nos contratos futuros. Através desses procedimentos, o arbitrador obteria lucro sem incorrer riscos. Se considerarmos $F_{T,\,t}$ como o preço futuro na data t de um ativo que será entregue em T, e S_t o preço à vista do ativo a ser entregue no futuro. Dessa forma, num ambiente sem possibilidades de arbitragem, no vencimento, tem-se que:

$$F_{T,T} = S_T$$

Contudo, antes do vencimento do contrato, o preço à vista não precisa ser igual ao preço futuro e essa diferença entre os preços futuros e à vista é designada pelo termo *base* ($B_{t,T}$), isto é:

$$B_{T,\,t} = F_{T,\,t} - S_t$$

A base evolui ao longo da duração do contrato, podendo assumir valores positivo, negativo ou igual a zero. Essa evolução procede do fato dos preços futuros e à vista, apesar de convergirem para uma mesma direção, movimentarem-se em intensidades e em tempos diferentes, dado que expectativas diferentes podem afetar cada um desses preços de forma diferenciada. Na medida em que se aproxima da data de vencimento do contrato, o preço futuro tende a igualar-se ao preço do ativo subjacente e assim a base tende a diminuir até desaparecer.

Embora apenas uma pequena parcela de contratos seja liquidada fisicamente, pois a maioria das liquidações ocorre por diferença entre o preço de compra e de venda (liquidação financeira), é graças à possibilidade de existência da entrega que há garantia de convergência entre os preços futuros e à vista.

Essa convergência é de fundamental importância para a viabilização do mercado futuro, caso ela não existisse os objetivos das operações de *hedge* não seriam assegurados. Porém, para algumas commodities, cujos custos de transação são altos ou há impossibilidade de transferência, os preços futuros são passíveis a distorções e, nesse caso, a liquidação financeira pode ser utilizada desde que os preços à vista sejam consistentes.

2.3
Relação entre Preços à Vista e Preços Futuros

O processo de formação dos preços futuros de uma *commodity* depende da natureza do ativo base, podendo ser um ativo de investimento ou de consumo. Commodities agropecuárias são comumente classificadas como commodities de consumo, pois é mantida pelo agente para consumo. Commodities de investimento caracterizam-se pelo fato do investidor mantê-las em sua carteira por razões de investimento. É o caso das commodities financeiras, metais preciosos, etc. As commodities podem ser ainda classificadas em outras duas categorias: commodities estocáveis e não estocáveis.

Commodity de investimento que pode ser estocada, seja o custo de armazenamento (a) expresso como uma proporção do valor da *commodity*. Nesse caso, a fórmula a seguir estabelece o relacionamento fundamental entre os preços à vista e futuros,

$$F_{T,t} = S_t e^{(r+a)\times(\Delta t)}$$

Ou seja, para as commodities que podem ser armazenadas, o custo de mantê-las em estoque deve ser considerado no cálculo de seu preço futuro.

Contudo, se além de estocável a *commodity* for de consumo, outro fator torna-se relevante no processo de formação dos preços futuros. Tratam-se dos benefícios decorrentes da posse física da *commodity*, tecnicamente conhecidos por retorno de conveniência (em inglês, *convenience yield)*. Em situações que podem ocorrer escassez, tê-la em estoque gera benefícios que podem ser resultantes da venda do produto em falta no mercado em determinado momento, como também do seu uso no processo produtivo que não sofrerá interrupção. Dessa forma, o cálculo do preço futuro será reformulado conforme a expressão a seguir, onde δ é a taxa de retorno de conveniência ao ano:

$$F_{T,t} = S_t \times e^{(r+a-\delta)\times(\Delta t)}$$

O termo $r+a$ pode ser interpretado como o custo de carregamento, visto que o futuro de commodities tem por objetivo permitir que os agentes do mercado obtenham um seguro em relação aos seus fluxos de caixa, ao contrário do que ocorre com as ações e títulos utilizados para capitalizar recursos para as empresas.

Por custos de carregamento pode-se entender como o custo total de carregar uma mercadoria até uma data futura (data do término do contrato), e podemos dizer que se trata do somatório dos custos de armazenamento da *commodity*, o custo do seguro, o custo do transporte, o custo com comissões e custo de financiamento. É importante observar que esse custo de carregamento exerce uma influencia importante na relação entre os preços à vista e futuro. Em geral, a diferença entre os preços futuros e à vista (*prêmio*) não excede os custos de carregamento.

Uma questão importante sobre a formação dos preços futuro e a expectativa dos preços no futuro é quanto ao poder de previsão dos preços futuros para os preços à vista no futuro. De acordo com as práticas acadêmicas, os preços futuros são previsões não enviesadas de preços à vista subseqüentes, sendo válida a seguinte equação:

$$F_{T,t} = E_t(S_T)$$

Isto significa que se em t (t<T) o preço à vista no tempo T é desconhecido, os preços futuros prevalecentes na data t são as melhores representações dessa quantidade. Contudo, em algumas situações de mercado, fatores de oferta e demanda poderiam carregar certa tendência ao valor dos contratos futuros em relação ao seu preço justo. Em momentos de escassez no curto prazo, do ativo subjacente é possível que o preço à vista e dos meses mais próximos comandem um prêmio sobre os preços dos meses mais distantes, principalmente, se existe uma expectativa de oferta maior no futuro.

Os economistas Keynes (1930) e Hicks (1939) foram os primeiros a contestarem essa igualdade. Segundo a *teoria de normal backwardation*, Keynes argumenta que mesmo em condições normais de equilíbrio entre demanda e oferta, o preço à vista deve exceder o preço futuro pela quantia que o produtor está disposto a sacrificar para se proteger, isto é, para evitar o risco das flutuações de preço durante seu período de produção.

Sendo assim, em geral, são inferiores às expectativas dos preços à vista no futuro, caso *hedgers* (produtores) mantenham posições vendidas e os especuladores posições compradas nos contratos futuros.

O prêmio de risco é a diferença entre o preço futuro em t e o valor esperado do preço à vista, matematicamente pode ser escrito como:

$$PR_t = F_{T,t} - E_t(S_T)$$

Onde o valor esperado é calculado sob medida de probabilidade real, pois se o mesmo for realizado sob uma medida neutra ao risco, *Q*, não há prêmio de risco e a seguinte equação será válida:

$$F_{T,t} = E_E^Q(S_T)$$

Preços futuros são expectativas não enviesadas do preço à vista futuro na medida em que o prêmio de risco está embutido na medida de probabilidade pela qual o valor esperado é calculado. (Geman, 2005).

2.4
Processos Estocásticos

Um processo estocástico, ou processo aleatório, pode ser definido como uma coleção de variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidades, geralmente, expresso pela seguinte equação:

$$X = \{X_t : t \in T\}$$

Onde:

X_t - Representa o estado do processo no instante t, e é uma variável aleatória;

t - Representa o tempo ou espaço;

T - Representa o espaço paramétrico do processo estocástico, é o conjunto de índices.

Simplificando, podemos dizer que um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias ordenadas no tempo. De acordo com a qualidade do espaço paramétrico podemos separar os processos estocásticos como contínuos ou discretos.

Um processo estocástico é dito como contínuo, ou processo com parâmetro contínuo, se o conjunto do espaço paramétrico do processo for um intervalo de números reais (finito ou infinito).

Um processo estocástico discreto é aquele cujo espaço paramétrico é um conjunto finito ou contável, nesses processos as variáveis aleatórias só são apuradas em intervalos de tempo específicos. Na prática, os processos em tempo contínuo são aproximados através de tempos discretos a fim de simplificar a modelagem estocástica.

Os processos estocásticos, também, podem ser classificados de acordo com a estacionariedade do processo, o que significa que um processo pode ser estacionário se não existir mudança sistemática nas suas características, por exemplo, quando a média e a variância da amostra é mantida constante ao longo do tempo e a função de covariância depende apenas da distância entre os dois períodos.

Se um processo não é estacionário, sua média e variância mudam ao longo do tempo e, portanto, a média e a variância da amostra apresentam variações ao longo do tempo.

Um processo estocástico também pode ser encarado como uma previsão, valor esperado de X no tempo t, $E[X_t]$, mais um erro aleatório, ε, ou seja:

$$X_t = E[X_t] + \varepsilon$$

Onde se faz necessário calcular para cada processo estocástico sua tendência, parcela do valor esperado e sua volatilidade, parcela de incerteza.

Alguns Processos Estocásticos:

a) Ruído Branco: é um processo discreto X_t, onde X_t constitui uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Nesse tipo de processo, a média é zero e a variância é constante e não autocorrelacionada. Ao se definir um modelo de regressão é conveniente assumir que o erro seja um ruído branco, caso contrário, o erro possuirá um comportamento disperso e os modelos de previsão não vão conseguir modelar somente os dados, vão acabar por modelar também o erro e gerando assim instabilidades nas estimações.

b) Processo de Marcov: é um tipo particular de processo onde o fato de se conhecer o seu estado atual, os estados passados não têm influência sobre os estados futuros, ou seja, apenas o valor corrente da variável é relevante para se prever o seu valor futuro. Assim, matematicamente, podemos dizer que o processo $X = \{X_t : t \in T\}$ é reconhecido como um processo markoviano, se obedecer a seguinte propriedade:

$$prob(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, ..., X_{t_n} = x_n) = prob(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n)$$

para quaisquer $t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$

Essa propriedade Markoviana de “falta de memória” é muito importante, pois permite muitas simplificações no cálculo das previsões de uma variável. Alguns processos não Markovianos podem ser transformados em processos Markovianos aumentando-se o grau de parametrização, como pode ser observado nas seguintes equações:

$$X_t = X_{t-1} + X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Pode ser transformado no seguinte processo:

$$X_t = X_{t-1} + Z_{t-1} + \varepsilon;$$

onde $Z_{t-1} = X_{t-2}$

Esta propriedade é muito utilizada no mercado para a modelagem de precificação de ativos, sejam eles ativos financeiros ou não, o que é consistente com a forma fraca da eficiência de mercado.

De acordo com Dixit e Pindyck (1994), existem outras duas formas de eficiência de mercado, a forma semi-forte e a forte. A forma semi-forte é aquela em que se acredita que o preço atual do ativo não somente reflete todas as informações contidas nos dados históricos, mas também reflete todos os conhecimentos públicos disponíveis. A forma forte vai além e acredita que o preço atual reflete todas as informações, públicas ou não.

c) Caminho Aleatório em Tempo Discreto (Random Walk) e Processo Auto Regressivo (AR(1)) : esses dois processos satisfazem a propriedade de “falta de memória” de Markov, portanto, são processos Markovianos. O processo caminho aleatório é um dos processos estocásticos mais comuns, no qual as sucessivas observações são independentes e relacionam-se conforme a seguinte equação:

$$X_{t+1} = X_t + \varepsilon$$

Onde:

X_{t+1} é o valor da variável no tempo t+1.

X_t é o valor da variável no tempo t.

ε_t é uma variável aleatória do tipo ruído branco.

Assim, assumimos que a variável aleatória apresenta um padrão de saltos de crescimento e de decréscimo constantes de mesma probabilidade. Desse modo, em um dado instante de tempo, o valor do processo é resultado do período anterior mais uma variável aleatória de média nula. É importante destacar que esse processo pode ou não evoluir de forma estacionária. No caso do comportamento apresentar um termo de crescimento de longo prazo (*drift* ou tendência δ), será denominado de caminho aleatório com tendência (*Random Walk with Drift*).

$$X_{t+1} = X_t + \delta + \varepsilon_t$$

O processo auto regressivo de primeira ordem (AR(1)) é um processo estocástico em tempo discreto e com variável contínua, caracterizado como um processo estacionário de reversão à média, isto é, no longo prazo x tende a um valor constante.

$$X_t = \delta + \rho X_{t+1} + \varepsilon_t$$

Onde δ e ρ são constantes $e -1 < \rho < 1$ e ε ~ N(0,1).

d) Processo de Wiener: é um tipo específico de processo estocástico de Markov, que tem sido utilizado pela física para descrever o movimento de uma partícula sujeita a uma grande quantidade de pequenos choques moleculares, os chamado movimento Browniano.

O comportamento de uma variável Z(t) que acompanha o processo de Wiener, pode ser compreendido pelas mudanças em seu valor em pequenos intervalos de tempo. Consideremos um pequeno intervalo de tempo, de extensão Δt, e definamos ΔZ como a mudança em Z(t) durante Δt.

Há duas propriedades básicas que ΔZ deve ter para que Z siga o processo de Wiener:

Propriedade I: A relação entre a mudança em Z correspondente a um intervalo Δt deve ser descrita conforme a seguinte equação:

$$\Delta Z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}, \text{ onde } \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

ΔZ é normalmente distribuído com média zero e variância Δt, o que significa que a variância cresce linearmente com o intervalo de tempo. De outro modo, pode-se dizer que a variância das mudanças em Z(t) é proporcional à extensão do intervalo de tempo considerado e tal fato caracteriza o Processo de Wiener como um processo não-estacionário.

Para um intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno (Δt → 0), dt, a mudança sofrida pela variável Z(t) pode ser representada em tempo contínuo.

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

Propriedade II: A variável aleatória ε_t é serialmente descorrelacionada, ou seja, E($\varepsilon_{t,}\varepsilon_s$)=0 para todo t≠s. Conseqüentemente, os valores de ΔZ para quaisquer intervalos de tempo são independentes e assim Z(t) é um processo de Markov com incrementos independentes.

Dado que ε_t ~ N(0,1), então $E[dz] = 0$ e $Var[dz] = E\left[(dz)^2\right] = dt$. Note que o processo de Wiener não considera qualquer tendência para os valores futuros de Z, ou seja, o valor esperado do processo é sempre igual ao seu valor atual. Observa-se também, da equação anterior, que o Processo de Wiener é marcado pela presença de mudanças bruscas. Tal comportamento é proveniente do fato de que para um pequeno intervalo dt, o movimento do desvio padrão é muito maior que o termo de movimento de tendência (a ordem de $\sqrt{dt}$ é maior que a ordem de dt), o que determina uma trajetória serrilhada para o Processo de Wiener.

Resumidamente podemos descrever as seguintes propriedades do processo:

- Processo de Markov, muitas vezes considerado um processo de Markov de tempo contínuo;
- Possui incrementos independentes no sentido que a variação ocorrida num intervalo de tempo Δt é independente da ocorrida em qualquer outro intervalo de tempo;
- Os incrementos seguem uma distribuição normal com parâmetros que dependem apenas do intervalo de tempo (incrementos estacionários).

e) Processo Generalizado de Wiener ou Movimento Aritmético Browniano (MAB): uma das generalizações mais comuns do processo de Wiener é a adição de um termo de crescimento de longo prazo (tendência).

$$ds = a \times dt + b \times dz$$

Onde “a” representa a taxa de retorno esperada e é o termo de tendência da equação e se caracteriza por um crescimento linear. “b” representa a taxa de variância deste processo.

No entanto, existem algumas restrições na utilização desse processo na modelagem de ativos, como:

Há possibilidade de uma variável assumir valores negativos uma vez que o termo aleatório é normalmente distribuído. Tal evento não se adéqua ao caso de preços de ativos que seguem melhor uma distribuição log-normal;

Para uma ação que não paga dividendo, no MAB a taxa de retorno desta ação se reduz com o tempo à medida que o valor da ação aumenta. Sabe-se, no entanto, que os investidores exigem um retorno esperado constante, e

No MAB o desvio padrão é constante ao longo do tempo, enquanto que para melhor modelar ativos, o desvio padrão deveria ser proporcional ao valor do ativo.

f) Processo de Itô ou Movimento Browniano Generalizado (MBG): até o momento ao descrevermos o movimento Browniano foi estabelecido que os parâmetros de tendência e variância são constantes. Agora, veremos o processo cujo parâmetro varia com o tempo. No processo de Itô a taxa de retorno esperado e a variância são funções do estado corrente e do tempo.

$$ds = a(s,t) \times dt + b(s,t) \times dz$$

Onde $a(s,t)$ e $b(s,t)$ são funções não aleatórias conhecidas e dz é o incremento de Wiener e $dz \sim N(0,dt)$. Logo, a média e a variância dos incrementos desse processo são:

$$E[ds] = a(s,t)dt$$

$$Var[ds] = \left[b(s,t)^2\right]dt$$

O termo $a(s,t)$ é designado como a tendência esperada instantânea do Processo de Itô e $\left[b(s,t)^2\right]dt$ como a taxa de variância instantânea.

O Processo de Itô é um caso especial de uma classe mais geral de "Processos de difusão forte" que é uma classe particular em tempo contínuo do Processo de Markov.

g) Movimento Geométrico Browniano (MGB): é o processo estocástico mais empregado para modelar o comportamento de preços de ações e de mercadorias, taxa de juros e de outras variáveis financeiras e econômicas, uma vez que considera que os retornos efetivos do ativo e suas variâncias são proporcionais ao valor de S. Contudo, mesmo nos casos em que o MGB não é a melhor opção, ainda assim ele é o processo estocástico mais utilizado, dado a sua fácil compreensão e simplicidade quanto ao número de parâmetros a serem estimados.

Matematicamente, podemos descrever a seguinte equação para o MGB:

$$ds = \alpha \times s \times dt + \sigma \times s \times dz$$

ou

$$\frac{ds}{s} = \alpha \times dt + \sigma \times dz$$

Onde:

s representa o preço do ativo:

α representa a sua taxa de retorno esperada;

σ representa a volatilidade do preço do ativo

dz representa o processo de Wiener.

O termo $\frac{ds}{s}$ denota a mudança no valor de S sobre o intervalo de tempo (t, t + dt) dividido pelo preço inicial de S no tempo t. Essa razão é identificada como o retorno obtido ao se investir na ação pelo período (t, t + dt). Na ausência de pagamento de dividendos, apenas a mudança no preço será responsável pelo retorno.

Onde a variável que segue esse movimento possui média e variância, conforme as equações abaixo:

$$E(S_t) = S_0 \times e^{\alpha T}$$

$$Var(S_t) = S_0^2 \times e^{2\alpha T} \times \left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)$$

Espera-se que S cresça (ou diminua) a uma taxa α; enquanto que a variância é ilimitada, ou seja, à medida que o intervalo de tempo tende ao infinito, a variância do processo também tende na mesma direção.

h) Movimento de Reversão à Média (MRM): este movimento sugere que, embora os preços no curto prazo possam flutuar para cima ou para baixo, no longo prazo esses preços tendem a ser trazidos de volta ao custo marginal. Esse modelo é muito utilizado para modelar o preço de commodities.

O modelo estocástico de reversão à média mais simples é conhecido como modelo de Ornstein-Uhlembeck e pode ser representado através da seguinte equação:

$$dx = \eta \times (x - \alpha) + \sigma dz$$

onde:

η é a velocidade de reversão;

x é a média de longo prazo do custo marginal.

Observa-se o valor esperado de x depende da diferença entre α e x. Se x é maior (menor) que α, é mais provável que haja uma queda (subida) no próximo intervalo de tempo.

Uma importante observação é que embora o movimento de reversão à média satisfaça as propriedades do processo de Markov, este movimento não possui incrementos independentes.

O valor esperado e a variância deste processo são representados pelas seguintes equações:

$$E[x_t] = x + (x_o - x) \times e^{\eta \times \Delta t}$$

$$Var[\Delta t] = \frac{\sigma^2}{\eta} \times \left(1 - e^{-2 \times \eta \times \Delta t}\right)$$

Com base nestas equações, pode-se inferir a presença das seguintes características:

À medida que t $\rightarrow \infty$, o valor esperado de x(t) tende para x e a variância converge para $\frac{\sigma^2}{2\eta}$ diferentemente do MGB, que nestas condições teria variância ilimitada.

Para altos valores da velocidade de reversão ($\eta \rightarrow \infty$), a variância tende a zero, garantindo que o processo não se desviará de sua média de longo prazo nem mesmo por um pequeno intervalo de tempo. Por outro lado, se $\eta \to 0$ a variância limita-se ao termo $\sigma^2 T$ e o MRM tende para o Movimento Browniano Padrão.

i) Processo de Poisson (*Jump* ou salto): os processos estocásticos apresentados até o momento e que têm por característica a continuidade em suas trajetórias, nem sempre conseguem captar adequadamente a evolução de variáveis econômicas. Descidas bruscas do mercado de ações bem como uma subida acentuada gerada pela chegada de notícias positivas sobre uma empresa ou setor são alguns exemplos de comportamento que evidenciam a necessidade de se incorporar uma componente de salto ao termo de difusão.

É comum observar que os retornos de ativos financeiros ficam mais expostos a variações substanciais de valor no curto prazo. Entretanto, o mercado de commodities também não foge a esta regra, sobretudo, por se tratar de um segmento de capital de alto risco para as empresas.

Essas variações bruscas na dinâmica dos preços de ativos decorrem de dois tipos de vibrações: as “normais” e as “anormais”. As informações de mercado consideradas “normais” causam um processo estocástico contínuo nos preços, enquanto que informações consideradas “anormais” provocam saltos discretos de tamanho aleatório que podem ser representados através de um processo de Poisson.

Um processo de Poisson simples é definido conforme a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS = f(S, t)\, dt + g(S, t)\, dq,$$

onde $f(S, t)$ e $g(S, t)$ são funções conhecidas (não-aleatórias) e q denota um processo de Poisson com intensidade λ contabilizando a chegada dos saltos.

Em analogia ao processo de Wiener, tem-se que dq é o incremento aleatório que pode assumir o valor zero, o que é verificado na maior parte do tempo, ou o valor de um salto de amplitude φ que ocorre com probabilidade λdt. O valor de φ pode ser estocástico (correlacionado ou não a X) ou determinístico. Em outras palavras:

$$dq = \begin{cases} 0, \text{ com probabilidade } (1-\lambda dt) \\ \varphi, \text{ com probabilidade } \lambda dt \end{cases}$$

Porém, em Finanças o processo de Poisson é mais usado combinado com um processo de difusão, são os chamados modelos de difusão de saltos (em inglês, *jump-diffusion* ou *Poisson-Gaussian*). Nestes casos, o preço de um determinado ativo pode evoluir continuamente segundo o MGB ou MRM na maior parte do tempo, mas eventualmente pode sofrer grandes oscilações em decorrência de eventos raros.

O processo misto de difusão de saltos é representado com a seguinte estrutura:

$$dS = f(S, t)\, dt + g(S, t)\, dZ + h(S, t)\, dq,$$

sendo dZ um incremento de Wiener e dq um incremento de Poisson de forma que os processos são independentes.

O primeiro modelo de difusão de saltos foi introduzido em 1976 por Robert Merton ao questionar a versão de Black-Scholes para o apreçamento de opções financeiras quando o preço do ativo é suscetível a variações durante um intervalo de tempo infinitesimal.

Matematicamente, a equação diferencial proposta por Merton para a dinâmica dos preços é dada da seguinte forma:

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda k)\, dt + \sigma\, dZ + dq,$$

Nesta equação α e σ^2 são os parâmetros do termo de difusão que considera as mudanças nos preços durante dias “comuns”. Eles significam, respectivamente, o retorno esperado instantâneo do ativo e a variância instantânea do retorno caso o evento de Poisson não ocorra. O processo de Wiener (dZ) e o processo de Poisson (dq) são independentes e λ representa o número médio de chegadas de eventos de Poisson por unidade de tempo. O elemento k é o valor esperado do salto, ou seja, k = $E(\varphi)$.

A subtração do fator λk do termo de tendência do processo faz-se necessária como medida de correção de um possível viés oriundo da consideração do processo de Poisson. Este viés se deve ao fato de que o valor esperado do processo de Poisson não é nulo, ou seja, $E(dq) = \lambda dt\, E(\varphi) + (1 - \lambda dt)\, 0 = \lambda dt\, k$. Caso este procedimento de compensação não fosse adotado, o valor esperado de um ativo que segue o processo de difusão com saltos não seria o mesmo do obtido quando utilizado o MGB.

2.5 Modelos de Previsão ARCH e GARCH

O tratamento correto da volatilidade no estudo de uma série histórica de preço ou retorno de um ativo é muito importante, pois é através da volatilidade que medimos a variabilidade dos momentos passados de um processo estocástico. E é por meio dessa medida que se pretende prever a volatilidade futura. É importante observar que séries econômicas e financeiras, normalmente, apresentam um comportamento assimétrico na volatilidade.

A maneira mais simples de se medir a volatilidade de um ativo é através da estimação do desvio-padrão. A variância em um instante t pode estar ou não condicionada às informações passadas, o que significa que a variância não condicional pode ser constante, mas para certos períodos de grande incerteza a variância condicional pode apresentar grandes alterações por curtos períodos de tempo.[3]

[3]MORETTIN, Pedro (2004).

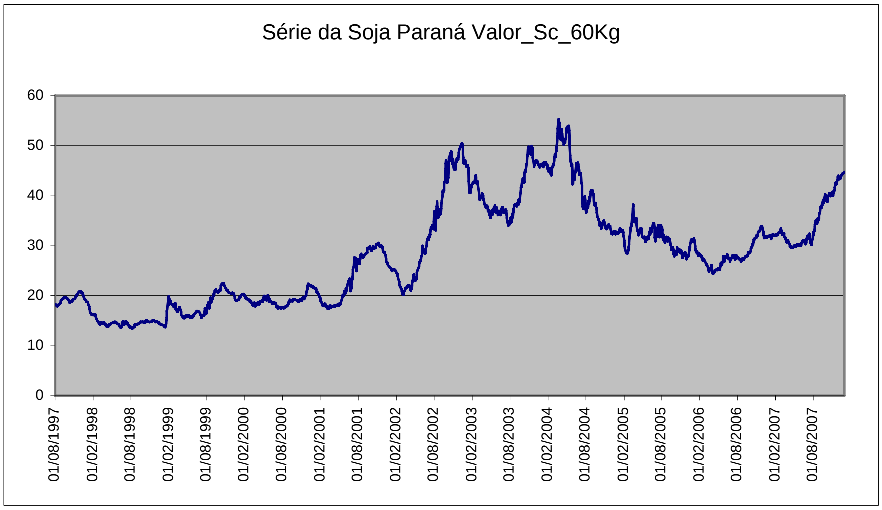

Figura 1.1: Série histórica do preço da Soja no mercado do Paraná no período de 1997 a 2007 (CEPEA, 2007).

Segundo MORETTIN (2004) há diferentes métodos paramétricos para estimar a variância dos retornos de ativos com o objetivo de substituir a hipótese de que esta seja constante ao longo do tempo. Têm-se, por exemplo, os modelos de volatilidade determinística e os modelos de volatilidade estocástica.

A abordagem determinística assume que as variações no retorno dos ativos são determinadas por variáveis conhecidas pelos participantes do mercado, como por exemplo, seu nível de preços. No caso da abordagem estocástica, o conhecimento do preço no passado dos ativos não é suficiente para determinar a volatilidade. Nesses modelos, tanto o retorno dos ativos quanto a sua variância são variáveis no tempo. Nestes modelos, a hipótese da distribuição normal dos retornos também pode ser relaxada, sendo também possível fazer testes para a verificação da influência dos fatos estilizados. Os principais fatos estilizados relativos a retornos financeiros relacionados com a volatilidade, são:

- Retornos são em geral não auto-correlacionados;
- Os quadrados dos retornos são auto-correlacionados;
- Retornos apresentam agrupamentos de volatilidade ao longo do tempo;
- A distribuição (incondicional) dos retornos apresenta curtose e a distribuição, embora aproximadamente simétrica, é em geral leptocúrtica
- Algumas séries de retornos são não-lineares.

A principal diferença em ter os modelos de volatilidade estocástica e os modelos determinísticos está relacionada ao desconhecimento da informação passada, de forma que a volatilidade é vista como um componente não observável.

Modelos de volatilidade, como ARCH e GARCH, incorporam a característica de caudas longas (ou pesadas) para retornos, implicando em estimativas de curtose significativamente maiores, o que indica a não-normalidade dos retornos.

2.5.1
Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH)

O estudo de séries financeiras costumava ser realizado utilizando-se modelos lineares com média condicionada, do tipo auto-regressiva com média móvel (ARMA), cuja metodologia, proposta por Box-Jenkins, procura modelar a dependência linear existentes nos rendimentos de séries financeiras.[4] No entanto, esta hipótese raramente se verifica na prática, pois os períodos de instabilidade sucedem-se entre si, isto é, um período de variação elevada tende a ser seguido por um período de amplitude idêntica, mas no sentido contrário, logo, o risco está correlacionado ao longo do tempo. Somado a isso, a maioria das séries econômica e financeira caracteriza-se pela não estacionariedade da média e, sobretudo, por exibir movimentos de baixa e elevada volatilidade, o que dificulta a previsão do comportamento futuro[5].

Então, em 1982, Engle apresentou um modelo paramétrico no qual a variância seria condicionada por uma equação algébrica, modelando não só a média, como também, a variância condicionada. Este modelo procurou captar a volatilidade de auto-correlações, onde o risco de hoje depende do risco observado no passado, contrariamente aos modelos auto-regressivos de média móvel (ARMA).

O modelo apresentado por Engle ficou conhecido como *autoregressive conditional heteroscedasticity* (ARCH) e apesar de ter sido desenhado para modelar e prever inflação, já nesse artigo as propriedades do modelo foram identificadas como úteis para análise dos dados de finanças.

[4]BOLLERSLEV, Tim; Ray, Y; 1992.
[5]Idem...

Seja os retornos gerado por uma commodity descrito pela seguinte equação (processo ARMA(p,q)):

$$r_t = c_t + u_t, \quad c_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i u_{t-i}$$

Onde p e q são números inteiros não negativos e u_t é uma série de ruídos brancos com média zero e variância σ_u^2, e $r_t = \ln (P_t / P_{t-1})$ é o retorno gerado no período entre t-1 e t, onde P_t representa o preço de uma *commodity* no período t.

Nesse modelo, a variância incondicional u_t (ruído branco) está descorrelacionada, porém dependente, pode ser descrito como:

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = Var[r_t | \Omega_{t-1}] = E[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_m^2,$$

Onde:

σ_t^2 denota a variância condicional dado o conjunto de informações disponíveis em t-1, Ω_{t-1}.

ε_t são independentes e identicamente distribuídas (iid) com média zero e variância 1.

α_i deve satisfazer certas condições de regularidade de forma a assegurar que a variância incondicional u_t seja positiva e fracamente estacionária. Sendo assim, tem-se que $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ para $i > 0$ e $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i < 1$.

Na prática, é comum assumir que ε_t segue a distribuição normal padrão.

Uma desvantagem do modelo é que trata os retornos positivos e negativos de forma similar através do quadrado dos retornos na fórmula da volatilidade. Na prática, sabe-se que a volatilidade reage de modo diferente a retornos positivos e negativos. [6]

É importante destacar que para a série em estudo não haverá retornos negativos, já que estamos trabalhando com o logaritmo dos preços da *commodity* Soja.

[6]MORETIN, 2004.

2.5.2
Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)

Em 1986 Bollerslev propôs uma generalização do modelo ARCH, com o intuito de melhorar a forma de expressar a dependência temporal da variância condicional. O modelo de Bollerlev ficou conhecido como *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, GRACH.

O modelo GARCH permite a presença de componentes auto-regressivos e de médias móveis na variância heteroscedástica dos ativos.

Por heteroscedasticidade pode-se entender variação (discrepância) da variância no tempo (volatilidade). A inovação não tem uma variação constante no decorrer de toda a escala de valores. A inovação de uma série de tempo tem sua variância alterando no decorrer do tempo. O termo condicional significa que as observações atuais dependem das observações imediatamente anteriores. E o termo auto-regressivo refere-se ao mecanismo de retroalimentação que permite a incorporação das observações passadas nas observações presente.

Portanto, trata-se de um mecanismo que inclui as variâncias passadas na explicação das variâncias futuras. Mais especificamente, podemos disser que é uma técnica de séries temporais que permite utilizar o modelo de dependência serial da volatilidade.

Assim, para um modelo GARCH temos:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \left(\alpha_i \times \varepsilon_{t-i}^2\right) + \sum_{i=i}^{p} \left(\beta_i \times \sigma_{t-i}^2\right)$$

Onde p >0 é a ordem da dependência da variância, sendo os coeficientes β_i > 0. Os coeficientes das ordens p e q devem satisfazer a condição $\sum \alpha_i + \sum \beta_i < 1$.

Existe uma diferença fundamental entre o modelo ARMA E GARCH. Enquanto no modelo ARMA os rendimentos estão dependentes apenas dos rendimentos de períodos anteriores, nos modelos ARCH/GARCH os rendimentos dependem também da variância observada no passado bem como dos erros associados ao processo anterior.