3
Contínuo Generalizado

Um meio contínuo clássico é composto por partículas, distribuídas de maneira uniforme, sendo cada uma delas representadas por um ponto, aqui denominado de P. Este ponto material possui coordenadas cartesianas, que faz referência a um sistema de eixos ortogonais x_i, sendo i=1,2 e 3. Do ponto de visto cinemático, o meio continuo clássico possui graus de liberdade associados por vetores de deslocamentos u_i, e a partícula do material terá os graus de liberdade associados a micro deslocamentos e micro rotações.

Nesta seção será apresentado como a microestrutura do material pode ser levada em consideração num meio contínuo. Os primeiros a formalizarem a teoria foram os irmãos Cosserat [31], e posteriormente durante a década de 60, Mindlin [35], [36], [37] e [38] Mindlin & Tiersten [39] e Erigen [43] publicaram estudos teóricos a cerca do contínuo generalizado, cada um com uma cinemática de partícula distinta.

Posteriormente o meio com microestrutura, também chamados de meio micromórfico, multipolares, entre outros, foi estudado sistematicamente por Germain [8] através da aplicação do príncipio do trabalho virtual. Este conseguiu formular matematicamente através do PVT a decorrência de grandezas estáticas através de equações constitutivas que levam em consideração a energia, trabalho, gerado pela cinemática da partícula.

Durante a década de 70 e 80, Cowin & Nunziato [42], Eringen [44] e Mühlhaus [40] e [41] publicaram estudo sobre o contínuo generalizado com outras proposições a cerca da cinemática da partícula.

Na teoria que leva em consideração a microestrutura do material, cada partícula ainda é representada por um ponto P. Porém suas propriedades cinemáticas são definidas sob um ponto de vista microscópico. Deste ponto de observação, o ponto P passa a ser definido como um contínuo de pequena extensão C(P) ao redor do ponto P.

Para a teoria de Mindlin [35], o material linear isotrópico possui 18 parâmetros, conforme descrito abaixo.

Na teoria da elasticidade clássica o tensor constitutivo do meio é isotrópico. Sendo assim os tensores de ordem zero ou nulos de qualquer ordem são isotrópicos. Já os tensores de ordem impar não são isotrópicos e os de ordem par são expressos como função linear do delta de Kronecker para serem considerados isotrópicos. Por extensão da lei de Hooke tem-se a seguinte 33:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ij} \\ S_{ij} \\ \nu_{ijp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ijkl} & \beta_{ijkl} & \delta_{ijklm} \\ \eta_{ijkl} & \xi_{ijkl} & \lambda_{ijklm} \\ \chi_{ijpkl} & \varphi_{ijpkl} & \varsigma_{ijpklm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{kl} \\ \eta_{kl} \\ x_{klm} \end{Bmatrix} \qquad 33$$

Como os tensores δ_{ijklm}, χ_{ijpkl}, λ_{ijklm} e φ_{ijpkl} são de ordem impar, estes não podem ser considerados como tensores isotrópicos e por isto seus parâmetros não precisam ser determinados. Devido à condição de isotropia a matriz dos tensores de parâmetros constitutivos precisa ser simétrica, para isto, $\beta_{ijkl} = \eta_{ijkl}$. A seguir são apresentados os tensores de ordem par, isotrópicos, em função do delta de Kronecker, conforme equação 34 até 37.

$$\alpha_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G_1\delta_{ik}\delta_{jl} + G_2\delta_{il}\delta_{jk} \qquad 34$$

$$\beta_{ijkl} = \beta_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta_2\delta_{ik}\delta_{jl} + \beta_3\delta_{il}\delta_{jk} \qquad 35$$

$$\xi_{ijkl} = \xi_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \xi_2\delta_{ik}\delta_{jl} + \xi_3\delta_{il}\delta_{jk} \qquad 36$$

$$\begin{aligned} \varsigma_{ijpklm} = {} & \zeta_1\delta_{ij}\delta_{pk}\delta_{lm} + \zeta_2\delta_{ij}\delta_{pl}\delta_{mk} + \zeta_3\delta_{ij}\delta_{pm}\delta_{kl} + \zeta_4\delta_{jp}\delta_{ik}\delta_{lm} + \zeta_5\delta_{jp}\delta_{il}\delta_{mk} + \zeta_6\delta_{jp}\delta_{im}\delta_{kl} \\ & \zeta_7\delta_{pi}\delta_{jk}\delta_{lm} + \zeta_8\delta_{pi}\delta_{jl}\delta_{mk} + \zeta_9\delta_{pi}\delta_{jm}\delta_{kl} + \zeta_{10}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{pm} + \zeta_{11}\delta_{jk}\delta_{pl}\delta_{im} + \zeta_{12}\delta_{pk}\delta_{il}\delta_{jm} + \zeta_{13}\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{pl} \\ & \zeta_{14}\delta_{jk}\delta_{pm}\delta_{il} + \zeta_{15}\delta_{pk}\delta_{im}\delta_{jl} \end{aligned} \qquad 37$$

Como $\alpha_{ijkl} = \alpha_{jikl}$, $\beta_{ijkl} = \beta_{jikl}$ e $\varsigma_{ijpklm} = \varsigma_{klmijp}$ devido à simetria, $G_1 = G_2$, $\beta_2 = \beta_3$, $\zeta_1 = \zeta_6, \zeta_2 = \zeta_9$, $\zeta_5 = \zeta_7$ e $\zeta_{11} = \zeta_{12}$, conforme demonstrado abaixo.

$$\alpha_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G_1\delta_{ik}\delta_{jl} + G_2\delta_{il}\delta_{jk} \qquad 38$$

$$\alpha_{jikl} = \lambda\delta_{ji}\delta_{kl} + G_1\delta_{jk}\delta_{il} + G_2\delta_{jl}\delta_{ik} \qquad 39$$

$$\alpha_{ijkl} = \alpha_{jikl} \qquad 40$$

$$\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G_1\delta_{ik}\delta_{jl} + G_2\delta_{il}\delta_{jk} = \lambda\delta_{ji}\delta_{kl} + G_1\delta_{jk}\delta_{il} + G_2\delta_{jl}\delta_{ik} \qquad 41$$

$$\lambda(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ji}\delta_{kl}) = G_1(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl}) + G_2(\delta_{jl}\delta_{ik} - \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad 42$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}\delta \qquad 43$$

$$G_1(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{ik}\delta_{jl}) = G_2(\delta_{jl}\delta_{ik} - \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad 44$$

$$G_1 = G_2 = G \qquad 45$$

Por analogia chegam-se aos mesmos resultados para β e ζ. Então os parâmetros necessários para material linear isotrópico são: λ e G, parâmetros clássico de Lamé, β_1, β_2, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4, ζ_5, ζ_8, ζ_{10}, ζ_{11}, ζ_{13}, ζ_{14} e ζ_{15}.

Das equações 33 até 37 e as condições de simetria descritas acima, as equações constitutivas são:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} + \beta_1\delta_{ij}\eta_{kk} + \beta_2(\eta_{ij} + \eta_{ji}) \qquad 46$$

$$S_{ij} = \beta_1\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\beta_2\varepsilon_{ij} + \xi_1\delta_{ij}\eta_{kk} + \xi_2\eta_{ij} + \xi_3\eta_{ji} \qquad 47$$

$$\begin{aligned} v_{ijp} = {} & \zeta_1(x_{kki}\delta_{jp} + x_{kki}\delta_{jp}) + \zeta_2(x_{kkj}\delta_{ip} + x_{kpk}\delta_{ij}) + \zeta_3 x_{kkp}\delta_{ij} + i_4 x_{ikk}\delta_{jp} + \zeta_5(x_{jkk}\delta_{ip} + x_{kik}\delta_{jp}) + \zeta_8 x_{kjk}\delta_{ip} \\ & \zeta_{10}x_{ijp} + \zeta_{11}(x_{pij} + x_{jpi}) + \zeta_{13}x_{ipj} + \zeta_{14}x_{jip} + \zeta_{15}x_{pji} \end{aligned} \qquad 48$$

3.1. Contínuo de Cosserat

O contínuo micropolar de Cosserat assume que a partícula C(P) tem movimento de corpo rígido. Conseqüentemente o tensor $\chi_{[ij]}$ é puramente anti-simétrico e isto corresponde ao movimento de rotação individual de cada partícula, como conseqüência $x_{[ij]k}$ também é anti-simétrico, conforme equação 49 e Figura 5 abaixo.

$$\chi_{ij} = \chi_{[ij]} = \overline{\Omega_{ij}} \qquad 49$$

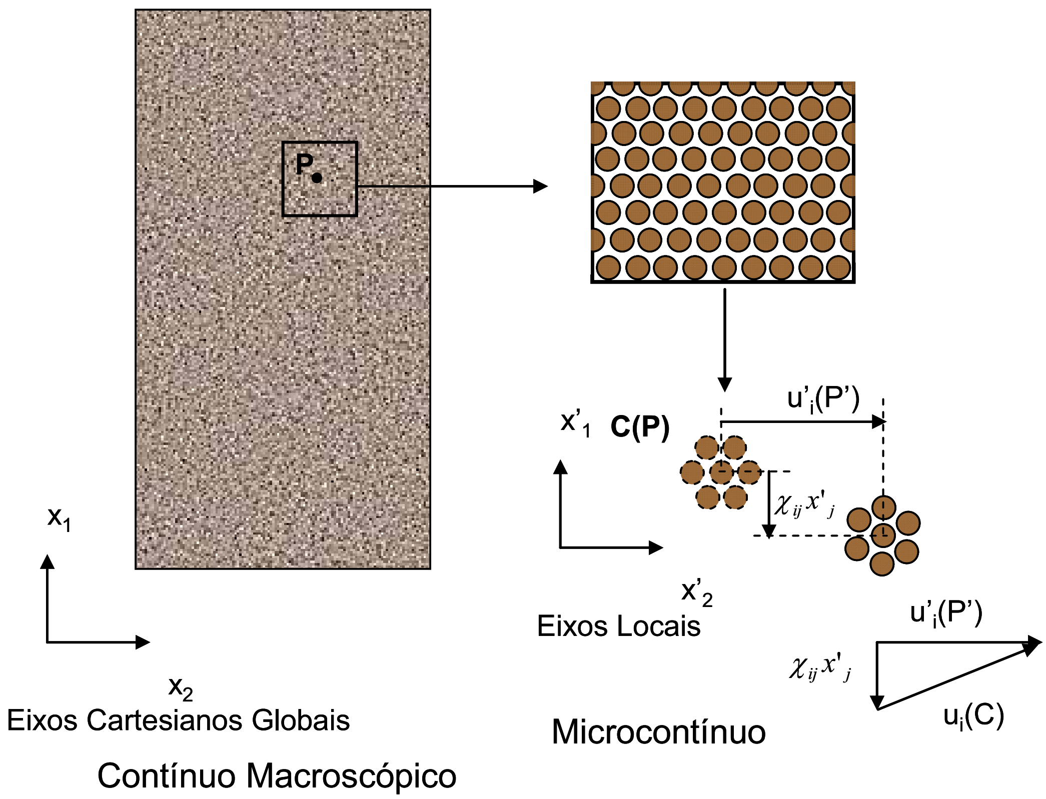

Figura 5 - Representação esquemática do contínuo micropolar.

Segundo o modelo de Cosserat, este permite que o contínuo macroscópico se comporte como um contínuo clássico e ao mesmo tempo permite rotação livres para o contínuo microscópico. Para representar as condições cinemáticas mencionadas acima associadas em energia, para o trabalho virtual das forças internas, existem os seguintes tensores: o tensor convencional, tensões de Cauchy (σ_{ij}), ou tensões macroscópicas, tensões microscópicas (S_{ij}), ou tensões relativas e segunda tensão microscópica ($\nu_{[ij]k}$), ou tensão dupla, pois $x_{[ij]k}$ é puramente anti-simétrico. Para o trabalho virtual das forças externas de massa (f_i) e superfície (T_i), a força dupla da massa ($\Psi_{[ij]}$) e a força dupla de superfície ($M_{[ij]}$), ambas anti-simétricas já que $\nu_{[ij]k}$ é puramente anti-simétrica .

Além disto, no contínuo de Cosserat, para o material linear isotrópico é necessário definir mais dois parâmetros além dos necessários para o contínuo clássico. O primeiro é o módulo de cisalhamento anti-simétrico ou rotacional (Gc) e o segundo é o módulo de flexão (B). O módulo de cisalhamento rotacional controla a influência da partícula nas distribuições de tensões da macroestrutura. O módulo de flexão relaciona-se a própria flexão da partícula e de seu momento, rotação e curvatura induzidas. Como a dimensão desta grandeza corresponde à força, sendo assim a razão desta com qualquer outro módulo tem dimensão de comprimento ao quadrado. Daí o fato de que o módulo de flexão ser uma medida indireta do comprimento característico da partícula, ou da microestrutura.

Os irmãos Cosserat introduziram o conceito de tensões de Cosserat, 50, descrita como tensor total, anteriormente, que é também divido agora em parcela simétrica e anti-simétrica, conforme equação 51 e 52.

$$\sigma^{c}{}_{ij} = \sigma_{ij} + S_{ij} \quad \text{50}$$

$$\sigma^{c}{}_{(ij)} = \sigma_{ij} + S_{(ij)} \quad \text{51}$$

$$\sigma^{c}{}_{[ij]} = S_{[ij]} \quad \text{52}$$

O gradiente relativo é assimétrico, porém sua parcela simétrica é igual à deformação macroscópica, e o mesmo é um tensor simétrico, daí $\eta_{(ij)} = \eta_{(ji)}$, pois $\chi_{[ij]}$ é puramente assimétrico.

$$\eta_{(ij)} = \varepsilon_{(ij)} \quad \text{53}$$

$$\eta_{[ij]} = \Omega_{ij} - \overline{\Omega_{ij}} \quad \text{54}$$

Da equação 53 e da condição de simetria tem-se:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} + \beta_1\delta_{ij}\eta_{kk} + 2\beta_2\eta_{ij} \quad \text{55}$$

Da 47 e da condição de simetria, e dividindo o tensor microscópico assimétrico na parcela simétrica e anti-simétrica, tem-se:

$$S_{(ij)} = \beta_1\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\beta_2\varepsilon_{ij} + \xi_1\delta_{ij}\gamma_{kk} + \eta_{(ij)}(\xi_2 + \xi_3) \quad \text{56}$$

$$S_{[ij]} = \eta_{[ij]}(\xi_2 - \xi_3) \quad \text{57}$$

Substituindo na equação 51 a equação 53, 55 e 56 têm-se:

$$\sigma^{c}{}_{(ij)} = (\lambda\delta_{ij} + 2\beta_1 + \xi_1)\varepsilon_{kk} + 2(G + 4\beta_2 + \xi_2 + \xi_3)\varepsilon_{ij} \quad \text{.......... } \mathbf{58}$$

Substituindo na equação 52 a 57 tem-se:

$$\sigma^{c}{}_{[ij]} = \eta_{[ij]}(\xi_2 - \xi_3) \quad \text{.......... } \mathbf{59}$$

Do princípio dos trabalhos virtuais, tem-se para um meio que ocupa um volume V e uma fronteira Γ, o trabalho virtual das forças internas (δW^{I}):

$$\delta W^{I} = \int_V \{(\sigma_{ij} + S_{ij})\delta\varepsilon_{ij} - S_{ij}\delta\eta_{ij} + \nu_{[ij]k}\partial_k \delta x_{[ij]})dV \quad \text{.......... } \mathbf{60}$$

Substituindo as equações 51 e 52 na equação 60 temos:

$$\delta W^{I} = \int_V (\sigma^{c}{}_{(ij)}\delta\varepsilon_{ij} - \sigma^{c}{}_{[ij]}\delta\eta_{ij} + \nu_{[ij]k}\partial_k \delta x_{[ij]})dV \quad \text{.......... } \mathbf{61}$$

Aplicando a integração por partes:

$$\delta W_I = \int_V - \{(\sigma^{c}{}_{(ij)}\partial_j \delta u_i + (\partial_k \nu_{[ij]k} - \sigma^{c}{}_{[ij]})\delta\chi_{[ij]}\}dV + \int_\Gamma \{\sigma^{c}{}_{(ij)}\delta u_i n_i + (\nu_{[ij]k} - \sigma^{c}{}_{[ij]})\delta\chi_{[ij]} n_k\}d\Gamma$$

$$\text{.......... } \mathbf{62}$$

O passo seguinte é introduzir o trabalho virtual das forças externas, que pode ser dividido em trabalho virtual devido as forças externas de massa e devido as forças externas de superficie, conforme primeiro paragrafo do 3.1. Suas equações se encontram apresentadas abaixo.

$$\delta W^{V}{}_{E} = \int_V (f_i \delta u_i + \Psi_{[ij]}\delta\chi_{[ij]})dV \quad \text{.......... } \mathbf{63}$$

$$\delta W^{\Gamma}{}_{E} = \int_\Gamma (T_i \delta u_i + M_{[ij]}\delta\chi_{[ij]})d\Gamma \quad \text{.......... } \mathbf{64}$$

Como já explanado anteriormente podemos igualar diretamente os coeficientes do trabalho virtual devido as forças externas e internas de massa. Assim temos as seguintes equações de equilibrio e condições de contorno:

$$f_i + \partial_j \sigma^{c}{}_{(ij)} = 0 \quad \text{.......... } \mathbf{65}$$

$$\Psi_{[ij]} + \sigma^{c}_{ij} + \partial_k \nu_{[ij]k} = 0 \quad \text{.......... } \mathbf{66}$$

$$T_i = \sigma^c{}_{ij} n_i \qquad (67)$$

$$M_{[ij]} = v_{[ij]k} n_k \qquad (68)$$

3.2.Contínuo referente à Teoria do 2º Gradiente

A teoria do segundo gradiente é obtida ao assumir que a partícula está sujeita a mesma deformação que o contínuo macroscópico. Com isto o mesmo é válido, entre a deformação da partícula e do contínuo macroscópico, parte simétrica, e a rotação da partícula e do contínuo macroscópico, parte anti-simétrica, conforme equações 69, 70 e 71.

$$\partial u_{ij} = \chi_{ij} \qquad (69)$$

$$\varepsilon_{(ij)} = \chi_{(ij)} \qquad (70)$$

$$\varepsilon_{[ij]} = \chi_{[ij]} \qquad (71)$$

Como as deformações e rotações da partícula são as mesmas do continuo macroscópico, não há mais grandezas relativas η_{ij} e as tensões associadas a esta grandeza tornam-se indeterminadas. Como o tensor relativo de terceira ordem, define a variação do tensor de segunda ordem χ_{ij}. Tanto da sua parcela simétrica quanto da anti-simétrica, ou seja, o gradiente χ_{ij}, referente à rotação e deformação da partícula, coincide com o gradiente ε_{ij}, referente à rotação e deformação do continuo macroscópico. Então o tensor relativo de terceira ordem corresponde à segunda derivada do deslocamento e da rotação do contínuo macroscópico, daí o nome da teoria do segundo gradiente, conforme 72 até 77. Como já explanado rotação do contínuo macroscópico não é uma grandeza objetiva e por isto não entrará nas equações constitutivas.

$$x_{ijk} = \partial_k \chi_{ij} \qquad (72)$$

$$x_{ijk} = x_{(ij)k} \qquad (73)$$

$$x_{ijk} = \partial_k \chi_{(ij)} \qquad (74)$$

$$x_{ijk} = \partial_k \varepsilon_{(ij)} \qquad (75)$$

$$x_{ijk} = \partial_k \partial_j u_i \qquad (76)$$

$$x_{ijk} = \partial_{jk} u_i \qquad (77)$$

Para representar as condições cinemáticas mencionadas acima associadas em energia, para o trabalho virtual das forças internas, existem os seguintes tensores: somente o tensor convencional, referente ao contínuo macroscópico, denominado de Cauchy (σ_{ij}), o tensor microscópico é indeterminado (S_{ij}), já que a grandeza relativa η_{ij} é nula devido à condição referente à equação 69, e o tensor duplo é simétrico $\nu_{(ij)k}$, já que a parcela anti-simétrica $\varepsilon_{[ij]}$, macro rotação, não é objetiva. Para o trabalho virtual das forças externas de massa e superfície, existem forças: a força de massa (f_i) e a força de superfície (T_i), ambos referentes ao tensor convencional do ponto de vista macroscópico, a força dupla da massa ($\Psi_{(ij)}$) e a força dupla de superfície ($M_{(ij)}$), ambas simétricas, pois são referentes ao tensor duplo, que devido à equação 72, somente a parcela simétrica é uma grandeza objetiva.

Da equação 46 tomando a equação 72 em consideração, as equações constitutivas do continuo macroscópico são as mesmas do continuo clássico:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} \qquad (78)$$

O tensor duplo simétrico $\nu_{(ij)k}$ corresponderá:

$$\nu_{(ij)k} = \upsilon_{ijk} x_{(ij)k} \qquad (79)$$

Da equação 77 sabemos:

$$x_{(ij)k} = \partial_k \varepsilon_{(ij)} \qquad (80)$$

A relação entre $\upsilon_{ijk} x_{(ij)k}$ pode ser descrita através de um tensor de 4ª ordem, já que as componentes que de fato contribuem são as relações entre υ_{ij} e ε_{ij}. Para material linear e isotrópico, da teoria da elasticidade, sabemos que para descrever a relação entre dois tensores simétricos são necessários dois parâmetros independentes, conforme equação 81.

$$\upsilon_{ij} = \vartheta_1 \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \vartheta_2 \varepsilon_{ij} \quad (81)$$

Então para descrever o material isotrópico linear são necessários quatro parâmetros $\lambda, G, \vartheta_1 e \vartheta_2$.

Do principio dos trabalhos virtuais, tem-se para um meio que ocupa um volume V e uma fronteira Γ, o trabalho virtual das forças internas (δW^I):

$$\delta W^I = \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \nu_{(ij)k} \partial_k \delta x_{(ij)}) dV \quad (82)$$

Aplicando a integração por partes:

$$\delta W_I = \int_V - \{(\sigma_{ij} \partial_j \delta u_i + \partial_k \nu_{ijk} \delta \chi_{ij}\} dV + \int_\Gamma \{\sigma_{ij} \delta u_i n_i + \nu_{ijk} \delta \chi_{ij} n_k\} d\Gamma \quad (83)$$

Substituindo na equação 83 a equação 79 e 80 tem:

$$\delta W_I = \int_V - \{\sigma_{ij} \partial_j \delta u_i + \partial_k \upsilon_{ijk} \partial_j \delta u_i\} dV + \int_\Gamma \{\sigma_{ij} \delta u_i n_i + \upsilon_{ijk} \partial_j \delta u_i n_k\} d\Gamma \quad (84)$$

Podemos escrever a equação de trabalho virtual interno para um volume V e uma fronteira Γ da seguinte maneira:

$$\delta W_I = \int_V \{A_{ij} \partial \delta u_{ij} + \partial_k B_{ijk} \delta \chi_{ij}\} dV + \int_\Gamma E_{ij} \delta u_i n_i + F_{ijk} \partial_j \delta u_i n_k\} d\Gamma = 0 \quad (85)$$

Para poder aplicar diretamente a expressão do trabalho virtual é necessário escrever a parte esquerda da equação 85 de forma que apenas variáveis independentes relacionadas ao deslocamento virtual apareçam. Então para obter a integral de volumes manipularemos a equação 85 da seguinte forma:

$$\delta W_I = \int_V \{(A_{ij} - B_{ijk}) \partial \delta u_{ij} dV + \int_\Gamma B_{ij} n_j \partial \delta u_{ij} d\Gamma = 0 \quad (86)$$

Como a integral de volume é zero independente do valor de $\partial \delta u_{ij}$, temos que:

$$A_i - B_{ijk} = 0 \quad (87)$$

Substituindo na equação 86 a equação 29 e 30, temos:

$$A_{ij} = f_i + (\sigma_{ij} + S_{ij}) \quad (88)$$

$$B_{ijk} = \Psi_{ij} + S_{ij} + \partial_k \upsilon_{ijk} \quad \text{89}$$

Escrevendo:

$$\bar{\tau}_{ij} = \sigma_{ij} - \Psi_{ij} - \partial_k \upsilon_{ijk} \quad \text{90}$$

Por analogia com a equação 29 temos:

$$f_i + \partial_j \bar{\tau}_{ij} = 0 \quad \text{91}$$

Substituindo a equação 91 na equação 90 temos a seguinte equação constitutiva:

$$f_i + \partial_j (\sigma_{ij} - \Psi_{ij} - \partial_k \upsilon_{ijk}) = 0 \quad \text{92}$$

A integral de superfície da equação 85 é apresentada abaixo:

$$\delta W^{\Gamma}{}_{I} = \int_{\Gamma} \{\bar{T}_i \delta u_i + \bar{N}_i D\delta u_i)\} d\Gamma + \int_{I} \bar{R}_i \delta u_i dI \quad \text{93}$$

Onde:

$\int_{I} dI$ é integral de linha

Dai temos as seguintes condições de contorno naturais:

$$\bar{T}_i = \bar{\tau}_{ij} n_j + (D_l n_l) \upsilon_{ijk} n_j n_k - D_j (\upsilon_{ijk} n_k) \quad \text{94}$$

$$\bar{N}_i = \upsilon_{ijk} n_j n_k \quad \text{95}$$

$$\bar{R}_i = [\![\upsilon_{ijk} \upsilon_j n_k]\!] \quad \text{96}$$

Das condicões de contorno naturais podemos perceber que é necessário prescrever a condição de contorno referente ao tensor convencional e ao tensor duplo juntamente. O mesmo sucede com as condições de contorno essenciais já que δu_i e $\delta \chi_{ij}$ são linearmente dependentes um do outro. O problema de localização de deformações é dependente das condições de contorno existentes, porém estas não são de fácil determinação.

Sendo assim devido às condições cinemáticas propostas não há um grau de liberdade a mais como no contínuo de Cosserat, conforme equação 92, os graus de liberdade são os mesmos do continuo clássico e é necessário prescrever a condição de contorno sobre a fronteira referente ao tensor de Cauchy e ao tensor de forças duplas simétrica, sem momento, pois o tensor duplo simétrico é auto-equilibrado.

Esta teoria é apenas apresentada devido à hipótese de que a partícula em questão apresenta movimento de corpo rígido, devido à diferença de rigidez entre o grão e o continuo, fato que não ocorre nesta teoria, além do que a rotação da partícula, parcela anti-simétrica, não existe na teoria, fato que para representar o comportamento de alguns meios granulares é importante.

3.3.Contínuo referente à Teoria das tensões-momento

A teoria das tensões-momento é obtida através da hipótese de que a partícula tem movimento de corpo rígido, conforme equação 97, e que a micro-rotação da partícula é igual à rotação do contínuo macroscópico.

Devido ao fato da partícula apresentar apenas movimento de corpo rígido existem, o trabalho virtual das forças internas é constituído da parcela do tensor convencional (σ_{ij}), do tensor relativo (S_{ij}) e do tensor duplo, apenas a parte anti-simétrica ($\nu_{[ij]k}$).

Como as rotações são idênticas da partícula e do continuo macroscópico, o gradiente relativo só possui parcela simétrica ($\eta_{(ij)}$), conforme demonstrado entre as equações 98 e 103.

$$\chi_{(ij)} = 0 \quad \text{97}$$

$$\chi_{ij} = \chi_{(ij)} + \chi_{[ij]} = \chi_{[ij]} \quad \text{98}$$

$$\eta_{[ij]} = \partial_j u_i - \chi_{[ij]} \quad \text{99}$$

$$\partial_j u_i = \chi_{[ij]} \quad \text{100}$$

$$\Omega_{ij} = \overline{\Omega_{ij}} \quad \text{101}$$

$$\eta_{[ij]} = 0 \quad \text{102}$$

$$\eta_{ij} = \eta_{(ij)} = \partial_j u_i - \chi_{(ij)} = \partial_j u_i \quad \text{103}$$

Para um meio que ocupa um volume V e uma fronteira Γ, o trabalho virtual das forças internas é apresentado abaixo, utilizando as considerações mencionadas no parágrafo anterior, e da equação 20 e da equação 97 até 103, teremos o seguinte trabalho virtual interno:

$$\delta W_I = \int_V (\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + S_{ij}\delta\eta_{(ij)} + \nu_{[ij]k}\delta x_{[ij]})dV \quad \text{......} \mathbf{104}$$

$$\sigma^c{}_{ij} = \sigma_{ij} + S_{ij} \quad \text{......} \mathbf{105}$$

$$\sigma^c{}_{(ij)} = \sigma_{ij} + S_{(ij)} \quad \text{......} \mathbf{106}$$

$$\sigma^c{}_{[ij]} = S_{[ij]} \quad \text{......} \mathbf{107}$$

Substituindo na equação 104 as equações 105, 106 e 107, teremos a seguinte equação para trabalho virtual interno:

$$\delta W_I = \int_V \sigma^c{}_{(ij)}\delta\varepsilon_{ij} - \sigma^c{}_{[ij]}\delta\eta_{[ij]} + \nu_{[ij]k}\delta x_{[ij]})dV \quad \text{......} \mathbf{108}$$

Como $\eta_{[ij]} = 0$, $\sigma^c{}_{[ij]}$ fica indeterminado e o termo referente à tensão total de Cosserat parcela anti-simétrica não contribui para o trabalho virtual interno, daí temos a seguinte equação:

$$\delta W_I = \int_V (\sigma^c{}_{(ij)}\partial\delta\varepsilon_{ij} + \nu_{[ij]k}\delta x_{[ij]})dV \quad \text{......} \mathbf{109}$$

Integrando por partes a equação 109 e utilizando as equações 6 e 9 temos:

$$\delta W^I = -\int_V \partial_j \sigma^c{}_{(ij)}\delta u_i dV - \int_V \partial_k \nu_{[ij]k}\delta\chi_{[ij]}dV + \int_\Gamma \sigma^c{}_{(ij)}\delta u_i n_j d\Gamma + \int_\Gamma \nu_{[ij]k}\delta\chi_{[ij]}n_k d\Gamma$$

$$\text{......} \mathbf{110}$$

Para poder aplicar diretamente a expressão do trabalho virtual é necessário escrever a parte esquerda da equação 85 de forma que apenas variáveis independentes relacionadas ao deslocamento virtual apareçam. Então para obter a integral será utilizada a equação 86.

Como a integral de volume é zero independente do valor de $\partial\delta u_{ij}$, temos que:

$$A_i - B_{ijk} = 0 \quad \text{......} \mathbf{111}$$

Substituindo na equação 110 a equação 29 e 30, temos:

$$A_{ij} = f_i + \sigma^c{}_{(ij)} \quad \text{112}$$

$$B_{ijk} = \Psi_{[ij]} + \partial_k \nu_{[ij]k} \quad \text{113}$$

Escrevendo:

$$\bar{\tau}_{ij} = \sigma^c{}_{(ij)} - \Psi_{[ij]} - \partial_k \nu_{[ij]k} \quad \text{114}$$

Por analogia com equação 29 temos:

$$f_i + \partial_j \bar{\tau}_{ij} = 0 \quad \text{115}$$

Substituindo a equação 114 na equação 115 temos a seguinte equação constitutiva:

$$f_i + \partial_j (\sigma^c{}_{(ij)} - \Psi_{[ij]} - \partial_k \nu_{[ij]k}) = 0 \quad \text{116}$$

A integral de superfície da equação 85 é apresentada abaixo:

$$\delta W^{\Gamma}{}_I = \int_{\Gamma} \{\overline{T_i}\delta u_i + \overline{N_i D\delta u_i})\} d\Gamma + \int_{\mathrm{I}} \overline{R_i}\delta u_i d\mathrm{I} \quad \text{117}$$

Onde:

$\int_{\mathrm{I}} d\mathrm{I}$ é integral de linha

Dai temos as seguintes condições de contorno naturais:

$$\overline{T_i} = \overline{\tau_{ij}} n_j + (D_l n_l)\nu_{[ij]k} n_j n_k - D_j(\nu_{[ij]k} n_k) \quad \text{118}$$

$$\overline{N_i} = \nu_{[ij]k} n_j n_k \quad \text{119}$$

$$\overline{R_i} = \left\| \nu_{[ij]k} \upsilon_j n_k \right\| \quad \text{120}$$

As condições de contorno essenciais na teoria de tensões-momento não podem ser prescrita de maneira desacoplada como na teoria de Cosserat, pois $\partial_j u_i = \chi_{[ij]}$, e por isto não são independente, então é necessário prescrever uma condição de contorno que atenda ao tensor convencional e ao tensor duplo, no caso com momento, parcela anti-simétrica. O mesmo ocorre nas condições de contorno naturais. E pelo mesmo problema mencionado na teoria do segundo gradiente, estas condições de contorno não são de fácil determinação.

Na teoria de Cosserat é inserido um grau de liberdade a mais, fato que não ocorre na teoria das tensões-momento, conforme equação 116, assim como na teoria do segundo gradiente.