

## 2 Princípio do Trabalho Virtual (PTV)

### 2.1. Contínuo com microestrutura

Na teoria que leva em consideração a microestrutura do material, cada partícula ainda é representada por um ponto P, conforme Figura 1. Porém suas propriedades cinemáticas são definidas sob um ponto de vista microscópico. Neste ponto de observação, o ponto P passa a ser definido como um contínuo de pequena extensão C(P) ao redor do ponto P.

Um contínuo micromórfico de primeira ordem é obtido através do deslocamento  $u'_i$  no ponto P' em C(P) e é expresso através da expansão de Taylor até o primeiro grau, de coordenadas  $x'_i$  em P', conforme equação 1.

$$u'_i = u_i + \chi_{ij} x'_j \dots\dots\dots 1$$

O significado desta consideração é claro, consegue-se descrever o movimento relativo de vários pontos da partícula ao assumir que a deformação é homogênea dentro do volume da partícula C(P).

O tensor de segunda ordem  $\chi_{ij}$  é composto de parte simétrica e anti-simétrica, conforme equação 2 e proposto segundo [35]. A primeira corresponde ao tensor de microdeformação, equação 3, e a segunda parcela ao tensor de microrrotação, equação 4.

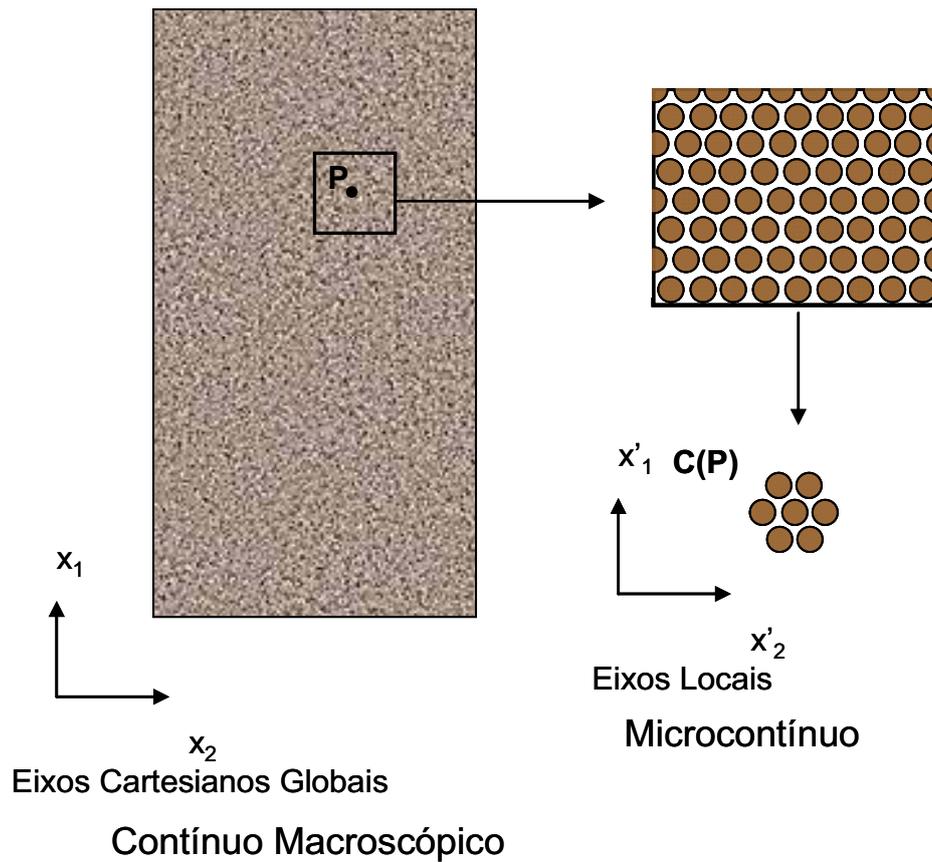


Figura 1 – Representação esquemática do contínuo clássico e microcontinuum.

$$\chi_{ij} = \chi_{(ij)} + \chi_{[ij]} \dots\dots\dots 2$$

$$\chi_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial'_j u'_i + \partial'_i u'_j) \dots\dots\dots 3$$

$$\chi_{[ij]} = \frac{1}{2}(\partial'_j u'_i - \partial'_i u'_j) = \overline{\Omega}_{ij} \dots\dots\dots 4$$

No contínuo clássico, que pode ser caracterizado como um contínuo generalizado onde o comprimento característico da partícula é nulo, apenas possui tensor deformação e rotação macroscópica, correspondendo respectivamente à parcela simétrica e anti-simétrica, conforme equações 5, 6 e 7.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{(ij)} + \varepsilon_{[ij]} \dots\dots\dots 5$$

$$\varepsilon_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \dots\dots\dots 6$$

$$\varepsilon_{[ij]} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j) = \Omega_{ij} \dots\dots\dots 7$$

Os tensores de macro e micro deformações não são grandezas objetivas, significando que suas grandezas variam em relação ao movimento de corpo rígido. Como há necessidade de que estas grandezas sejam objetivas para a formulação das leis constitutivas, é então definido um tensor relativo:

$$\eta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \chi_{ij} \dots\dots\dots 8$$

Este tensor relativo corresponde à diferença entre o tensor de macro deformação e rotação e o tensor de micro deformação e rotação, conforme alguns exemplos na Figura 2 [12].

Também é definido um tensor relativo de terceira ordem, pelos mesmos motivos explanados acima. Este define a variação do tensor de segunda ordem  $\chi_{ij}$ , tanto da sua parcela simétrica quanto da anti-simétrica, ou seja, o gradiente referente à rotação e deformação microscópica, conforme equação 9 e Figura 3.

$$x_{ijk} = \partial_k \chi_{ij} \dots\dots\dots 9$$

O contínuo generalizado de Mindlin [35] assume que a partícula C(P) sofre microdeformações homogêneas. As condições cinemáticas deste contínuo são representadas em associação com a energia gerada e os seguintes tensores, para o trabalho virtual das forças internas: o tensor convencional, denominado de Cauchy ( $\sigma_{ij}$ ), o tensor microscópico ( $S_{ij}$ ) e o tensor duplo ( $\nu_{ijk}$ ). Será agora definido um tensor, denominando de tensor total ( $\tau_{ij}$ ), para representar o contínuo generalizado, seja do ponto de vista macroscópico ou microscópico e microscópico, conforme equação 10. Para o trabalho virtual das forças externas de massa e superfície, existem forças: a força de massa ( $f_i$ ) e a força de superfície ( $T_i$ ), ambos referentes ao tensor total, a força dupla da massa ( $\Psi_{ij}$ ) e a força dupla de superfície ( $M_{ij}$ ), ambas referentes ao tensor duplo.

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + S_{ij} \dots\dots\dots 10$$

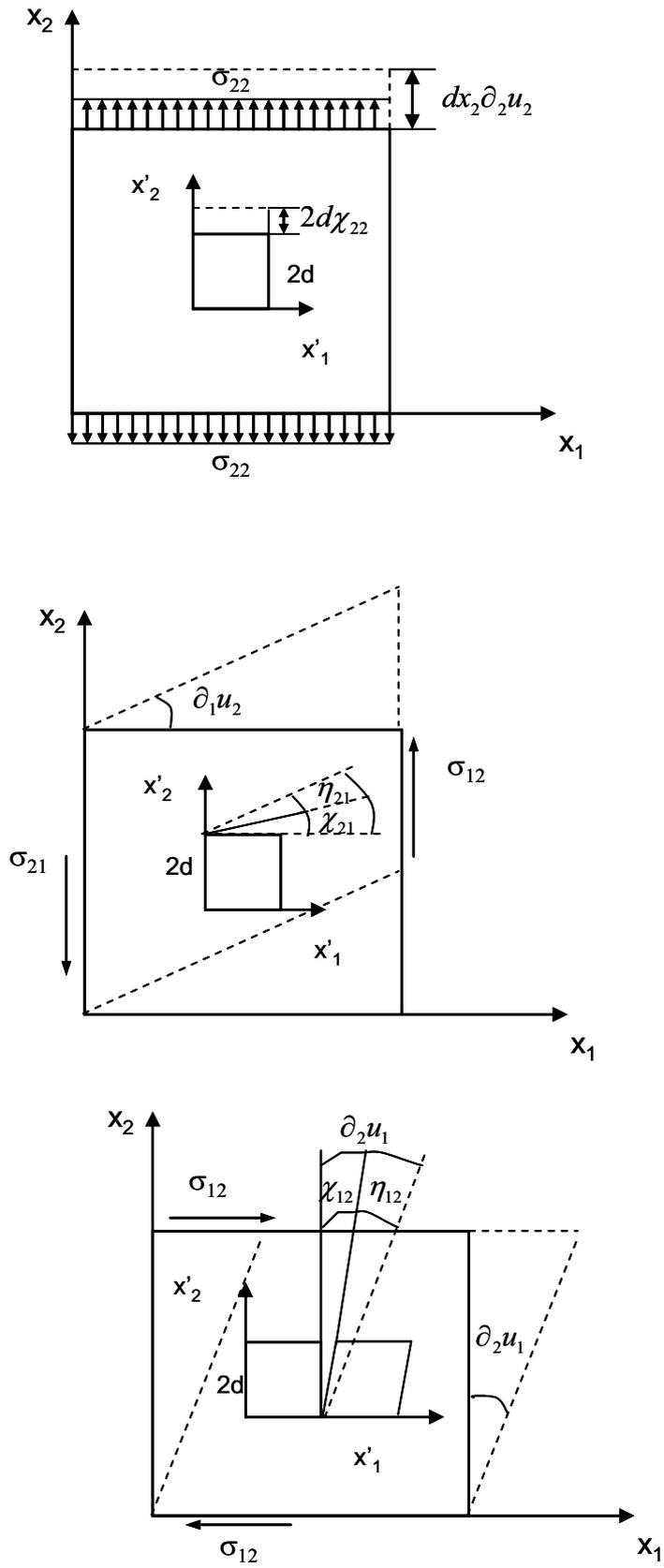


Figura 2 – Representação física do tensor relativo de segunda ordem  $\eta_{ij}$  [12].

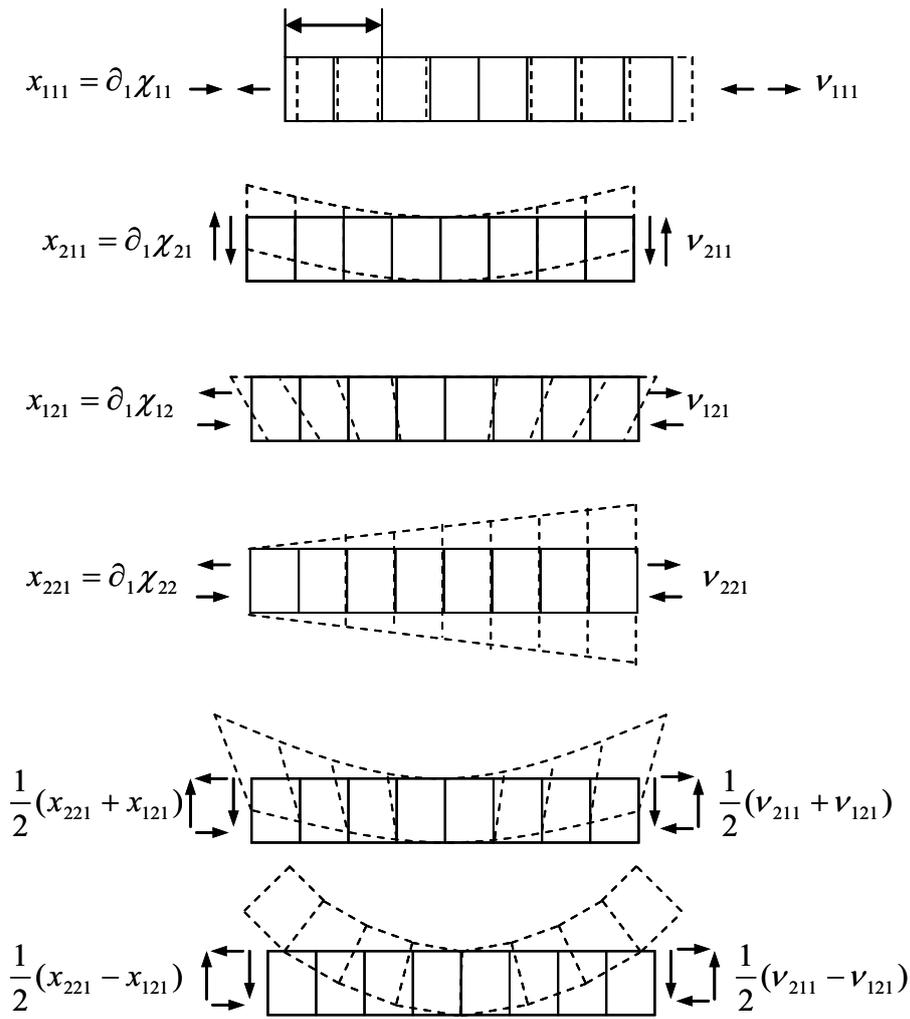


Figura 3– Representação dos gradientes relativo de rotação e/ou deformação micromórfica e das tensões duplas conjugadas ao gradiente [12].

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510741/CA

### 2.2.Princípio D'Alembert

O princípio afirma que a soma das diferenças entre as forças agindo em um sistema S e as derivadas no tempo dos momentos do sistema ao longo de um deslocamento virtual consistente com os vínculos do sistema, é zero, conforme equação 11.

$$\sum_i (F_i - m_i \gamma_i) \delta u_i = 0 \dots\dots\dots 11$$

Onde:

$F_i$  são as forças aplicadas;

$\delta u_i$  é o deslocamento virtual do sistema, consistente com os vínculos;

$m_i$  são as massas das partículas do sistema;

$\gamma_i$  são as acelerações das partículas do sistema;

$m_i \gamma_i$  representa a derivada temporal do momentum linear da  $i$ -ésima partícula.

Considere a lei de Newton para um sistema de partículas. A força total sobre cada partícula é:

$$F^T_i = m_i \gamma_i \dots\dots\dots 12$$

Onde:

$F^T_i$  são as forças totais agindo no sistema de partículas;

$m_i \gamma_i$  são as forças inerciais resultantes das forças totais.

Movendo as forças inerciais para o lado esquerdo da equação e considerando o trabalho virtual,  $\delta W$ , realizado pelas forças totais e inerciais juntas através de um deslocamento virtual do sistema, temos:

$$\delta W = \sum_i (F^T_i - m_i \gamma_i) \delta u_i = 0 \dots\dots\dots 13$$

que zera pelo fato de as forças totais sobre cada partícula serem nulas.

Separando as forças totais em forças aplicadas,  $F_i$ , e forças de vínculo,  $C_i$ , temos:

$$\delta W = \sum_i (F_i + C_i - m_i \gamma_i) \delta u_i = 0 \dots\dots\dots 14$$

Se deslocamentos virtuais arbitrários são assumidos em direções ortogonais às forças de vínculo, então as forças de vínculo não realizam trabalho. Tais deslocamentos são ditos serem consistentes com os vínculos. Isto leva à formulação do princípio de d'Alembert, que afirma que a diferença entre as forças aplicadas e as forças inerciais para um sistema dinâmico não realiza trabalho virtual:

$$\delta W = \sum_i (F_i - m_i \gamma_i) \delta u_i = 0 \dots\dots\dots 15$$

### 2.3.PTV do Contínuo Generalizado

Aqui introduzir-se-á o conceito básico de trabalho e deslocamento virtual ao se considerar uma pequena partícula rígida onde forças atuam. A partícula se encontra em equilíbrio, então a resultante das forças atuantes são nulas. Caso se deseja movimentar esta partícula para uma nova posição, uma força adicional é requerida, então o sistema de forças originais será modificado. Agora considerar-se-á um deslocamento virtual definido como um deslocamento arbitrário que não afeta o sistema de forças atuante na partícula. Em outras palavras, o deslocamento virtual é um deslocamento fictício e durante a aplicação de cada força na partícula permanece constante em magnitude e direção. Para um deslocamento infinitesimal as forças devido ao deslocamento são pequenas e podem ser negligenciadas quando comparadas com as forças atuantes, então as vezes o deslocamento virtual pode ser considerado como um deslocamento infinitesimal. Apesar de que por definição não necessariamente o deslocamento virtual seja infinitesimal [8].

Forças e tensões não são aplicadas diretamente, mas sim o trabalho virtual que estas geram para determinado tipo de deslocamento virtual. Mais precisamente, para um sistema S num dado tempo, um deslocamento virtual é definido por um vetor  $u$ , que corresponde a um campo de velocidade virtual. O deslocamento virtual  $u$  é representado por um espaço vetorial  $U$  cujos elementos são  $u$ . O sistema de forças que se quer considerar é definido pela aplicação contínua de  $U \rightarrow R$  ou

$$\delta W = \mathcal{L}(u) \dots\dots\dots 16$$

$\delta W$  é um número real e corresponde ao trabalho virtual produzido por um sistema de forças num campo vetorial  $U$  precisa ser um espaço vetorial topológico para garantir a continuidade de  $\mathcal{L}(u)$ .

Assim como a velocidade real, a virtual é definida em função de um sistema. O campo de velocidades do mesmo movimento virtual em dois diferentes sistemas difere somente do campo de velocidade referente ao movimento de corpo

rígido, o qual define um espaço vetorial  $\mathcal{E}$ . Assumi-se que  $\mathcal{E}$  será sempre subespaço de  $U$ .

As diversas forças que atuam no sistema mecânico serão subdivididas de maneira clássica, de duas formas: forças externas, que representam o efeito dinâmico em  $S$  devido à interação com outros sistemas que não fazem parte de  $S$ , e forças internas, que representam o efeito que um subsistema ( $S_i$ ) de  $S$  realiza em outro subsistema ( $S_j$ ) e vice-versa.

Quando um volume está sob a ação de um sistema de cargas, forças internas são geradas neste. O comportamento do volume, tal como deformações, ou falha, está relacionado com a distribuição de forças internas, que por sua vez está relacionado às forças externas. As forças externas são divididas em dois grupos: forças de massa e forças de superfície. Caso um plano imaginário passe através do volume como apresentado na Figura 4, e na parte I tem as forças  $F_1$  e  $F_2$  (forças externas) e na parte II atuam as forças  $F_3$  e  $F_4$  (forças externas), o corpo está em equilíbrio pois as forças que atuam na parte I se anulam com as que atuam na parte II. Porém esta força está distribuída ao longo do plano que passa pelo volume, que corresponde à força média definida como [2]:

$$F_{media} = \frac{\Delta F}{\Delta A} \dots\dots\dots 17$$

Dai tem-se o conceito de que a tensão (força interna) no ponto A corresponde a variação de força por unidade de área quando a área tende a zero, conforme equação 18.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \dots\dots\dots 18$$

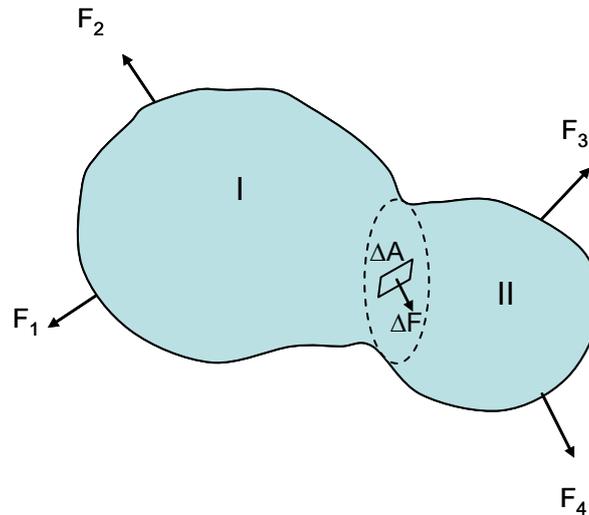


Figura 4 – Forças de Superfície Externas e Forças Internas [2]

É importante notar que a definição de trabalho virtual das forças internas tem que respeitar ao axioma apresentado.

Axioma do trabalho das forças internas: O trabalho virtual das forças internas que atuam no sistema S para o determinado deslocamento virtual é uma grandeza objetiva, entende-se que o trabalho será o mesmo em qualquer que seja o sistema onde se observa o movimento virtual. Isto quer dizer que para qualquer campo de velocidade referente ao movimento de corpo rígido o trabalho das forças internas será nulo.

Como já dito o trabalho virtual é nulo, já que as forças se anulam, então por isto a partícula esta em equilíbrio, conforme equação 19.

$$\delta W = \delta W_E + \delta W_I = 0 \dots\dots\dots 19$$

O trabalho virtual interno é correspondente a energia de deformação absorvida pela partícula devido ao trabalho virtual externo realizado pelas forças externas. As forças internas atuantes num meio analisado sob o ponto de vista macroscópico e microscópico são as seguintes: tensões de Cauchy ( $\sigma_{ij}$ ), ou tensões macroscópicas, tensões microscópicas ( $S_{ij}$ ), ou tensões relativas e segunda tensão microscópica ( $v_{ijk}$ ), ou tensão dupla, que é um tensor de terceira ordem. O tensor macroscópico convencional é simétrico, ou seja,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Então

o trabalho virtual interno, de um meio que ocupa um volume  $V$  e uma fronteira  $\Gamma$  pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\delta W_I = \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + S_{ij} \delta \eta_{ij} + v_{ijk} \delta x_{ij}) dV \dots\dots\dots 20$$

Substituindo na equação 20 a equação 5 até equação 9 tem:

$$\delta W_I = \int_V \{(\sigma_{ij} + S_{ij}) \partial_j \delta u_i - S_{ij} \delta \chi_{ij} + v_{ijk} \partial_k \delta \chi_{ij}\} dV \dots\dots\dots 21$$

Aplicando a integração por partes:

$$\delta W_I = \int_V -\{(\sigma_{ij} + S_{ij}) \partial_j \delta u_i + (S_{ij} + \partial_k v_{ijk}) \delta \chi_{ij}\} dV + \int_{\Gamma} \{(\sigma_{ij} + S_{ij}) \delta u_i n_i + v_{ijk} \delta \chi_{ij} n_k\} d\Gamma \dots\dots\dots 22$$

Onde  $n_i$  é uma normal unitária apontado na perpendicular da fronteira  $\Gamma$ .

O trabalho virtual das forças internas pode ser dividido em trabalho virtual devido as forças internas de massa e devido as forças internas de superfície, conforme equação 23 até equação 25.

$$\delta W_I = \delta W^V_I + \delta W^{\Gamma}_I \dots\dots\dots 23$$

$$\delta W^V_I = \int_V -\{(\sigma_{ij} + S_{ij}) \partial_j \delta u_i + (S_{ij} + \partial_k v_{ijk}) \delta \chi_{ij}\} dV \dots\dots\dots 24$$

$$\delta W^{\Gamma}_I = \int_{\Gamma} \{(\sigma_{ij} + S_{ij}) \delta u_i n_i + v_{ijk} \delta \chi_{ij} n_k\} d\Gamma \dots\dots\dots 25$$

O passo seguinte é introduzir o trabalho virtual das forças externas, que pode ser dividido em trabalho virtual devido as forças externas de massa e devido as forças externas de superfície, conforme já definidas anteriormente. Suas equações se encontram apresentadas abaixo.

$$\delta W_E = \delta W^V_E + \delta W^{\Gamma}_E \dots\dots\dots 26$$

$$\delta W^V_E = \int_V (f_i \delta u_i + \Psi_{ij} \delta \chi_{ij}) dV \dots\dots\dots 27$$

$$\delta W^{\Gamma}_E = \int_{\Gamma} (T_i \delta u_i + M_{ij} \delta \chi_{ij}) d\Gamma \dots\dots\dots 28$$

O último passo é aplicar o princípio do trabalho virtual equação 19. Assume-se que  $\delta u_i$  e  $\delta \chi_{ij}$  escolhidos de modo que estes sejam nulos fora do volume. Dai, na soma dos trabalhos virtuais, somente a integral de massa permanece, a qual é nula para qualquer valor de  $\delta u_i$  e  $\delta \chi_{ij}$ . Como consequência óbvia, podemos igualar diretamente os coeficientes do trabalho virtual devido as forças externas e internas de massa. Separando a parcela do tensor total e do tensor duplo teremos as duas equações de equilíbrio conforme equação 29 e equação 30.

$$f_i + \partial_j (\sigma_{ij} + S_{ij}) = 0 \dots\dots\dots 29$$

$$\Psi_{ij} + S_{ij} + \partial_k v_{ijk} = 0 \dots\dots\dots 30$$

Novamente o mesmo é válido para o trabalho virtual devido às forças externas e internas de superfície, já que  $\delta u_i$  e  $\delta \chi_{ij}$  são valores arbitrários. Separando a parcela do tensor total e do tensor duplo teremos as duas condições de contorno naturais conforme equações 31 e 32.

$$T_i = (\sigma_{ij} + S_{ij}) n_j \dots\dots\dots 31$$

$$M_{ij} = v_{ijk} n_k \dots\dots\dots 32$$

Na teoria de Mindlin [35], tanto  $\delta u_i$  quanto  $\delta \chi_{ij}$  são independentes e por isto suas condições de contorno essenciais podem ser aplicadas de maneira independente, já que o problema é totalmente desacoplado. O mesmo é válido para as condições de contorno naturais, podem ser aplicadas de maneira independente. Difícil é conhecer as condições de contorno ditas como não clássicas  $\delta \chi_{ij}$  e  $M_{ij}$ , fato que não impede a utilização da teoria de Mindlin [35], já que se pode simplesmente apenas prescrever as condições de contorno ditas como clássicas, não reconhecendo que isto seja o ideal, ou que represente o problema de fato. Como será visto mais adiante, algumas das teorias que tomam em consideração a partícula não tem suas condições de contorno desacopladas, ou seja,  $\delta u_i$  e  $\delta \chi_{ij}$  dependem um do outro, como é o caso, por exemplo, da teoria do 2º gradiente [36], [37] e [38] e da teoria das tensões-momento [39]. Fato este que

por muitas vezes impede que tais teorias sejam utilizadas na engenharia, já que estas condições de contorno nem sempre são conhecidas. Esta é uma vantagem da Teoria de Cosserat, pois apesar das condições de contorno não serem desacopladas, estas são de mais fácil interpretação e compreensão física.