7
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA A. F. **Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade de Pórticos Planos de Concreto armado**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio, Rio de Janeiro – RJ – Brasil. 2008.

ALKIRE B. **Cholesky Factorization of Aumented Positive Definite Matrices**. Electrical Engineering Department, University of California Los Angeles UCLA, 2002.

AMES, W. F. "**Numerical Methods" The Engineering Handbook**. Ed. Richard C. Drof. Boca Raton CRC Press LLC, 2000.

BAECHER G. B. and CHRISTIAN J. T. **Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering**. John Wiley & Sons Ltd. England, 2003.

BATHE K. J. **Finete Element Procedures**. Prentice-Hall, Inc. Printed in the United States of America, 1996.

BENZI M. e TUMA M. **A Robust Incomplete Factorization Preconditioner for Positive Definite Matrices**. Numerical Linear Algebra with Applications. Copyright @ John Wiley & Sons, Ltd., 2001.

BONGARTZ I., CONN A. R., GOULD N. I. M., SAUNDERS M. A. **A Numerical Comparison Between the LANCELOT and MINOS Package for Large-scale Nonlinear Optimization**. Report 97/13. Canadá: ProMIRA Software Inc., 1997.

BORGES L. **Formulação e Solução para Análise Limite com Superfície de Escoamento Não Linear**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Mecânica – Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro PUC-Rio, Rio de Janeiro - Brasil, 1991.

CAMPOS, J. L. E. **Análise Numérica de Transporte de Contaminantes em Meios Porosos com Reações Químicas**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio, Rio de Janeiro – RJ – Brasil. 1999.

CARRION M. **Análise Limite Tridimensional Determinística e Não Determinística**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil – Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2004.

CARRION M, VARGAS E., VAZ E., FARFAN A. **Análise Limite Numérica em 3D de Frente de Escavação de Túneis**. INFOGEO 5to Simpósio Brasileiro de Aplicações de Informática em Geotecnia. Belo Horizonte-Brasil, 2005.

CASTILLO E., CORNEJO A., PEDREGAL P., GARCIA R. E ALGUACIL N. **Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia**. España, 2002.

CERVANTES G. & MEJIA C. **Precondicionamiento de Métodos Iterativos**. Revista de la Academia Colombiana de Ciências. Colombia, 2004.

CHEN W. & LIU X. **Limit Analysis in Soil Mechanics**. Amsterdam-Oxford-New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1990.

CIMNE. **GID 9.0 User Manual**. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering. 2008.

CIMNE. **GID 9.0 Reference Manual**. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering, 2008.

CISMID – Centro Peruano Japonés de Investigación Sísmica y Mitigación de Desastres. **Estudio Definitivo para el Abandono de los Depósitos de Relave de Yauliyacu, Bellavista e Antuquito. Vol. I, II e III.** Lima-Perú, 1998.

CISMID - Centro Peruano Japonés de Investigación Sísmica y Mitigación de Desastres. **Estudio de los Aspectos Geotécnicos y Análisis Detallado del Estado Actual de los Terraplenes del Pulmón de Regulación Horaria Catalinayocc**. Lima-Perú, 2002.

CONN A. R., GOULD N. I. M. AND TOINT P. L. **LANCELOT A Fortran Package for Large-Scale Nonlinear Optimization (Release A)**. Springer Series in Computational Mathematics. United State of America, 1992.

CORNELL C. A. **Probabilidty-based Structural Code**. Journal of ACI, 66(12), pp. 974-985, 1969.

DRUCKER D. C.; GREENBERG H. J. E PRAGER W. **Extended Limit Design Theorems for Continuous Media**. Q. Appli. Math., vol 9. 1952.

DITLEVSEN, O. **Structural Reability and the Invariance Problem**. Research Report, bf22, Solid Mechanics Div., University of Waterloo, Otario, Canada, 1973.

FARFÁN A. **Aplicações da Análise Limite a Problemas Geotécnicos Modelados como Meios Contínuos Convencionais e Meios de Cosserat**. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2000.

GOMEZ J e BURGUEST J. **Curso de Cálculo Numérico**. Departamento de Física Atômica Molecular y Nuclear. Universidad de Valencia, Facultat de Física. España, 2004.

GONZAGA L. **Estudo Numérico de Problemas de Estabilidade em Materiais Geotécnicos Através da Análise Limite**. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2000.

GVOZDEV A. A. **The Determination of the Collapse Load for Statically Indeterminate System Undergoing Plastic Deformations.** Int. J. Mech. Sci., vol 1. (Tradução do original de 1938), 1960.

HASOFER A. M. and LIND N. C. **Exact and Invariant Second-moment code format.** Journal of Engineering Mechanics, ASCE 100 (EM1). PP. 111-121, 1974.

HERSKOVITS J. Comunicação Persoal. 2008.

HESTENES M. R. and STIFEL E. **Methods of Conjugate Gradient for Solving Linear Systems.** Journal of Research of National Bureau of Standars. 49, 409-436, 1952.

HOFFMAN J. D. **Numerical Methods for Engineers and Scientists.** Second Edition, Revised and Expanded. Department of Mechanical Engineering, Purdue University. New York, 1992.

IMAI K. and FRANGOPOL D. **Geometrically Nonlinear Finite Element Reliability Análysis of Structural Systems**. PERGAMON - Computers & Structures. Elsevier Science Ltd., 1999.

JENNINGS A. and MALIK G. M. **The Solution of Sparce Linear Equations by the Conjugate Gradient Method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12:141-158, 1978.

KIUREGHIAN A. D. and LIU P. L. **Structural Reliability Under Incomplete Probability Information**. Journal of Engineering Mechanics (ASCE), Vol. 110, No 3, 1986.

KIUREGHIAN A. **Structural Reliability Methods for Seismic Safety Assessment**. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, USA, 1994.

STUBEN K. and CLEES T.. **SAMG USER's Manual Release 22c**. Fraunhofer Institute SCAI Scholoss Birlinghoven. Germany, 2005.

STUBEN K. **SAMG Data Structure and File Format Specification**. Fraunhofer Institute SCAI Scholoss Birlinghoven. Germany, 2005.

LANCELLOTTA R. Technical University of Turin. Department of Structural Engineering. **Geotechnical Engineering.** Bologna: Zanichelli Editores S.P.A., 1995.

LEE S. Y. **Static and Dinamic Reliabilidty Analysis off Frama and Shear Walls Structural Systems**. Doctor of Philosophy These. Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics of the Universitty of Arizona, 2000.

LINDO SYSTEMS INC. **Lingo Manual for Release 5.3.** Chicago: Lindo Systems Inc., 1997.

LOPES, M. T. de A. **Análise de Confiabilidade de Estruturas Aplicada ao Projeto de Reforço à Força Cortante de Vigas em Concreto Armado com Compósito de Fibras de Carbono**. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro PUC-Rio, 2007.

LYAMIN A. V. & SLOAN S. W. **A comparison of linear and nonlinear programming formulation for lower bound limit analysis**. Em Pietruszczak & Pande (eds), Numerical Models in Geomechanics: pp. 367-373. Rotterdam: Balkema. 1997.

MEIJERINK J. A. and VAN DER VORST H. A. **An Interecative Solution Method for Linear Systems of which the Coefficient Matrix is a Symetric m-matrix**. Mathematics of Computation, 31: 148-155. 1977.

MELCHERS, R. E. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. 437p. John Wiley & Sons, New York. 2002.

MURTAGH B. A. AND SAUNDERS M. A. **Minos 5.5 User's Guide**. California: Stanford University, 1998.

PEREIRA A. **Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade: Aplicação a Treliças espaciais**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil – Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2007.

PINHEIRO C. **Aplicação de um Algoritmo Genético no Estudo das Perdas de Controle de Tensão em Sistemas Elétricos de Potencia**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais, 1998.

PINI G. and GAMBOLATI G. **Is Simple Diagonal Scaling the Best Preconditioner for Conjugate Gradient on Supercomputers?**. Advanced in Water Resources, 12(3):147-153, 1990.

SAGRILO L. **Apostila do Curso de Confiabilidade Estrutural**. UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

SANDOVAL M. L. **Métodos Iterativos Eficientes Para Problemas de Convección-Difusión Transitorios**. Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Aplicada III UPC. Barcelona, 2006.

SMAILBEGOVIC F., GAYDADJIEV G. and VASSILIANDIS S. **Sparse Matrix Storage Format**. Coputer Engineering Laboratory, Electrical Engineering, Mathematics and Computer Sciense. Mekelweg 4, 2628CD Delf, 2006.

SHINOZUKA M. **Basic Analysis of Structural Safety**. Journal of Structural Engineering Division, ASCE, 109(3), pp. 721-740, 1983.

RACKWITZ R. and FIESSLER B. **Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences**. Computer and Structures, Vol. 9, 1978.

TSAL R. J. **Numerical Modeling of Multi-Fan Air Distribution System for Research Laboratories**. Netsal & Associates. Fountain Valley CA 92708, 1998.

TSAO N. **On Equivalence of Gaussian Elimination and Gauss-Jordan Reduction in Solving Linear Equations**. NASA Technical Memorandum 101466. Wayne State University and Institute for Computational Mechanics in Propulsion Lewis Research Center. Michigan and Ohio, 1989.

VAL D., BLJUGER F. and YANKELEVSKY D. **Optimization Problem Solution in Reliability Analysis of Reinforced Concrete Structures**. National Building Research Institute, Faculty of Civil Engineering, Technion – Israel, 1995.

VENEZIANO D. **Contribution to Second Moment Reliability Theory.** Research Report, Department of Civil Engineering, MIT, 1974.

WANG L., and GRANDHI R. **Safety Index Calculation Using Intervening Variables for Structural Reliability Analysis**. Department of Mechanical and Materials Engineering, Wright State University, Dayton – U.S.A., 1994.

ZOUAIN N., HERSKOVITS J., BORGES L. and FEIJO R. **An Interactive Algorithm for Limit Analysis with Nonlinear Yield Functions**. Int. J. Solids Structure Vol. 30. Great Britain, 1993.

A
CONCEITOS ESTATÍSTICOS

A.1. Variáveis Determinísticas e Aleatórias

Se uma medição ou um experimento é feito repetidamente, mantendo todas as condições possíveis, e os resultados obtidos são os mesmos, então a variável é conhecida como determinística. Todavia, se os resultados obtidos nas medições variam ou são diferentes, então as variáveis são conhecidas como aleatórias.

Na Engenharia Geotécnica, os parâmetros dos materiais geológicos são obtidos mediante ensaios de laboratório ou de campo. Sendo os valores obtidos diferentes para cada ensaio, estes parâmetros são de natureza aleatória.

A.2. Espaço Amostral, Evento e Valor Observado

O espaço amostral é o conjunto formado por todos os possíveis e diferentes resultados observados de uma variável aleatória. Um evento é um subconjunto formado por uma ou mais observações do espaço amostral. O valor numérico de cada medição de uma variável aleatória é conhecido como valor observado e é parte de seu espaço amostral.

A.3. Medidas de Tendência Central

Na Estatística existem diferentes medidas de tendência central, como a mediana, a moda e diferentes tipos de médias. Esta pesquisa refere-se só à média aritmética, por ser de interesse para os objetivos deste trabalho.

A.3.1. Momento estatístico de ordem *m*

Matematicamente o momento estatístico de ordem *m* é definido como a somatória da potência *m* dos valores observados do espaço amostral dividida pelo número de valores observados da variável aleatória.

$$ {}^{s}\overline{X}_i^{m} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} {}^{j}x_i^{m} \qquad \text{(A.1)} $$

onde:

${}^{j}x_i$ *j*-ésimo valor observado da variável aleatória X_i

m Potência à qual estão elevados os valores da variável

n Número de valores observados da variável aleatória

${}^{s}\overline{X}_i^{m}$ Momento estatístico de ordem *m* da amostra

A.3.2. Média aritmética

A média aritmética é um momento estatístico de primeira ordem (*m=1*) e é talvez a medida de tendência central mais usada.

$$ {}^{s}\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} {}^{j}x_i \qquad \text{(A.2)} $$

onde:

${}^{j}x_i$ *j*-ésimo valor observado da variável aleatória X_i

n Número de valores observados da variável aleatória

${}^{s}\overline{X}_i$ Média da amostra da variável aleatória X_i

A.3.3.
Características da média aritmética

- A unidade de medida da média aritmética é a mesma que a unidade dos valores observados da variável aleatória.
- É um valor único.
- É fácil de compreender e aplicar.
- Utiliza todos os valores da variável em seu cálculo.
- É afetada pela mudança de algum valor da variável.

A.4.
Medidas de Dispersão da Variável Aleatória

A.4.1.
Desvio

O desvio é a diferença entre o valor observado de uma variável aleatória e a média aritmética da amostra.

$$Desvio = x_i - \overline{X} \tag{A.3}$$

A medida dos desvios das variáveis aleatórias tem duas características muito importantes:

- A somatória de todos os desvios dos valores da variável aleatória é sempre igual a zero.

$$\sum_{j=1}^{n} [\, {}^{j}x_i - {}^{s}\overline{X}_i \,] = 0 \tag{A.4}$$

- A somatória dos quadrados dos desvios dos valores da variável aleatória é sempre um valor mínimo.

$$\sum_{j=1}^{n} [\, {}^{j}x_i - {}^{s}\overline{X}_i \,]^2 = mínimo \tag{A.5}$$

A.4.2. Momento estatístico central de ordem m

É definido como a somatória da m^{ma} potência dos desvios dos valores observados da variável aleatória dividida pelo número de valores observados.

$$ {}^{s}X_i^m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\,{}^{j}x_i - {}^{s}\overline{X}_i\,]^m \qquad \text{(A.6)} $$

onde:

${}^{s}X_i^m$ Momento estatístico central de ordem *m*

${}^{j}x_i$ *j*-ésimo valor observado da variável aleatória X_i

${}^{s}\overline{X}_i$ Média da amostra da variável aleatória X_i

m Ordem a variável aleatória

n Número de valores observados da variável aleatória

A.4.3. Desvio absoluto médio

É um momento estatístico central de ordem um (*m=1*)

$$ {}^{s}X_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\,{}^{j}x_i - {}^{s}\overline{X}_i\,] \qquad \text{(A.7)} $$

onde:

${}^{s}X_i$ Desvio absoluto médio

A.4.4. Variância

A variância da mostra é o momento estatístico central de ordem dois (*m=2*)

$$ Var({}^{s}x_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\,{}^{j}x_i - {}^{s}\overline{X}_i\,]^2 \qquad \text{(A.8)} $$

Características da variância:

- A variância é sempre um valor positivo.
- Se todos os valores de uma variável forem iguais então a variância é zero.

A.4.5. Desvio padrão

Uma desvantagem da variância é sua unidade de medida, o quadrado da unidade de medida dos valores da variável. Como essa unidade não explica nada sobre as características dos valores da amostra, é definido o desvio padrão, que mantém a unidade de medida da variável.

O desvio padrão da amostra é definido como a raiz quadrada da variância da amostra.

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\,{}^{j}x_i - {}^{s}\overline{X}_i\,]^2} \qquad \text{(A.9)}$$

onde:

σ_{x_i} Desvio padrão da variável aleatória X_i

Características do desvio padrão:

- O desvio padrão é sempre um número positivo.
- Se os valores de uma variável forem iguais, o desvio padrão é zero.
- O desvio padrão depende da soma dos quadrados dos desvios da variável; portanto, quanto menor o desvio padrão, mais os valores da variável aproximam-se da sua média.
- Se o desvio de um valor da variável for menor que o desvio padrão da amostra, então esse valor estará mais próximo da média do que outro valor com desvio maior.
- Quanto mais os valores da variável se afastarem de sua média, maior serão os desvios e, conseqüentemente, maior será o desvio padrão e mais aberta será a distribuição de freqüências da variável.

- Se duas variáveis tiverem a mesma média e desvios padrões diferentes, a distribuição da variável com maior desvio padrão será mais aberta que a de variável com menor desvio padrão.
- Para n variáveis aleatórias a matriz do desvio padrão é expressa pela seguinte equação.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{x_n} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.10)}$$

A.4.6. Coeficiente de variação

A comparação da dispersão de duas ou mais distribuições pelo simples confronto de seus desvios padrões nem sempre é suficiente, pois as amostras podem ter unidades diferentes ou, tendo a mesma unidade, seus valores de média podem estar bastante afastados.

O coeficiente de variação é uma medida relativa de dispersão que permite a comparação de distribuições, pois é definido como a relação do desvio padrão por unidade de média. Na comparação de duas variáveis, a variável que tiver menor coeficiente de variação tem menor dispersão, variabilidade ou incerteza.

$$\delta_{x_i} = \frac{\sigma_{x_i}}{{}^{s}\overline{X}_i} \qquad \text{(A.11)}$$

onde:

δ_{x_i} Coeficiente de variação da variável aleatória X_i

A.5. Medidas de Correlação de Variáveis Aleatórias

As medidas estatísticas que medem a tendência e a relação linear entre as variáveis aleatórias são a covariância e o coeficiente de correlação.

A.5.1. Covariância

A covariância resume em um único número a tendência e a relação linear entre duas variáveis e é definida como a média dos produtos dos desvios das variáveis.

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} [\,{}^{j}x_1 - {}^{s}\overline{X}_1\,][\,{}^{j}x_2 - {}^{s}\overline{X}_2\,] \qquad \text{(A.12)}$$

onde:

$Cov(X_1,X_2)$	Covariância das variáveis aleatórias X_1 e X_2
${}^{j}x_1, {}^{j}x_2$	Valores observados das variáveis aleatórias X_1 e X_2
$\overline{X}_1, \overline{X}_2$	Média dos valores observados das variáveis aleatórias X_1 e X_2
n	Número de valores observados das variáveis aleatórias X_1 e X_2

Características da covariância:

- As duas variáveis devem ter o mesmo número de valores observados.
- O valor da covariância pode ser qualquer valor real, pois ela pode ser negativa, positiva ou zero.
- A unidade de medida é o resultado do produto das unidades dos valores das variáveis aleatórias.
- A covariância de uma variável e ela mesma é a própria variância da variável.
- A permutação das variáveis não altera o resultado da covariância, se os mesmos pares de valores forem mantidos: $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_1)$.

- Se as variáveis X_1 e X_2 forem estatisticamente independentes, então a covariância destas variáveis será igual a zero.
- Se o resultado da covariância das variáveis X_1 e X_2 for igual a zero, não se pode afirmar que as duas variáveis sejam estatisticamente independentes.
- Para *a*, *b*, *c* e *d* constantes e *X*, *Y* e *Z* variáveis aleatórias, então sempre se cumpre que:

$$\begin{aligned}
&Cov(X,a)=0\\
&Cov(X,-Y)=-Cov(X,Y)\\
&Cov(aX,Y)=aCov(X,Y)\\
&Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y)\\
&Cov(X+Z,Y)=Cov(X,Y)+Cov(Z,Y)
\end{aligned} \tag{A.13}$$

- Para *n* variáveis aleatórias dependentes entre si, a matriz covariância $\boldsymbol{S}_X$ de estas variáveis é expressa pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{S}_X=\begin{bmatrix} Var(X_1) & & & Simétrico \\ Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_m,X_1) & Cov(X_m,X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

A.5.2.
Coeficiente de correlação

O coeficiente de correlação permite a comparação de duas variáveis, por ser independente das unidades de medida.

O coeficiente de correlação de duas variáveis aleatórias é definido como a covariância das amostras dividida pelo desvio padrão de cada amostra

$$\rho_{X_j,X_k}=\frac{Cov(X_j,X_k)}{\sigma_{x_j}\sigma_{x_k}} \tag{A.15}$$

onde:

ρ_{X_j,X_k} Coeficiente de correlação das variáveis aleatórias X_j e X_k

O coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias varia no intervalo de $-1 \leq \rho_{ij} < +1$. Uma interpretação gráfica deste conceito é apresentada na Figura A.1, e o grado de dependência entre variáveis aleatórias é classificada segundo o valor de coeficiente de correlação como mostrada na Tabela A.1.

Por questão prática, a notação formal de coeficiente de correlação entre duas variáveis ρ_{X_i,X_j} é escrita em alguns casos simplesmente como ρ_{ij}.

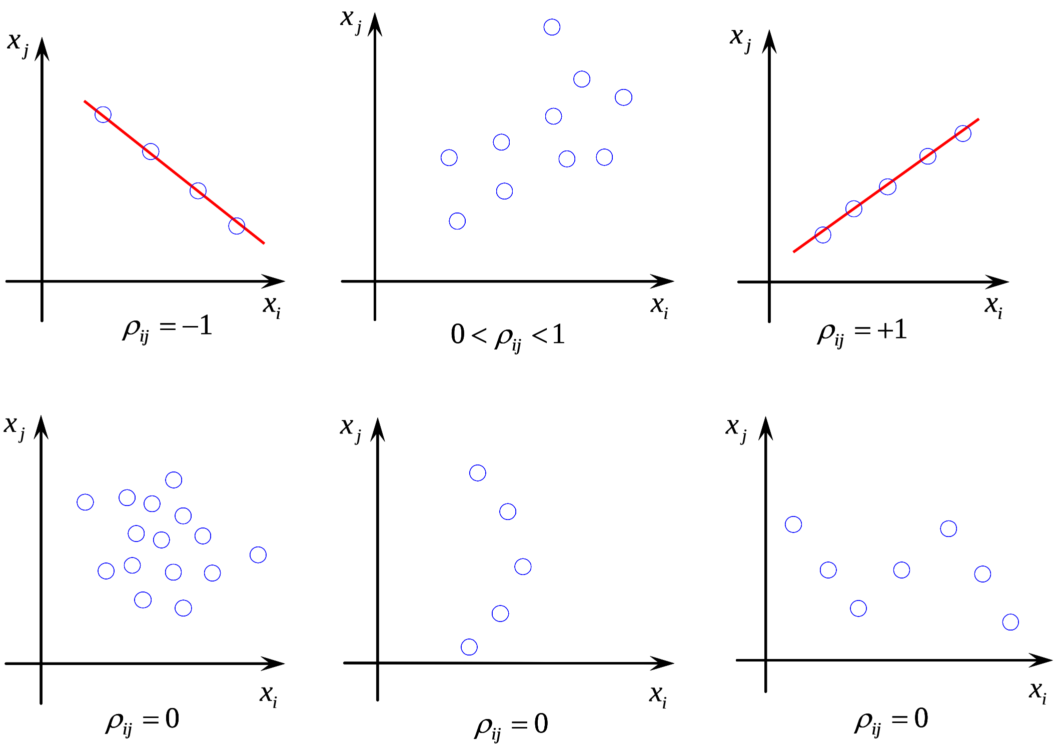

Figura A.1 – Interpretação gráfica de coeficiente de correlação.

Intervalo de ρ	**Grau de dependência**
0.0 - 0.3	Baixo
0.3 - 0.5	Médio
0.5 - 0.7	Importante
0.7 - 0.9	Forte
0.9 - 1.0	Muito Forte

Tabela A.1 – Grão de dependência das variáveis aleatórias.

Características do coeficiente de correlação:

- Os valores do coeficiente de correlação estão limitados entre *-1* e *+1*.
- O coeficiente de correlação é um valor único para o espaço amostral.
- O coeficiente de correlação de uma variável e ela mesma é igual a um $\rho_{x,x} = 1$
- A permutação de variáveis não altera o resultado de coeficiente de correlação se os mesmos pares de valores forem mantidos: $\rho_{x,y} = \rho_{y,x}$.
- Se as variáveis X e Y forem estatisticamente independentes, então o coeficiente de correlação destas variáveis será igual a zero.
- Se o resultado do coeficiente de correlação das variáveis X e Y for igual a zero, não se pode afirmar que as duas variáveis sejam estatisticamente independentes.

- Para n variáveis aleatórias dependentes entre si, a matriz coeficiente de correlação $\boldsymbol{\rho}$ é expressa pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{X_1,X_1} & & & \mathit{Simétrico} \\ \rho_{X_2,X_1} & \rho_{X_2,X_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_n,X_1} & \rho_{X_n,X_2} & \cdots & \rho_{X_n,X_n} \end{bmatrix} \tag{A.16}$$

A.6. Caracterização de Variáveis Aleatórias

A caracterização de variáveis aleatórias é feita por intermédio de funções que usam as distribuições de probabilidade sobre o espaço amostral. Estas funções são basicamente duas, a função densidade de probabilidade e a função distribuição de probabilidade.

A.6.1. Função Densidade de Probabilidade (PDF)

A função densidade de probabilidade é uma função matemática contínua que permite descrever as variáveis aleatórias. Esta função satisfaz as seguintes condições:

- A função densidade de probabilidade é sempre maior ou igual a zero.

$$p(x) \geq 0 \tag{A.17}$$

- A área abaixo da função densidade de probabilidade é igual a um.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \tag{A.18}$$

- A probabilidade de que um valor da variável aleatória observada esteja entre dois valores numéricos x_a e x_b é denotada por $Pr[x_a \leq X \leq x_b]$ e é expressa como:

$$Pr[x_a \leq X \leq x_b] = \int_{x_a}^{x_b} p(x)dx \tag{A.19}$$

Qualquer função matemática que satisfaça as 3 condições anteriores pode ser considerada uma função densidade de probabilidade (PDF).

Existem várias funções que são usadas freqüentemente como função densidade de probabilidade, como exemplo, a função densidade de probabilidade normal é apresentada nesta seção e na Tabela A.1, são apresentados as funções mais usadas.

A função matemática da função densidade probabilidade normal é expressa pela Equação (A.20) e sua representação gráfica é mostrada na Figura A.2.

$$p(x) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-b}{c})^2} \qquad \begin{cases} -\infty \leq x \leq \infty \\ c > 0, \quad b > -\infty \end{cases} \tag{A.20}$$

onde:

$\overline{X} = b$ Média

$\sigma = c$ Desvio padrão

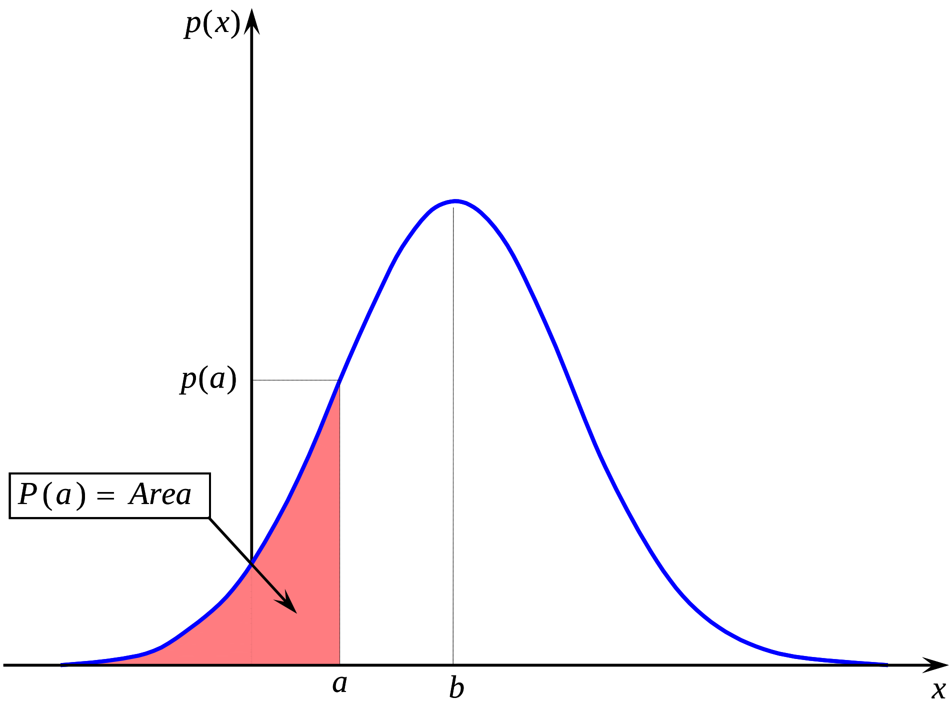

Figura A.2 – Função densidade de probabilidade normal.

A.6.2. Função Distribuição de Probabilidade

A função distribuição de probabilidade é conhecida também na literatura como função de distribuição cumulativa CDF (Cumulative Distribution Function), esta função é definida como a integral da função densidade de probabilidade(PDF) e indica a probabilidade de que uma variável aleatória X tenha um valor menor ou igual que a (Equação A.21).

$$P(a) = \Pr[X \leq a] = \int_{-\infty}^{a} p(x)dx \qquad \text{(A.21)}$$

onde:

$P(a)$ Função distribuição de probabilidade

$Pr[X \leq a]$ Probabilidade de que a variável X seja menor ou igual que a

$p(x)$ Função densidade de probabilidade

Uma função distribuição de probabilidades deve de satisfazer as seguintes condições:

$$P(-\infty) = 0.0 \tag{A.22}$$

$$0 \leq P(X) \leq 1 \tag{A.23}$$

$$P(\infty) = 1 \tag{A.24}$$

Para o caso da função densidade de probabilidade normal da Figura A.2, sua função distribuição de probabilidade é expressa pela Equação A.25, e sua representação gráfica é mostrada pela Figura A.3.

$$P(x) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-b}{c}\right)^2} dz \tag{A.25}$$

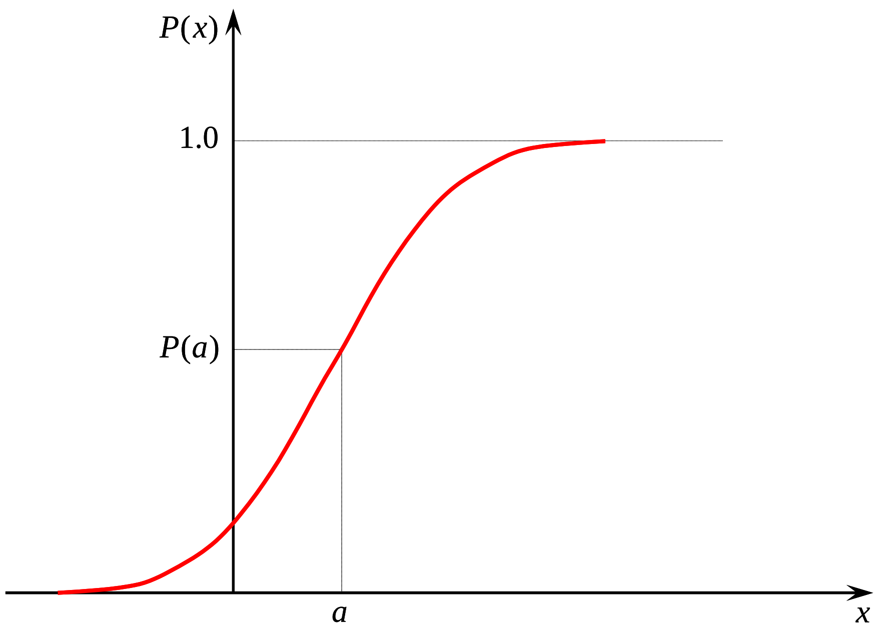

Figura A.3 – Função distribuição de probabilidade normal.

Na Tabela A.2, apresenta-se um resumo das funções densidade probabilidade (PDF) e as funções distribuição de probabilidade (CDF) mais usadas.

Tipo de Distribuição	**PDF**	**CDF**	**Média**	**Desvio Padrão**
	p(x)	*P(X)*	*E(X)*	$\sqrt{Var(X)}$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ
Lognormal	$\frac{1}{\xi x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)^2\right)$	$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)$	$\exp\left(\lambda+\frac{1}{2}\xi^2\right)$	$E(X)\sqrt{\exp(\xi^2)-1}$
Exponencial	$\lambda\exp(-\lambda x)$	$1-\exp(-\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
Rayleigh	$\frac{x}{\sigma_R^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_R}\right)^2\right)$	$1-\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_R}\right)^2\right)$	$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\sigma_R$	$\left(\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}\right)\sigma_R$
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Tipo I (Max) (Gumbel)	$\alpha\exp\left(-\alpha(x-u)-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$	$\exp\left(-\exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right)$	$u+\frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha}$
Tipo I (mínimo)	$\alpha\exp\left(\alpha(x-u)-\exp\left(\alpha(x-u)\right)\right)$	$1-\exp\left(-\exp\left(\alpha(x-u)\right)\right)$	$u-\frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha}$
Tipo II (máximos)	$\frac{k}{v}\left(\frac{v}{x}\right)^{k+1}\exp\left(-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right)$	$\exp\left(-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right)$	$v\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)$	$v\left(\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$
Tipo III (min.) (Weibull)	$\frac{k}{v}\left(\frac{x}{v}\right)^{k+1}\exp\left(-\left(\frac{x}{v}\right)^k\right)$	$1-\exp\left(-\left(\frac{x}{v}\right)^k\right)$	$v\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$	$v\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

Tabela A.2 – Funções densidade probabilidade (PDF) e de distribuição de probabilidade (CDF) (Lopes, 2007).

Na Tabela A.2, os valores de k e a função Gamma $\Gamma(k)$ nas distribuições tipo II e tipo III, são avaliadas pelas seguintes equações:

$$k = \delta_i^{-1.09} \tag{A.26}$$

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x} x^{k-1} dx \tag{A.27}$$

onde δ_i, é o coeficiente variação (seção A.4.6)

A.6.3. Coeficiente de Inclinação de uma Distribuição

O coeficiente de inclinação de uma amostra indica a inclinação de sua distribuição de freqüências. Matematicamente, é definido como a relação entre o momento estatístico central de terceira ordem dividido pelo cubo do desvio padrão.

$$Coef.\ de\ Inclinação = \frac{X_i^3}{\sigma_{x_i}^3} \tag{A.28}$$

Interpretação:

- Se o coeficiente de inclinação for igual a zero, a distribuição de freqüências será simétrica.
- Se o coeficiente de inclinação for negativo, a distribuição de freqüências terá inclinação esquerda ou negativa.
- Se o coeficiente de inclinação for positivo, a distribuição de freqüências terá inclinação direita ou positiva.

A.6.4.
Coeficiente de Curtose

O coeficiente de curtose de uma amostra permite comparar a distribuição de freqüências da amostra com a distribuição normal. Este coeficiente é definido como o momento estatístico central de quarta ordem, dividido pela quarta potência do desvio padrão.

$$Coef\,.\;de\;Curtose = \frac{X_i^4}{\sigma_{x_i}^4} \qquad \text{(A.29)}$$

Se duas distribuições de freqüências têm a mesma dispersão e inclinação, isso não será suficiente para supor que as duas distribuições têm a mesma forma.

Interpretação:

- Se o coeficiente de curtose for igual a zero, então a distribuição de freqüências será a própria distribuição normal.
- Se o coeficiente de curtose for negativo, então a distribuição será achatada, plana.
- Se o coeficiente de curtose for positivo, então a distribuição de freqüências será concentrada ao redor da média, distribuição com pico.

A.7.
Esperança Matemática de uma Variável Aleatória

A esperança matemática é uma operação que consiste na integração ponderada de uma função de variável aleatória.

$$E < g(X) >= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx \qquad \text{(A.30)}$$

onde:

g(X) Função da variável aleatória

p(x) Função de ponderação

E<g(X)> Esperança matemática da função de variável aleatória

Esta operação pode ser visualizada na Figura A.4, que mostra que a esperança de uma função de variável aleatória é igual a área abaixo da curva definida por *g(x)* vezes *p(x)*.

Casos especiais da esperança matemática:

- A esperança da variável aleatória é sua média aritmética.

$$E < X >= \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \overline{X} \tag{A.31}$$

- A esperança matemática de uma variável aleatória multiplicada por uma constante é a média multiplicada pela constante.

$$E < C\,X >= C\,\overline{X} \tag{A.32}$$

- A esperança do quadrado da variável aleatória é igual ao quadrado da média da amostra.

$$E < X^2 >= \int_{-\infty}^{+a} x^2 p(x) dx = \overline{X}^2 \tag{A.33}$$

- A variância da variável aleatória é definida como:

$$Var(X) = E < (X - \overline{X})^2 >= \int_{-\infty}^{+a} (x - \overline{X})^2 p(x) dx = E < x^2 > -(\overline{X})^2 \tag{A.34}$$

- O momento estatístico central de ordem *m* é definido como:

$$E < (X - \overline{X})^m >= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{X})^m p(x) dx \tag{A.35}$$

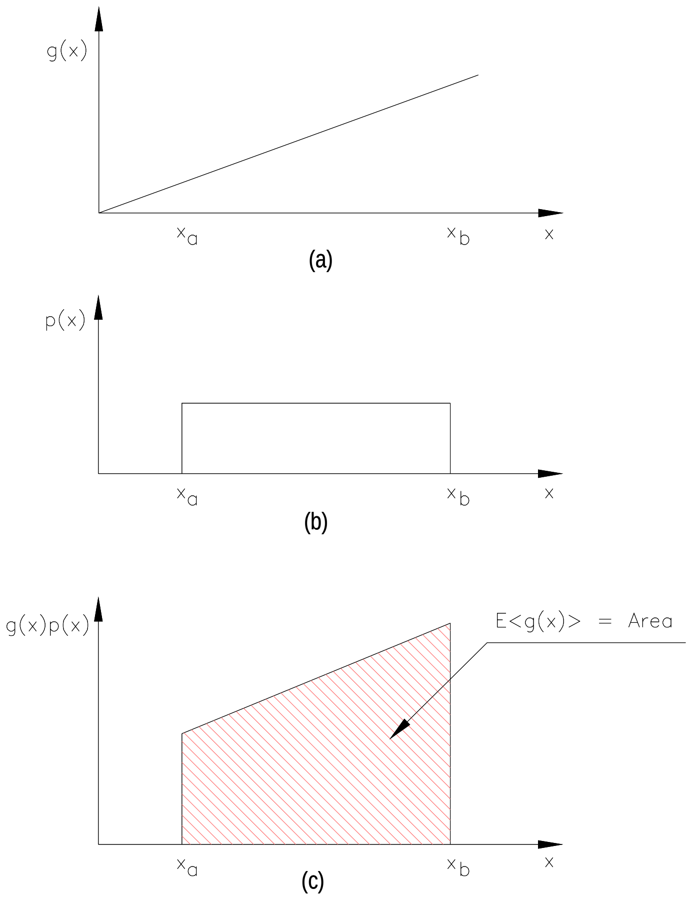

Figura A.4 – (a) Função de variável aleatória; (b) Função de ponderação; (c) Esperança matemática da função de variável aleatória.

A esperança matemática para uma função geral g dependente de n variáveis aleatórias X_1, X_2,...X_n e sua correspondente função densidade de probabilidade $p(x_1,x_2,...,x_n)$ é definida como:

$$E < g(X_1 , X_2 ,..., X_n) >= \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1 , x_2 ,..., x_n) p(x_1 , x_2 ,..., x_n) dx_1 ... dx_n \qquad \text{(A.36)}$$

Casos especiais mais usados:

- Covariância:

$$Cov(X_j , X_k) = E < (X_j - \overline{X}_j)(X_k - \overline{X}_k) >= \int_{-\infty}^{+\infty} . \int_{-\infty}^{+\infty} (x_j - \overline{X}_j)(x_k - \overline{X}_k) p(x_j , x_k) dx_j dx_k \qquad \text{(A.37)}$$

- Coeficiente de correlação:

$$\rho_{jk} = \frac{E < (X_j - \overline{X}_j)(X_k - \overline{X}_k) >}{\sqrt{E < (X_j - \overline{X}_j)^2 > E < (X_k - \overline{X}_k)^2 >}} \qquad \text{(A.38)}$$