

2 ANÁLISE LIMITE NUMÉRICA

O objetivo principal da Análise Limite é determinar a carga que leva uma estrutura ao colapso (carga de colapso). As formulações existentes na Análise Limite para o cálculo da carga de colapso são baseadas nos teoremas de Análise Limite (inferior ou superior). A formulação pelo limite inferior (formulação estática) deve satisfazer as condições de admissibilidade estática dos campos de tensões; a formulação pelo limite superior (formulação cinemática) deve satisfazer as condições de admissibilidade cinemática dos campos de velocidades; e, finalmente, a formulação mista tem a forma da formulação pelo limite inferior, com variáveis em tensões, mas o campo de tensões não é estaticamente admissível, a não ser de forma aproximada.

A solução de problemas geotécnicos, então, pode ser feita por meio da aplicação de qualquer uma das formulações estática, cinemática ou mista. Estas formulações podem também ser classificadas em formulação forte e formulação fraca. A formulação é forte quando satisfaz explicitamente as condições dos teoremas da Análise Limite, e é fraca quando as condições são satisfeitas por meio do princípio dos trabalhos virtuais.

No presente trabalho é usada a formulação mista fraca baseada no princípio dos trabalhos virtuais para representar as equações de equilíbrio do sistema, o qual estabelece que, para qualquer pequeno movimento cinematicamente admissível, o trabalho das forças externas será igual ao trabalho das forças internas.

Não é o propósito deste trabalho descrever em detalhe toda a teoria da Análise Limite, portanto, neste Capítulo é apresentado somente um resumo de alguns conceitos importantes que permitem a compreensão das formulações estabelecidas no Capítulo seguinte.

2.1. Teoremas da Análise Limite

Os teoremas fundamentais da Análise Limite foram apresentados por Gvosdev (1960); Drucker et. al. (1952); Drucker, Greenberg and Prager (1952). Chen (1975) apresentou estes teoremas para materiais com comportamento plástico perfeito (Figura 2.1). Neste tipo de comportamento, as deformações plásticas ocorrem sem que haja mudança nas tensões. Apesar de representar apenas uma aproximação do comportamento real dos materiais, a hipótese pode ser utilizada com segurança porque as deformações elásticas são desprezíveis em relação às plásticas.

Os teoremas da Análise Limite são formulados em termos de admissibilidade dos campos, conforme descrito a seguir.

2.1.1. Campos de Tensões Estaticamente Admissíveis

Define-se que um campo de tensões em um corpo tridimensional é estaticamente admissível quando satisfaz as seguintes condições:

- Equilíbrio no volume.
- Condições de contorno.
- Critério de escoamento.

2.1.2. Campos de Velocidades Cinematicamente Admissíveis

Define-se que um campo de velocidades é cinematicamente admissível ou geometricamente compatível quando:

- Satisfaz as condições de contorno em termos de velocidades.
- Satisfaz as condições de compatibilidade cinemática em termos de deformações.
- Trabalho externo é igual à dissipação de energia interna.

2.1.3. Teorema de Limite Inferior

Se um campo de tensões correspondente a uma carga atuante (ou externa) é estaticamente admissível, então a carga atuante é menor ou igual à carga de colapso. A carga ou fator de colapso assim obtido será um limite inferior do fator de colapso real.

2.1.4. Teorema de Limite Superior

Se um campo de velocidades é cinematicamente admissível, o colapso ocorre quando o trabalho externo (forças externas) for igual ou maior ao trabalho interno (forças internas). A carga ou fator de colapso assim obtido será um limite superior ao fator de colapso real.

2.2. Considerações na Análise Limite

Algumas considerações importantes são apresentadas a seguir, para um melhor entendimento dos conceitos utilizados na formulação pelo MEF.

2.2.1. Consideração de Plasticidade Perfeita

O solo exibe comportamento elástico para pequenas deformações. Evidências de experimentos em laboratório mostram que deformações permanentes ou irreversíveis ocorrem quando elas ultrapassam uma deformação de tolerância. Este tipo de comportamento pode ser descrito por meio da Teoria da Plasticidade.

A Análise Limite faz a consideração de que o material, no colapso, comporta-se como perfeitamente plástico (Figura 2.1). Neste tipo de comportamento, as características de endurecimento e amolecimento são ignoradas.

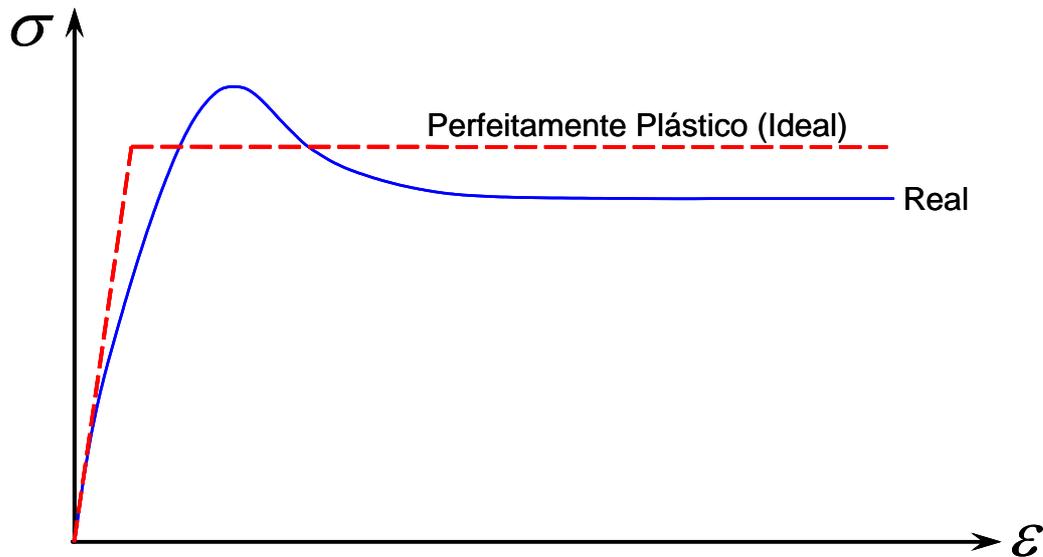


Figura 2.1 – Relação tensão deformação para solo real e ideal (Chen, 1975).

2.2.2. Considerações sobre escoamento

Para se caracterizar o comportamento de um material submetido a um estado de tensões complexo, a Teoria de Plasticidade define uma superfície de escoamento (Figura 2.2), caracterizada por uma função de escoamento. A superfície de escoamento pode ser interpretada como: para um estado de tensões dentro da superfície, só acontecem deformações elásticas; se o estado de tensões alcança a superfície, ocorrem deformações plásticas e finalmente, os estados de tensões acima da superfície de escoamento são excluídos.

Assim, os estados de tensões para o qual $F(\sigma_{ij}) > 0$ são excluídos, enquanto que, $F(\sigma_{ij}) < 0$ implica em comportamento elástico e $F(\sigma_{ij}) = 0$ indica que ocorre fluxo plástico.

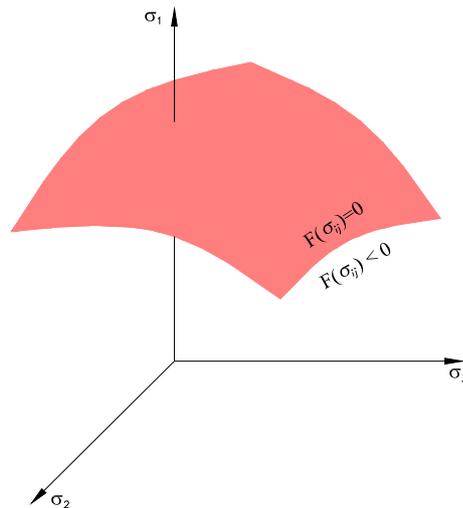


Figura 2.2 – Superfície de escoamento no espaço de tensões principais.

Para um material perfeitamente plástico, a função de escoamento F depende somente do conjunto de componentes de tensões σ_{ij} e não de componentes de deformação ε_{ij} . Portanto, a função de escoamento é fixa no espaço de tensões e o fluxo plástico ocorre quando a função de escoamento é igual a zero, ou seja:

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.1)$$

Se o material é isotrópico, o escoamento plástico depende apenas da magnitude das três tensões principais e não de suas direções. Neste caso, de uma maneira geral, a superfície de escoamento pode ser expressa matematicamente em função dos invariantes de tensões, ou seja:

$$F(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (2.2)$$

onde:

- I_1 Primeiro invariante do tensor de tensões
- J_2 Segundo invariante do tensor desviador
- J_3 Terceiro invariante desviador

2.2.3. Considerações sobre a Lei de Fluxo

Diz-se que um fluxo plástico acontece quando o estado de tensões no espaço das tensões (Figura 2.3) alcança a superfície de escoamento. A magnitude do fluxo plástico total (ε_{ij}^p) nestas condições é ilimitado. Portanto é evidente que não se pode falar nada sobre a deformação plástica total e por isso a descrição do processo de fluxo plástico é feita pela cinemática de fluxo plástico, ou seja, por meio das velocidades de deformação plástica ($\dot{\varepsilon}_{ij}^p$) em vez da deformação plástica total (ε_{ij}^p). A velocidade de deformação total ($\dot{\varepsilon}_{ij}$) é composta por uma parte elástica e outra plástica, que pode ser expressa da seguinte forma (Chen, 1975):

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2.3)$$

onde:

- $\dot{\varepsilon}_{ij}$ Velocidade de deformação total
- $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ Velocidade de deformação elástica
- $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ Velocidade de deformação plástica

As velocidades de deformação elástica e as tensões estão relacionadas por meio da lei de Hooke. Mas, como as velocidades de deformação elástica são pequenas em relação às plásticas, elas são consideradas desprezíveis. Não entanto, as velocidades de deformação plástica dependem do estado de tensões (Chen e Liu, 1990).

Para a discussão sobre as velocidades de deformação plástica, é necessário definir suas direções. Os eixos das coordenadas no espaço de tensões já mencionados para a superfície de escoamento podem também ser usados para representar simultaneamente velocidades de deformação plástica. Sendo assim, cada eixo de tensões representará também um eixo de velocidades de deformação plástica (Figura 2.3).

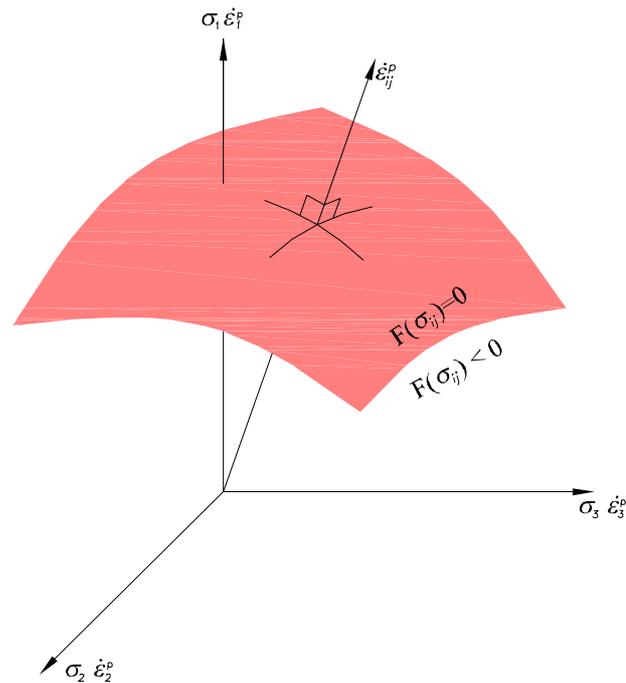


Figura 2.3 – Superfície de escoamento e vetor de deformação plástica.

Para materiais estáveis, nos quais o incremento de tensões e deformações realiza um trabalho positivo, o vetor de velocidades de deformação plástica tem direção e sentido das normais à superfície de escoamento (Figura 2.3). Portanto, a velocidade de deformação plástica pode ser expressa por (Lancellotta, 1995):

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.4)$$

onde:

- σ_{ij} Campo de tensões
- $F(\sigma_{ij})$ Função de escoamento
- $\dot{\lambda}$ Fator de proporcionalidade (escalar)
- $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ Velocidade de deformação plástica

A Equação 2.4 representa a lei de fluxo associada ou lei da normalidade, por ser associada com a normal à superfície de escoamento do material.

2.3. Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser usado para tratar problemas de colapso de estruturas em materiais geotécnicos. Este princípio é uma expressão de trabalho equilibrado e pode ser aplicado para materiais deformáveis como o solo. Para a análise limite, o princípio dos trabalhos virtuais deve ser escrito em termos do campo de velocidades virtuais e campo de tensões reais:

“se uma estrutura está em equilíbrio, o trabalho das forças externas sobre um campo de velocidades virtuais dado, compatível com as condições de fronteira, deve ser igual ao trabalho interno realizado pelas tensões sobre as velocidades de deformações virtuais, compatíveis com o campo de velocidades virtuais dado” (Lancellotta, 1995).

2.4. Critérios de Escoamento

Sendo de interesse conhecer as tensões de escoamento para definir um campo de tensões estaticamente admissível (condição do teorema de limite inferior da Análise Limite), neste trabalho são mostrados dois critérios de escoamento que, mediante equações matemáticas, definem o lugar geométrico onde se dá o escoamento do material. De uma forma geral estas funções de escoamento podem ser definidas em termos dos invariantes de tensões, ou seja:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.5)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_3 - \sigma_1)] \quad (2.6)$$

$$J_3 = \frac{2}{27} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1}{9} [\sigma_1^2 (\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2^2 (\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_3^2 (\sigma_1 + \sigma_2)] + \frac{4}{9} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.7)$$

onde:

- I_1 Primeiro invariante de tensor de tensões
- J_2 Segundo invariante do tensor de tensões desviador
- J_3 Terceiro invariante desviador
- σ_1 Tensão principal maior

- σ_2 Tensão principal intermediária
 σ_3 Tensão principal menor

2.4.1. Critério de Mohr-Coulomb

De acordo com o critério de ruptura de Mohr-Coulomb, a função de escoamento F que define a superfície de escoamento é expressa em sua forma mais geral pela Equação 2.8 (Chen e Liu, 1990).

$$F(I_1, J_2, \theta) = \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \left[\frac{1}{3} I_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right] \sin(\phi) + C \cos(\phi) \quad (2.8)$$

e

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right] \quad (2.9)$$

onde:

- θ Ângulo de Lode
 ϕ Ângulo de atrito
 C Coesão

No espaço de tensões principais, o critério de escoamento de Mohr-Coulomb é representado por uma pirâmide hexagonal irregular (Fig. 2.4).

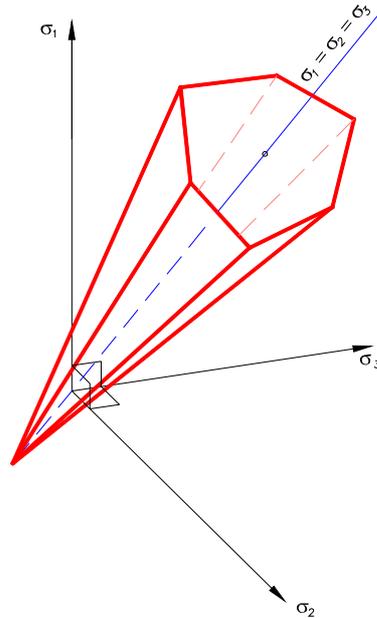


Figura 2.4 – Superfície de escoamento, critério de Mohr-Coulomb.

Este critério apresenta algumas deficiências, como por exemplo:

- Em 2D, a envoltória no diagrama de Mohr-Coulomb é composta de linhas retas, o que indica que o parâmetro ϕ (ângulo de atrito) não muda com a pressão de confinamento. Esta aproximação é razoável somente para um intervalo limitado de pressões de confinamento.
- Em 3D, a superfície de escoamento tem descontinuidades, as quais dificultam seu uso em análise numérica. É, portanto, inadequada matematicamente para seu uso na análise tridimensional de problemas geotécnicos (Chen e Liu, 1990).

Pela deficiência descrita no parágrafo anterior, no presente trabalho, este critério é somente usado para análise de problemas em 2D.

Para o caso bidimensional (2D), a Equação 2.8 fica simplificada para:

$$F(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} - \frac{1}{2} I_1 \sin(\phi) - C \cos(\phi) \quad (2.12)$$

O caso bidimensional (2D) do critério de Mohr-Coulomb é representado no espaço de tensões principais pela Figura 2.5.

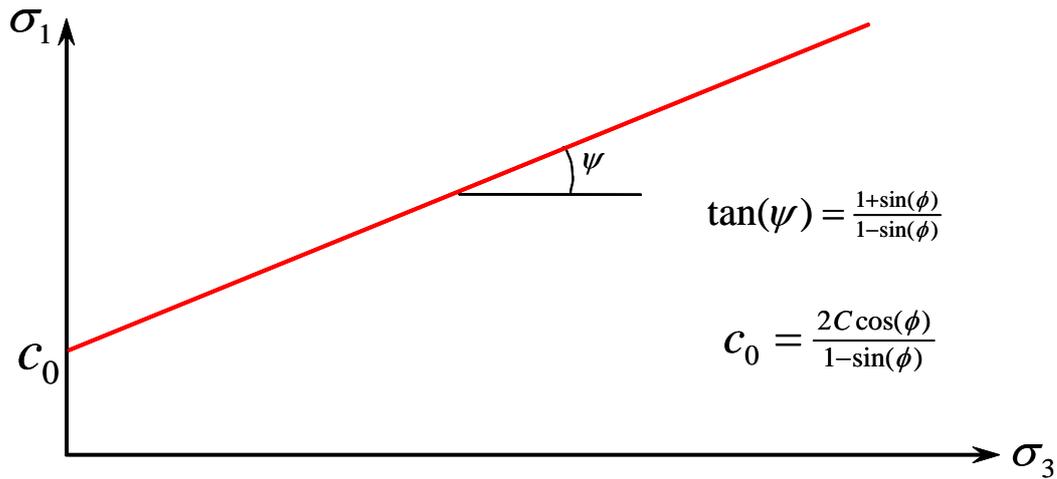


Figura 2.5 – Critério de escoamento de Mohr-Coulomb 2D.

2.4.2. Critério de Drucker-Prager

Drucker e Prager (1952) propuseram uma extensão do critério de Von Mises. Este critério é muito usado em inúmeras aplicações práticas. Em termos dos invariantes das tensões, a função de escoamento F que define a superfície de escoamento (Figura 2.6) é expressa por:

$$F(I_1, J_2, \alpha, k) = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k \quad (2.11)$$

onde:

- I_1 Primeiro invariante do tensor de tensões
- J_2 Segundo invariante do tensor de tensões desviador
- α, k Parâmetros do material

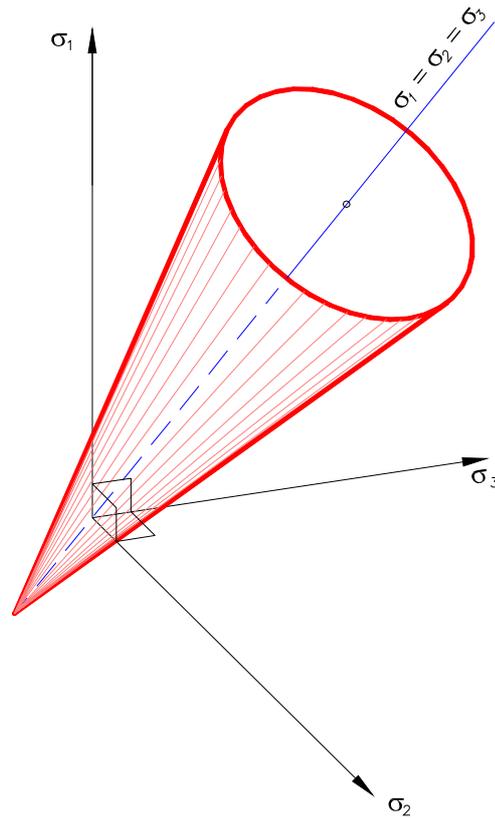


Figura 2.6 – Critério de escoamento de Drucker & Prager.

As principais características deste critério são:

- O critério de ruptura é relativamente simples.
- Possui somente dois parâmetros, k e α . Estes parâmetros podem ser facilmente aproximados a partir dos parâmetros de resistência (C e ϕ) no caso de materiais geotécnicos.
- A superfície é contínua e, por isso, matematicamente apropriada para uso em aplicações tridimensionais (3D).

Os parâmetros k e α podem ser obtidos a partir de uma aproximação do critério de Mohr-Coulomb para o qual são ajustados dois círculos diferentes, um deles passando pelos vértices de compressão e outro passando pelos vértices de tração.

A primeira aproximação é obtida fazendo o ângulo de Lode de $\theta = 0^\circ$ no critério de escoamento geral de Mohr-Coulomb (Equação 2.8), obtendo-se os parâmetros k e α do círculo superior ou de compressão como mostradas pelas seguintes expressões (Chen e Liu, 1990):

$$\alpha = \frac{2 \sin(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \sin(\phi))} \quad (2.12)$$

$$k = \frac{6C \cos(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \sin(\phi))} \quad (2.13)$$

A segunda aproximação é obtida para um valor de ângulo de Lode de $\theta = 60^\circ$ no critério de escoamento geral de Mohr-Coulomb, obtendo-se os parâmetros k e α do círculo inferior ou de tração, ou seja (Chen e Liu, 1990):

$$\alpha = \frac{2 \sin(\phi)}{\sqrt{3}(3 + \sin(\phi))} \quad (2.14)$$

$$k = \frac{6C \cos(\phi)}{\sqrt{3}(3 + \sin(\phi))} \quad (2.15)$$

onde:

C, ϕ Parâmetros de resistência do material

No caso 2D, para os problemas em estado plano de deformação, os parâmetros k e α do critério de Drucker-Prager podem ser aproximados pelas seguintes Equações (Chen e Liu, 1990):

$$\alpha = \frac{\tan(\phi)}{\sqrt{9 + 12 \tan^2(\phi)}} \quad (2.16)$$

$$k = \frac{3C}{\sqrt{9 + 12 \tan^2(\phi)}} \quad (2.17)$$

2.5.

Formulação Numérica da Análise Limite pelo MEF

O objetivo principal da Análise Limite é determinar a carga que leva uma estrutura ao colapso (carga de colapso), onde a carga de colapso é determinada como produto da carga inicial por um fator de colapso. As formulações existentes na Análise Limite para o cálculo da carga de colapso são baseadas nos teoremas de Análise Limite (inferior ou superior). A formulação pelo limite inferior

(formulação estática) deve satisfazer as condições de admissibilidade estática dos campos de tensões; a formulação pelo limite superior (formulação cinemática) deve satisfazer as condições de admissibilidade cinemática do campo de velocidades; e, finalmente, a formulação mista tem a forma da formulação pelo limite inferior, com variáveis em tensões, mas o campo de tensões não é estaticamente admissível a não ser de forma aproximada.

A solução de problemas geotécnicos pode então ser feita através da aplicação de qualquer uma das formulações estática, cinemática ou mista. Estas formulações, podem também ser classificadas em formulação forte e formulação fraca. A formulação é forte quando satisfaz explicitamente as condições dos teoremas da Análise Limite, e é fraca quando as condições são satisfeitas através do princípio dos trabalhos virtuais.

No presente trabalho é usada a formulação mista fraca com o uso do princípio dos trabalhos virtuais para representar as equações de equilíbrio estático.

2.5.1. Condição de Equilíbrio

Na formulação mista fraca a condição de equilíbrio é garantida pelo princípio dos trabalhos virtuais. Este princípio estabelece que, para qualquer campo de velocidades cinematicamente admissível, o trabalho das forças internas é igual ao trabalho das forças externas, como mostra a Equação 2.19.

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \dot{\mathbf{u}} \alpha \mathbf{F}_0 dV + \int_S \delta \dot{\mathbf{u}}^T \alpha \mathbf{T}_0 dS \quad (2.19)$$

onde:

- \mathbf{F}_0 Força de volume inicial
- \mathbf{T}_0 Força de superfície inicial
- α Fator (escalar) que multiplica as forças iniciais
- $\delta \dot{\mathbf{u}}$ Campo de velocidades virtuais
- $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ Campo de velocidades de deformação virtuais
- $\boldsymbol{\sigma}$ Campo de tensões

Pela teoria de elementos finitos, os campos são interpolados a partir de valores nodais:

$$\delta \dot{\mathbf{u}}^T = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u^T \quad (2.20)$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathbf{B}}^T \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.22)$$

onde:

- $\boldsymbol{\sigma}$ Campo de tensões
- $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ Campo de tensões nodais
- $\dot{\mathbf{u}}$ Campo de velocidades
- $\hat{\mathbf{u}}$ Campo de velocidades nodais
- $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ Campo de velocidades de deformação
- \mathbf{N}_u Matriz de interpolação de velocidades
- \mathbf{N}_σ Matriz de interpolação de tensões
- $\widehat{\mathbf{B}}$ Matriz de compatibilidade cinemática obtida de \mathbf{N}_u

Substituindo-se as equações (2.20), (2.21) e (2.22) em (2.19), tem-se que:

$$\int_V \delta \hat{\mathbf{u}}^T \widehat{\mathbf{B}}^T \mathbf{N}_\sigma \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV = \alpha \int_V \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{F}_0 dV + \alpha \int_S \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{T}_0 dS \quad (2.23)$$

Fatorizando:

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[\left(\int_V \widehat{\mathbf{B}}^T \mathbf{N}_\sigma dV \right) \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \alpha \left(\int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{F}_0 dV + \int_S \mathbf{N}_u^T \mathbf{T}_0 dS \right) \right] = 0 \quad (2.24)$$

Como $\delta \hat{\mathbf{u}}^T \neq 0$, deslocamentos virtuais arbitrários, a Eq. 2.24 fica como:

$$\left(\int_V \widehat{\mathbf{B}}^T \mathbf{N}_\sigma dV \right) \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \alpha \left(\int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{F}_0 dV + \int_S \mathbf{N}_u^T \mathbf{T}_0 dS \right) = 0 \quad (2.25)$$

Fazendo:

$$\mathbf{B} = \int_V \widehat{\mathbf{B}}^T N_\sigma dV \quad (2.26)$$

$$\mathbf{b} = \int_V N_u^T \mathbf{F}_0 dV + \int_S N_u^T \mathbf{T}_0 dS \quad (2.27)$$

A Equação 2.25 pode ser escrita como:

$$\mathbf{B} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha \mathbf{b} \quad (2.28)$$

Note-se que, na Equação 2.28, as variáveis do problema a serem determinadas são as tensões nodais e o fator de colapso. Quando os elementos são considerados de tensão constante, a matriz N_σ é igual à matriz identidade I , o que conduz a:

$$\mathbf{B} = \int_V \widehat{\mathbf{B}}^T dV \quad (2.29)$$

2.5.2. Condições de Contorno

As condições de contorno precisam ser fornecidas para a solução do problema. Para nós com campos de velocidades prescritos $\delta \hat{\mathbf{u}} = \delta \hat{\mathbf{u}} = 0$, então, deve-se eliminar de \mathbf{B} e \mathbf{b} (Equação 2.28) as linhas correspondentes às velocidades prescritas.

2.5.3. Condição de Escoamento

Uma das condições para que o campo de tensões seja estaticamente admissível (requisito do teorema de limite inferior) é que ele satisfaça um critério de escoamento (Equação 2.30).

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (2.30)$$

2.5.4. Problema de Análise Limite

Das Equações 2.28 e 2.30, a solução do problema pela Análise Limite (AL) consiste em determinar o campo de tensões correspondentes a um fator α , que maximiza a carga que a estrutura pode suportar sem violar a condição de escoamento do material. O problema a ser resolvido consiste em um problema de otimização como é apresentado a seguir e cuja solução será mostrada no Capítulo 3 deste trabalho.

$$\max. f(\alpha) = \alpha \quad (2.31)$$

$$\text{st. } \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (2.32)$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{b} \quad (2.33)$$

2.5.5. Elementos Finitos Implementados

No presente trabalho foram implementados dois tipos de elementos finitos: o elemento quadrilateral de 4 nós em 2D e o elemento hexaédrico de 8 nós em 3D. Estes elementos são mostrados nas Figuras 2.7 (a) e (b). As funções de interpolação N_u utilizadas para interpolar as velocidades são as mesmas funções de interpolação utilizadas para interpolar deslocamentos na formulação convencional do MEF em deslocamentos.

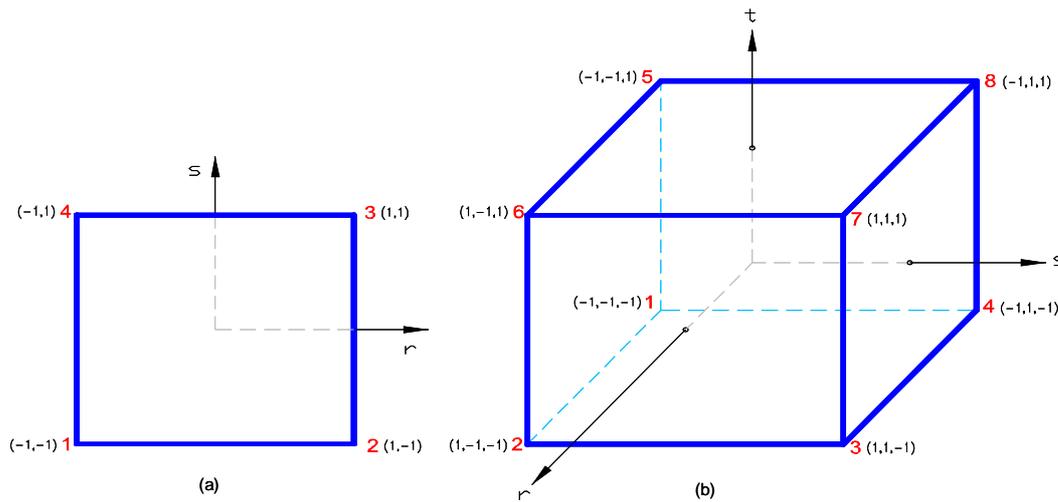


Figura 2.7 – Elemento finito: (a) quadrilateral (2D), (b) hexaédrico (3D).

$$N_{ui} = \frac{1}{4}(1 + r_i r)(1 + s_i s) \quad i=1, \dots, 4 \quad (2.34)$$

$$N_{ui} = \frac{1}{8}(1 + r_i r)(1 + s_i s)(1 + t_i t) \quad i=1, \dots, 8 \quad (2.35)$$

onde:

N_{ui} Funções de interpolação de velocidades

r, s, t Coordenadas paramétricas

r_i, s_i, t_i Coordenadas nos pontos nodais paramétricas

Para se interpolar os campos de tensões usa-se uma matriz identidade (Equação 2.36) que corresponde a se adotar um campo de tensões constante dentro do elemento.

$$N_\sigma = \mathbf{I} \quad (2.36)$$

A escolha desses campos de tensões foi baseada em estudos feitos em trabalhos anteriores (Gonzaga, 1997) (Farfan, 2000) e (Carrión, 2004).