



Mauro Artemio Carrión Pachás

**Análise Limite com Otimizador de Grande Escala
e Análise de Confiabilidade**

TESE DE DOUTORADO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil. Ênfase: Geotécnica

Orientador: Eurípedes do Amaral Vargas Júnior

Co-orientadores: Luíz Eloy Vaz

José Herskovits Norman

Rio de Janeiro, março de 2009



Mauro Artemio Carrión Pachás

Análise Limite com Otimizador de Grande Escala e Análise de Confiabilidade

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Eurípedes do Amaral Vargas Júnior

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Luiz Eloy Vaz

Co-Orientador-UFRJ

Prof. José Herskovits Norman

Co-Orientador-UFRJ

Prof. Luiz Fernando Marta

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Ivan Menezes

PUC- Rio

Prof. Aldo Duran Farfán

UENF

Prof. Silvia Almeida

UFG

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC–Rio

Rio de Janeiro, março de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Mauro Artemio Carrión Pachás

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Nacional de Engenharia (UNI-PERU) em 1996. Trabalhou como pesquisador no Centro Peruano Japonês de Investigações Sísmicas e Mitigação de Desastres CISMID em Lima-Perú no período de 1997 a 2002. Estudou mestrado na PUC-Rio, em Engenharia Civil, na área de Geotecnia, no período 2002.2-2004.1. Ingressou no curso de doutorado na PUC-Rio no período 2004.2, atuando na linha de Pesquisa Numérica. Análise Limite com Otimizador de Grande Escala e Análise de Confiabilidade.

Ficha Catalográfica

Carrión Pachás, Mauro Artemio

Análise Limite com Otimizador de Grande Escala e Análise de Confiabilidade / Mauro Artemio Carrión Pachás; orientador: Eurípedes do Amaral Vargas Júnior; co-orientadores: Luiz Eloy Vaz, José Herskovits Norman. - 2009.

188 f. : il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Incluí referências bibliográficas.

1. Engenharia civil – Teses. 2. Análise limite. 3. Método de elementos finito. 4. Otimização. 5. Escoamento. 6. GEOLIMA. 7. Confiabilidade. 8. Função de falha. 9. FORM. I. Vargas Júnior, Eurípedes do Amaral. II. Vaz, Luiz Eloy. III. Norman, José Herskovits. IV. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. V. Título.

CDD: 624

Para meus pais,
Juan Carrión e Marina Pachás,
pelo grande amor, confiança e exemplo..

Agradecimentos

Desejo expressar minha gratidão ao professor Eurípedes do Amaral Vargas Júnior, por ter-me convencido para fazer o curso de doutorado.

Aos professores Eurípedes do Amaral Vargas Júnior, Luíz Eloy Vaz e José Herskovits Norman pela orientação durante a realização deste trabalho.

Ao Professor Luiz Fernando Martha pela confiança e apoio.

Aos professores dos departamentos de Civil, Informática e Elétrica, pelos conhecimentos transmitidos em cada uma das disciplinas que cursei.

A meus pais, irmão, irmãs, meu primo Felix e a toda minha família, que sempre me apoiaram e incentivaram para a realização deste curso de doutorado.

À Mishel, pelo grande amor e compreensão, muito obrigado.

À Rita, secretária da pós-graduação, por sua atenção e disponibilidade.

À PUC-Rio, CAPES e CNPq pelos auxílios financeiros concedidos e ao TECGRAF/PUC-Rio pela oportunidade de poder trabalhar e estudar, sem a qual não teria sido possível realizar este estudo.

A todos os colegas do trabalho, do estudo e das peladas, muito obrigado pela convivência.

A Deus, porque sem a ajuda d'Ele nada acontece.

Resumo

Pachás, Mauro Artemio Carrión; Vargas Júnior, Eurípedes do Amaral; Vaz, Luíz Eloy e Herskovits, José Norman. **Análise Limite com Otimizador de Grande Escala e Análise de Confiabilidade**. Rio de Janeiro, 2008. 188p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver um otimizador eficiente de grande escala, que permita a aplicabilidade prática da Análise Limite Numérica pelo MEF, para resolver problemas reais da Engenharia Geotécnica. Para isto, foi desenvolvido um otimizador para o programa GEOLIMA (**GEO**technical **LIM**it **A**nalysis) (Carrión, 2004) baseado no algoritmo de Pontos Interiores, computacionalmente mais eficiente que os otimizadores comerciais existentes. Pelo fato das propriedades do solo serem de natureza aleatória, a possibilidade de aplicar Análise de Confiabilidade com a Análise Limite pelo método FORM em problemas geotécnicos é pesquisada também. Sendo a grande vantagem do método FORM a possibilidade de se aplicar para funções de falha quaisquer e variáveis com distribuição quaisquer. Inicialmente, são apresentados os fundamentos da teoria de Análise Limite e sua formulação numérica pelo MEF (Método dos Elementos Finitos). A seguir, é investigada a possibilidade de se usar otimizadores comerciais para resolver o problema matemático resultante da aplicação de Análise Limite com o MEF e são descritos os fundamentos teóricos do otimizador implementado baseado no algoritmo de Pontos Interiores. Um resumo dos fundamentos teóricos da Análise de Confiabilidade é apresentado. É descrito o processo de cálculo pelo método FORM e dois exemplos de aplicação são realizados. Finalmente, análises de diferentes problemas resolvidos com o otimizador implementado são apresentados indicando o grande potencial da Análise Limite Numérica, na solução de problemas reais da Engenharia Geotécnica.

Palavras-chave

Análise limite; método de elementos finitos; otimização; função de escoamento; GEOLIMA; confiabilidade; função de falha; FORM.

Abstract

Pachás, Mauro Artemio Carrión; Vargas Júnior, Eurípedes do Amaral; Vaz, Luíz Eloy e Herskovits, José Norman (Advisors). **Limit Analysis with Large Scale Optimizer and Reliability Analysis**. Rio de Janeiro, 2008. 188p. DrSc. These - Department of Civil Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work has, as its main objective, the development of an efficient and large scale optimizer, that allows the practical application of Numerical Limit Analysis (NLA) with Finite Element Method (FEM) to solve real problems in Geotechnical Engineering. For that purpose, an optimizer was developed for GEOLIMA (**GE**otechnical **LIM**it Analysis) program (Carrión, 2004), based on Interior Points algorithm, computationally more efficient than the existing commercial optimizers. Due to the fact that soils have random properties, the possibility to apply Reliability Analysis with Limit Analysis using the FORM method was also investigated. Initially, Limit Analysis theory was presented together with its numerical formulation using the FEM. In sequence, the use of commercial optimizers was investigated in order to solve the resulting mathematical problem. Subsequently, the theoretical foundations of the developed optimizer, based on the Interior Points algorithm were described. A summary of Reliability Analysis was also presented together with a description of computational procedures using FORM and two examples were developed. Finally, analyses of different problems solved with developed optimizer were presented. The obtained results demonstrated the great potential of Numerical Limit Analysis (NLA), in the solution of real problems in Geotechnical Engineering.

Keywords

Limit analysis; finite element method; optimization; yield function; GEOLIMA; reliability; failure function; FORM.

Sumário

1 INTRODUÇÃO	21
2 ANÁLISE LIMITE NUMÉRICA	23
2.1. Teoremas da Análise Limite	24
2.1.1. Campos de Tensões Estaticamente Admissíveis	24
2.1.2. Campos de Velocidades Cinematicamente Admissíveis	24
2.1.3. Teorema de Limite Inferior	25
2.1.4. Teorema de Limite Superior	25
2.2. Considerações na Análise Limite	25
2.2.1. Consideração de Plasticidade Perfeita	25
2.2.2. Considerações sobre Escoamento	26
2.2.3. Considerações sobre a Lei de Fluxo	28
2.3. Principio dos Trabalhos Virtuais	30
2.4. Critérios de Escoamento	30
2.4.1. Critério de Mohr-Coulomb	31
2.4.2. Critério de Drucker-Prager	33
2.5. Formulação Numérica da Análise Limite pelo MEF	35
2.5.1. Condição de Equilíbrio	36
2.5.2. Condições de Contorno	38
2.5.3. Condição de Escoamento	38
2.5.4. Problema de Análise Limite	39
2.5.5. Elementos Finitos Implementados	39
3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA ANÁLISE LIMITE	41
3.1. Otimizadores Matemáticos Testados	42
3.1.1. Otimizador Lingo	43
3.1.2. Otimizador Minos	47
3.1.3. Otimizador Lancelot	50
3.1.4. Comparação de Desempenho de Otimizadores Testados	52
3.2. Otimizador Implementado	54

3.2.1. Condições de Otimalidade	54
3.2.2. Algoritmo de Pontos Interiores	55
3.2.3. Inicialização	55
3.2.4. Direção de Busca	56
3.2.4.1. Técnica de deflexão	57
3.2.4.2. Técnica de relaxação-contração	58
3.2.4.3. Técnica Vetorial - Proposto	59
3.2.5. Comprimento de Passo	60
3.2.6. Atualização das Variáveis	61
3.2.7. Teste de Desempenho dos Algoritmos	62
3.2.8. Manipulação de sistemas lineares a serem resolvidos	63
3.2.8.1. Manipulação matricial global	64
3.2.8.2. Manipulação matricial por elementos	65
3.2.8.3. Solução direta sem manipulação - proposta	67
3.2.8.4. Teste de Desempenho das Manipulações	68
3.2.9. Resolvedores Implementados	75
3.2.9.1. Método dos gradientes conjugados (CG)	76
3.2.9.2. Teste de desempenho de resolvedores implementados	78
3.2.10. Resolvedor SAMG Testado	80
3.3. Melhora do desempenho	80
3.3.1. Tratamento de Matriz Esparsa	80
3.3.1.1. Formato CSR(Compressed Sparse Row)	80
3.3.1.2. Teste de desempenho de CG com tratamento da matriz esparsa	81
3.3.2. Precondicionamento	82
3.3.2.1. Escala Diagonal (DS)	83
3.3.2.2. Escala Simétrica (SS)	83
3.3.2.3. Fatoração Incompleta de Cholesky (ICF)	84
3.3.2.4. Pré-condicionadores mistos - proposto	85
3.3.2.5. Teste de Desempenho de Pré-condicionadores	85
3.4. Teste de desempenho do Otimizador Implementado	87
3.4.1. Teste com problema em 2D	87
3.4.2. Teste com problema em 3D	90

4 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE COM ANÁLISE LIMITE	93
4.1. Conceitos Fundamentais da Análise de Confiabilidade	95
4.1.1. Incertezas	95
4.1.2. Função de Falha	95
4.1.3. Função Densidade de Probabilidade Conjunta	97
4.1.4. Probabilidade de Falha	99
4.1.5. Confiabilidade	100
4.1.6. Índice de Confiabilidade	101
4.1.7. Espaço Reduzido	103
4.1.8. Distribuição Normal Equivalente	105
4.2. Métodos de Cálculo	107
4.2.1. Método FORM (First-Order Reliability Method)	112
4.2.1.1. Transformação de Variáveis	112
4.2.1.2. Pesquisa de Ponto de Projeto	115
4.2.1.3. Processo de Cálculo	117
4.3. Exemplos de Aplicação	118
4.3.1. Talude 2D	118
4.3.2. Talude Confinado 3D	122
5 APLICAÇÕES	125
5.1. Análise 2D - Talude Infinito Homogêneo	126
5.2. Análise 2D - Talude Infinito Heterogêneo	134
5.3. Análise 2D - Talude com Percolação	142
5.4. Análise 2D - Barragem de Terra	146
5.5. Análise 3D - Talude Confinado	151
5.6. Análise 3D - Depósito de Rejeito	155
6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	161
6.1. Conclusões	161
6.2. Sugestões para Futuras Pesquisas	165
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	166

A CONCEITOS ESTATÍSTICOS	171
A.1. Variáveis Determinísticas e Aleatórias	171
A.2. Espaço Amostral, Evento e Valor Observado	171
A.3. Medidas de Tendência Central	171
A.3.1. Momento estatístico de ordem m	172
A.3.2. Média aritmética	172
A.3.3. Características da média aritmética	173
A.4. Medidas de Dispersão da Variável Aleatória	173
A.4.1. Desvio	173
A.4.2. Momento estatístico central de ordem m	174
A.4.3. Desvio absoluto médio	174
A.4.4. Variância	174
A.4.5. Desvio padrão	175
A.4.6. Coeficiente de variação	176
A.5. Medidas de Correlação de Variáveis Aleatórias	177
A.5.1. Covariância	177
A.5.2. Coeficiente de correlação	178
A.6. Caracterização de Variáveis Aleatórias	180
A.6.1. Função Densidade de Probabilidade (PDF)	180
A.6.2. Função Distribuição de Probabilidade	182
A.6.3. Coeficiente de Inclinação de uma Distribuição	185
A.6.4. Coeficiente de Curtose	186
A.7. Esperança Matemática de uma Variável Aleatória	186

Lista de figuras

Figura 2.1 – Relação tensão deformação para solo real e ideal (Chen, 1975).	26
Figura 2.2 – Superfície de escoamento no espaço de tensões principais.	27
Figura 2.3 – Superfície de escoamento e vetor de deformação plástica.	29
Figura 2.4 – Superfície de escoamento, critério de Mohr-Coulomb.	32
Figura 2.5 – Critério de escoamento de Mohr-Coulomb 2D.	33
Figura 2.6 – Critério de escoamento de Drucker & Prager.	34
Figura 2.7 – Elemento finito: (a) quadrilateral (2D), (b) hexaédrico (3D).	40
Figura 3.1 – Problema para teste de otimizadores.	42
Figura 3.2 – Malhas: (a) 28, (b) 64, (c) 126, (d) 225, (e) 360, (f) 500 e (g) 750 elementos.	43
Figura 3.3a – Variação da memória usada pelo otimizador LINGO.	45
Figura 3.3b – Variação de número de iterações do otimizador LINGO.	45
Figura 3.3c – Desempenho do otimizador LINGO.	46
Figura 3.3d – Variação do fator de colapso obtido com LINGO.	46
Figura 3.4a – Variação da memória usada pelo otimizador MINOS.	48
Figura 3.4b – variação de número de iterações do otimizador MINOS.	48
Figura 3.4c – Desempenho do otimizador MINOS.	49
Figura 3.4d – Variação do fator de colapso obtido com MINOS.	49
Figura 3.5a – Comparação de uso da memória entre Lingo e Minos	52
Figura 3.5b – Comparação de número de iterações entre Lingo e Minos	52
Figura 3.5c – Comparação de desempenho entre Lingo e Minos	53
Figura 3.5d – Comparação de variação de fator de colapso, obtidos com Lingo e Minos.	53
Figura 3.6 – Técnica de deflexão.	57
Figura 3.7 – Técnica de Relaxação-Contração.	59
Figura 3.8– Técnica Vetorial - Proposta.	59
Figura 3.9 – Comprimento de passo s .	61
Figura 3.10 – Atualização da variável x .	61
Figura 3.11 Geometria do problema para teste de algoritmos (malha de 25 elementos).	62

Figura 3.12 – Memória requerida pela manipulação matricial global.	69
Figura 3.13 – Tempo empregado na manipulação e solução do sistema.	70
Figura 3.14 – Memória requerida para a solução do sistema.	71
Figura 3.15 - Tempo empregado na manipulação e solução do sistema.	71
Figura 3.16 - Memória requerida para a solução do sistema.	72
Figura 3.17 – Tempo empregado na solução do sistema.	73
Figura 3.18 – Memória usada pelas técnicas.	74
Figura 3.19 – Tempo empregado pelas técnicas.	75
Figura 3.20 – Algoritmo de Gradiente Conjugado pré-condicionado (Sandoval, 2006).	77
Figura 3.21 – Malhas: (a) 8, (b) 25, (c) 64, (d) 150, (e) 400 e (f) 676 elementos.	78
Figura 3.22 – Comparação do desempenho dos métodos implementados.	79
Figura 3.23a – Armazenamento da matriz esparsa (SMAILBEGOVIC et all, 2006).	81
Figura 3.23b – Produto de uma matriz esparsa A por um vetor d .	81
Figura 3.24 – Desempenho do método CG com tratamento da matriz esparsa CSR.	82
Figura 3.25 – Desempenho de CG com os pré-condicionadores implementados.	86
Figura 3.26 – Comparação de uso da memória pelos otimizadores.	88
Figura 3.27 – Comparação de número de iterações.	88
Figura 3.28 – Comparação do desempenho dos otimizadores.	89
Figura 3.29 – Variação de fator de colapso.	89
Figura 3.30 – Geometria da estrutura a ser analisada.	91
Figura 3.31 – Malha de elementos finitos (676 elementos e 945 nós).	91
Figura 3.32 – Mecanismo de colapso da estrutura obtido pelo programa GEOLIMA 2.0.	92
Figura 3.33 – Mecanismo de ruptura obtido a partir de ensaios em modelo físico em escala reduzida (Sterpi,1996)	92
Figura 4.1 – Função de falha.	96
Figura 4.2 – Função densidade de probabilidade conjunta (Melchers, 2002).	99
Figura 4.3 – Probabilidade de falha.	100
Figura 4.4 – Função densidade de probabilidade.	102
Figura 4.5 – Espaço original e espaço reduzido para uma variável.	104

Figura 4.6 – Espaço original e reduzido para duas variáveis.	105
Figura 4.7 – Funções densidade de probabilidade PDF.	105
Figura 4.8 – Funções distribuição de probabilidade CDF.	106
Figura 4.9 – Variáveis em coordenadas reduzidas: função de falha não linear.	110
Figura 4.10 – Espaço original e reduzido para duas variáveis.	116
Figura 4.11 – Fluxograma da Análise de Confiabilidade pelo método FORM.	117
Figura 4.12 – Malha de elementos finitos 2D (25 elementos com 36 nós).	119
Figura 4.13 – Zonas de plastificação no MPP(Most Probable Point).	120
Figura 4.14 – Superfície de falha no MPP.	120
Figura 4.15 – Malha de elementos finitos 3D (27 elementos com 64 nós).	123
Figura 4.16 – Zonas de plastificação no MPP.	123
Figura 4.17 – Superfície de falha no MPP.	124
Figura 5.1 – Talude Infinito homogêneo.	127
Figura 5.2 – Malha de elementos finitos (500 elementos e 561 nós).	127
Figura 5.3(a) – Zonas de plastificação (talude com material coesivo).	128
Figura 5.3(b) – Vetor de velocidades (material coesivo).	128
Figura 5.3(c) – Superfície de falha (talude com material coesivo).	129
Figura 5.3(d) – Mecanismo de colapso (talude com material coesivo).	129
Figura 5.4(a) – Zonas de plastificação (talude com material com atrito).	130
Figura 5.4(b) – Vetor de velocidades (talude com material com atrito).	130
Figura 5.4(c) – Superfície de falha (talude com material com atrito).	131
Figura 5.4(d) – Mecanismo de colapso (talude com material com atrito).	131
Figura 5.5(a) – Zonas de plastificação (talude com material maciço rochoso).	132
Figura 5.5(b) – Vetor de velocidades (talude com material maciço rochoso).	132
Figura 5.5(b) – Superfície de falha (talude com material maciço rochoso).	133
Figura 5.5(c) – Mecanismo de colapso (talude com material maciço rochoso).	133
Figura 5.6 – Talude infinito heterogêneo.	136
Figura 5.7(a) – Malha de elementos finitos 1 (100 elementos e 126 nós) .	136
Figura 5.7(b) – Zonas de plastificação (malha: 100 elementos e 126 nós).	137
Figura 5.7(c) – Superfície de falha (malha: 100 elementos e 126 nós).	137
Figura 5.8(a) – Malha de elementos finitos 2 (500 elementos e 561 nós).	138
Figura 5.8(b) – Zonas de plastificação (malha: 500 elementos e 561 nós).	138
Figura 5.8(c) – Superfície de falha (malha: 500 elementos e 561 nós).	139

Figura 5.9(a) – Malha de elementos finitos 3 (4500 elementos e 4681 nós).	139
Figura 5.9(b) – Zonas de plastificação (malha: 4500 elementos e 4681 nós).	140
Figura 5.9(c) – Vetor de velocidades (malha: 4500 elementos e 4681 nós).	140
Figura 5.9(d) – Superfície de falha (malha: 4500 elementos e 4681 nós).	141
Figura 5.10 – Geometria de talude.	143
Figura 5.11 – Malha de elementos finitos (200 elementos e 231 nós).	143
Figura 5.12(a) – Zonas de plastificação, sem considerar percolação.	144
Figura 5.12(b) – Superfície de falha sem considerar percolação.	144
Figura 5.12(c) – Vetor de velocidades sem considerar percolação.	144
Figura 5.13(a) – Zonas de plastificação, considerando percolação.	145
Figura 5.13(b) – Superfície de falha, considerando percolação.	145
Figura 5.13(c) – Vetor de velocidades, considerando percolação.	145
Figura 5.14 – Plano em planta do projeto (CISMID, 2002).	147
Figura 5.15 – Secção 3-3 Barragem de Terra (CISMID, 2002).	148
Figura 5.16 – Malha de elementos finitos (624 elementos e 689 nós).	148
Figura 5.17(a) – Zonas de plastificação.	149
Figura 5.17(b) – Superfície de falha.	149
Figura 5.17(c) – Vetores de velocidade.	149
Figura 5.18(a) – Zonas de plastificação.	150
Figura 5.18(b) – Superfície de falha.	150
Figura 5.18(c) – Vetor de velocidade.	150
Figura 5.19 – Malha de elementos finitos (8000 elementos e 9261 nós).	152
Figura 5.20(a) – Zonas que plastificam.	152
Figura 5.20(b) – Vetor de velocidades.	153
Figura 5.20(c) – Distribuição de campo de velocidades.	153
Figura 5.20(d) – Distribuição de campo de velocidades na seção longitudinal.	154
Figura 5.20 (e) – Mecanismo de colapso do talude.	154
Figura 5.21 – Topografia e limite do material de rejeito (CISMID, 1998).	156
Figura 5.22 – Modelo 3D da bacia sem material de rejeito.	157
Figura 5.23 – Material de rejeito.	158
Figura 5.24 – Malha de elementos finitos (2000 elementos e 2541 nós).	158
Figura 5.25(a) – Zonas de plastificação.	159
Figura 5.25(b) – Zonas de plastificação na seção longitudinal.	159

Figura 5.25(c) – Vetor de velocidades.	159
Figura 5.25(d) – Distribuição de velocidades.	160
Figura 5.25(e) – Distribuição de velocidades na seção longitudinal.	160
Figura A.1 – Interpretação gráfica de coeficiente de correlação.	179
Figura A.2 – Função densidade de probabilidade normal.	182
Figura A.3 – Função distribuição de probabilidade normal.	183
Figura A.4 – (a) Função de variável aleatória; (b) Função de ponderação; (c) Esperança matemática da função de variável aleatória.	188

Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Testes realizados com o programa Lingo.	44
Tabela 3.2 – Testes realizadas com o otimizador Minos.	47
Tabela 3.3 – Comparação da eficiência entre Lancelot e Minos (Bongartz et all, 1997).	51
Tabela 3.4 – Desempenho dos algoritmos implementados	63
Tabela 3.5 – Teste da manipulação matricial global.	69
Tabela 3.6 – Teste da manipulação matricial por elementos.	70
Tabela 3.7 – Teste da solução direta sem manipulação.	72
Tabela 3.8 – Comparação de resultados com as três técnicas de solução.	74
Tabela 3.9 – Comparação do desempenho dos métodos implementados.	79
Tabela 3.10 – Desempenho dos métodos com o tratamento da matriz esparsa.	82
Tabela 3.11 – Teste de pré-condicionadores implementados.	86
Tabela 3.12 – Resultados do teste em 2D do otimizador implementado.	87
Tabela 4.1 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha.	103
Tabela 4.2 – Coeficiente de correlação equivalente.	113
Tabela 5.1 – Propriedades de materiais e resultados da Análise Limite.	126
Tabela 5.2 – Problema de otimização e resultados da Análise Limite.	135
Tabela 5.3 – Propriedades de materiais e resultados da Análise Limite.	143
Tabela 5.4 – Propriedades dos materiais (CISMID, 2002).	148
Tabela 5.4 – Resultados da Análise Limite.	148
Tabela 5.5 – Propriedades dos materiais (CISMID, 1998).	157
Tabela A.1 – Grão de dependência das variáveis aleatórias.	179
Tabela A.2 – Funções densidade probabilidade (PDF) e de distribuição de probabilidade (CDF) (Lopes, 2007).	184

Lista de Símbolos

Na Análise Limite (AL)

$F(\sigma_{ij})$	Função de escoamento em termos de tensões
σ_{ij}	Campo de tensões
I_1	Primeiro invariante de tensor de tensões
J_2	Segundo invariante desviador
J_3	Terceiro invariante desviador
$\dot{\epsilon}_{ij}$	Velocidade de deformação total
$\dot{\epsilon}_{ij}^e$	Velocidade de deformação elástica
$\dot{\epsilon}_{ij}^p$	Velocidade de deformação plástica
$\dot{\lambda}$	Fator de proporcionalidade (escalar).
σ_1	Tensão principal maior
σ_2	Tensão principal intermédia
σ_3	Tensão principal menor
θ	Ângulo de Lode
ϕ	Ângulo de atrito do material
C	Coesão do material
k, α	Parâmetros do material (critério de Drucker-Prager)
c_o	Resistência à compressão uniaxial

No MEF

N_i	Função de interpolação
r, s, t	Coordenadas locais
r_i, s_i, t_i	Coordenadas locais nodais
σ	Vetor campo de tensões
$\hat{\sigma}$	Vetor campo de tensões nodais
\dot{u}	Vetor campo de velocidades
$\hat{\dot{u}}$	Vetor campo de velocidades nodais

$\dot{\epsilon}$	Vetor campo de velocidades de deformação
F_0	Força de volume inicial
T_0	Força de superfície inicial
a	Fator de colapso
\mathbf{B}	Matriz de equilíbrio
\mathbf{b}	Vetor de carregamentos nodais

Otimização

\mathbf{x}	Vetor das variáveis
λ, μ	Multiplicadores de Lagrange
n	Número de variáveis
m	Número de restrições de desigualdade
p	Número de restrições de igualdade
$f(\alpha)$	Função objetivo
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	Restrições de desigualdade
\mathbf{G}	Matriz de escoamento (diagonal)
\mathbf{S}	Matriz gradiente
\mathbf{H}	Matriz Hessiana
θ	Ângulo de deflexão

Confiabilidade

X_i	Variável aleatória i
$^j x_i$	j -ésimo valor observado da variável aleatória X_i
$^s \bar{X}_i^m$	Momento estatístico de ordem m da amostra
$^s \bar{X}_i$	Média da amostra da variável aleatória X_i
$^s X_i^m$	Momento estatístico central de ordem m da amostra
$^s X_i$	Desvio absoluto médio da amostra
$Var(^s x_i)$	Variância da variável aleatória X_i
σ_{x_i}	Desvio padrão da variável aleatória X_i
σ	Matriz desvio padrão
δ_{x_i}	Coefficiente de variação da variável aleatória X_i

$Cov(X_1, X_2)$	Covariância das variáveis aleatórias X_1 e X_2
\mathbf{S}	Matriz covariância
ρ_{x_j, x_k}	Coeficiente de correlação das variáveis aleatórias X_j e X_k
ρ	Matriz coeficiente de correlação
$p(x)$	Função densidade de probabilidade
$P(x_a)$	Função distribuição de probabilidade
$\Pr[X \leq x_a]$	Probabilidade de que a variável X seja menor ou igual a x_a
\mathbf{X}	Vetor de variáveis aleatórias
$F(\mathbf{X})$	Função de falha
\bar{F}	Média da função de falha
σ_F	Desvio padrão da função de falha
P_f	Probabilidade de falha
C	Confiabilidade
β	Índice de confiabilidade
Y	Variável aleatória reduzida
ϕ	Função distribuição de probabilidade normal padrão
Φ	Função cumulativa normal padrão
J	Jacobiano
\mathbf{L}	Matriz triangular inferior
∇	Operador diferencial
y^*	Ponto de pesquisa