Departamento de Matemática e NEAM (Núcleo de Estudo e Ação sobre o Menor)

PROJETO MATEMÁTICA
COMUNIDADE E UNIVERSIDADE

Número 10

Oficinas de Matemática para professores de 5ª série

Autores:
Gilda de La Rocque Palis
João Bosco Pitombeira
Alcilea Augusto
Maria Isabel Ramalho Ortigão

Colaboradores
Maria Lucia Fraga
Silvana Marini Rodrigues Lopes

PUC RIO

Matemática PUC-Rio

NEAM
NÚCLEO DE ESTUDO E AÇÃO SOBRE O MENOR

PROJETO MATEMÁTICA COMUNIDADE E

UNIVERSIDADE

Oficinas de Matemática para professores de 5ª série[1]

Autores:

Gilda de La Rocque Palis

João Bosco Pitombeira

Alcilea Augusto

Maria Isabel Ramalho Ortigão

Colaboradoras:

Maria Lucia Fraga

Silvana Marini Rodrigues Lopes

2017

---

[1] Atualmente, 6º ano.

Resumo: Este trabalho apresenta algumas atividades propostas a professores de 5ª série (6º ano atualmente), no âmbito de um Convênio entre o Departamento de Matemática da PUC-Rio e a SME (Secretaria Municipal de Educação) do Rio de Janeiro, no segundo semestre de 1993.

Divulgamos aqui um texto que apresentou uma visão da Matemática no Ensino Fundamental, àquela época, e o material de apoio às atividades desenvolvidas em quatro das oficinas realizadas.

Palavras chave: Matemática no Ensino Fundamental; Figuras Geométricas; Área; Perímetro; Decimais; Divisão.

SUMÁRIO

A MATEMÁTICA no ENSINO FUNDAMENTAL

INTRODUÇÃO

Ao longo de boa parte da História da Educação, a Matemática tem composto os currículos escolares como uma disciplina básica, logo depois da língua materna. Com o tempo, ela tem deixado de ser apenas um instrumento na formação do intelecto do aluno para se tornar também um recurso para compreensão da sociedade, sempre mais complexa e permeada pelo uso da ciência e tecnologia.

Um dos principais objetivos da inclusão da Matemática no nível fundamental é o de auxiliar o homem a pensar o seu cotidiano. Bem por isso, sua aprendizagem passa por hesitações, dúvidas e contradições que somente um trabalho de reflexão, de argumentação ou de discussão consegue superar, para tão logo surgirem outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições. É um constante ir e vir reforçando a ideia de que seu aprendizado não se processa de forma linear. Alguns conceitos aprendidos hoje serão compreendidos melhor amanhã. Esta é uma das justificativas de, normalmente, encontrarmos um mesmo conteúdo em várias séries num movimento em espiral. Algum aspecto levantado na discussão do mesmo tema ou de outro, alguma analogia, ou a simples convivência com as ideias ou mesmo só a maturação natural da aprendizagem podem trazer mais luz ao entendimento anterior.

A Matemática abrange um amplo espectro. Com suas origens na busca de soluções para problemas elementares do homem como contar suas ovelhas ou dividir suas terras cultiváveis, ela evolui no estudo de suas próprias estruturas chegando à Lógica Matemática, já na fronteira com a Filosofia. À grande maioria de nossos alunos o que realmente interessa é principalmente seu aspecto de *ferramenta,* não no sentido exclusivamente operatório, mas como instrumento para equacionar e, se possível, resolver problemas. A Matemática no Ensino Fundamental deve ajudar o sujeito a pensar, a organizar informações, buscando um processo que lhe permita manejar os instrumentos adequados à resolução de problemas num sentido amplo. Deve ajudá-lo a trabalhar com números, com sua representação visual – os gráficos, com suas relações, operações, com as formas e raciocínios da Geometria e ainda a ter intimidade com o campo abstrato da Álgebra e seus símbolos.

O PROCESSO ENSINO – APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Tendo em vista que o processo ensino-aprendizagem não se dá linearmente e que a divisão da matéria em tópicos é bastante artificial, tendo só o objetivo de atender a uma necessidade de graduação didática, é de extrema importância que os assuntos sejam revisitados em vários níveis e em diferentes contextos. Não se pode deixar exclusivamente por conta do estudante buscar as relações que existem entre os diversos temas. O aluno deve ser convidado com frequência a trabalhar diferentes assuntos ao mesmo tempo ou a resolver problemas desligados do contexto de um tópico específico. Por exemplo, uma boa estratégia nessa direção é intercalar o ensino de Geometria com o de Álgebra, trabalhando questões que integrem ambas as áreas. Servem de exemplo, problemas do tipo:

Para ocupar o centro de sua sala você precisa de um tapete retangular em que a altura seja igual a 2/5 da base e o perímetro seja de 3,82 m. Monte uma equação para achar a base e a altura desse retângulo e calcule sua área em centímetros quadrados.

Neste problema, entram conceitos de perímetro, área, fração, montagem e resolução de uma equação, operações com decimais e mudanças de unidades.

Ou

Escreva em ordem crescente (do menor para o maior):

$$\frac{1}{2}\ ;\ 12 \div 128\ ;\ 0{,}6 \times 0{,}2\ ;\ \frac{1}{5} \div 1{,}5\ ;\ 1\frac{1}{2} \div 0{,}5 - 10\ ;$$

$$\frac{1}{10} \times 0{,}25 \times 0{,}025\ ;\ 0{,}1 \div (0{,}11 - 0{,}1 - 0{,}001 - 0{,}1).$$

Exercícios deste tipo, desde que não sejam simples repetição de outros já vistos, fazem o estudante pensar no significado de cada expressão, ao invés de recorrer simplesmente à memória.

Na medida do possível, o desenvolvimento de cada tópico deve passar por três fases, na ordem apresentada, a saber.

PARA QUE SERVE?

Esta é a fase em que o estudante se convence de que o novo tema não é uma tarefa a mais, um "ponto" a mais para estudar e sim, uma ferramenta a mais que o torna mais forte e mais competente para pensar, equacionar e resolver problemas. Isto pode ser conseguido com o auxílio de um problema "disparador", cuja resolução fique mais simples depois da introdução do novo conceito.

Por exemplo, se o estudante for levado a resolver o seguinte problema:

Numa padaria, um forno assa bandejas com 35 pães e outro forno assa bandejas com 50 pães. Para assar 1400 pães, quantas bandejas de 35 e quantas de 50 pães serão necessárias?

Salta á vista a possibilidade de usar só formas de um dos dois tipos: seriam 28 formas de 50 pães ou 40 formas de 35. Mas, e se, por exemplo, for necessário usar os dois fornos, para economizar tempo ou combustível? Será preciso substituir bandejas de 50 pães por bandejas de 35 pães, sem desperdício.

O m.m.c. entre 50 e 35 é 350, o menor número de pães que se pode tirar de um tipo de forma e passar para outro, mantendo cheias todas as formas.

Seja x o número de bandejas de 50 pães e y o número de bandejas de 35 pães. O que queremos são as soluções da equação $50x + 35y = 1400$

Sabendo que sete bandejas de 50 pães correspondem a dez bandejas de 35 pães podemos chegar a todas as soluções, a saber:

$(x, y) = (28, 0)$; $(21,10)$; $(14, 20)$; $(7, 30)$ e $(0, 40)$.

Observação: O Texto Problemas do Primeiro Grau e Outros, divulgado no site do Maxwell PUC- Rio, na Série Projeto Matemática Comunidade e Universidade, contém vários problemas semelhantes ao mencionado acima.

QUAL O SENTIDO DOS NOVOS CONCEITOS E DOS PROCESSOS ENVOLVIDOS NO SEU DESENVOLVIMENTO?

Quando o conceito é mostrado ao estudante como sendo um agente simplificador já se pode esperar uma certa boa vontade e mesmo curiosidade para entender o que vem depois. Se assim não for, será preciso criá-las, talvez a poder de propaganda, enquanto o estudante não adquire o hábito de investigação e do exercício de sua curiosidade no ambiente didático. Ai, então, cada conceito e cada passo no processo de resolução devem ser justificados, levando em conta o nível de compreensão do estudante. Muitas vezes, a explicação não será entendida de pronto, mas a semente da ideia fica plantada até que germine. Essa defasagem de tempo precisa ser levada em conta pelo professor não somente em sala, mas também em provas ou demais avaliações.

AUTOMATIZAÇÃO.

Será ainda preciso trabalhar esta fase tendo em vista as duas anteriores? Embora não se possa prescindir do entendimento de cada passo, a automatização tem o seu papel na formação do estudante, na medida em que o liberta para ir adiante. Como pode um estudante entender o algoritmo da divisão se ainda tem dificuldades na tabuada de multiplicação ou na subtração? E como pode um estudante trabalhar bem com uma calculadora se não sabe fazer estimativas de cabeça ou não trabalha rapidamente com as operações entre as potências de 10? Como pode um estudante desenhar o gráfico de uma função se tem dificuldades com o cálculo numérico de expressões algébricas ou como poderá escolher bem uma escala adequada para descrever graficamente uma dada situação à mão ou com ferramentas digitais, se ainda trabalha vagarosamente com as frações? A automatização sem fundamento é pura perda de tempo, mas depois do conceito bem construído, ela age como compactador do novo patamar alcançado pelo estudante onde ele pode se firmar para galgar degraus mais altos.

No decorrer das três fases, é essencial a participação ativa do estudante. Além disso, o professor de Matemática deve ter sempre a preocupação de relacionar os conteúdos ensinados com as experiências e vivências do aluno sem, contudo, desprezar seu aspecto formativo.

AVALIAÇÃO

Papel importante na vida do professor e do aluno em nossas escolas, hoje em dia, é o das provas e outros instrumentos de avaliação do estado da arte no processo ensino - aprendizagem. Longe de poder focalizar o assunto em seu âmbito geral, cabem aqui algumas observações pertinentes ao desenvolvimento das atividades escolares dentro dos temas de Matemática. Sendo uma atividade que consome grande energia tanto do professor quanto do estudante é preciso canalizá-la para que produza benefícios ao processo.

Pode-se encarar a prova como um fenômeno que nos permita fazer diagnósticos sobre o estágio em que se encontra o estudante, em que seja possível perseguir os erros mais comuns ou abrir novos caminhos. A realização de uma prova e sua correção são momentos de comunicação direta entre professor e aluno.

Levando em conta a necessidade de amadurecimento dos conceitos e o caráter imediato das provas, as questões de uma prova devem ser mais simples do que aquelas geralmente dadas no decorrer do curso. É bom que elas focalizem os pontos realmente importantes da matéria, tendo em vista a marca que estas questões podem produzir no estudante. Sempre que possível, o aluno deve encontrar em cada prova: algum enunciado novo para aprender a pensar independentemente do professor, alguma questão conhecida para adquirir confiança e algum desafio para se dedicar mais. É uma boa ocasião para misturar assuntos ou dar problemas com mais de uma resposta.

Embora tais afirmações careçam de exemplos para serem mais bem entendidas, os exemplos fora do contexto do curso dizem, em geral, muito pouco, pois uma questão pode ser a abertura de um novo caminho hoje e amanhã será uma simples aplicação de alguma fórmula.

Exploração do erro no processo ensino-aprendizagem.

O erro, tanto o cometido em alguma resolução quanto aquele detectado em conversa com o estudante, é uma janela aberta ao professor para o interior do aluno. A compreensão da causa de um erro pode ser o começo de sua superação. Fatores de ordem psicológica podem impedir que o aluno expresse claramente suas dúvidas, apreensões ou mal-entendidos. Por isso, a localização de um erro pode se constituir em matéria prima de alto valor na interação professor-aluno. Assim é que o professor precisa estar preparado para lidar com o erro e com o aluno que o expressa, tanto do ponto de vista psicológico quanto do ponto de vista do conteúdo.

Do ponto de vista do conteúdo, é preciso considerar os erros acidentais e os erros persistentes. Dentre os erros persistentes, alguns podem ser considerados como obstáculos essenciais. São aqueles inerentes ao próprio conceito, como, por exemplo, o número zero; a própria humanidade demorou mais para criar o zero do que os outros algarismos; a numeração romana não tem o zero e muitos de nossos alunos têm bastante dificuldade em operar com o zero. Quanto aos números fracionários, os gregos da antiguidade não os consideravam como números e até hoje, muitos de nossos alunos pensam que estão errando se a solução de uma equação for uma fração. Para dar um exemplo na Geometria, os conceitos de área e perímetro também foram confundidos em priscas eras e até hoje confundem alguns de nossos estudantes. No reconhecimento de tais erros, a História da Matemática pode ser de extrema valia ao professor. Outros desses erros persistentes são gerados dentro do próprio sistema escolar. Hoje, é comum que nossos alunos saibam resolver uma equação, mas não saibam o que significa aquele $x = 3$ que obtiveram. Quando erros desse tipo aparecem com muita frequência, alguma coisa que veio antes está faltando. É preciso propor questões nas quais tais enganos venham à tona, corrigi-los no nível em que apareçam e também denunciá-los para que sejam evitados em níveis anteriores.

TÓPICOS

Os objetos de estudo da Matemática no nível fundamental são os números, as formas, as medidas que fazem a ligação entre os dois primeiros e, como instrumento de trabalho, os símbolos.

1. **Ao final da Pré-escola** (J.I. e C.A.)[2] seria bom que a criança tivesse já vivenciado atividades de:

[2] Atualmente, níveis da Educação Infantil.

Contagem inicial oral e escrita (até onde vai depender do interesse e das condições de contorno em que a criança viva).

Agrupamentos (de vários tipos, com material, desenhos ou com pessoas e em vários níveis, incluindo agrupamentos de grupos).

Algumas figuras (o cubo, o paralelepípedo, a esfera e o cone; o quadrado, o retângulo e o círculo, também de acordo com o interesse ou condições do ambiente e sem preocupação com a nomenclatura)

Algumas medidas de tempo, comprimento e dinheiro (também respeitados os interesses e condições do cotidiano da criança)

2. **Ao final do primeiro segmento**, seria bom que o aluno tivesse trabalhado os seguintes temas:

<u>Números</u>: conhecimento dos números naturais e racionais positivos, comparação, as quatro operações, tabuada e algoritmos, quer os números estejam escritos em forma decimal, quer em forma de fração. E, com menor prioridade: fatores, múltiplos, números primos.

<u>Geometria</u>: reconhecimento de sólidos e figuras geométricas mais usuais. Medidas de segmentos, perímetro e área do retângulo e do quadrado.

<u>Medidas</u>: conhecimento das unidades lineares mais utilizadas de comprimento, massa e capacidade e das unidades de tempo. Cálculo com essas unidades. Representação na reta de números naturais, gráficos de colunas ou de barras e gráficos setoriais, com dados inteiros positivos.

O essencial é que o aluno conheça bem os números naturais e suas operações, incluindo o significado de cada operação, sua tabuada e algoritmo, e tenha trabalhado bastante com resolução de problemas.

3. Ao final do 2º segmento, espera-se que o estudante tenha aprendido os seguintes tópicos:

<u>Números</u>: reforço do conhecimento anterior sobre números naturais e racionais. Dízimas periódicas. Números inteiros e racionais negativos e suas operações. Alguns irracionais: o número π e raízes de números inteiros. Potências com expoentes naturais, inteiros e racionais, raízes. Divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Aproximações e erros de arredondamento, estimativas, ordem de grandeza

e notação científica. Representação na reta, mudança de unidades, gráficos de colunas e gráficos setoriais, com dados racionais. Proporcionalidade: razões, proporções, porcentagens e juros.

Geometria: reforço do conhecimento dos sólidos mais comuns e figuras mais conhecidas e de suas propriedades. Calculo de perímetros e áreas incluindo circunferência. Volume de alguns sólidos. Ângulos, paralelismo e perpendicularismo. Construções geométricas com instrumentos de desenho. Congruência e semelhança. Teorema se Tales, Pitágoras e algumas de suas aplicações. Polígonos e mosaicos.

Álgebra e Lógica: cálculo com expressões algébricas. Equações e inequações do 1º e 2º graus. Algumas equações de grau mais alto. Sistemas lineares de equações do 1º grau. Jogos e estratégias de vitória.

Geometria Analítica: plano cartesiano e a relação entre operações algébricas e posição geométrica, envolvendo movimentos ou transformações como translação, simetria e reflexão. Funções do 1º e do 2º graus e seus gráficos. Inequações do 2º grau e sistemas lineares do 1º grau.

Trigonometria do triângulo: as relações trigonométricas.

OBSERVAÇÕES

A ausência de tópicos da Teoria dos Conjuntos se justifica por diversas razões. Em primeiro lugar, é uma teoria recente, que data do final do século XIX, proposta com a finalidade inicial de melhor entender os conjuntos infinitos. Logo, introduzir conceitos como o de números e de funções por meio de conjuntos, fere os critérios construtivistas ou epistemológicos. Por outro lado, o estudante não tem maturidade para avaliar a necessidade de introdução dos conceitos da Teoria dos Conjuntos, nem dispõe de exemplos que justifiquem esta necessidade. Isto pode levar o estudante a pensar que a Matemática se constitui de uma coleção de regras alienadas da realidade que o cerca, prejudicando, talvez por muito tempo, o esforço de mostrar a Matemática como ferramenta à disposição do homem. São vários os depoimentos de professores sobre a dificuldade de seus alunos entenderem que “conjunto” não é pacote, não tem invólucro, nem uma corda em volta, que o conjunto vazio é um só, não existindo um vazio de números e outro vazio de maçãs, por exemplo. É difícil também contar para o aluno porque não se pode falar em todos os conjuntos que têm 3 elementos, nem o nosso célebre dicionarista entendeu isto. Tanto que uma análise feita por professores da UFF (Universidade Federal Fluminense) em livros didáticos de Matemática encontrou uma grande quantidade de incorreções cometidas pelos autores justamente nos Conjuntos, provavelmente no esforço de tornar "concreto" um tema tão abstrato. Mas o maior problema em antecipar o ensino de Conjuntos, a nosso ver, é a ausência, dentro daquilo que se ensina no nível fundamental, de exemplos em que essa teoria tenha um papel relevante.

Em contraposição foram incluídos alguns tópicos que normalmente não são oferecidos nesse nível, mas que são de muita utilidade. Os gráficos de coluna podem ser trabalhados desde os primeiros anos de escola, no âmbito dos números naturais. Jogos, problemas que envolvam puramente raciocínios lógicos, transformações geométricas no plano cartesiano, o uso da calculadora – sem prejuízo, é claro, do conhecimento automático da tabuada e dos algoritmos para contas com 2 ou 3 dígitos – o cálculo mental, aproximações e estimativas são alguns destes temas.

No desenvolvimento de cada tópico, é de suma importância a resolução de problemas. O problema tem vários papéis no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Começa por ser um bom modo de apresentar um novo tema, seria o problema "disparador", quando for possível propor aos alunos um problema cuja solução seja facilitada pela introdução do novo conceito. Problemas que envolvam situações do cotidiano mostram a aplicabilidade da Matemática. A resolução de problemas apresenta ainda a vantagem de ser uma imitação do trabalho do cientista dando ao estudante a oportunidade de fazer suas conjecturas e tentar prová-las ou de comparar diferentes soluções propostas por outros colegas, além da possibilidade de trabalhar independentemente de um determinado capítulo do livro ou tema específico do programa. Com advento dos computadores e o desenvolvimento maior da Matemática finita, ganham relevo os problemas de contagem, que não precisam esperar pela Análise Combinatória do 2º grau, podendo começar por simples problemas multiplicativos ou mesmo de contagem direta.

1ª Oficina de Matemática para professores da 5ª série Novembro de 1993.

Figuras Geométricas

Antes de estudar as figuras e os sólidos geométricos, vale lembrar que as origens da Geometria, como o próprio nome indica (do Grego Geo = Terra e Metron = que mede), estão ligados ao objetivo de estudar e medir pedaços da Terra. Com este intuito, ela se desenvolveu definindo figuras tão próximas daquelas encontradas na natureza quanto possível, porém um pouco mais simples e regulares a fim de poder estudá-las, medi-las, identificar propriedades, compará-las, etc.

Vários são os caminhos possíveis para o ensino da Geometria. Durante muito tempo, a Geometria foi apresentada na forma dedutiva, iniciando já nas primeiras aulas com os conceitos primitivos, em seguida os postulados e axiomas, as primeiras definições e uma sucessão de teoremas.

Com o surgimento da Matemática Moderna, o ensino da Geometria sofreu mudanças. Alguns autores procuraram algebrizá-la, estudando-a vetorialmente. No Brasil, a mudança no ensino da Geometria alterou a linguagem, passando-se a usar, por exemplo, “figuras congruentes” no lugar de “figuras iguais”, “ângulos” como “união de semi-retas”, “triângulos” como “união de segmentos de reta”. Houve também uma preocupação maior com a precisão e a coerência dos símbolos e das representações.

A GEOMETRIA ENTRE NÓS NAQUELA OCASIÃO

Atualmente, observa-se que os alunos, na sua grande maioria, alcançam a 5ª série[3] com uma grande deficiência no aprendizado da Geometria, devido ao fato de que os alunos não são habituados a “pensar” geometricamente desde as primeiras séries do 1º grau. Como já dissemos, ênfase deve ser dada, nesses estágios iniciais, ao aspecto experimental da

[3] Atualmente, 6º ano.

Geometria. O uso de modelos concretos e atividades lúdicas é um valioso auxílio ao professor e esperamos que esse modesto trabalho tenha alguma utilidade para os alunos dos prezados colegas.

ERRANDO TAMBÉM SE APRENDE

São erros comuns no estudo de quadriláteros:

- Dificuldades do aluno em identificar os elementos da figura, como lados, vértices, diagonais, ângulos.
- Confusão que o aluno faz da figura plana com uma das faces do sólido geométrico correspondente, como por exemplo, chamar o cubo de quadrado ou vice versa.
- O aluno não distingue com clareza figuras similares que possuem propriedades comuns, tais como quadrado e retângulo ou quadrado e losango.
- O aluno comete um erro de Português quando chama o losango de "losângulo".
- O aluno tem dificuldade em identificar figuras que não estão na posição padrão, isto é, se for aplicada uma rotação a um quadrado, o aluno não saberá distingui-lo de um losango, por exemplo.

Para tentar corrigir tais enganos devemos trabalhar a Geometria experimentalmente, usando materiais concretos (recortes e colagens, papel quadriculado, cartolina, dobraduras, palitos de sorvete, canudinhos de refrigerantes, etc.) e também os instrumentos de desenho (régua, compasso, par de esquadros, transferidor). Cabe uma observação geral a respeito do desenho e do material concreto: embora eles sirvam de ilustração para o ensino de alguns tópicos, os conceitos da Matemática são sempre ABSTRATOS, e qualquer analogia com algum material concreto será sempre relativa e, muitas das vezes, bastante "grosseira". Não se trata de deixar de usá-los, mas usá-los com cuidado e prevenindo sempre nosso estudante. Por exemplo, uma folha de caderno não é um retângulo: ela pode ter a forma de um retângulo, mas ela tem espessura, muito pequena em relação à largura e ao comprimento, mas tem. Além disso, a folha se curva e assume outras formas no espaço. Não existem retângulos "concretos".

A aprendizagem da Geometria deve iniciar-se nos primeiros anos do nível Fundamental, através da exploração sensorial no próprio corpo e do meio ambiente, com o objetivo de que a criança aprenda a reconhecer formas e a relacionar figuras. Mais tarde seriam trabalhadas as medidas, comparando diferentes objetos e, nessas comparações, descobrindo as propriedades das figuras (paralelismo, perpendicularismo, equivalências, etc.).

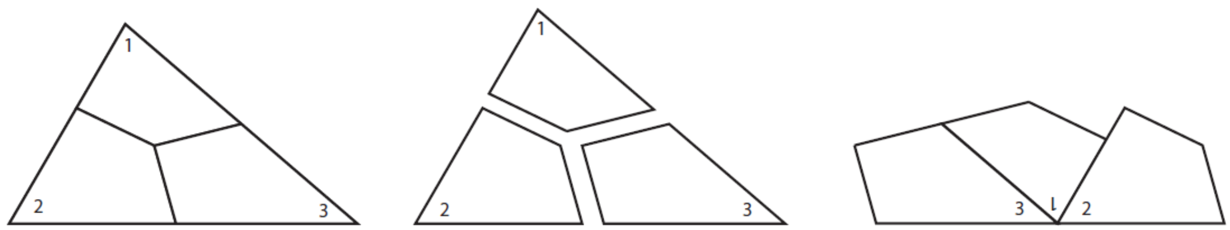
Para iniciação da Geometria Espacial, caixas e embalagens de formas diversas podem ser utilizadas pois, com a planificação das mesmas recaímos nas figuras planas, cujas propriedades já são conhecidas.

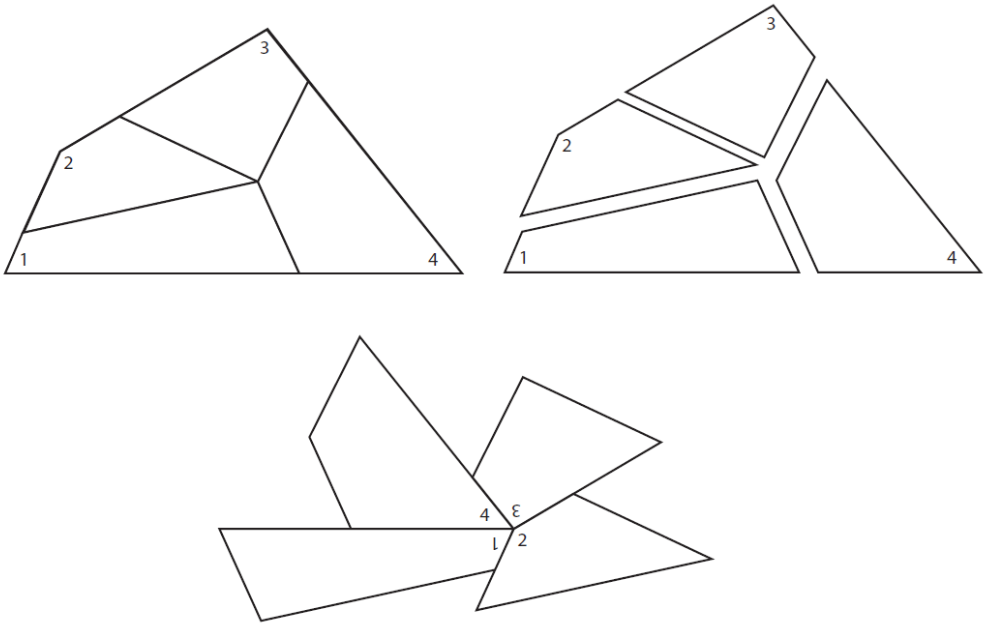
Num trabalho interdisciplinar com Artes Cênicas e Plásticas, o professor poderá organizar peças teatrais ou jograis em que os personagens sejam figuras geométricas que através de diálogos ou declamações exponham suas principais propriedades geométricas. Atividades lúdicas também são de grande valia para o ensino da Geometria, como, por exemplo, o uso do Tangram e de quebra-cabeças com peças de formas geométricas.

Utilizando dobraduras podemos “materializar” linhas e ângulos, explorando as suas propriedades tais como paralelismo, perpendicularismo, ângulos retos, agudos, obtusos, de meia volta, de volta inteira, bissetriz etc.

Um leque ou uma tesoura também se constituem num valioso auxílio para mostrar os diversos tipos de ângulos, permitindo inclusive aumentar ou diminuir a abertura, facilitando a compreensão do que é medida de ângulo.

Podemos levantar a conjectura de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer seja igual a 180° e que a dos quadriláteros seja 360°, através de recortes e colagens, como mostram as figuras a seguir.





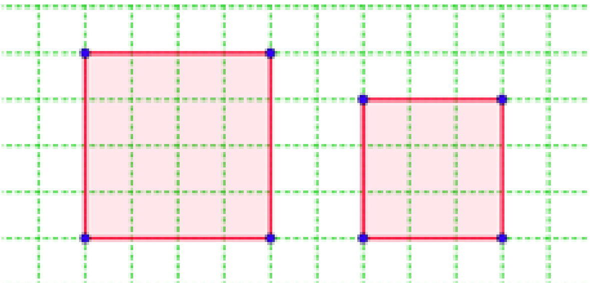
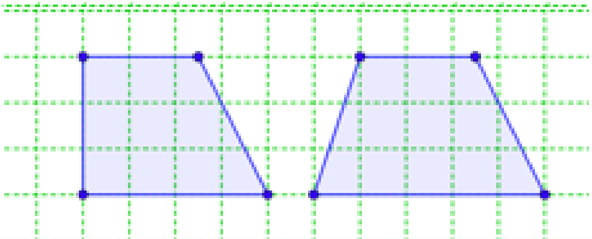
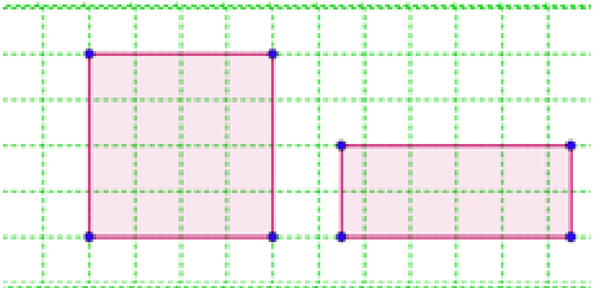
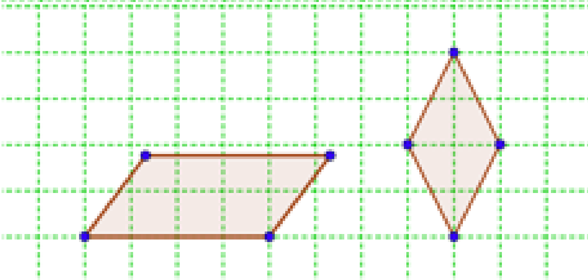
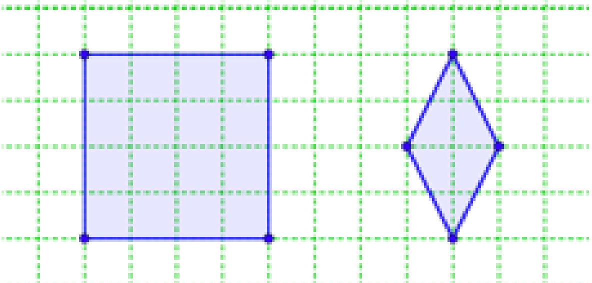
Resultados que serão, mais tarde, comprovados por meio de argumentos lógicos.

Sugestões de atividades

1) Como se chama o quadrilátero:

   a) Que possui os lados iguais?
   b) Que possui somente um par de lados paralelos?
   c) Que possui os quatro ângulos iguais a 90° ?
   d) Que possui as diagonais iguais cortando-se ao meio?

2) Complete a tabela com o que se pede:

Figuras Geométricas	Características em comum	Diferenças
		
		
		
		
		

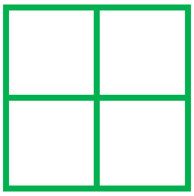
3) a) Desenhe um quadrilátero com quatro lados iguais que não seja um quadrado. Qual o seu nome?

b) Desenhe um quadrilátero com quatro ângulos iguais que não seja um quadrado. Qual o seu nome?

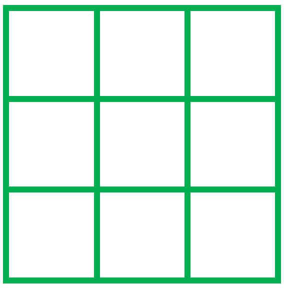
c) Desenhe um quadrilátero que tenha somente dois ângulos retos. Qual o seu nome?

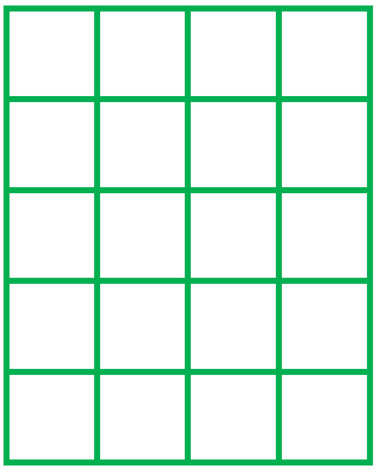
d). Desenhe um quadrilátero cujas diagonais cortam-se ao meio, mas não são iguais.

4) Na figura quadriculada abaixo existe um total de 5 quadrados: um quadrado de 2 por 2 e 4 quadrados de 1 por 1.

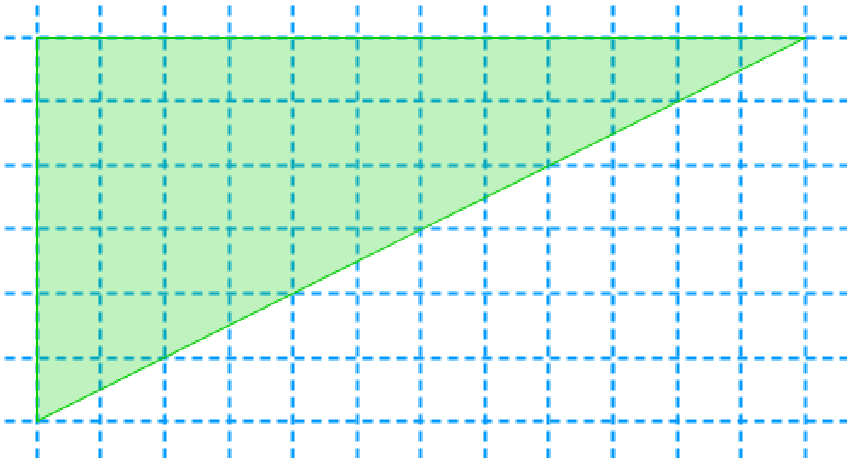


Descubra quantos quadrados existem nos quadriculados a seguir:





5) a) Desenhe, em papel quadriculado, quatro triângulos retângulos iguais ao da figura a seguir.



b) Recorte-os.

c) Agora, desenhe um quadrado em papel quadriculado. A medida do lado do quadrado deve ser igual à medida do lado menor do triângulo retângulo que você recortou.

d) Recorte também esse quadrado. Você construiu um quebra-cabeça com 5 peças.

5.1) Construa com duas peças do seu quebra-cabeça:

- Um paralelogramo
- Um retângulo

5.2) Registre as soluções encontradas em papel quadriculado.

5.3) Com três peças de seu quebra-cabeça, forme:

- Um paralelogramo
- Um retângulo.

5.4) Registre as soluções encontradas em papel quadriculado.

5.5) Utilizando as cinco peças construa um único quadrado e faça um desenho no papel quadriculado mostrando a solução encontrada.

5.6) Utilizando cinco peças, tente formar figuras diferentes e registre-as em papel quadriculado.

2ª Oficina de Matemática para professores da 5ª série
Novembro de 1993

Áreas e Perímetros

A distinção entre áreas e perímetros é um obstáculo no processo ensino-aprendizagem detectado por vários professores, no qual se repete um fenômeno já conhecido dos educadores: é difícil para nosso aluno compreender, mas foi difícil também desde suas origens para humanidade. Vemos isto com clareza num trecho do historiador Sir Thomas Heath, extraído do volume II de sua obra "*A History of Greek Mathematics*" (pp. 206-207) Traduzimos esse trecho que faz parte do capítulo em que ele fala de figuras isoperimétricas*.*

"Mal-entendidos neste assunto eram frequentes entre não matemáticos. Conta-nos Proclos sobre descrições de países, em que os autores inferiam o tamanho das cidades a partir de seus perímetros; menciona também que certos membros de sociedades comunitárias de seu tempo fraudavam seus companheiros, distribuindo-lhes terras de maior perímetro, mas área menor do que os lotes que tomavam para si, de forma que, enquanto adquiriam uma reputação de grande honestidade, eles, de fato, ficavam com uma produção maior do que sua quota. Diversas observações de autores antigos mostram como era comum este mal-entendido. Tucídides avalia o tamanho da Sicília de acordo com o tempo gasto para circumnavegá-la. Em torno de 130 A.C., Políbio observou que havia pessoas que não podiam entender que acampamentos de mesma periferia tivessem capacidades diferentes. Quintilhano tem uma observação parecida e Cantor pensa que ele tinha em mente os cálculos de Plinio, que compara o tamanho de diversas partes da Terra, somando seus comprimentos a suas larguras."[4]

---

[4] N.T. Proclos, historiador e filósofo grego, que nasceu em Constantinopla e viveu no século V da era cristã. Tucídides, historiador ateniense que viveu no século V, A.C.. Políbio, historiador grego que viveu no século II A.C.. Quintiliano, orador romano, que nasceu na Espanha e viveu no século I da era Cristã. Moritz Cantor, alemão, historiador da Matemática, que viveu no final do século XIX e início de XX; não confundir com Georg Cantor, criador da Teoria dos Conjuntos. Plinio, escritor romano do século I da era cristã.

Convém ressaltar alguns pontos:

Distinção entre dimensão 1, 2 ou 3: retas e curvas têm dimensão 1, planos e superfícies têm dimensão 2 e o espaço e os sólidos têm dimensão 3. Um cubo "maciço" tem dimensão 3, cada uma de suas faces, que é um quadrado "cheio" tem dimensão 2 e suas arestas têm dimensão 1. Uma esfera, ou seja, uma bola "maciça" tem dimensão 3, o círculo "cheio" tem dimensão 2, enquanto uma circunferência (só o contorno) tem dimensão 1. Em geral, se uma figura tem contorno, esse contorno tem uma dimensão a menos que a própria figura. De certa forma, a dimensão está ligada ao número necessário de coordenadas para localizar um ponto na figura.

Das figuras de dimensão1, procura-se calcular o comprimento e quando essa figura for o contorno de outra, esse comprimento se chama "perímetro" ("Peri" do grego, significa "em volta de" ou "contorno", como em periferia, e "metro" significa "que mede", como em termômetro). Das figuras de dimensão 2, procura-se calcular a "área" e daquelas de dimensão 3, os sólidos, procura-se calcular o volume, que não será objeto de estudo neste texto. A dificuldade que aparece no estudo das figuras de dimensão 2, para distinguir área de perímetro, volta a acontecer no Ensino Médio, quando se estudam os sólidos, seu volume e a área de sua superfície.

A palavra área significa, ora o espaço ocupado por uma superfície, ora a medida deste espaço. Neste texto, a palavra área será usada com o sentido de medida.

Nossos alunos, em geral, entendem bem o que seja medir um segmento comparando-o com uma unidade de comprimento, mas o mesmo não acontece com as unidades de área. A cada unidade de comprimento corresponde uma unidade de área que é a área do quadrado de lado igual a uma destas unidades.

Lembramos que mesmo a medida de um comprimento pode ser bastante complicada quando a medida for um número irracional ou do comprimento de uma curva, mas, em geral, no Ensino Fundamental não vale a pena falar nestas dificuldades ainda.

Para responder à questão Prá que serve? basta pedir aos alunos que tirem as medidas da casa onde moram para conferir o IPTU ou para cercar seu terreno.

Errando também se aprende

São erros comuns neste assunto: confusão entre área e perímetro, confusão entre as fórmulas para diferentes figuras, confusão entre unidades.

A confusão entre área e perímetro, como foi visto, tem suas raízes profundas, requerendo um carinho especial do professor. As outras duas talvez sejam resultantes de distorções no processo ensino-aprendizagem, em que regras são decoradas sem entendimento prévio. Estas distorções precisam ser sanadas o quanto antes.

Para superar estas e outras dificuldades, não existe um modo único ou a melhor maneira. Depende de cada turma e de cada momento. Algumas delas, entretanto, já deram certo e podem ser adaptadas pelo professor a cada situação particular. Citamos algumas destas:

– Trabalhar áreas antes de fórmulas: comparar áreas de diferentes figuras entre si. Recortes e composições são muito bons para isso.

– Trabalhar medida, tanto de comprimento como de área com unidades não padronizadas, antes de usar as unidades convencionais. O papel quadriculado é muito bom para isso e o livro *Medindo comprimentos* (Nilson José Machado, da Coleção *Vivendo a Matemática, da* editora Scipione 1987) tem ótimas ideias, além de ser de leitura própria para o estudante no início do segundo segmento do Ensino Fundamental.

– Trabalhar, sempre que possível, perímetro e área ao mesmo tempo, incluindo algumas aplicações como forrar uma sala e arrematar com um cordão ou azulejar uma parede e arrematar com um friso ou usar um terreno para cercar e plantar, etc.

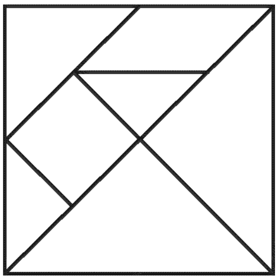
– Construir com os estudantes a fórmula para o cálculo da área do retângulo, lembrando de incluir o caso em que os lados tenham medida fracionária. Esta é uma boa oportunidade de trabalhar juntas, Geometria e Aritmética, medidas e frações.

– Deduzir as outras fórmulas por meio de recortes.

– Deduzir com os estudantes as regras de mudança de unidades, a partir de experiências com unidades não padronizadas.

E para os alunos ...

1. O Tangran é um quebra-cabeça formado por sete peças, como indica a figura a seguir. Ele é formado por cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo. As peças do Tangran são obtidas por uma decomposição do quadrado.



A primeira atividade que sugerimos é a construção de um Tangran, a partir de um modelo desenhado num papel quadriculado e que o estudante deva ampliar e, então, recortar.

2. Com as peças do Tangran, construir quadrados, a partir do uso de 2 peças, e depois com 3 e assim por diante, até chegar a 7 peças. Em cada caso, anotar o número de soluções possíveis.

3. Considerando como unidade de área a peça quadrada, calcular a área de cada um dos quadrados construídos no exercício anterior.

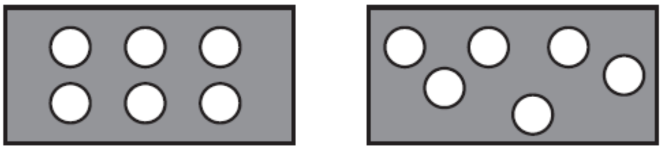
4. Considerando, ainda a peça quadrada como unidade de área, montar, com as peças do Tangran:

a) um triângulo de área 1

b) um triângulo de área 4,5

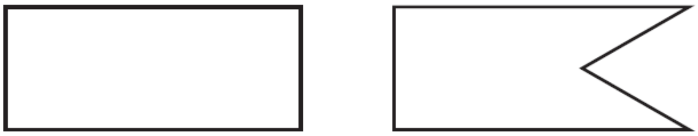
c) um retângulo de área 4.

5. Observe as duas placas de madeira, do mesmo tamanho e espessura, onde, em cada uma delas, foram feitos 6 furos iguais, como na figura:



Em qual das duas sobrou mais madeira e por quê?

6. Para cercar os terrenos das figuras abaixo, em qual deles você vai usar mais arame?



7. Uma sala retangular vai ser ladrilhada com um dos dois tipos de ladrilho abaixo desenhados.

Em qual dos dois casos você precisará de menor quantidade de ladrilhos? Por quê?

8. Com 8 palitos você pode formar várias figuras. Qual a de maior área?

9. Tire as medidas de sua sala de aula e desenhe uma planta em escala. Faça os cálculos para uma reforma na sala em que você troque o piso, o rodapé e pinte toda a sala, sendo um o preço da pintura de portas e janelas e outro o preço da pintura do teto e das paredes.

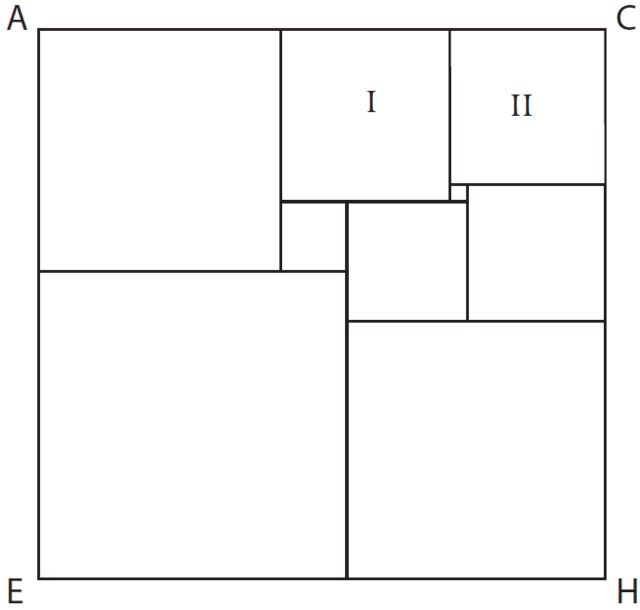
10. Você deu 5 voltas em torno de uma praça. O que você deve multiplicar por 5 para saber quanto andou, o perímetro ou a área da praça?

11. Invente um problema cuja resolução exija que se multiplique a área da escola por 5.

12. Invente um problema cuja resolução exija que se multiplique o perímetro da escola por 5.

13. A figura a seguir apresenta uma partição de um quadrilátero em quadrados. A área do quadrado I é 81 unidades e a do quadrado II é 64 unidades. Use esta informação para determinar o comprimento e a largura do quadrilátero ACHE.

Pinte 4 quadrados cujas áreas formem uma proporção, dê nomes a estes quadrados e escreva a proporção referente às suas áreas.



3ª Oficina de Matemática para professores de 5ª série.
Novembro de 1993

Números Decimais

Quando os MEIOS se encontram
Desaparece a FRAÇÃO
E se acharmos a UNIDADE
Está resolvida a QUESTÃO

Tom Jobim

Com o advento das calculadoras e computadores, a notação decimal ganha destaque sobre as frações. Nas atividades comuns do dia a dia, em geral, não se lida com frações, mas só com números decimais e aqueles com poucas casas depois da vírgula.

A notação decimal é uma extensão natural do nosso sistema de numeração aos números não inteiros, prosseguindo com a divisão por 10, de uma casa para a seguinte à direita. Desta forma, acrescentam-se à parte inteira frações cujos denominadores são potências de 10 e os numeradores estão entre 0 e 9. Escreve-se somente o numerador, sendo o denominador indicado pela posição do algarismo, analogamente ao que acontece nos inteiros. A separação entre a parte inteira e a fracionária se faz, em alguns países e no Brasil, por meio de uma vírgula e noutros países por um ponto. Nas calculadoras, em geral, ela se faz por meio do ponto.

É importante observar que tanto no sistema de numeração posicional para os inteiros quanto nas frações ou na escrita decimal para os racionais, tudo se reduz a mudanças de unidades. Inteiros, dezenas, décimos, quintos, etc. são outras unidades múltiplas ou submúltiplas da unidade de partida. Daí a importância do aluno entender p'rá valer a mudança de unidades, mesmo aquelas não padronizadas e, de preferência, antes mesmo das padronizadas.

Embora a notação decimal seja a mais utilizada, a Matemática não pode prescindir das frações para escrever os números racionais, pois existem aqueles cujo desenvolvimento decimal é infinito, as chamadas dízimas periódicas, como por exemplo

$$1/3 = 0{,}333... \quad \text{ou} \quad 1/7 = 0.1428571428571...$$

E, mesmo entre aqueles de desenvolvimento finito existem os que demandam muitas casas, como por exemplo

$$(1/2)^{15} = 0.000030517578125.$$

Além disso, ainda que se considere um número bem grande de casas decimais, equações simples, como $3x - 2 = 0$, não têm solução no mundo dos racionais com número finito de casas decimais.

As operações com decimais levantam problemas de aproximações e erros de arredondamento, o que precisa ser levado em conta nos nossos programas desde o Ensino Fundamental.

Números muito grandes ou muito pequenos, cujo desenvolvimento decimal demanda muitos dígitos podem ser melhor entendidos e manipulados em notação científica. Em geral, a introdução desta notação é feita pelo professor de Ciências, mas este é um tema que enriquece bastante as aulas de Matemática. Trata-se de escrever o número da seguinte forma: escreve-se um número entre 1 e 10 multiplicado por uma conveniente potência de 10. Por exemplo,

1 Angstrom é igual a 0.000 000 1 mm, escreve-se 1.10^{-7} mm,

ou o movimento da bolsa em um dia foi de aproximadamente

43 bilhões de “cruzeiros reais” ou $4{,}3 \cdot 10^{10}$.

Escreve-se, em geral, esse número com 1 ou 2 casas decimais só, o que exige, muitas vezes, que se considere uma aproximação do número dado. Observe-se que se um número tem muitos dígitos, os últimos deles têm um valor relativo muito menor do que os primeiros, o que permite as aproximações em que só os primeiros apareçam, daí a vantagem da notação científica. Por exemplo, para asfaltar uma estrada de aproximadamente 430 km, de que adianta saber que o comprimento exato seria 428.123,459 m? Qual o significado real destes 9 mm na estrada?

Errando também se aprende

A primeira grande dificuldade com os racionais fica mais visível na notação decimal do que na das frações: o número racional não tem sucessor. Os racionais são ordenados, mas não são discretos (estão muito “juntos”). É possível dizer se um racional é maior ou menor do que outro, mas não há sucessor ou antecessor de um número racional. Outra dificuldade é a ideia de que entre dois números racionais há infinitos números (racionais ou irracionais). A ideia de que os números inteiros não acabam, são infinitos, é acessível a estudantes desse nível, mas, na grande maioria, eles não têm ainda maturidade para aceitar o infinito limitado. Custam a “enxergar” que entre 0,3 e 0,4 existem infinitos racionais. Este é um problema inerente ao próprio conceito e a História da Matemática já aponta para isso. Os números racionais não eram considerados como números na Grécia antiga. Ao invés de dizer que a medida de um segmento era de 1,5 unidades, eles diziam que a medida deste segmento estava para a unidade assim como o número 3 estava para o número 2.

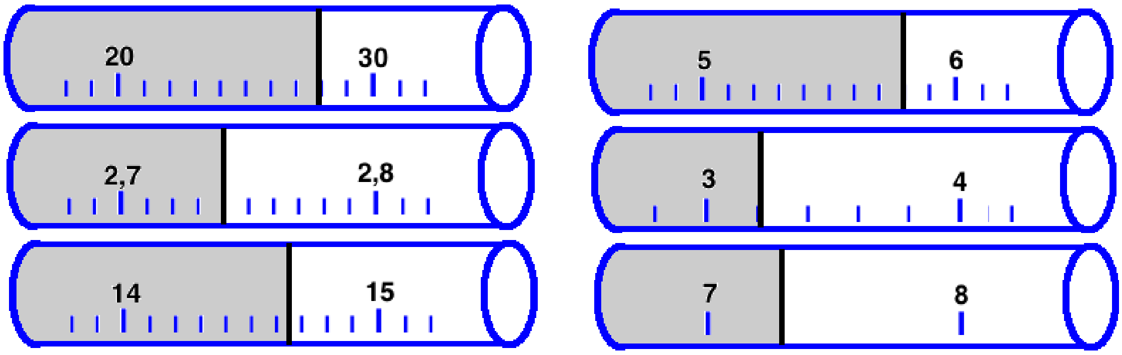
O aluno tem dificuldades com os decimais na reta numérica. Nossa sugestão é para que, desde os naturais, se trabalhe a reta numérica com unidades diferentes e com valores entre 10 e 20, ou entre 200 e 300, etc. A Linha do tempo, para a vida de uma pessoa ou de um país ou de compositores famosos, escritores ou matemáticos, ajuda muito nisso. Começando pelos naturais, as dificuldades se distribuem: é fácil entender os números naturais e a dificuldade fica só por conta das subdivisões e estimativas. Por exemplo, numa escala em que se marquem os números 100 e 200, pedir ao aluno que marque os números 150, 185, 128, ou em que se marquem 1000 e 2000, pedir a ele que marque 300, 450, 870, 128, ou em que se marquem 1000 e 2000, pedir a ele que marque 300, 450, 870, 125 e 678. Daí para os racionais é um salto menor e, outra vez, fica evidente que se trata de uma mudança de unidade.

Dicas para o Professor

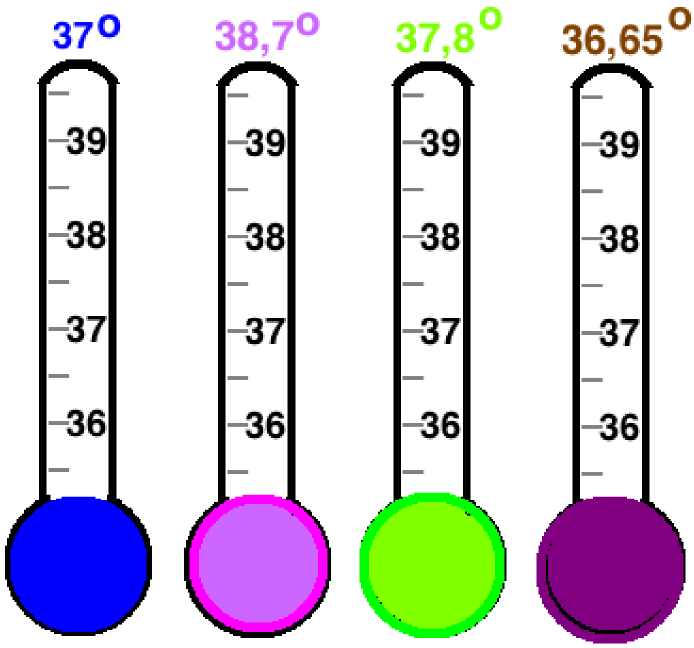
1. Propor uma divisão de 53 caixas por 4 pessoas: as caixas estão em 5 pacotes de 10 caixas cada e 3 vêm avulsas. Primeiro os pacotes não podem ser desmanchados, depois os pacotes podem ser desmanchados, mas as caixas não podem ser abertas. Depois as caixas podem ser abertas, e cada uma delas tem 10 tubos de dropes, que não podem ser abertos. Por último, os tubos que tem cada um 10 pastilhas, podem ser abertos. E se a divisão fosse por 3?

2. Invente um problema cuja resolução seja: 13,51 + 24,38 = 37,89

3. Em cada um dos casos, qual a quantidade de remédio na seringa? Quando não for possível dar o valor exato, dê uma aproximação.



4. Onde parou a faixa de mercúrio em cada um dos termômetros abaixo para que a leitura dê o número indicado?



5. Complete:

0,25 = 2 décimos e...... centésimos

0,37 = 2 décimos e ......centésimos

0,271 = 27................ e 1....................

1,32 = 1.....................e............centésimos

1,32 = 12..............e 12..................

1,5 h = 1 hora e............minutos;

1,3 h = ...minutos

1h e 30 minutos = ... décimos de hora

6. Indique em cada linha, qual o número mais próximo de

182	em:	100	82	180	150	200	190	
2,9	em:	3	30	2	20	0	1	
0,18	em	0,1	10	0,2	20	0	1	2

7. Considerando só números naturais, o sucessor de 3 é 4. O que acontece quando consideramos todos os números racionais? O 4 ainda é o sucessor de 3? Existem números entre 0,1 e 0,2? E entre 0,01 e 0,1?

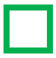
8. Faça algum desenho que represente as quantidades a seguir:

5 ; 3 ; $\frac{1}{2}$; 0,5 ; 0,25 ; 1,5 e $\frac{1}{4}$.

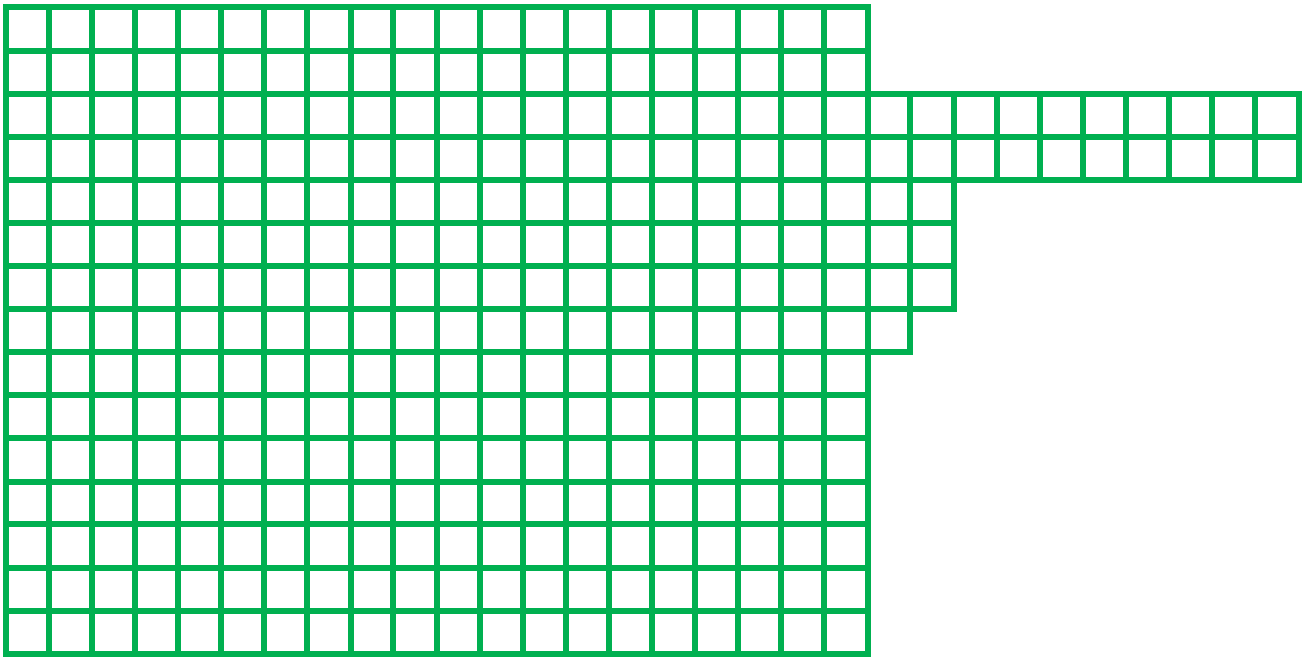
9. Tome dois quadrados do mesmo tamanho, um recortado em papel liso e outro em papel quadriculado. Por meio de dobraduras e usando o quadrado como unidade, compare: $\frac{1}{2}$ no quadrado liso com 5 décimos no quadriculado. E $\frac{1}{4}$ corresponde a quantos centésimos? Qual a forma decimal de $\frac{3}{4}$?

Mão à obra

1. Quantas unidades iguais a

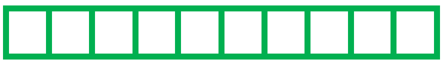


há no seguinte quadriculado

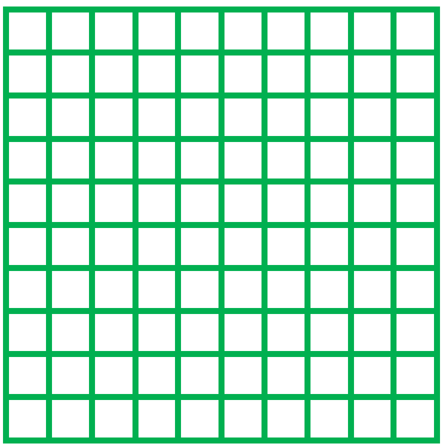


Observe o processo que você usou para chegar à sua resposta. Você vê alguma relação entre os dígitos da sua resposta e o quadriculado?

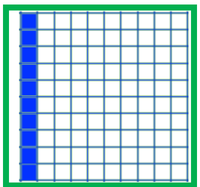
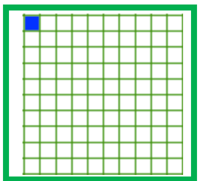
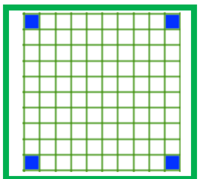
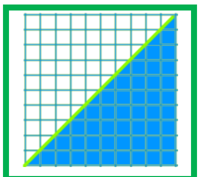
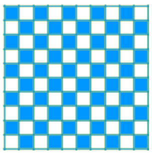
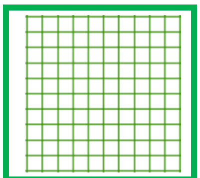
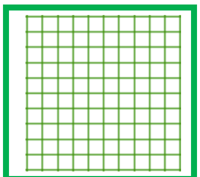
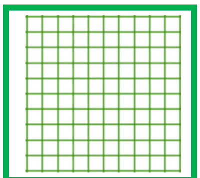
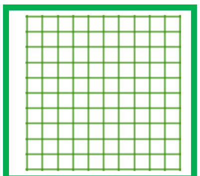
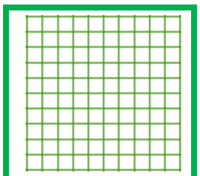
Repita o cálculo acima considerando como unidade

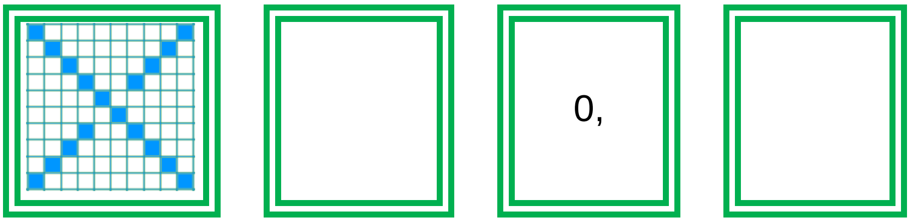


e, depois, considerando como unidade



2. Cada cartela abaixo representa uma unidade. Complete de alguma forma as cartelas em branco de modo a formar um jogo de quartetos e... divirta-se:

	$\frac{1}{10}$	0,1	10^{-1}
	$\frac{1}{100}$	0,01	$1 \div 100$
		0,04	
		0,	
	$\frac{3}{10}$	0,	
	$\frac{15}{100}$	0,	
	$\frac{1}{5}$	0,	
	$\frac{1}{5}+\frac{1}{100}$	0,	
		0,	5×10^{-2}



3. Adivinhe ou faça uma estimativa de quantas células uma pessoa tem no corpo. No número 15 da Revista do CDCC (março de 1987, Instituto de Física e Química USP, São Carlos), esse cálculo é feito a partir dos seguintes dados: uma pessoa tem, em média, 70 kg. A olho nu, conseguimos distinguir 0,1 mm e uma célula já pode ser distinguida num microscópio que aumenta 20 vezes. A célula é considerada como um cubo com densidade muito próxima à da água, igual a 1 g/cm^3, pois uma pessoa com o pulmão cheio de ar boia e, se expelir o ar, afunda. E, então?

4. Você pode conferir a ordem de grandeza do seu resultado no site Wikipédia, por exemplo.

5. Numa calculadora simples, veja quanto dá

$$0{,}0000123 \times 0{,}00067$$

digitando os números dados. Depois use a notação científica e compare os resultados.

Faça o mesmo com

$$(0{,}0036 + 98{,}75 - 0{,}0000374) \times 952880000.$$

4ª Oficina de Matemática para professores da 5ª série
Novembro de 1993.

A Divisão

A divisão é sabidamente a operação que apresenta maior dificuldade para os estudantes. Há hipótese em Psicologia, de que isto decorra, ou pelo menos, aumente, em vista da dificuldade que a criança tem em dividir coisas ou atenção na sua vida, mas, mesmo só sob o ponto de vista matemático, a divisão apresenta características mais complexas do que as outras operações.

O reconhecimento destas dificuldades, por parte do professor, pode auxiliá-lo no trabalho deste tópico com seus estudantes. Enumeramos algumas delas:

- O algoritmo da divisão, ao contrário do que acontece com os das outras operações, envolve tentativas e estimativas. Não se tem a certeza do algarismo do quociente a cada passo. É preciso fazer cálculos e comparar o resto com o divisor, se o algarismo não servir, procura-se outro.

- Também a resposta pode "variar", conforme o ambiente numérico em que se esteja trabalhando. A divisão tem um aspecto em comum com a subtração, elas nem sempre são possíveis entre dois números naturais quaisquer. No conjunto dos números naturais nem sempre é possível subtrair um número do outro e por isso se passa ao conjunto dos inteiros (positivos e negativos), mas as subtrações que eram possíveis entre naturais têm o mesmo resultado, quer no conjunto dos naturais quer no conjunto dos inteiros. No caso da divisão entre dois números naturais, se o primeiro for maior que o segundo, existem duas divisões possíveis: a divisão com resto e a divisão como inverso da multiplicação. Então para o estudante, na primeira vez em que ele se depara com 7 dividido por 2, o resultado é 3 com resto 1 e, mais tarde, passa a ser 3,5. Dai por diante, às vezes é 3 e às vezes é 3,5.

É preciso deixar bem claro para o aluno que, na divisão de um número natural por outro, trata-se sempre de dividir em partes iguais, mas ...

1º) existe a divisão, dita euclidiana, no conjunto dos números inteiros que pode, ou não, deixar resto e, quando deixa, ela não é o inverso da multiplicação.

2º) ao estender o conjunto dos números inteiros ao dos racionais a fim de tornar sempre possível a operação inversa da multiplicação (desde que o divisor não seja 0), não se pode abandonar a divisão euclidiana, pois existem situações nas quais os números fracionários não se aplicam, como quando os dados se referem a alunos de uma escola, ou a passarinhos num bosque, por exemplo.

3º) não é só na divisão por inteiros, que pode aparecer o resto O quociente de uma divisão entre números racionais quaisquer é sempre racional, mas este racional pode ser uma dízima periódica (com representação decimal infinita) ou ter uma representação decimal com muitas casas, forçando um truncamento no quociente e provocando a existência de um resto. Por exemplo: quando esse racional representar uma quantia em **cruzeiros**[5]**,** só interessam, na grande maioria dos casos, até os **centavos.** As demais casas do quociente, se houver, são abandonadas, forçando a existência de um resto. Sempre que haja resto, a operação efetuada não é o inverso da multiplicação.

- Estes truncamentos no quociente trazem à tona, as aproximações e os "erros" de arredondamento, assuntos difíceis para os alunos do ensino fundamental, principalmente para os de 5ª série.

- Pode-se perguntar se a *calculadora* não resolveu todos os problemas da divisão. Este é um assunto mais amplo, que não se restringe à divisão, mas se estende a todas as funções executadas pelas calculadoras comuns. É preciso absorver a

[5] O cruzeiro era a moeda corrente no Brasil naquela ocasião.

calculadora em nossas atividades em sala de aula, mas isto exige uma análise ampla e cuidadosa. O que se pode dizer dentro do contexto da divisão, tendo em vista a facilidade com que nosso aluno tem acesso a calculadoras, é que não mais será preciso fazer cálculos à mão, com muitos dígitos, mas certamente será preciso saber calcular de cabeça ou fazer à mão, contas com números de 3 ou 4 dígitos e entender muito bem o que sejam divisão, quociente, resto, aproximação, erros de arredondamento e, cada vez mais, saber avaliar ordens de grandeza.

- O significado de divisão também exige cuidados. Ela pode ser vista como resposta a diferentes situações. Começamos por analisar a divisão entre números naturais, tomando como exemplo a divisão de 15 por 3. Ela pode responder a situações dos seguintes tipos:

  i) se dividirmos 15 em 3 partes iguais, de quanto será cada parte?

  ii) quantas vezes 3 cabe em 15?

  iii) qual é o número que multiplicado por 5 dá 15?

A primeira pergunta só faz sentido porque o 3 é inteiro, a segunda porque o quociente 5 é inteiro, embora possa se aplicar a outros números, como, por exemplo:

Quantas faixas de 2 metros cabem numa peça de 15 metros?

Serão 7 faixas e meia.

Essas mesmas 3 perguntas entre números inteiros nem sempre têm resposta ou, às vezes, admitem uma resposta com a sobra de algum resto. Na terceira pergunta é que entram os números racionais, entre os quais ela faz sempre sentido e tem sempre resposta única, desde que o divisor não seja o 0 (zero). O quociente de um número racional qualquer por um número racional diferente de 0 é sempre um número racional que multiplicado pelo segundo dá o primeiro.

Errando também se aprende

- A necessidade de fazer avaliações e tentativas representam um obstáculo no desenvolvimento do *algoritmo* da divisão. Algumas atividades podem atenuar estas dificuldades, como por exemplo:

  1º) usar, de início, a divisão como prova real da multiplicação. O estudante já saberá, então, qual o número que deve dar, tendo oportunidade de adquirir traquejo nas outras fases do algoritmo. Além disso, o suspense em torno da conta de multiplicação, que pode estar certa ou não, confere um clima lúdico à atividade. Só depois disso, o estudante fará divisões quaisquer, onde terá que procurar o algarismo adequado em cada passo, mas aí ele já terá alguma prática nas outras fases do algoritmo.

  2º) a prática do cálculo mental com as quatro operações, também ajuda bastante o aluno a fazer as divisões com menos sofrimento e mais desembaraço. Um modo de desenvolver esta atividade em sala pode ser, mais ou menos, o seguinte: alguém, professor, colega ou grupo de colegas, propõe uma certa conta. Os alunos fazem os cálculos de "cabeça", escrevendo o resultado num papel ou no quadro. Alguns deles são convidados a explicar como chegaram ao resultado e os outros comparam os vários caminhos, sua validade e rapidez. O uso de todas as operações nesta atividade auxilia muito o cálculo de divisões com números maiores.

  3º) estimativas, em que os alunos são convidados a "chutar" o número de palitos de uma caixa de fósforos ou de alfinetes etc, conferindo depois, pela contagem direta ou de uma amostra e avaliando o total. O número de grãos de um quilo de arroz, número de pelos de uma escova, peso de um pedacinho de algodão (se houver balança de precisão disponível) podem ser utilizados para ver quem chega mais perto do provável resultado.

- É comum que os alunos cheguem à quinta série com um *algoritmo* próprio para calcular divisões. O ideal é que o professor possa conferir o processo usado pelo aluno (será isto possível na prática?) e, se estiver errado, corrigir, mostrando o erro. Se estiver certo, é preciso verificar se é muito mais demorado do que os algoritmos normalmente utilizados, o longo ou o simplificado ou se toma mais ou menos o mesmo tempo. Há alunos, por exemplo, que não conseguem fazer uma divisão sem preparar toda uma tabela dos primeiros múltiplos do divisor. Não há erro nisso, mas o estudante que fizer uma tal divisão em um concurso, estará em desvantagem em relação a outros candidatos que calcularem mais depressa. Os algoritmos utilizados hoje universalmente (conhecidos como "curto" e "longo") já passaram pela filtragem natural dos séculos, representando uma certa economia de tempo, em geral. Há que se ter bom senso para encaminhar o aluno, respeitando suas iniciativas ou sua experiência anterior, mas não deixá-lo em desvantagem em relação a outros.

- O zero causa muitos problemas aos nossos alunos, mesmo quando não seja uma nota no boletim. Por exemplo, numa divisão em que o quociente seja 105 ou 30 é muito provável que apareçam respostas 15 ou 3. O costume de ler os números e estimar a ordem de grandeza do resultado pode proteger nosso aluno destes erros. Ao calcular $735 \div 7$, o estudante pode saber *antes* que o resultado deve estar perto de 100, não podendo ser 15. Ao procurar o quociente de 367 por 12, o estudante pode ver *antes* que vai encontrar um número perto de 30, não podendo encontrar 3 com resto 7 e sim, 30 com resto 7.

- Há uma propriedade da divisão entre números naturais que se perde na extensão aos racionais e, nem sempre, nosso aluno se dá conta disso. Quando se divide um número qualquer por um número natural, o quociente é igual ao número de partida ou menor do que ele. Se o divisor for 1, o quociente é igual ao dividendo e, se o divisor for 2 ou maior que 2, o quociente é menor do que o dividendo. O aluno percebe, então, que a divisão "*diminui*" o número. Mas, quando o divisor é um número racional, existe uma terceira possibilidade, o racional positivo pode ser menor que 1 quando, então, o quociente "*aumenta*", isto é, é maior que o dividendo. O estudante não está preparado para isto e pensa, muitas vezes, que errou os cálculos, mudando a vírgula do quociente. Exemplos bons para mostrar isto são aplicações do sistema métrico: dividindo 8 metros de fazenda em cortes de 2 m cada, obtemos 4 cortes (de 8 para 4, o número diminui mesmo), dividindo em cortes de 1m cada, obtemos 8 cortes (o quociente é igual ao divisor), mas dividindo em cortes de 0,5 m cada, obtemos 16 cortes e de 8 para 16 o número aumentou. Isso acontece sempre que o divisor for um número entre 0 e 1. Esbarramos em exemplos destes todos os dias, mas nem sempre percebemos o fato matemático que está por trás deles.

- Muitas vezes, um quociente *inteiro* entre *números fracionários* assusta muito nossos alunos. Ao calcular 76,75 ÷ 0,25 eles encontram 307 e pensam que erraram. Novamente, as aplicações do sistema métrico podem ajudar no entendimento deste fato. O resultado não chocará o aluno se for num contexto natural como:

  > *Quantas ampolas de 0,25 g você poderá encher com 76,75 g de um certo produto farmacêutico?*

- E *as divisões pelas potências de 10?* Todos nós já tivemos alunos que armam "a conta" para calcular 503,12 ÷ 0,001 e ainda erram. Como nosso sistema de numeração é decimal, para multiplicar ou dividir um número por potências de 10, com expoentes positivos ou negativos, basta mudar a posição do algarismo dentro do número, sem mudar a ordem em que esses algarismos estão. Assim, a multiplicação ou divisão de um número por potências de 10 reduz-se ao deslocamento da vírgula ou ao corte ou acréscimo de zeros. Nem sempre o estudante presta atenção na modificação provocada no número e prefere decorar regras ao invés de entendê-las. Talvez o mais simples seja lembrar que multiplicar por potências com expoentes negativos equivale a dividir pela potência com o expoente positivo. Por exemplo,

multiplicar por 0,001 = 10^{-3} é o mesmo que dividir por 10^3

ou

dividir por 0,001 = 10^{-3} é o mesmo que multiplicar por 10^3.

Se o aluno já estudou frações ordinárias, ele já sabe que

dividir por $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$

é o mesmo que multiplicar por $\frac{10^3}{1} = 10^3$.

Basta usar esta regra diretamente ou às avessas, conforme o caso, para transformar divisões em multiplicações ou multiplicações em divisões. Se ainda não estudou frações ordinárias, muito provavelmente ainda não conheça as potências de expoente negativo e o professor precisará trabalhar diretamente com esses números na forma 0,1 ou 0,001, ... e concluir, por meio de ilustrações do tipo das ampolas por exemplo, que dividir por 0,1 é o mesmo que multiplicar por 10 etc.

- Uma outra grande dificuldade com que nosso estudante costuma esbarrar advém das muitas regras para o algoritmo da divisão de números decimais. De um ano para o outro, de um professor para outro, de um livro para outro, as preferências variam e o aluno, que em geral aprende as regras sem compreendê-las, tem que começar tudo outra vez. Qualquer que seja nossa escolha, é preciso que o estudante entenda o porquê da regra e que o professor respeite outros modos de calcular, desde que eles estejam certos.

Alguns preferem unificar todos os casos, começando por igualar o número de casas decimais (depois da virgula).

Outros preferem distinguir o caso em que o número de casas decimais do dividendo seja maior ou igual ao número de casas do divisor (quando, então, o número de casas do quociente é a diferença entre estes dois). Esses utilizam o processo de igualar as casas somente quando o número de casas decimais no dividendo seja menor do que o número de casas decimais do divisor.

Quando se igualam as casas decimais, a divisão prossegue entre os números inteiros e só é colocada vírgula no quociente quando não há mais dígitos a serem baixados e a divisão é prolongada pelo acréscimo de zeros.
Quando não se igualam as casas e calcula-se o número de casas no quociente comparando o número de casas do dividendo e divisor, fica ainda o problema de distinguir entre as casas decimais oriundas desse cálculo e as casas que são consequência do prolongamento da divisão.

O processo de igualar as casas pode complicar divisões simples, ele, no entanto, se aplica a todos os casos e deixa bem claro quando se deve colocar a vírgula no quociente. Depois de igualadas as casas a divisão passa a ser entre números inteiros, então, o quociente é inteiro enquanto houver dígitos no dividendo para “baixar” e passa a ser décimos, centésimos, ... quando são acrescentados os zeros, exatamente porque o resto inteiro é transformado em décimos e depois em centésimos e assim sucessivamente.

Esse procedimento permite também que se recupere o valor do resto, desde que se reconstitua, no resto, a posição inicial da vírgula no dividendo. Aliás um bom entendimento do algoritmo da divisão é completado pela leitura do valor correto do resto, na respectiva unidade. Em geral, nos algoritmos, o resto é deixado lá como se fosse um inteiro...

Por outro lado, uma ocasião em que não vale a pena igualar as casas é o caso da divisão de um número decimal por um natural com resto 0... É pena que nosso aluno, para dividir 21,45 por 5, tenha que passar pela divisão de 2145 por 500 para chegar a 4,29. Por outro lado, se ele tiver que dividir 21,41 por 5, sem igualar as casas, talvez ele se atrapalhe e não chegue ao valor 4,282. A avaliação da ordem de grandeza aí será, mais uma vez, bastante útil para evitar a divisão de 2141 por 500.

Dicas para o professor

- Para analisar os vários papéis da divisão, como resposta às 3 perguntas:

i) se dividirmos 15 em 3 partes iguais, de quanto será cada parte?

ii) quantas vezes 3 cabe em 15?

iii) qual é o número que multiplicado por 5 dá 15?

O professor pode lançar mão de tiras ou folhas de papel e simular cada uma das situações acima. Com crianças menores, ele pode usar as próprias crianças e distribuí-las em grupos...

- Trabalhar a divisão com fichas: por meio de agrupamentos de fichas, é possível esclarecer os papéis da divisão, do quociente e do resto. Usando dinheiro e notas de 1, 10, 100 e 1000 reais (por questões de higiene, segurança e facilidade, será melhor desenhá–las ou usar o “dinheirinho”) é possível refazer cada fase do algoritmo da divisão de números inteiros. Acrescentando a essas notas, as moedas de 1 e 10 centavos é possível ilustrar a continuação de uma divisão para décimos e centésimos, dando para discutir que o resto também passa a ser de décimos ou centésimos, conforme seja o caso, embora isto não apareça na forma usual do algoritmo.

- Criar situações para ver o que acontece com o quociente e o resto de uma divisão quando dividendo e divisor são, ambos, multiplicados pelo mesmo número. Por exemplo, se devo distribuir igualmente 5 folhas entre 3 alunos ou $15 \times 10 = 150$ folhas entre $3 \times 10 = 30$ alunos, em ambos os casos, cada aluno receberá o mesmo número de folhas, isto é, o quociente não se altera. O resto, entretanto, quando não for 0, muda, pois é multiplicado pelo mesmo fator. Com efeito, se fosse para dividir 17 folhas para 3 alunos ou $17 \times 10 = 170$ folhas por $3 \times 10 = 30$ alunos, em ambos os casos cada aluno receberá 5 (o quociente) folhas, mas, no primeiro caso, sobrariam 2 folhas, enquanto no segundo caso sobrariam $20 = 2 \times 10$ folhas. Esta invariância do quociente se explica a partir da definição da divisão como inversa da multiplicação: $15 \div 3 = 5$ porque $5 \times 3 = 15$ e, também $5 \times (3 \times 10) = (5 \times 3) \times 10$. Logo $15 \div 3 = (15 \times 10) \div (3 \times 10)$. É esta mesma invariância que justifica a possibilidade de cortar as vírgulas depois de igualar as casas no processo de divisão de números decimais, pois cortar as vírgulas equivale a multiplicar pela potência de 10 em que o expoente é o número de casas decimais.

Mas ...cuidado! O quociente não se modifica, o resto, porém, fica alterado, precisando ser corrigido, se for necessário utilizá-lo. Veja:
$17 = 5 \times 3 + 2$, que, multiplicado por 10 leva a
$170 = (5 \times 3) \times 10 + 2 \times 10 = 5 \times (3 \times 10) + 2 \times 10 =$
$= 5 \times 30 + 20$.

- É possível falar em "erros no quociente", chamando a atenção para o fato de que, se o quociente é truncado antes do resto dar 0, o produto do quociente pelo divisor não dá o dividendo. Há que se somar o resto tomado na unidade certa, o que exige que se guarde qual a posição inicial da vírgula no dividendo. Vale salientar a diferença entre erro e resto: o erro é a diferença entre o quociente truncado e o quociente com resto 0. O resto é a diferença entre o dividendo e o produto do quociente truncado pelo divisor. Por exemplo, na divisão de 245 reais por 8, obtêm-se um quociente de

30,62 e um resto 0,04 ou seja 4 centavos. O resto é de 4 centavos e o erro menor do que 1 centavo, pois 30,62 é menor que o quociente, mas 30,63 já supera o quociente. Com efeito o quociente exato seria 30,625, mas não existe moeda para completar esta quantia. Outros exemplos podem ser trabalhados com erro e resto, como dividir quilos até gramas ou litros até centilitros.

- Um problema interessante de divisão está no livro "O homem que calculava" de nosso bom contador de histórias e professor de Matemática, Júlio César de Melo e Souza, o Malba Tahan. É o seguinte:

"- Aqui estão, ó Calculista, os três amigos. São criadores de carneiros em Damasco. Enfrentam agora um dos problemas mais curiosos que tenho visto. E esse problema é o seguinte:

- Como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdá, uma partida de vinho, muito fino, composta de 21 vasos iguais, sendo:

7 cheios
7 cheios pela metade e
7 vazios

Querem, agora, dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho.

Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade, a meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão. Será possível, ó Calculista, obter a solução para este problema?"

Mãos à obra

1. Um dos problemas que nossos alunos encontram na divisão é saber até onde devem prolongar a conta. Na vida real, quase sempre a própria situação em que a divisão aparece sugere a precisão necessária para o quociente: se inteiro, se até a segunda casa decimal, se até resto zero etc. Na escola, temos muitas vezes que incluir este dado no enunciado do problema, com expressões do tipo *calcular até milésimos* ou *com erro*

menor do que 0,01. O fato é que o estudante precisa se acostumar a analisar a questão para decidir qual a resposta ao problema dado. Nem sempre a resolução de um problema termina com a execução do cálculo.
A título de exemplo, citamos um problema já proposto e analisado nesta série (Problemas do primeiro grau e outros, p.12) em cuja resolução aparece sempre a operação 125 ÷ 8, mas cada um tem resposta diferente das demais.

2. As calculadoras dão os quocientes com um certo número de casa, conforme o número de dígitos de seu visor. Isto dá origem a problemas interessantes, por exemplo:

- Com auxílio de uma calculadora, ache o quociente (inteiro) e o resto da divisão de 3.115 por 128.
- Com auxílio de uma calculadora, ache o quociente e o resto da divisão de R$3.115,00 por 128.
- Com auxílio de uma calculadora, ache o quociente da divisão de 3.115 km por 128. Qual a unidade do último algarismo que você obtém na sua calculadora?

2	4	,	3	3	5	9	3	7	5
	km		hm	dam	m	dm	cm	mm	

Observe que os 8 dígitos de uma calculadora simples são suficientes para uso comum, pois, em 24 km, não faz sentido distinguir ente 3 ou 9 centímetros. Esse algarismo não tem nenhum significado no total.

- E, quanto ao problema da divisão dos vasos, as soluções que o livro apresenta são as seguintes. É claro que cada criador deve levar 7 vasos e 10,5 ÷ 3 = 3,5 vasos de vinho. Então, uma solução é:

Criador	Vasos cheios	Vasos pela metade	Vasos vazios	Total de vinho (em vasos)	Total de vasos
1^o	3	1	3	3 + 0,5 = 3,5	7
2^o e 3^o	2	3	2	2 + 1,5 = 3,5	7
Totais	7	7	7	10,5	21

Outra solução:

Criador	Vasos cheios	Vasos pela metade	Vasos vazios	Total de vinho (em vasos)	Total de vasos
1^o	1	5	1	2,5 + 1 = 3,5	7
2^o e 3^o	3	1	3	3 + 0,5 = 3,5	7
Totais	7	7	7	10,5	21

Analisando todas as alternativas, ou mesmo montando um sistema linear a 9 equações com 9 incógnitas, é possível ver que estas são as únicas possibilidades, ou seja, as únicas soluções inteiras positivas.
