

## 2

### Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta estudos analíticos deste tipo de sistema estrutural inicializado em 1970 pelo russo Voevodin [3]. Outros como: Belenya [4]; Hafez et al.[5], Wong et al.[6], Chan [7], Steirteghem et al.[8] e Saito[9-11], aperfeiçoaram estes estudos analíticos e foram a base para este trabalho. Sua funcionalidade compreende em se aplicar a protensão nos estais em uma das extremidades, que passam por um ou mais pontos na coluna principal. Estes pontos são quatro barras de aço em formato de cruz ou, em alguns estudos, três barras de aço a 120 graus de distância entre si. O objetivo principal deste sistema estrutural é a redução do comprimento de flambagem da coluna tornando viável a utilização de colunas esbeltas.

#### 2.1

##### Estudo da coluna estaiada por Belenya

Belenya em seu livro “Prestressed Load-Bearing Metal structures” [4] apresenta, baseado nos estudos de A. A. Voevodin [3], uma forma de aproveitar ao máximo colunas esbeltas para suportar cargas a grandes alturas. Para tal estudo, Belenya utilizou barras conectadas solidamente na coluna principal, denominadas por “braços”, travando-as com cabos. Um exemplo é o cálculo da carga crítica  $P_{cr}$  (Figura 2.4) de uma coluna com n-painéis, carregada axialmente, apoiadas nas extremidades e suportadas por molas elásticas nas seções transversais 1, 2, 3, ..., n-1.

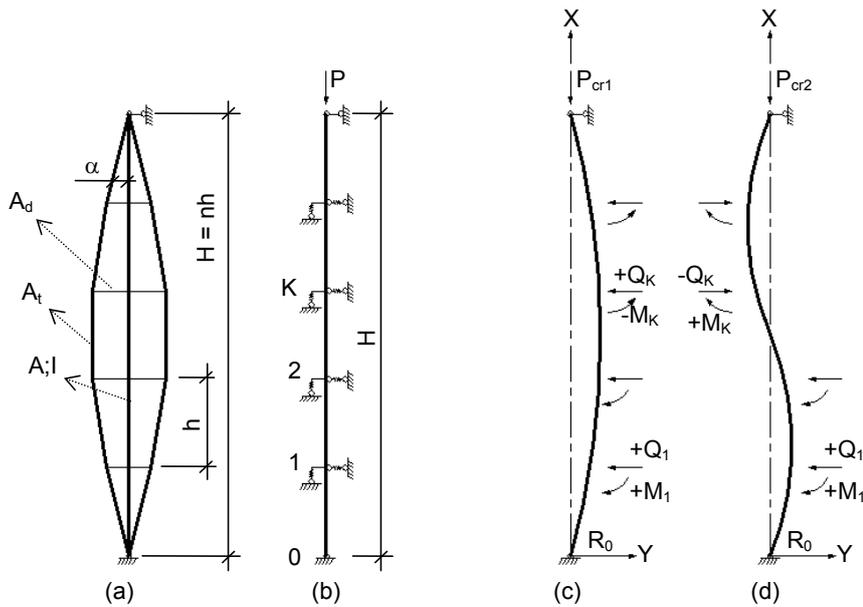


Figura 2.1 Cálculo da estabilidade de uma coluna de n-painéis protendida estaiada. (a) sistema estrutural; (b) sistema para cálculo; (c) primeiro modo de flambagem; (d) segundo modo de flambagem. [1]

Estas molas elásticas correspondem ao efeito das tensões dos cabos e da rigidez dos braços na coluna central (Figura 2.1 b). A Figura 2.1 ilustra duas possibilidades de flambagem de uma coluna que correspondem ao primeiro (Figura 2.1 c) e ao segundo (Figura 2.1 d) modo de flambagem, respectivamente.

Os valores do deslocamento e o ângulo da torção da coluna central no ponto K são respectivamente equivalentes a:

$$\delta_k = \bar{\alpha}_k \cdot Q_k \quad (2.1)$$

$$\theta_k = -\bar{\beta}_k \cdot M_k \quad (2.2)$$

onde  $Q_k$  e  $M_k$  representam o cortante e o momento fletor resistente no ponto K (as direções de  $Q_k$  e  $M_k$  e seus respectivos sinais dependem da maneira em que ocorre o modo de flambagem da coluna, conforme apresentado na Figura 2.1) e  $\bar{\alpha}_k$  e  $\bar{\beta}_k$  são os coeficientes linear e angular de resistência que dependem da rigidez longitudinal dos estais e da rigidez a flexão das barras perpendiculares a coluna central [4].

A equação diferencial da linha elástica da seção Kn da coluna é:

$$EIy''(k) + Py(k) - R_0x_k + \sum_{i=1}^{k-1} (x_k - ih)Q_i + \sum_{i=1}^{k-1} M_i = 0 \quad (2.3)$$

onde:

$$(k-1)h \leq x_k \leq kh \quad (2.4)$$

e  $y_{(k)}$  é o deslocamento, na direção  $y$  (Figura 2.1 c por exemplo), da coluna na seção  $K_n$ .

$$R_0 = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)Q_i + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n-1} M_i \right] \quad (2.5)$$

$R_0$  é a reação horizontal no apoio devido às forças  $Q_k$  e  $M_k$  (onde  $K = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ). A solução da equação diferencial (2.3) na sua forma geral, para uma altura constante da coluna é:

$$y(k) = \frac{R_0x_k}{u^2EI} + C_1 \cos ux_k + C_2 \operatorname{sen} ux_k - \frac{1}{u^3EI} \sum_{i=1}^k [u(x_k - ih) - \operatorname{sen} u(x_k - ih)]Q_i - \frac{1}{u^2EI} \sum_{i=1}^k [1 - \cos u(x_k - ih)]M_i \quad (2.6)$$

onde

$$u^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.7)$$

Através das condições de contorno das extremidades da coluna ( $y_{(0)} = y_{(nh)} = 0$ ) e introduzindo a variável  $v = hu$ , obtêm-se:

$$C_1 = 0 \quad (2.8)$$

$$C_2 = \frac{A_n h^3}{EI v^3 \operatorname{senn} v} \quad (2.9)$$

$$v = h \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} \quad (2.10)$$

sendo:

$$A_n = n v R_0 + \sum_{i=1}^{n-1} [(n-i)v - \operatorname{sen}(n-i)v] Q_i + \frac{v}{h} \sum_{i=1}^{n-1} [1 - \cos(n-i)v] M_i \quad (2.11)$$

Por substituição  $x_k = k h$  e a expressão para  $C_2$  na equação (2.6), é possível calcular o valor do deslocamento e do ângulo de torção para qualquer ponto  $k$  da coluna, conforme apresentam as equações a seguir:

$$\delta_k = \frac{h^3}{EI v^3} \left\{ k v R_0 + A_n \frac{\operatorname{sen}(k v)}{\operatorname{sen}(n v)} - \sum_{i=1}^{k-1} [(k-i)v - \operatorname{sen}(k-i)v] Q_i - \frac{v}{h} \sum_{i=1}^{k-1} [1 - \cos(k-i)v] M_i \right\} \quad (2.12)$$

$$\theta_k = \frac{h^2}{EI v^2} \left\{ R_0 + A_n \frac{\cos(k v)}{\cos(n v)} - \sum_{i=1}^{k-1} [1 - \cos(k-i)v] Q_i - \frac{v}{h} \sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{sen}(k-i)v M_i \right\} \quad (2.13)$$

Tendo separado das equações (2.12) e (2.13) os termos em comum, substituindo  $R_0$  por sua expressão em termos de  $Q_i$  e  $M_i$  com uso simultâneo das equações (2.1) e (2.2), obtém-se um sistema de  $(n-1)$  equações homogêneas (2.14) com relação à  $Q_k$  e  $M_k$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k-1} \left[ n \frac{\text{sen}(i\nu)}{\cos(k\nu)} - i \tan(k\nu) - i(n-k)\nu \right] Q_i \\
& + \left[ n \bar{\alpha}_k \frac{EI}{h^3} \nu^3 + (n-k)(\tan(k\nu) - k\nu) \right] Q_k \\
& + (\tan(k\nu) - k\nu) \sum_{i=k+1}^{n-1} (n-i) Q_i \\
& = \frac{i}{h} \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \left[ n\nu \frac{\cos(i\nu)}{\cos(k\nu)} - \tan(k\nu) - (n-k)\nu \right] M_i \right. \\
& \quad - \left[ n \bar{\beta}_k \frac{EI}{h} \nu 2 \tan(k\nu) + (\tan(k\nu) - k\nu) \right] M_k \\
& \quad \left. - (\tan(k\nu) - k\nu) \sum_{i=k+1}^{n-1} M_i \right.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

A condição de existência de um novo equilíbrio de corpos, diferente da condição inicial, corresponde a igualar a zero o determinante do sistema. Esta condição conduz a uma equação característica (2.15) onde, como já citado acima,  $\bar{\alpha}_k$  e  $\bar{\beta}_k$  dependem da rigidez longitudinal dos estais e da rigidez a flexão das barras perpendiculares.

$$\nu(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = 0 \tag{2.15}$$

Fazendo uso da equação (2.14) é possível instituir equações características de estabilidade para qualquer n seção longitudinal. Deve-se então ser observado que, para o primeiro modo de flambagem (Figura 2.1 c), as reações de cortante e momento estão relacionados como a seguir:

$$Q_{n-k} = Q_k \tag{2.16}$$

$$M_{n-k} = -M_k \tag{2.17}$$

E para o segundo modo de flambagem (Figura 2.1 d):

$$Q_{n-k} = -Q_k \tag{2.18}$$

$$M_{n-k} = M_k \tag{2.19}$$

Para ilustrar a aplicação geral da teoria foi considerada uma coluna com dois painéis reforçados por um sistema com quatro estais. Fazendo uso da equação (2.14), obtém-se para  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} & \left( 2\bar{\alpha}_1 \frac{EI}{h^3} \nu^3 + \tan \nu - \nu \right) Q_1 \\ & + \frac{1}{h} \left( 2\beta_1 \frac{EI}{h} \nu^2 \tan \nu + \tan \nu - \nu \right) M_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

De acordo com a perda de estabilidade para o primeiro modo de flambagem ( $M_1 = 0$ ), a equação característica é:

$$\frac{\nu_1^3}{\tan \nu_1 - \nu_1} = -\frac{h^3}{2\bar{\alpha}_{11} EI} \quad (2.21)$$

onde

$$\bar{\alpha}_{11} = \frac{h\Phi}{8F_t \tan^2 \alpha_1} \quad (2.22)$$

$F_t$  a área da seção transversal do estai e.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos^3 \alpha_i} = \frac{2}{\cos^3 \alpha} \quad (2.23)$$

sendo  $\alpha_1$  o ângulo de inclinação do estai em relação a coluna central. Com a formulação de  $\bar{\alpha}_{11}$  da equação (2.22), substitui-se na equação (2.21) e obtém-se:

$$\frac{\nu_1^3}{\tan \nu_1 - \nu_1} = -\frac{2F_t h^2 \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1}{I} \quad (2.24)$$

Para que ocorra a deformação da coluna de acordo com o segundo modo de flambagem, a rigidez a flexão das barras perpendiculares deve ser menor que a rigidez longitudinal dos estais. Sendo assim, a equação (2.14) deve ser escrita:

$$\frac{\nu_2^2 \tan \nu_2}{\tan \nu_2 - \nu_2} = -\frac{h}{2\bar{\beta}_{12}EI} \quad (2.25)$$

onde

$$\bar{\beta}_{12} = \frac{1 + \frac{F_t \text{sen} \alpha_1 \cos^2 \alpha_1}{F_d \text{sen}^2 \beta_1 \cos \beta_1}}{4EF_t \text{sen}^2 \alpha_1 \cos \alpha_1} \quad (2.26)$$

Para cumprir as condições de igualdade de estabilidade da coluna de acordo com os dois modos de flambagem (primeiro e segundo modo), os termos  $\nu_1$  e  $\nu_2$  devem ser iguais e usados sem índice ( $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ). Através da resolução simultânea das equações (2.21) e (2.25), chega-se a seguinte equação:

$$\frac{\nu}{\tan \nu} = \frac{\bar{\beta}_{12}}{\bar{\alpha}_{11}} h^2 \quad (2.27)$$

Resolvendo a equação (2.27), substituindo os valores de  $\bar{\alpha}_{11}$  e  $\bar{\beta}_{12}$ , chega-se a uma relação entre as áreas da seção transversal das barras perpendiculares a coluna central e a seção transversal dos estais. Estas áreas determinam a igualdade de estabilidade da coluna de acordo com o primeiro e segundo modo de flambagem para um valor específico de  $\nu$  ( $h, I, P_{cr}$ ).

$$\frac{\nu}{\tan \nu} = 1 + \frac{F_t \text{sen} \alpha_1 \cos^2 \alpha_1}{F_d \text{sen}^2 \beta_1 \cos \beta_1} \quad (2.28)$$

## 2.2

### Estudo da coluna estaiada por Hafez e Temple [5]

Foram um dos primeiros autores a estudarem o efeito da protensão inicial nos estais na carga de flambagem de uma coluna com um sistema de restrição no centro da altura (Figura 2.2). Para tal, realizou-se um estudo geométrico para

determinar a mínima protensão efetiva, a protensão ótima e a máxima protensão possível de colunas estaiadas bidimensionais e tridimensionais.

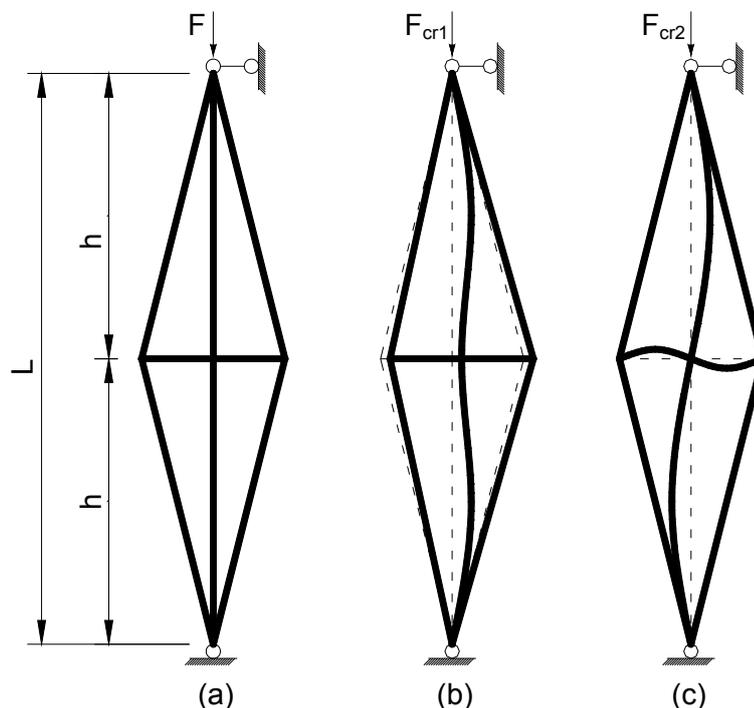


Figura 2.2 (a) Coluna estaiada protendida de dois painéis bi-rotulada; (b) Primeiro modo de flambagem – Modo I; (c) Segundo modo de flambagem – Modo II.

Algumas suposições foram adotadas para a realização desse estudo.

- A coluna estaiada protendida é completamente simétrica e carregada por uma carga axial concêntrica, não há excentricidade inicial no carregamento e nenhuma imperfeição na coluna;;;
- As ligações entre a coluna central e as barras perpendiculares a coluna central são consideradas rígidas.;
- As ligações entre os estais e a coluna central e entre as barras perpendiculares a coluna central são rótulas ideais.
- A carga de flambagem possível da coluna estaiada é obtida através do método dos elementos finitos.
- As deformações axiais da coluna e das barras perpendiculares têm um efeito desprezível na carga máxima de flambagem quando determinadas pelo método dos elementos finitos.

A seguir, tem-se as definições utilizadas:

- Mínima protensão efetiva – é a protensão inicial mínima nos estais que causa efeito até ter sido atingida a carga de Euler. Em uma carga superior a carga de Euler, os estais afrouxam e a coluna flamba desde que não esteja mais restrita pelos estais. Não há vantagem em usar colunas estaiadas se a protensão é igual ou menor que a mínima protensão efetiva;
- Protensão ótima – é a protensão inicial nos estais que desaparece completamente somente após a carga na coluna atingir a máxima carga de flambagem. Teoricamente, a protensão ótima é o melhor valor para a protensão inicial nos estais;
- Máxima protensão possível – é a protensão inicial nos estais que causa flambagem na coluna sem qualquer carga adicional aplicada. Este tipo de carga não tem importância prática,
- Protensão residual – quando a protensão inicial nos estais é maior que a protensão ótima, a tensão nos estais não chega a zero no instante da flambagem da coluna. Neste caso, a protensão residual é a magnitude da tensão que permanece nos estais;
- Modo I e Modo II de flambagem – estes são os dois modos de deslocamentos possíveis de uma coluna estaiada com somente um sistema de restrição. Os modos I e II podem ser vistos na Figura 2.2a e Figura 2.2b respectivamente..

Sabe-se que a carga de flambagem de uma coluna estaiada protendida varia entre dois limites. O valor da carga de flambagem entre estes dois limites é determinado pela protensão inicial aplicada nos estais. O limite inferior é nada mais que a carga de Euler da coluna estaiada e o limite superior é determinado pelo método dos elementos finitos.

Para deduzir a relação entre a protensão inicial nos estais e a correspondente carga de flambagem, realizou-se uma análise geométrica da coluna estaiada.

Considera-se uma coluna estaiada bi-apoiada nas extremidades, conforme a Figura 2.2, onde  $T_i$  é a protensão inicial nos estais e  $P_a$  é a carga axial externa aplicada a coluna. Esta carga externa causa um deslocamento vertical na coluna resultando em pequenas mudanças nas dimensões como mostra a Figura 2.3.

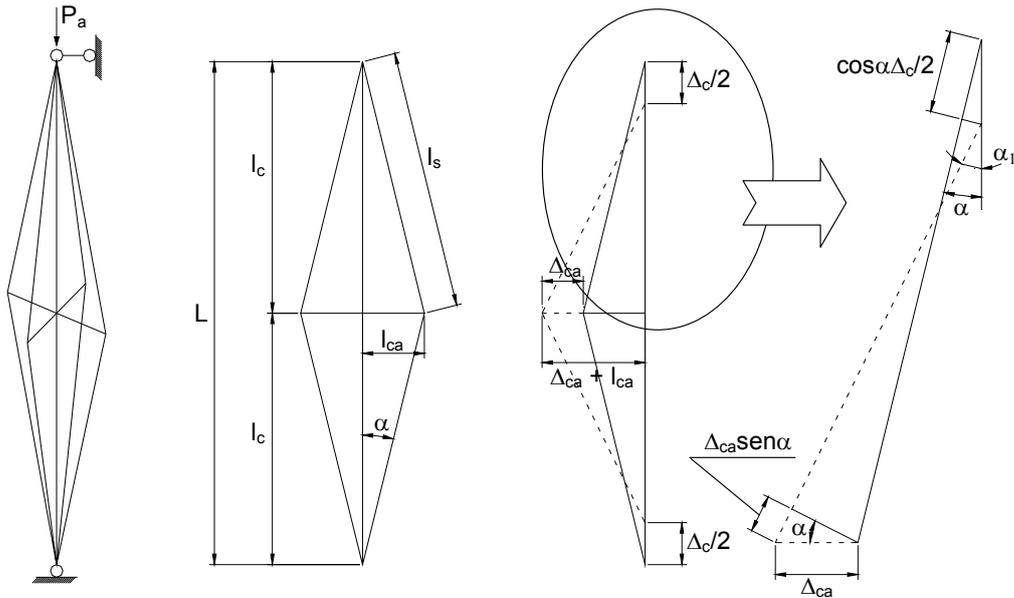


Figura 2.3 Mudança no comprimento dos estais devido a deformação axial da coluna.

Para pequenas deformações, a mudança no comprimento dos estais está relacionada com a mudança no comprimento da coluna e dos estais.

$$\Delta_s = \frac{1}{2} \Delta_c \cos \alpha - \Delta_{ca} \operatorname{sen} \alpha \quad (2.29)$$

Onde  $\Delta_s$  é o encurtamento dos estais devido a redução na tensão nos mesmos;  $\Delta_c$  é o encurtamento da coluna devido a carga aplicada;  $\alpha$  é o ângulo entre os estais e a coluna; e  $\Delta_{ca}$  é o prolongamento de cada braço devido a redução da tensão nos estais.

A força axial inicial na coluna,  $P_i$ , é induzida pela protensão inicial nos estais,  $T_i$ , é dada pela equação (2.30):

$$P_i = n_1 T_i \operatorname{sen} \alpha \quad (2.30)$$

onde  $n_1$  é o número de estais ligados na extremidade da coluna (por exemplo, para uma coluna estaiada com os braços arranjados em forma de cruz, o valor de  $n_1$  é 4). A força de compressão inicial,  $F_i$ , nos braços causado pela protensão inicial nos estais é dada pela equação (2.31):

$$F_i = n_2 T_i \operatorname{sen} \alpha \quad (2.31)$$

onde  $n_2$  é o número de estais ligados na extremidade do braço. Após a aplicação da carga externa,  $P_a$ , a carga axial final na coluna é dada pela equação (2.32):

$$P_f = P_a + 4T_f \cos \alpha \quad (2.32)$$

onde  $T_f$  é a tensão nos estais após a aplicação da carga externa na coluna. A força de compressão final nos braços é dada pela equação (2.23):

$$F_f = 2T_f \sin \alpha \quad (2.33)$$

Conhecendo os valores das forças externas e internas da coluna estaiada antes e depois da aplicação da carga externa, as mudanças nos comprimentos dos vários elementos da coluna estaiada podem ser facilmente obtidas. Assim sendo, o encurtamento da coluna devido a aplicação da carga é expressada pela equação (2.34).

$$\Delta_c = \frac{P_f - P_i}{K_c} \quad (2.34)$$

onde  $K_c$  é a rigidez axial da coluna dada pela equação (2.35)

$$K_c = \frac{A_c E_c}{L} \quad (2.35)$$

na qual  $A_c$  é a área da seção transversal da coluna,  $E_c$  o módulo de elasticidade da coluna e  $L$  o comprimento total da coluna. Substituindo  $P_f$  e  $P_i$  das equações (2.30) e (2.32) e na equação (2.34),  $\Delta_c$  pode ser escrito em termos da tensão nos estais como:

$$\Delta_c = \frac{P_a - 4(T_i - T_f) \cos \alpha}{K_c} \quad (2.36)$$

O valor do alongamento de cada braço devido a redução da força de compressão é expressada pela equação (2.37).

$$\Delta_{ca} = \frac{F_i - F_f}{K_{ca}} \quad (2.37)$$

onde  $K_{ca}$  é a rigidez axial do braço dada pela equação (2.38)

$$K_{ca} = \frac{A_{ca} E_{ca}}{l_{ca}} \quad (2.38)$$

na qual  $A_{ca}$ ,  $E_{ca}$  e  $l_{ca}$  são a área da seção transversal, o módulo de elasticidade e o comprimento de cada braço, respectivamente. Substituindo por  $F_i$  e  $F_f$  das equações (2.31) e (2.33),  $\Delta_{ca}$  pode ser escrito em termos da tensão nos estais como:

$$\Delta_{ca} = \frac{2(T_i - T_f) \operatorname{sen} \alpha}{K_{ca}} \quad (2.39)$$

O encurtamento do estai devido a redução da tensão nos estais pode ser expressada pela equação (2.40).

$$\Delta_s = \frac{T_i - T_f}{K_s} \quad (2.40)$$

onde  $K_s$  é a rigidez axial do estai dada pela equação (2.41)

$$K_s = \frac{A_s E_s}{l_s} \quad (2.41)$$

na qual  $A_s$ ,  $E_s$  e  $l_s$  são a área da seção transversal, o módulo de elasticidade e o comprimento de cada estai, respectivamente. Substituindo as equações (2.36), (2.39) e (2.40) na equação (2.29), tem-se:

$$\frac{T_i - T_f}{K_s} = \frac{[P_a - 4(T_i - T_f) \cos \alpha] \cos \alpha}{2K_c} - \frac{[2(T_i - T_f) \operatorname{sen} \alpha] \operatorname{sen} \alpha}{K_{ca}} \quad (2.42)$$

A redução da tensão nos estais em termos da carga aplicada externamente pode ser escrita como:

$$T_i - T_f = \frac{P_a \cos \alpha}{2K_c \left( \frac{1}{K_s} + \frac{2\text{sen}^2 \alpha}{K_{ca}} + \frac{2\cos^2 \alpha}{K_c} \right)} \quad (2.43)$$

Os valores de  $a$ ,  $K_c$ ,  $K_s$  e  $K_{ca}$  são constantes de uma coluna estaiada com um só sistema de restrição. Sendo assim, a equação (2.43) pode ser escrita por:

$$T_i - T_f = P_a C_1 \quad (2.44)$$

onde,

$$C_1 = \frac{\cos \alpha}{2K_c \left( \frac{1}{K_s} + \frac{2\text{sen}^2 \alpha}{K_{ca}} + \frac{2\cos^2 \alpha}{K_c} \right)} \quad (2.45)$$

Deste modo há uma relação linear entre a carga aplicada e a correspondente mudança da tensão nos estais. O encurtamento da coluna,  $\Delta_c$ , pode ser escrito em termos da força axial final na coluna,  $P_f$ , e a tensão inicial nos estais,  $T_i$ , combinando as equações (2.32) e (2.36) como a seguir:

$$\Delta_c = \frac{P_f - 4T_i \cos \alpha}{K_c} \quad (2.46)$$

Por substituição de  $\Delta_s$  da equação (2.40),  $\Delta_c$  da equação (2.46) e  $\Delta_{ca}$  da equação (2.39) na equação (2.29) e resolvendo, a tensão final nos estais pode ser expressa por:

$$T_f = T_i - \frac{(P_f - 4T_i \cos \alpha) \cos \alpha}{2K_c \left( \frac{1}{K_s} + \frac{2\text{sen}^2 \alpha}{K_{ca}} \right)} \quad (2.47)$$

Substituindo  $T_f$  na equação (2.47) na equação (2.32) e reescrevendo em termos da carga aplicada, chega-se a seguinte equação:

$$P_a = (P_f - 4T_i \cos \alpha) \left[ 1 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{K_c \left( \frac{1}{K_s} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{K_{ca}} \right)} \right] \quad (2.48)$$

A equação (2.48) pode ser escrita em termos de uma constante  $C_2$  gerando a equação (2.50).

$$C_2 = 1 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{K_c \left( \frac{1}{K_s} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{K_{ca}} \right)} \quad (2.49)$$

$$P_a = (P_f - 4T_i \cos \alpha) C_2 \quad (2.50)$$

A relação linear entre a protensão inicial nos estais e a sua correspondente carga de flambagem, pode ser dividida em três zonas: Zona 1 associada a uma protensão inicial nos estais menor que a mínima efetiva; Zona 2 entre a mínima efetiva e a ótima protensão inicial; e Zona 3 com uma carga de protensão maior que a protensão inicial nos estais (Figura 2.4).

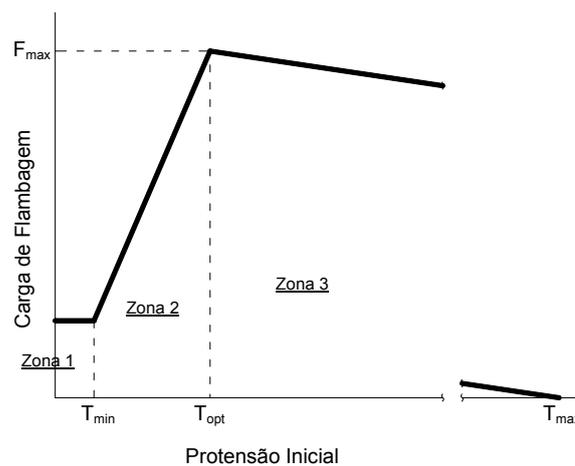


Figura 2.4 Mudança no comprimento dos estais devido a deformação axial da coluna.

Na Zona 1, a protensão inicial é tão pequena que desaparece completamente quando a carga aplicada na coluna é menor ou igual a sua carga

de Euler. Como a tensão nos estais se aproxima a zero, os mesmos deixam de se tornar efetivos e a coluna passa a se comportar como uma simples coluna (sem estais) flambando ao atingir a sua carga de Euler.

A mínima protensão efetiva,  $T_{min}$ , pode ser calculada através da equação (2.44), já que a tensão final ( $T_f$ ) é igual a zero quando a carga aplicada na flambagem atingir a carga de Euler.

$$T_{min} = \frac{\pi^2 E_c I_c}{L^2} C_1 \quad (2.51)$$

Na Zona 2 os estais permanecem efetivos até que seja atingida uma carga que seja igual ou inferior à carga máxima flambagem, o que acontece quando a tensão final nos estais chegam a zero deixando a coluna sem restrições laterais e rotacionais para prevenir a flambagem. Conseqüentemente, a equação que rege a carga de flambagem na Zona 2 é expressada por:

$$P_{cr} = \frac{T_i}{C_1} \quad (2.52)$$

na qual  $P_{cr}$  é a carga crítica da coluna estaiada, ou carga de flambagem.

A equação (2.52) também pode ser usada para determinar a protensão ótima que leva ao limite superior da equação. Quando a carga de flambagem atingir o valor máximo, essa será a protensão ótima da coluna. Conhecendo a máxima carga de flambagem através do método dos elementos finitos, a protensão ótima pode ser escrita por:

$$T_{opt} = P_{max} C_1 \quad (2.53)$$

onde  $T_{opt}$  é a protensão ótima e  $P_{max}$  a carga máxima de flambagem da coluna estaiada. Na Zona 3 a protensão inicial é maior que a protensão ótima. Neste caso, a tensão nos estais não chega a zero quando a coluna atingir a flambagem. Todavia a tensão nos estais não resiste a grandes deslocamentos da coluna quando a carga aplicada (soma das componentes dos estais mais a carga externa) atingir ao valor máximo. Para computar essa tensão residual,  $T_r$ , no instante da carga de flambagem, utiliza-se a equação (2.54):

$$T_r = T_i - (P_{\max} - 4T_i \cos \alpha)C_3 \quad (2.54)$$

onde  $T_r$  é a tensão residual no instante da flambagem da coluna e  $C_3$  depende das propriedades geométricas de cada parte da coluna estaiada, obtida pela equação (2.57).

$$C_3 = \frac{\cos \alpha}{2K_c \left( \frac{1}{K_s} + \frac{2\sin^2 \alpha}{K_{ca}} \right)} \quad (2.55)$$

Desde o momento em que a tensão residual representa uma parte da carga, na qual é adicionada na carga aplicada, contribuindo para atingir a carga de flambagem, uma tensão residual elevada significa que se precisa de uma pequena carga externa aplicada na coluna para que haja flambagem. A protensão inicial pode ser grande o suficiente para que ela mesma possa gerar uma flambagem na coluna sem que haja qualquer carga externa aplicada. Sendo assim, a protensão máxima possível pode ser calculada através da equação (2.54), onde  $T_r$  é igual a  $T_i$  que pode ser escrita como  $T_{\max}$ , a máxima protensão possível.

$$T_{\max} = \frac{P_{\max}}{4 \cos \alpha} \quad (2.56)$$

A equação que governa a carga de flambagem na Zona 3 pode ser obtida através da equação (2.50) após a substituição da carga aplicada e da carga final na coluna.

$$P_{cr} = (P_{\max} - 4T_i \cos \alpha)C_2 \quad (2.57)$$

O efeito completo da protensão inicial na carga de flambagem de uma coluna estaiada com um sistema de restrição é apresentada na Figura 2.4. Para o estudo apenas no plano de uma coluna estaiada, as equações anteriores podem ser facilmente modificadas. Na equação (2.30) o valor de  $n_1$  passa a ser igual a dois. Sendo assim a equação da mínima protensão efetiva é:

$$T_{\min} = \frac{\pi^2 E_c I_c}{L^2} C_{11} \quad (2.58)$$

onde:

$$C_{11} = \frac{\cos \alpha}{2K_c \left( \frac{1}{K_s} + \frac{2\text{sen}^2 \alpha}{K_{ca}} + \frac{\cos^2 \alpha}{K_c} \right)} \quad (2.59)$$

Na Zona 2 a equação da carga de flambagem muda para:

$$P_{cr} = \frac{T_i}{C_{11}} \quad (2.60)$$

e a protensão ótima dada por:

$$T_{opt} = P_{\max} C_{11} \quad (2.61)$$

A carga de flambagem na Zona 3 é governada pela seguinte equação:

$$P_{cr} = (P_{\max} - 2T_i \cos \alpha) C_{22} \quad (2.62)$$

onde:

$$C_{22} = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{K_c \left( \frac{1}{K_s} + \frac{2\text{sen}^2 \alpha}{K_{ca}} \right)} \quad (2.63)$$

A protensão residual nas Zonas 1 e 2 deve ser igual a zero, mas na Zona 3 esse valor pode ser calculado através da equação (2.64).

$$T_r = T_i - (P_{\max} - 2T_i \cos \alpha) C_3 \quad (2.64)$$

Neste caso da coluna estaiada no plano, a constante  $C_3$  não é alterada sendo o mesmo obtido na equação (2.55). E a máxima protensão possível é obtida através da equação (2.65).

$$T_{\max} = \frac{P_{\max}}{2 \cos \alpha} \quad (2.65)$$

Hafez et al. [5] realizaram uma série de testes em uma coluna estaiada com dois painéis, bi-dimensional, para verificar as relações entre a protensão inicial e a sua correspondente carga de flambagem (Figura 2.5). O comprimento da coluna tinha 3,05 m, e o comprimento de cada barra perpendicular a coluna tinha 305 mm. A coluna e as barras perpendiculares tinham a mesma seção transversal e as mesmas propriedades mecânicas. O diâmetro externo do tubo de aço era de 38,1mm e o diâmetro interno de 25,4 mm. O módulo de elasticidade adotado era de 201000 MPa, a tensão de escoamento de 338 MPa e a tensão de ruptura de 483 MPa. Para os estais foram utilizadas barras de aço de 3,18 mm de diâmetro com tensão de ruptura de 614 MPa e um módulo de elasticidade de 202000 MPa. A comparação dos resultados é observada na Figura 2.6.

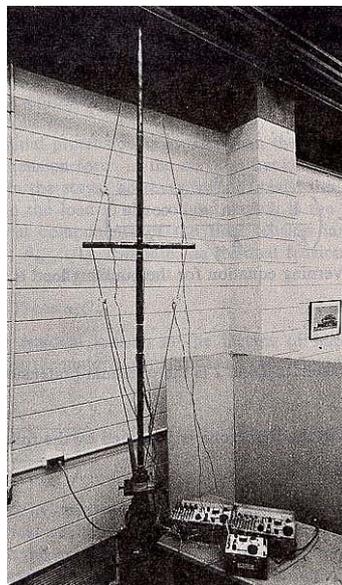


Figura 2.5 Ensaio bi-dimensional da coluna estaiada protendida com dois painéis.

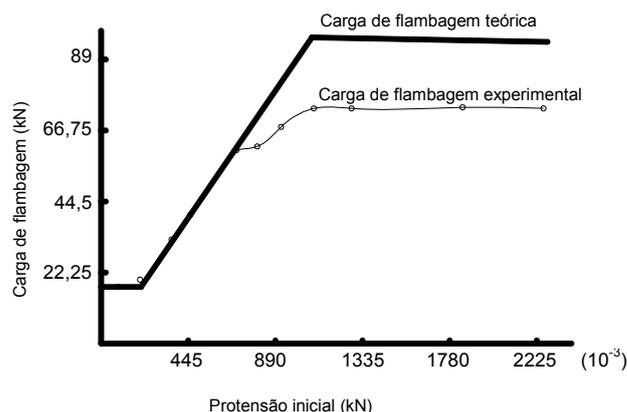


Figura 2.6 Comparação entre a carga de flambagem teórica e a experimental.

## 2.3

### Estudo da coluna estaiada por Wong e Temple [6]

No estudo anterior (item 0) Hafez et al. [5] apresentou um resultado experimental 20% inferior ao valor atingido no resultado teórico. Um dos principais motivos para tal diferença entre os resultados teórico e experimental pode ser explicado devido a presença de uma imperfeição inicial da coluna principal. Em uma coluna estaiada real a presença da imperfeição pode causar uma diferença considerável quanto a determinação da sua carga crítica (ou de flambagem). Sendo assim, Wong e Temple [6] estudaram o efeito da imperfeição inicial no valor da carga crítica de uma coluna estaiada. Foi utilizada uma análise não-linear em conjunto com o método dos elementos finitos para determinação da sua carga crítica, sendo o comportamento não-linear da coluna, analisado através do processo de Newton-Raphson. Quando o efeito da imperfeição inicial no centro da coluna principal,  $\Delta_m$ , (Figura 2.7) foi incluído na formulação do estudo anterior, realizado por Hafez et al.[5], uma boa concordância entre os resultados teórico e experimental foi obtida.

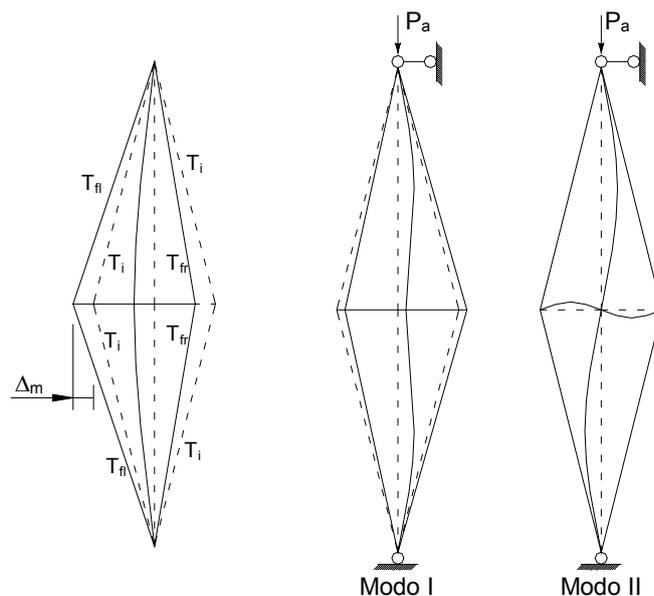


Figura 2.7 Coluna estaiada com o efeito da imperfeição inicial e seus modos de flambagem.

Baseando-se inicialmente na análise geométrica do procedimento anterior e levando em consideração a imperfeição inicial da coluna estaiada, a tensão final nos estais é:

$$T_{fl} + T_{fr} = 2T_i - \frac{P_a}{\cos \alpha \left( \frac{1}{K_s} + \frac{\cos^2 \alpha}{K_c} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{K_{ca}} \right)} \quad (2.66)$$

$$T_{fl} - T_{fr} = 2\Delta_m \sin \alpha \frac{1}{\left( \frac{1}{K_s} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{K_{ca}} \right)} \quad (2.67)$$

onde  $T_i$  é a protensão inicial nos estais;  $T_{fl}$  e  $T_{fr}$  são as tensões finais nos estais do lado convexo e do lado côncavo respectivamente da coluna estaiada (caso a imperfeição seja para a esquerda);  $P_a$  é a carga aplicada na coluna;  $K_c$  é a rigidez axial da coluna principal;  $K_{ca}$  é a rigidez axial das barras perpendiculares a coluna central;  $K_s$  é a rigidez axial dos estais; e  $\Delta_m$  é a imperfeição inicial adotada no vão central da coluna estaiada.

Utilizando o mesmo modelo experimental realizado por Hafez [5], vários testes foram realizados em uma coluna estaiada de dois painéis, bi-dimensional,

para verificar as relações entre a protensão inicial e a sua correspondente carga de flambagem (Figura 2.8), levado em consideração o efeito da imperfeição inicial.

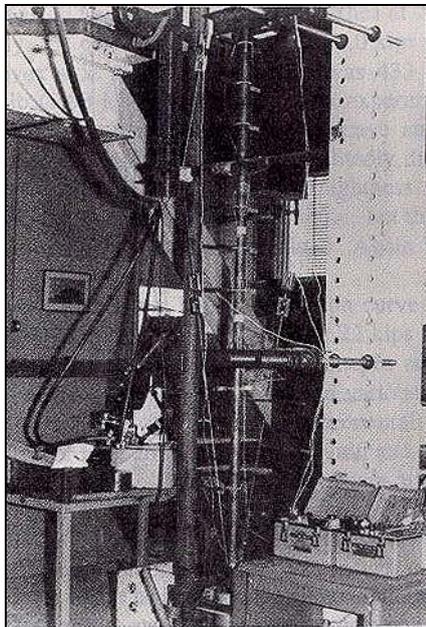


Figura 2.8 Modelo experimental da coluna estaiada realizado por Wong e Temple [6].

A relação entre a carga de flambagem e a protensão inicial é apresentada na Figura 2.9 onde são incluídos os resultados experimentais do modelo e os resultados teóricos de ambas as colunas: ideal e real.

Como esperado, os resultados experimentais são melhores comparados com os resultados teóricos de uma coluna estaiada real, do que com os resultados teóricos de uma coluna estaiada ideal. A diferença percentual entre os resultados teórico e experimental de uma coluna estaiada ideal variou entre 11% e 21%, enquanto que a diferença entre os resultados teórico e experimental de uma coluna estaiada real foi reduzida para 5% a 9%.

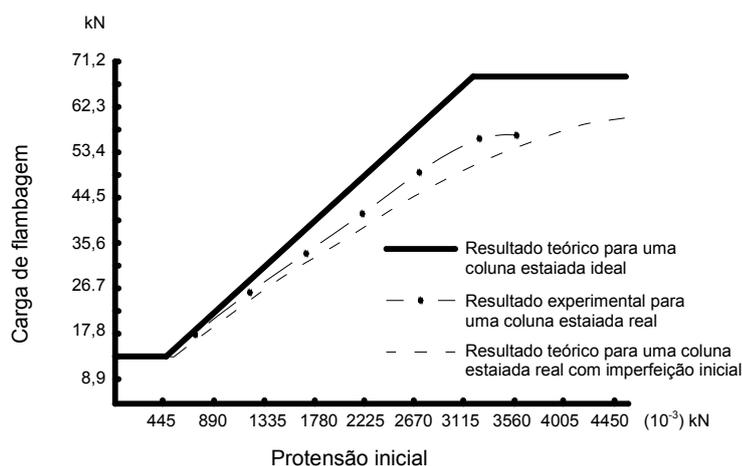


Figura 2.9 Carga de flambagem teórica e experimental versus a protensão inicial.

## 2.4 Estudo da coluna estaiada por Chan [7]

No estudo de Chan [7] do comportamento de uma coluna estaiada, foi utilizado um novo elemento como cabo sobe alta tensão: o “pointwise equilibrium polynomial – PEP”. Usando o procedimento desenvolvido, foi estudado o comportamento da coluna estaiada com diferentes comprimentos, imperfeição inicial e força de protensão nos estais. Para tal, foi utilizado um programa versátil de elementos finitos, NIDA [12], onde o elemento PEP foi implementado. Através deste programa, foram realizadas análises estruturais de estabilidade e um estudo não-linear de colunas estaiadas.

Para efeito desse estudo, foram consideradas algumas suposições:

- Os estais permanecem linearmente elásticos no curso da protensão e do carregamento (caso uma compressão seja detectada pela análise, o elemento é removido do modelo);
- As ligações são assumidas rígidas entre a coluna central e as barras perpendiculares a coluna central e rotuladas entre os estais e a coluna central e entre as barras perpendiculares;
- A coluna estaiada é completamente simétrica e carregada axialmente sem excentricidade;
- O tipo de imperfeição inicial é convenientemente assumido para ser a expressão  $v_0 = v_{m0}(1-t^2)$  na qual  $t = 2x/L$  (Figura 2.10),  $v_0$  é a

imperfeição inicial lateral,  $v_{m0}$  é a amplitude da imperfeição inicial que é igual a magnitude da imperfeição no meio do vão da coluna.

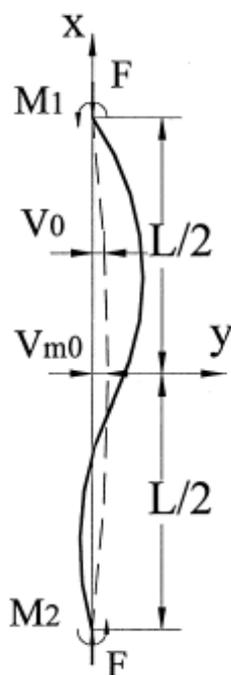


Figura 2.10 Aplicação do modelo para imperfeição inicial no elemento [7].

Também não foi levada em consideração, neste estudo, a flexão por torção na coluna estaiada. De acordo com as várias magnitudes de imperfeições iniciais do Tipo I e do Tipo II (Figura 2.11) a correspondente carga última de protensão no estágio de protensão é calculado. A relação entre a deformação lateral e o deslocamento axial é apresentado, respectivamente, na Figura 2.12 e na Figura 2.13. Observa-se nestes gráficos que o incremento na imperfeição inicial resulta na redução na carga última de protensão para ambos os modos de flambagem (Tipo I e Tipo II). Quando o valor da imperfeição inicial na coluna principal é pequeno, a carga última de protensão tende a máxima tensão admissível,  $T_{max}$ . Para uma coluna do Tipo I com imperfeição inicial de  $v_{m0} = 2.0$  mm ( $v_{m0}/L = 1/1525$ ), a carga de flambagem para o Modo I é de 127,1 kN, considerando que a carga ideal de flambagem para esse tipo de coluna estaiada é de 136,6 kN. Similarmente, para uma coluna estaiada imperfeita do Tipo II com uma imperfeição inicial de  $v_{m0} = 1,41$  mm, a carga de flambagem para o Modo II é de 125,75 kN, um pouco abaixo de 128,1 kN que é o valor da carga de flambagem de uma coluna estaiada ideal.

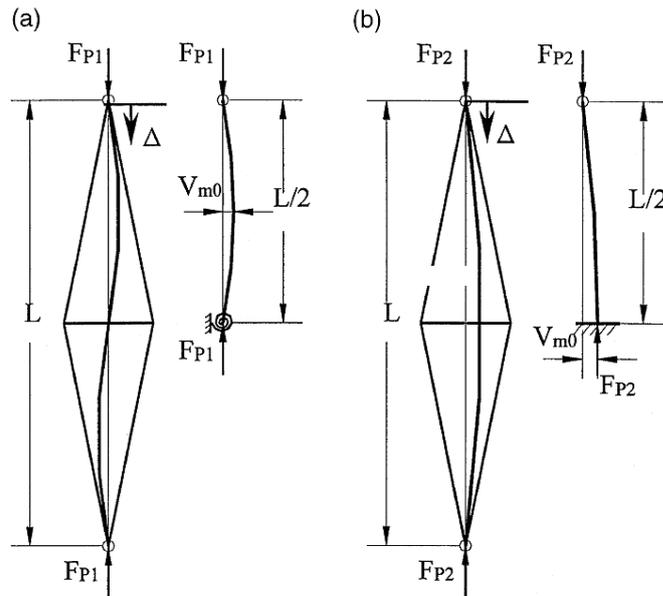


Figura 2.11 Tipos de imperfeições iniciais [7].

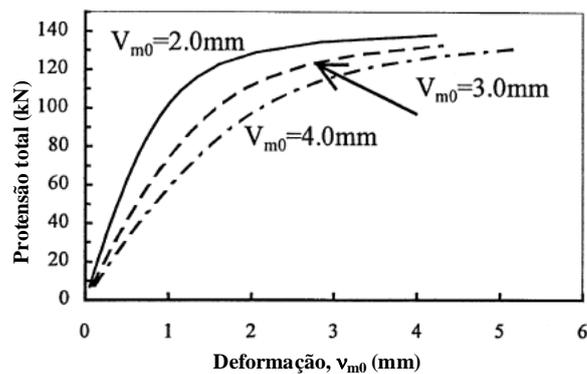


Figura 2.12 Gráfico da deformação lateral pela carga total de protensão [7].

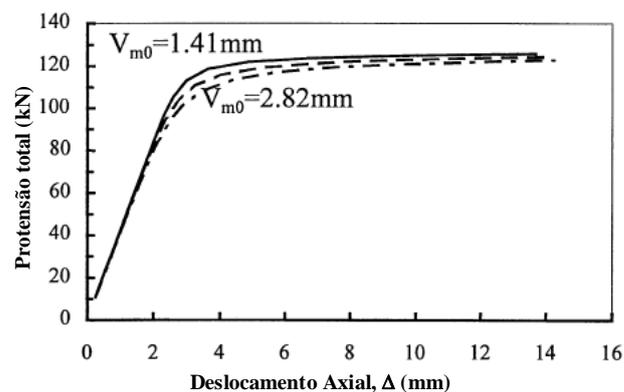


Figura 2.13 Gráfico do deslocamento axial pela carga total de protensão [7].

O gráfico da Figura 2.14 apresenta a relação entre carga de flambagem e a protensão inicial na coluna estaiada do Tipo I levando-se em consideração a imperfeição inicial. Uma imperfeição inicial grande faz com que a coluna tenha

uma carga de flambagem muito pequena. Para a protensão ótima de 17,67 kN em uma coluna perfeita, a sua carga de flambagem é de 134,0 kN. Ao se levar em consideração a imperfeição inicial de 2,0 mm, a carga de flambagem reduz para 113,5 kN e para a imperfeição de 3,0 mm, a carga de flambagem é de 104,1 kN. Nota-se que uma imperfeição relativamente pequena causa uma redução na carga de flambagem considerável.

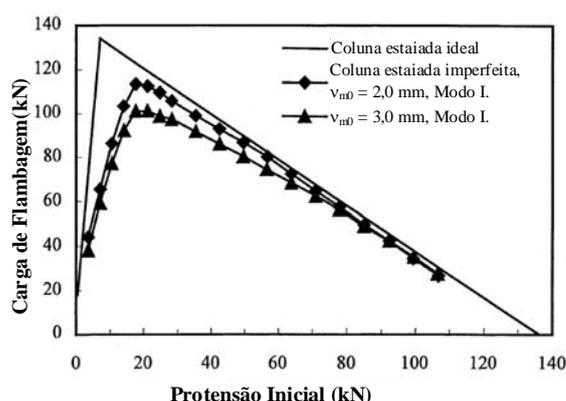


Figura 2.14 Gráfico da relação entre a carga de flambagem e a protensão inicial[7].

Esta redução chega ao máximo quando a protensão inicial tende a protensão ótima e se não for incluída nas análises, a imperfeição inicial, os resultados teóricos obtidos são não conservativos.

Como principal conclusão de sua pesquisa, Chan [7] observou que a comparação entre os resultados teóricos e experimentais indicaram que o elemento PEP disponível para imperfeição inicial e um procedimento iterativo incremental podem determinar com precisão o comportamento não-linear de uma coluna estaiada imperfeita.

## 2.5

### Estudo da coluna estaiada por Jan Van Steirteghem [13]

Em seu estudo, Steirteghem propôs um sistema de restrição duplo na coluna estaiada, como apresenta a Figura 2.15, onde foi realizado um estudo numérico bidimensional. As barras deste sistema de restrição podem estar fixadas ou rotuladas na coluna central. Para realização deste processo numérico utilizou-se o conceito de indicador de volume  $W$ . O indicador de volume é uma ferramenta de projeto na qual permite a otimização de estruturas para um critério escolhido, no caso o volume de material, num estágio inicial e usando somente um quantidade limitada de parâmetros. Quando uma coluna estaiada é

projetada,  $W$  pode ser usado para estimar a eficiência da morfologia escolhida comparada às outras colunas projetadas para transmitir a mesma carga.

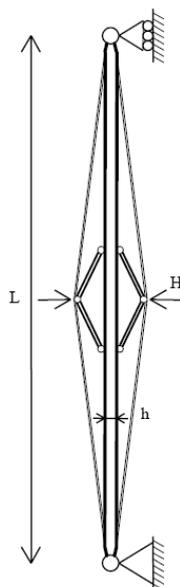


Figura 2.15 Modelo de restrição da coluna estaiada.

Dada uma estrutura caracterizada por sua morfologia e proporções apresentando um volume de material  $V$  quando carregada por um sistema de forças na qual sua resultante é  $F$ , sua principal dimensão é  $L$  e composta de material na qual a tensão  $\sigma$  é admissível. O parâmetro  $W$  pode ser definido como o volume de material de uma estrutura homotética e morfologicamente idêntica, carregada com uma carga de 1 N, com comprimento principal de 1 m e composta de material com uma tensão admissível de 1 Pa sendo escrito pela fórmula (2.68) apresentada a seguir:

$$W = \frac{\sigma V}{FL} \quad (2.68)$$

Os parâmetros de projeto no caso de colunas são a carga  $F$  e o comprimento  $L$ , através do qual a carga tem sido transmitida. Para uma coluna bi-apoiada, a tensão crítica de flambagem pode facilmente ser obtida através da fórmula (2.69):

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/\rho)^2} \quad (2.69)$$

O termo  $\rho^2$  é um número dimensional e conseqüentemente não pode ser considerado como um parâmetro de forma. É apropriado substituí-lo por um número adimensional dependendo somente das propriedades geométricas da seção transversal. O parâmetro de forma  $q$ , que é uma medida de sensibilidade a flambagem da seção, é obtida através da equação (2.70)

$$q = \frac{A_c \phi_c^2}{I_c} \quad (2.70)$$

onde,  $A_c$  é a área da seção transversal da coluna,  $\phi_c$  é o diâmetro externo da coluna e  $I_c$  é a inércia da coluna. Sendo assim, a equação (2.69) pode ser reescrita da seguinte maneira.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \phi_c^2}{L^2 q} \quad (2.71)$$

Utilizando o indicador de volume de uma coluna simples, a falha devido a flambagem pode ser estabelecida usando a equação (2.68):

$$W = \frac{\sigma V}{P_{cr} L} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\sigma}{E} q \left( \frac{L}{\phi_c} \right)^2 = \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \quad (2.72)$$

na qual obtém-se:

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma}{W} \quad (2.73)$$

Onde  $W$  controla a tensão e conseqüentemente a eficiência estrutural da coluna. Observa-se na equação (2.73) que, para parâmetros constantes de material e comprimento, a tensão crítica admissível aumenta proporcionalmente com a redução do parâmetro  $q$ . Isto significa que a razão  $\phi/t$ , onde  $t$  é a espessura da parede de um tubo, deve ser tão grande quanto possível, desde que não ocorra flambagem local da seção.

O estudo está limitado em um tubo circular de aço com os parâmetros de seção transversal  $\phi_c$ , espessura de parede do tubo  $t$ , área dos estais  $A_s$ , área

dos braços Aca, carga de protensão  $T$  e ângulo de abertura entre os braços  $\beta$ . Sendo assim, para determinação da eficiência da coluna estaiada, foram realizadas duas tentativas: a primeira leva em consideração a constante de volume de material e o valor da máxima carga de flambagem; e a segunda considera uma dada carga de flambagem e o mínimo valor de volume de material necessário para sustentá-la.

Assume-se que a deformação axial dos braços não é considerada nas análises. As ligações entre os braços e a coluna principal pode ser uma rótula ideal ou engastada. As ligações entre os estais e os braços são rotulados. Não foi levada em consideração a imperfeição inicial na coluna principal. A coluna principal foi considerada como perfeitamente rotulada nas extremidades.

Assume-se que os estais permanecem ativos até que a carga de flambagem seja atingida. Para tal, foi calculado a carga de protensão ótima através do estudo de Hafez [5] e aplicada nos estais. A determinação da carga crítica da coluna é realizada através do método dos elementos finitos baseada na análise de autovalores. Os modos de flambagem estudados estão apresentados na Figura 2.16.

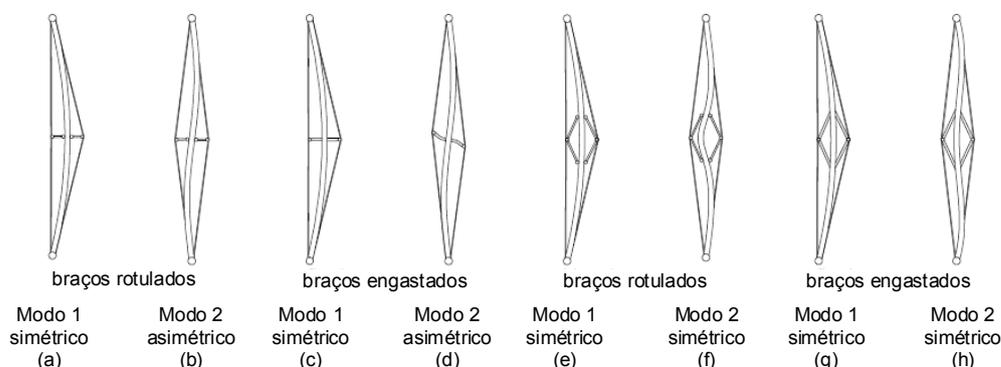


Figura 2.16 Modos de flambagem para as diferentes colunas estaiadas estudadas [13].

O primeiro modo de flambagem ocorre de maneira similar em quatro colunas (Figura 2.16 (a), (c), (e) e (g)) com deslocamento lateral no centro do vão. Já nas outras quatro colunas o mesmo ocorre de uma maneira distinta. Pelo autor, nas colunas (b) e (f) observa-se que a deformação está mais concentrada no centro do vão, sendo fácil discordar, pois na coluna (b) esta deformação ocorre próximo ao quarto do vão da coluna gerando a curvatura do segundo modo de flambagem de colunas. O mesmo caso pode ser explicado para as colunas (d) e (h) onde as curvaturas das colunas são diferentes devido aos pontos de restrição na coluna principal.

Para a análise numérica foi utilizada uma coluna tubular de aço com 4,9 m de comprimento, diâmetro de 57,2 mm e espessura da parede do tubo de 12,7 mm. A seção dos braços varia de acordo com a ligação braço-coluna. Se a ligação for engastada, a seção transversal do braço é a mesma utilizada na coluna principal, caso a ligação seja rotulada, a seção transversal do braço passa a ser uma barra circular de aço com 20 mm de diâmetro externo inicialmente. Os cabos de aço usados como estais tem um diâmetro externo de 11 mm inicialmente. Ambos (braços com ligações rotuladas e estais) tiveram modificações para atender às respectivas considerações:  $3 \leq A_c/A_{ca} \leq 30$  e  $1 \leq A_c/A_s \leq 10$ . O comprimento do braço foi adotado inicialmente com 0,82 m para se obter uma esbeltez de  $L/H$  igual a seis (Figura 2.15), na qual é modificado para cobrir a faixa de  $1 \leq L/H \leq 10$ . Quando as colunas com a utilização do sistema de travamento com braços na diagonal, o valor inicial da razão entre distância entre os apoios dos estais nos braços ( $H$ ) e o comprimento da coluna principal ( $\xi$ ) é de 0,3 e modificado para cobrir a variação de  $0.1 < x < 0.5$  (Figura 2.17). O módulo de elasticidade da coluna principal e dos braços é de 204 GPa e dos estais foi assumido como 65 GPa.

A Figura 2.17 ilustra que o valor máximo atingido para a carga de flambagem da coluna com um sistema de travamento rotulado ocorre para a razão ( $\xi$ ) de 1/3. Isto corresponde a um comprimento de flambagem de  $L/3$  e a máxima carga obtida é de 9 (nove) vezes o valor da carga de Euler. Se a ligação entre os braços e a coluna principal for soldada, a razão será de:

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \quad (2.74)$$

A Figura 2.18 apresenta o modo de flambagem para a coluna com o sistema de travamento dos braços na coluna principal engastados. A máxima carga teórica de flambagem conseguida para os braços infinitamente rígidos foi de 23.2 PE. Todavia, é razoavelmente aceito que a seção transversal dos braços nunca ultrapassará o diâmetro externo da coluna principal, onde uma carga de flambagem de 15 PE pode ser conseguida.

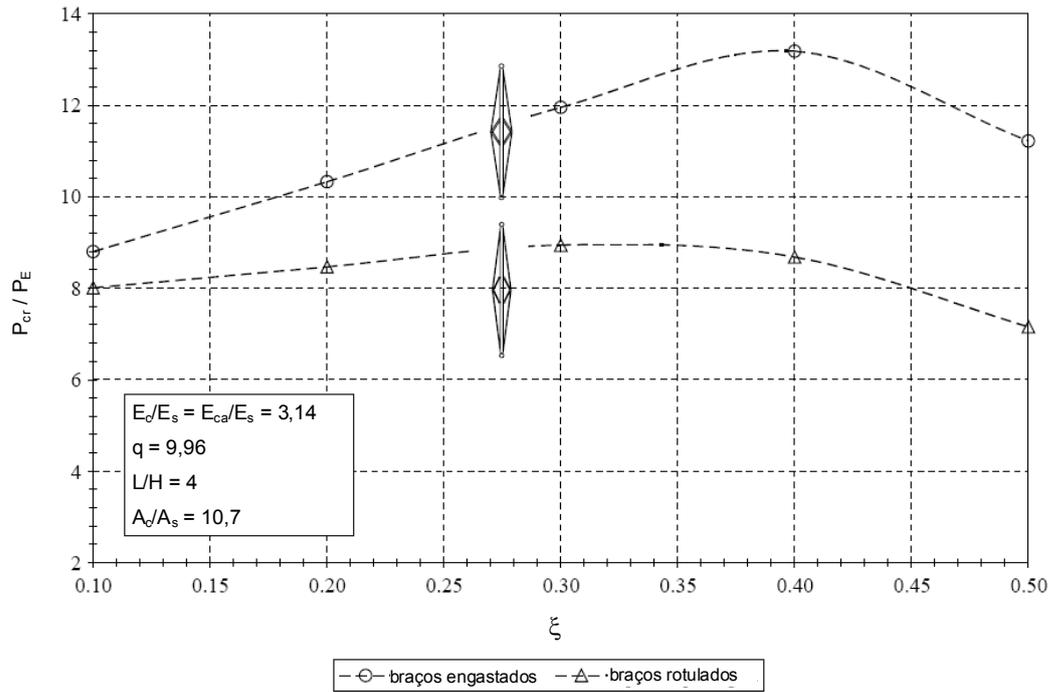


Figura 2.17 Efeito do ângulo de abertura entre os braços [13].

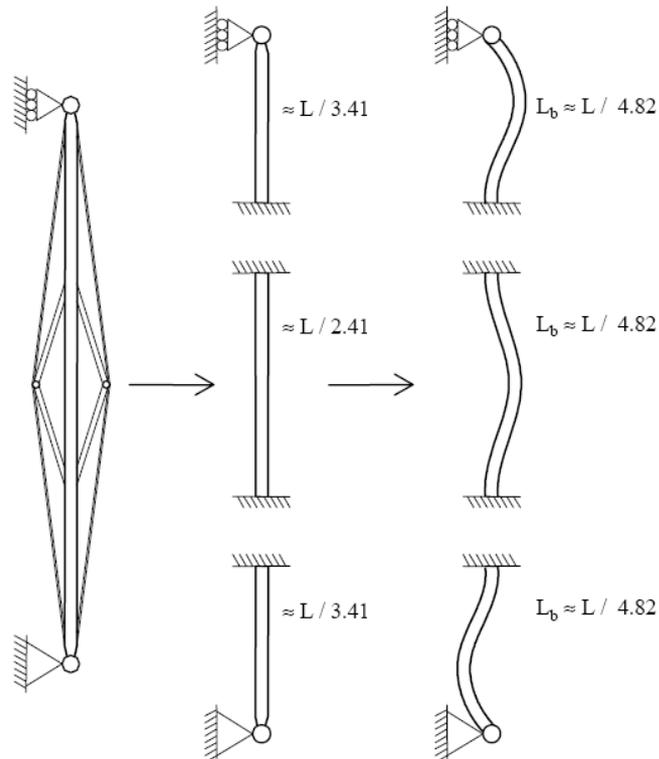


Figura 2.18 Modo de flambagem da coluna com o sistema de travamento na diagonal [13].

## 2.6 Estudo da coluna estaiada por Saito [9-11]

Os trabalhos analíticos desenvolvidos por Saito [9-11] são os mais completos nesta área analítica de colunas estaiadas. Saito [9-11] conseguiu abranger quase todos os efeitos que ocorrem na coluna principal.

Em seu primeiro trabalho [9] é abordado o efeito da pós-flambagem na coluna estaiada. Onde, um dos métodos para formular a modelagem da coluna estaiada é através da energia potencial total em conjunto com o método de Rayleigh-Ritz [14]. A energia potencial total foi desenvolvida como um sistema de múltiplos graus de liberdade. As equações de equilíbrio algébricas foram retiradas através da minimização da energia potencial total usando o programa de computação simbólica MAPLE [15]. Como forma de comparação dos resultados, utilizou-se a modelagem numérica através do programa de cálculo estrutural ABAQUS [16].

A modelagem analítica teve algumas considerações:

- A coluna é simplesmente apoiada;
- As ligações são assumidas rígidas entre a coluna central e as barras perpendiculares a coluna central, e rotuladas entre os estais e a coluna central, e entre as barras perpendiculares;
- A coluna estaiada é carregada axialmente sem excentricidade e perfeitamente reta (sem imperfeições);
- São ignoradas as deformações axiais dos braços e a deformação por flexão dos estais;
- Os estais afrouxam no instante em que entram em compressão, pois não têm resistência a compressão;
- A análise é puramente elástica, já que a relação tensão-deformação é completamente linear no momento do afrouxamento dos estais (como poderá ser observado no capítulo cinco desta tese, a coluna tem um comportamento não-linear desde o início);
- Alteração na geometria devido à aplicação da protensão é ignorada.

Neste ponto, Saito [9-11] descreve que alterações na geometria devido à protensão não causam efeito significativo até a carga de protensão atingir o mesmo nível da carga de Euler da coluna. Mais um ponto onde não é verdadeira esta consideração, pois a protensão dos estais aumenta ainda mais o nível de

imperfeição inicial da coluna principal, também observado nos resultados experimentais obtidos no laboratório (capítulo 5 desta tese).

Também foram considerados dois modos de flambagem para a coluna estaiada. Um modo simétrico (Modo 1,  $W_1(x)$ ) e um modo assimétrico (Modo 2,  $W_2(x)$ ) em relação ao ponto médio da coluna, como apresentado na Figura 2.19.

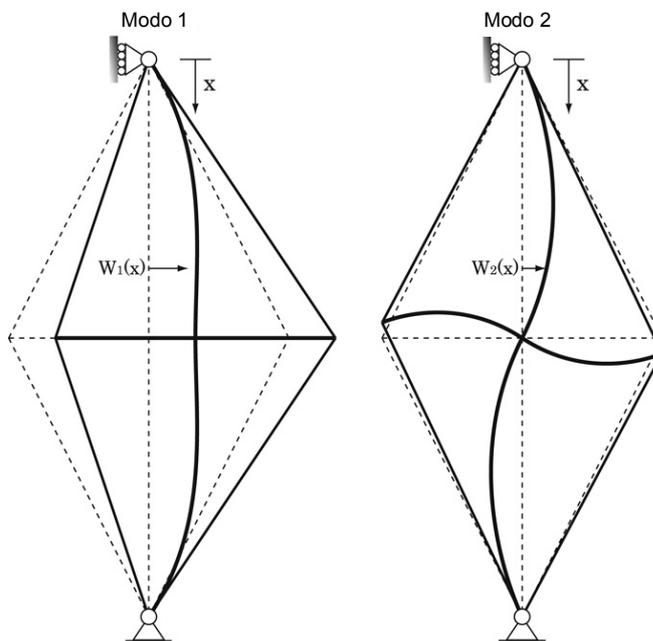


Figura 2.19 Modos de flambagem da coluna com simétrico e assimétrico [9].

Estes são os possíveis modos de deformação devido à flambagem para a coluna estaiada com um simples sistema de travamento no centro do vão.

Os modos de deformação dos braços e a função para o encurtamento da extremidade da coluna dependem do estado de tensão dos estais, apresentados na Figura 2.20. Estes tipos são considerados conforme a seguir:

- Tipo A - todos os estais afrouxam;
- Tipo B - todos os estais estão ativos;
- Tipo C - dois estais estão ativos;

O Tipo A ocorre quando uma pequena carga de protensão é aplicada aos estais. O Tipo B ocorre quando a carga de protensão inicial é suficiente para permitir que os estais não afrouxem até a flambagem da coluna. O Tipo C de flambagem pode ocorrer após o Tipo A, Tipo B ou o estado inicial (sem protensão).

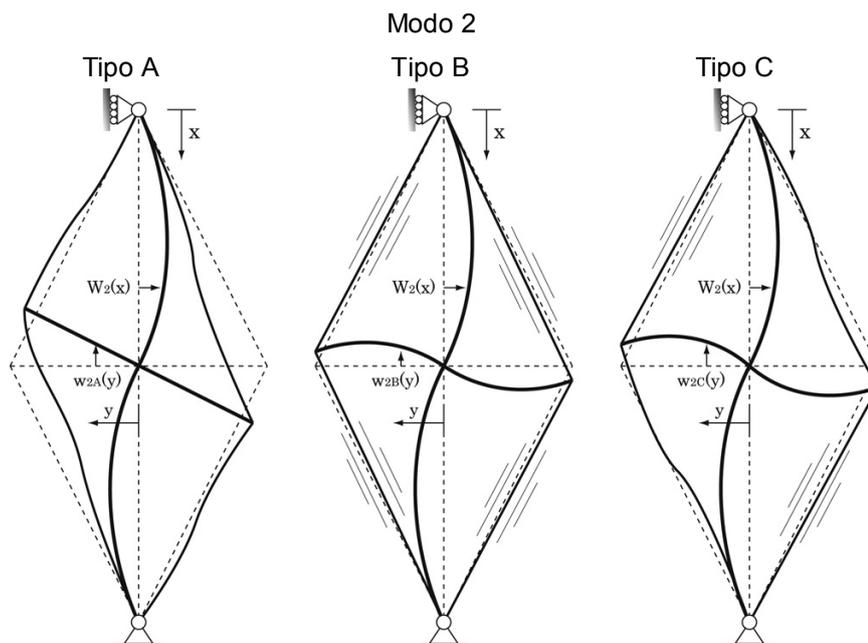


Figura 2.20 Tipos de flambagem n Modo 2 [9].

A formulação da energia potencial total ( $V_{ix}$ ) abrange componentes da energia de deformação e do trabalho realizado pela carga externa. No estado geral de deformação, existem quatro componentes de energia: advindas da flexão da coluna ( $U_{cbi}$ ) e dos braços ( $U_{abiX}$ ), e da deformação axial da coluna ( $U_{caiX}$ ) e dos estais ( $U_{siX}$ ). É importante lembrar que a energia de deformação advinda da flexão dos braços só existe no Modo 2 (Figura 2.20) de flambagem dos Tipo B e C. O componente de flexão da energia da coluna provém da expressão linear da curvatura,

$$U_{cb1} = \frac{1}{2} EI \int_0^L W_1'^2(x) dx - U_{cb0} = \sum_{m=1}^n \frac{(2m-1)^4 EI q_{2m-1}^2 \pi^4}{4L} - U_{cb0} \quad (2.75)$$

$$U_{cb2} = \frac{1}{2} EI \int_0^L W_2'^2(x) dx - U_{cb0} = \sum_{m=1}^n \frac{(2m)^4 EI q_{2m}^2 \pi^4}{4L} - U_{cb0} \quad (2.76)$$

onde  $U_{cb0}$  é a energia de flexão da coluna existente no início de cada tipo de flambagem. Do mesmo modo, a energia de flexão dos braços para os Tipo B e C pode ser obtida:

$$\begin{aligned}
U_{ab2X} &= E_a I_a \int_0^a w_{2x}''^2(y) dy - U_{ab0} \\
&= E_a I_a k_B^3 \left\{ 2H_X K_X - H_X^2 \cos(k_X a) \operatorname{sen}(k_X a) \right. \\
&\quad + H_X^2 k_X a - 2H_X K_X \cos^2(k_X a) \\
&\quad \left. + K_X^2 \cos(k_X a) \operatorname{sen}(k_X a) + K_X^2 k_X a \right\} / 2 - U_{ab0}
\end{aligned} \tag{2.77}$$

onde  $U_{ab0}$  é a energia de flexão do braço existente no início de cada tipo de flambagem. A energia axial  $U_{caiX}$  na coluna considera a energia obtida através da compressão axial da carga externa  $P$  junto com o efeito da relaxação do deslocamento advindo da flambagem.

$$U_{caiX} = \int_{\varepsilon_{cx0}}^{\varepsilon_{ciX}} EAL \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} EAL (\varepsilon_{ciX}^2 - \varepsilon_{cx0}^2) \tag{2.78}$$

onde  $\varepsilon_{cx0}$  é a deformação existente no início de cada tipo de flambagem. A energia axial  $U_{siX}$  nos estais é obtida pela integração da relação tensão-deformação sobre o volume do estai escrito como o produto da área da seção transversal do estai ( $A_s$ ) e do comprimento do estai ( $L_s$ ).

$$U_{siX} = \sum_{j=1}^4 U_{siXj} = \sum_{j=1}^4 \int_{\varepsilon_{sx0}}^{\varepsilon_{siXj}} A_s L_s \sigma(\varepsilon_{siXj}) d\varepsilon \tag{2.79}$$

onde  $U_{siXj}$  é a energia de deformação armazenada no estai  $j$  para o Modo  $i$  do Tipo  $X$  sendo  $\varepsilon_{sx0}$  é a deformação existente no início de cada tipo de flambagem. Já o trabalho realizado pela carga  $P_{\varepsilon_{iX}}$  é definida como a carga axial externa multiplicada pelo valor do encurtamento da coluna na extremidade,  $\Delta_{iX}L$  e obtida pela equação abaixo:

$$P_{\varepsilon_{iX}} = P \Delta_{iX} L - P \varepsilon_{0X} \tag{2.80}$$

onde  $P_{\varepsilon_{iX}}$  é o trabalho realizado pela carga antes do início de cada tipo de flambagem. A formulação da energia potencial total advém do somatório das energias anteriormente apresentadas menos  $P_{\varepsilon_{iX}}$ .

$$V_{iX} = U_{cbi} + U_{abi} + U_{caiX} + U_{siX} - P_{\varepsilon_{iX}} \tag{2.81}$$

Na análise do modo 2 do Tipo C, cargas P elevadas são então cortadas já que não contribuem para a formulação da função e deixam a equação intratável. Para o equilíbrio, a energia potencial total deve ser estacionária com respeito as coordenadas generalizadas. Todavia, o caminho para o equilíbrio pode ser computado através da condição:

$$\frac{\partial V_{iX}}{\partial q_m} = 0 \quad (2.82)$$

Saito [9-10] realizou análises numéricas utilizando a mesma coluna estaiada que Hafez [5] usou em seu estudo, obtendo os seguintes resultados para a variação do comprimento do braço (Figura 2.21), variação do diâmetro dos estais (Figura 2.22) e variação do módulo de elasticidade dos estais (Figura 2.23). Os símbolos nos gráficos das figuras a seguir ( $\square$ ), (o) e ( $\diamond$ ) representam os casos de graus de liberdade da estrutura para  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 3$ , respectivamente.

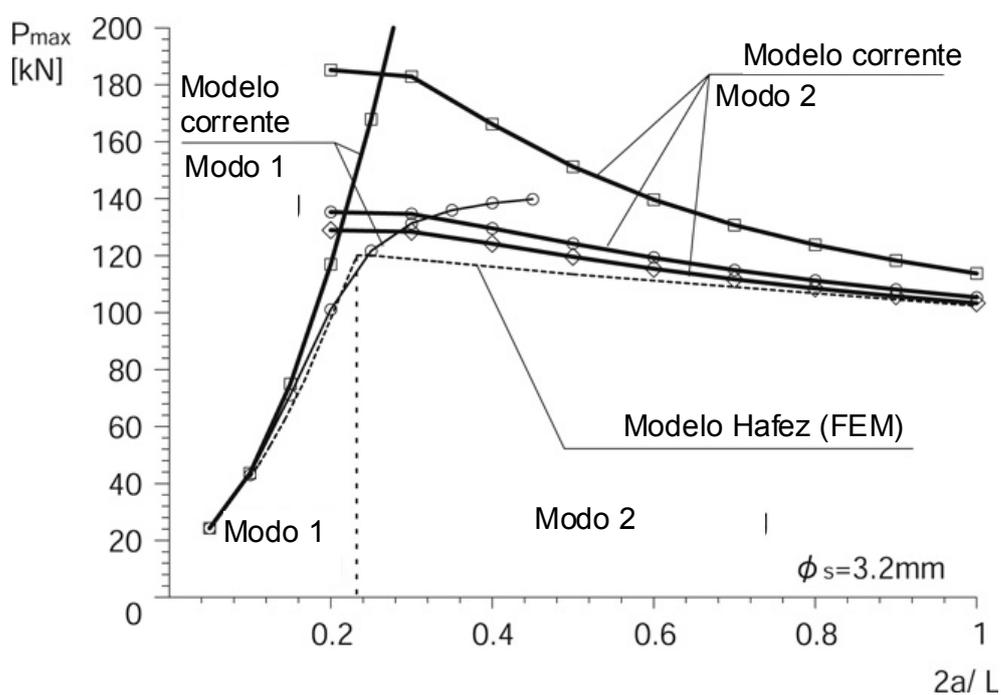


Figura 2.21 Variação do comprimento dos braços.

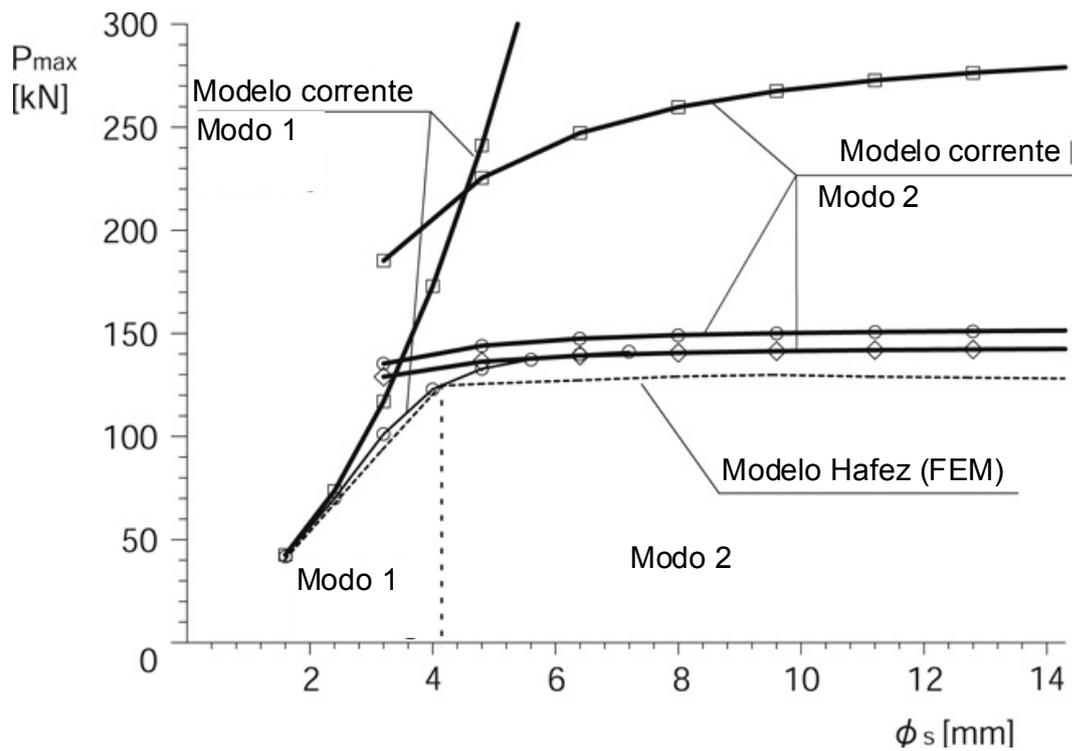


Figura 2.22 Variação do diâmetro dos estais.

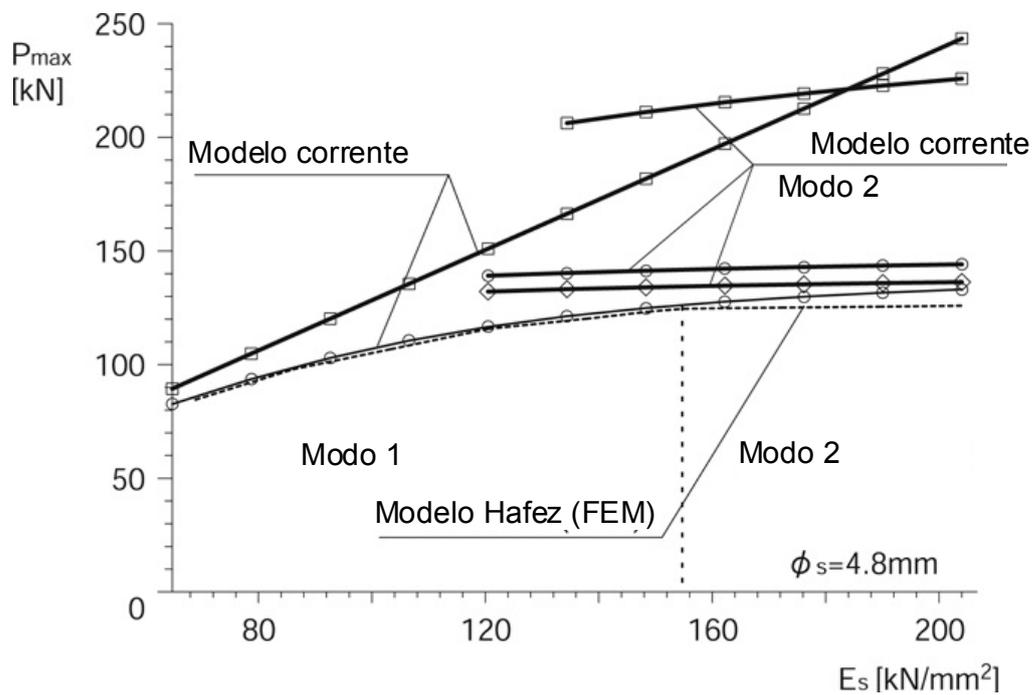


Figura 2.23 Variação do módulo de elasticidade dos estais.

Considerando que a diferença entre os modelos com dois graus de liberdade e três graus de liberdade não é significativa, e que a solução vinda do modelo com dois graus de liberdade encontra-se relativamente próxima da

solução. Os modelos com dois graus de liberdade foram usados para obter razoavelmente soluções precisas para o comportamento pós-flambagem.

A equação (2.82) expressa o estado de equilíbrio após a flambagem que pode ser resolvida usando o programa MAPLE [15]. Para o estudo da pós-flambagem no modelo 1, Saito utilizou somente o cabo com seção transversal de 4,8 mm, onde as cargas críticas versus a protensão inicial para estes estudos são obtidas através da Figura 2.24 e Figura 2.25, respectivamente.

Como apresentado, oito pontos são coletados de cada diagrama para investigar as mudanças no resultado da pós-flambagem como, por exemplo, a variação da imperfeição inicial. O critério de seleção dos pontos é apresentado na Tabela 2.1.

Pontos	Protensão Inicial		
	Critério	Modo 1 (kN)	Modo 2 (kN)
1	0	0.00	0.00
2	$T_{\min}/2$	0.23	0.93
3	$T_{\min}$	0.46	1.86
4	$(T_{\text{opt}} - T_{\min}) / 3 + T_{\min}$	1.47	2.50
5	$2(T_{\text{opt}} - T_{\min}) / 3 + T_{\min}$	2.48	3.14
6	$T_{\text{opt}}$	3.48	3.78
7	$2 T_{\text{opt}}$	6.97	7.55
8	$4 T_{\text{opt}}$	13.93	15.10

Tabela 2.1. Seleção de pontos para investigação da pós-flambagem [9].

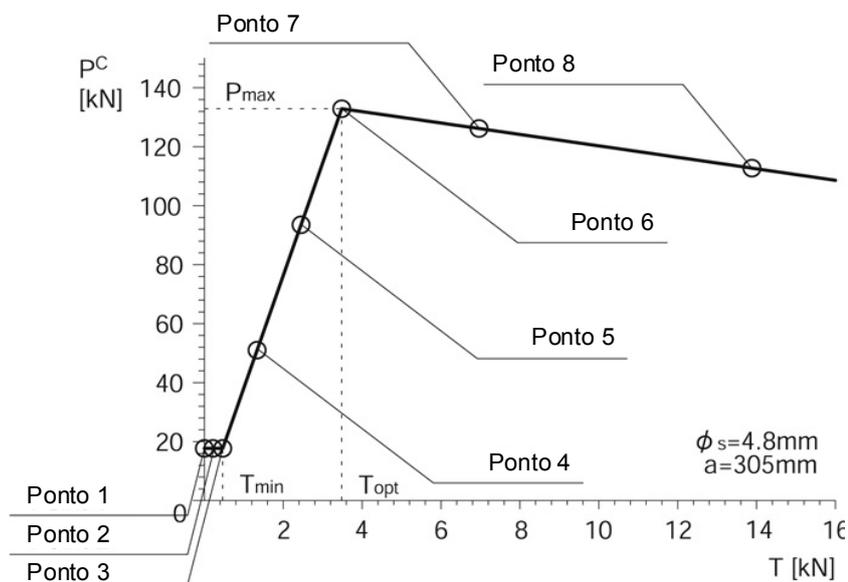


Figura 2.24 Carga crítica  $P_C$  versus protensão inicial  $T$  para o modo 1 [9].

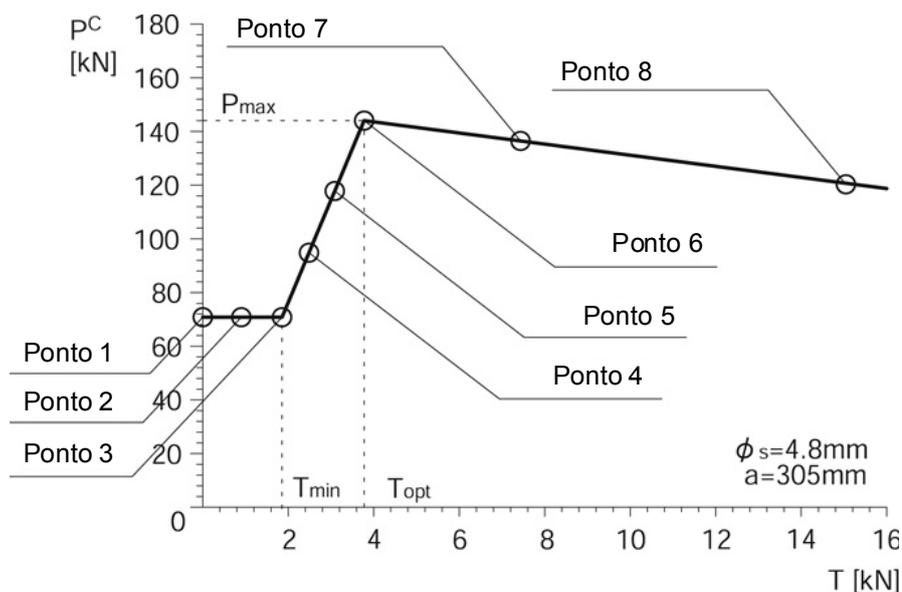


Figura 2.25 Carga crítica  $P_C$  versus protensão inicial  $T$  para o modo 2 [9].

Foi desenvolvido um modelo numérico usando o programa de elementos finitos Abaqus [16] para comparar com os resultados obtidos nas análises realizadas através do modelo analítico. A Figura 2.26 e a Figura 2.27 mostram os resultados da pós-flambagem advindo do modelo numérico em comparação ao analítico para os pontos de protensão inicial 1, 3, 6, 7 e 8 da Tabela 2.1.

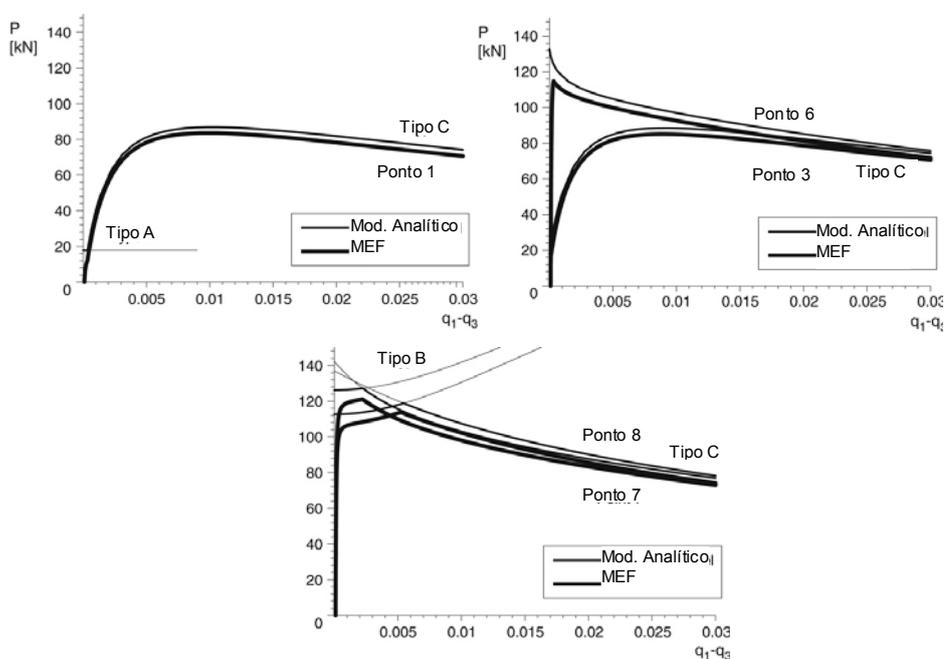


Figura 2.26 Gráficos comparativos para o modo 1 entre o modelo analítico e o modelo de elementos finitos [9].

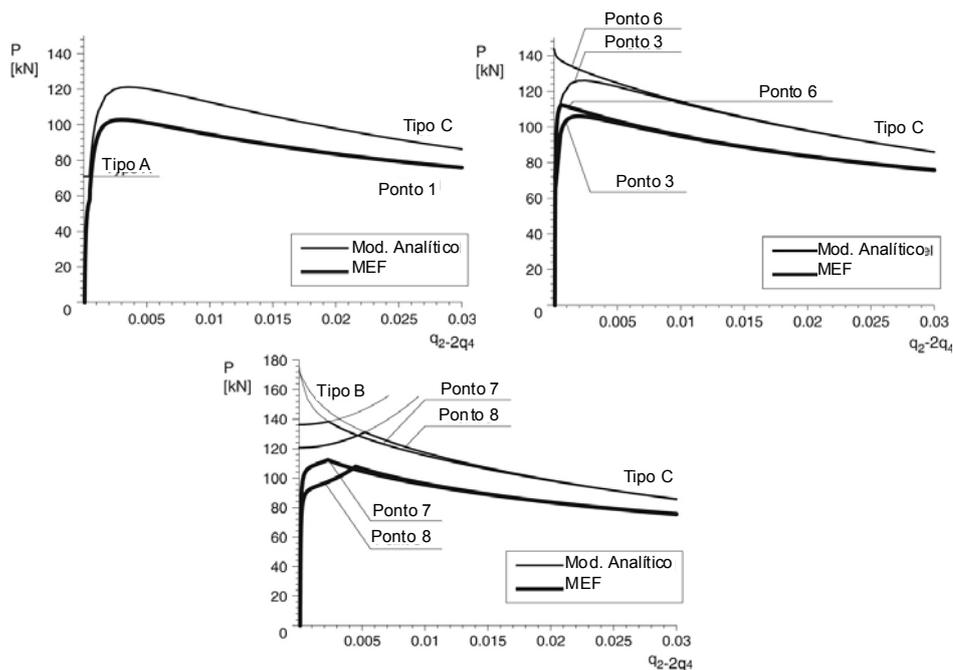


Figura 2.27 Gráficos comparativos para o modo 2 entre o modelo analítico e o modelo de elementos finitos [9].

Saito [9-10] conclui que para o modo 1 de flambagem, a coluna estaiada pode ser modelada como um modelo analítico com dois graus de liberdade com grande precisão, como também pode ser dito que o modelo analítico com dois graus de liberdade para o modo 2 de flambagem obteve uma resposta aproximada. Todavia, tem-se que admitir que a modelagem analítica envolva certa discrepância quando comparada ao modelo numérico, onde esta imprecisão pode ser melhorada aumentando o número de graus de liberdade.

Em seu trabalho mais recente [11] Saito verifica a influência da interatividade dos dois modos de flambagem apresentadas anteriormente. Como a flambagem interativa pode conduzir a instabilidades perigosas, Saito realizou análises não-lineares através do programa de elementos finitos ABAQUS usando a mesma coluna estaiada apresentada. Foi verificado que a flambagem interativa vem a ser o pior caso, com uma redução proporcional na máxima capacidade de carga, quando o maior modo de flambagem governa na resposta da flambagem crítica.

Saito explica que a flambagem interativa é um fenômeno na qual os modos de flambagem com diferentes comprimentos de onda são executados simultaneamente. De fato, a flambagem interativa poderia ocorrer freqüentemente porque se sabe que as cargas críticas do menor e do maior modos de flambagem são próximas.

Os comprimentos de onda estudados foram obtidos através da seguinte equação:

$$W_{\delta}(x) = \delta L \left[ \mu_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + \mu_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \right] \quad (2.83)$$

onde:  $\delta$  representa a amplitude relativa da imperfeição inicial para o comprimento da coluna ( $L$ );  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são os coeficientes para os componentes da imperfeição, expressando uma proporção de cada onda na imperfeição. Foi utilizado nas análises um  $\delta$  de 1/300 recomendado pelo Eurocode 3 [21] para perfis laminados. Os valores da Tabela 2.2 dos coeficientes  $m_1$  e  $m_2$  para descrever as curvas senoidais para a flambagem interativa foram calculados através da equação (2.84) gerando a figura.

Caso	Coeficientes	
	$\mu_1$	$\mu_2$
<b>Modo 1</b>	1,000	0,000
<b>Interação 1</b>	0,750	0,3307
<b>Interação 2</b>	0,500	0,4330
<b>Interação 3</b>	0,250	0,4841
<b>Modo 2</b>	0,000	0,5000

Tabela 2.2. Seleção de combinações de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  para a imperfeição.

$$\mu_1^2 + 4\mu_2^2 = 1 \quad (2.84)$$

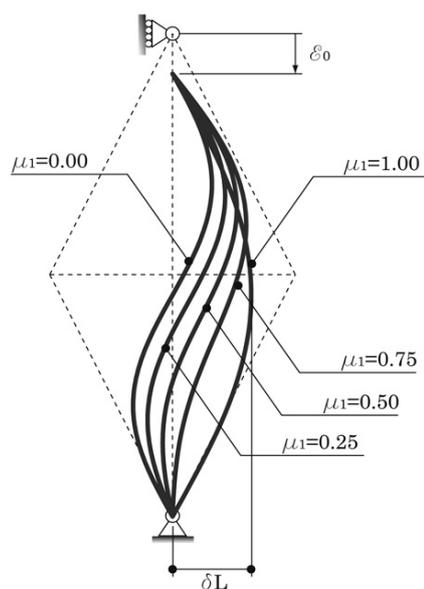


Figura 2.28 Transição das imperfeições para a variação de  $\mu_1$  [11].

Assim sendo, Saito realizou análises numéricas com a mesma propriedades da coluna estaiada utilizada por Hafez[5]. Em seu estudo paramétrico, primeiro foi variado o diâmetro dos estais de 1,6 mm a 10,0 mm com uma classificação de F1 à F6, enquanto os braços permaneciam com um comprimento de 305 mm (10% de inclinação dos estais em relação a coluna principal). Segundo foi variado o comprimento dos braços de 76,25 mm (2,5 % de inclinação dos estais) a 457,5 mm (15 % de inclinação dos estais) classificando como a1 à a6. O comprimento da coluna era fixo com valor de 3,05 m. Os resultados obtidos das análises estão evidenciados na Figura 2.29 e na Figura 2.30.

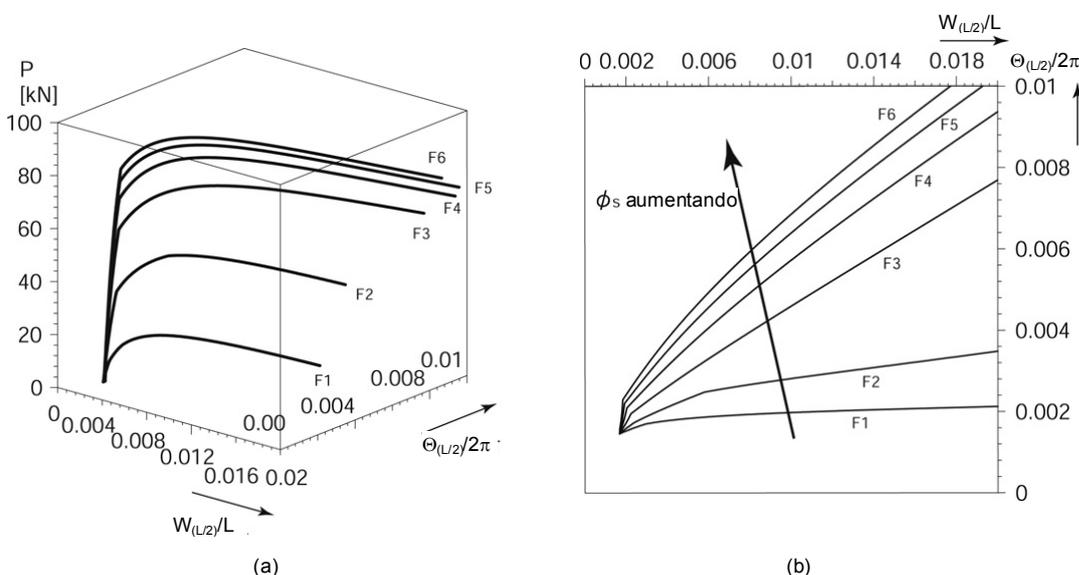


Figura 2.29 Deformação da coluna estaiada para a variação do estais quando utilizado a “Interação 2”: (a) gráfico 3d adimensional apresentando o comportamento da coluna no meio do vão com o aumento da carga; (b) Gráfico adimensional da relação entre a deformação e a rotação no meio do vão da coluna [11].

Saito conclui em seu trabalho que o comportamento da flambagem interativa vem a ser crucial com níveis baixos da máxima capacidade de carga quando o Modo 2 de flambagem é crítico especialmente onde a máxima capacidade de carga para os Modos 1 e 2 coincidem. Porém seus estudos se baseiam em uma modelagem numérica em duas dimensões utilizando uma coluna estaiada com esbeltez da ordem de 270 e usando barras como estais, fazendo com que a rigidez global da estrutura seja muito maior em se comparado, caso fosse utilizado cabos como estais, já que seu módulo de elasticidade é bem menor do que as barras de aço. Como poderá ser visto nos resultados obtidos nos ensaios experimentais e também através da modelagem numérica, nos capítulos 4 e 5

desta tese, é ensaiada experimentalmente uma coluna estaiada com esbeltez da ordem de 400 e também sendo modelada no computador com não-linearidade geométrica e do material em três dimensões.

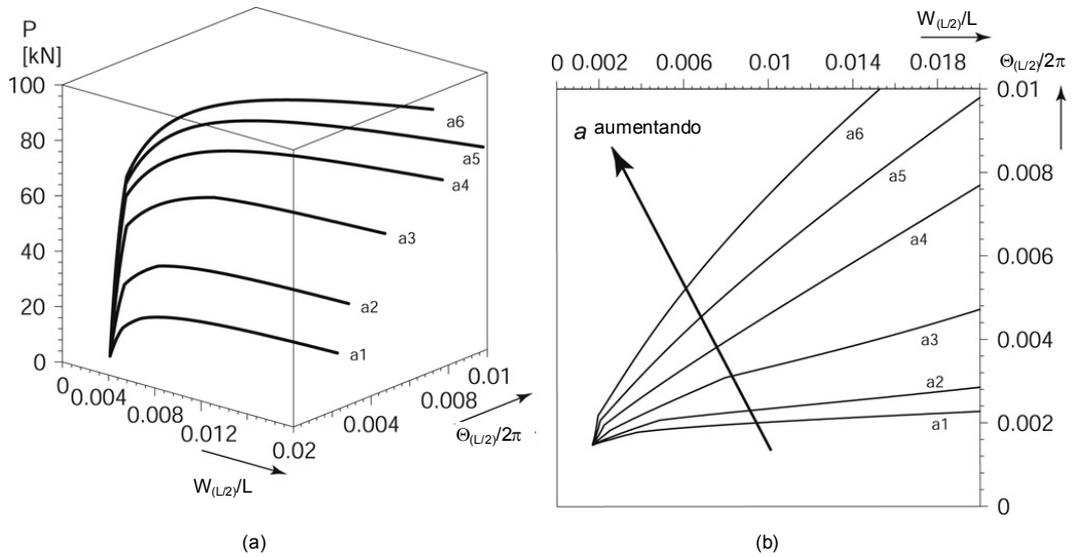


Figura 2.30 Deformação da coluna estaiada para a variação do comprimento dos braços quando utilizado a “Interação 2”: (a) gráfico 3d adimensional apresentando o comportamento da coluna no meio do vão com o aumento da carga; (b) Gráfico adimensional da relação entre a deformação e a rotação no meio do vão da coluna [11].