Tomás Suguinoshita Quirino

**Estrutura esbelta unidimensional sob grandes
deslocamentos e condições de plastificação -
solução numérica**

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Carlos Alberto de Almeida

Rio de Janeiro
Dezembro de 2016

Agradecimentos

Aos meus pais, por toda a confiança e dedicação cedidos a mim desde sempre.

À PUC-Rio, por me dar a oportunidade de cursar todas as disciplinas do curso com bolsa integral de estudos, e por ter sido minha segunda casa nos últimos cinco anos.

Ao professor Carlos Alberto de Almeida, por ter me despertado o interesse em áreas de estudo como Mecânica dos Sólidos e Elementos Finitos, e pela orientação durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Gabriel, pela ajuda no desenvolvimento deste trabalho e presença na minha rotina acadêmica.

À Mariana, por ser a melhor amiga e cúmplice que eu poderia ter ganhado de forma tão espontânea e verdadeira.

À Nathalia, por compartilhar comigo os dilemas do início da vida profissional, e aos tantos outros amigos que tornaram minha rotina de estudante de engenharia mais leve e dinâmica.

À comunidade e aos amigos do Colégio Santo Agostinho, o início de tudo.

À GT2 Energia, que constituiu minha primeira experiência real com problemas de engenharia.

Aos muitos professores que já tive, por terem sido uma primordial fonte de conhecimento e estímulo para que eu prosseguisse sempre meus estudos.

E a Deus, pela experiência da vida e por possibilitar que tudo isso faça algum sentido.

Resumo

Estrutura esbelta unidimensional sob grandes deslocamentos e condições de plastificação - solução numérica

Este trabalho apresenta a estratégia numérica utilizada na simulação do comportamento de estruturas esbeltas unidimensionais sob diversas condições de carregamento, incluindo as condições de grandes deslocamentos e plasticidade. Para isso, foi utilizada uma simulação com o Método dos Elementos Finitos disponível em *softwares* comerciais, e os resultados obtidos foram comparados com soluções analíticas conhecidas. Três casos foram considerados: a) pequenos deslocamentos no regime elástico, b) grandes deslocamentos no regime elástico e c) grandes deslocamentos incluindo a plasticidade. Em todos os casos, a solução por elementos finitos foi validada, escolhido o tipo de elemento mais apropriado para a representação do problema.

Palavras-chave

Estrutura esbelta; Vigas; Método dos Elementos Finitos; Grandes deslocamentos; Plasticidade

Abstract

Slender unidimensional structure under large displacement and plasticity conditions - numerical solution

This work presents the approach used to simulate the behavior of slender unidimensional structures under various loading conditions, including the condition of large displacements and plasticity. The Finite Element Method, available in commercial softwares, was used to achieve this goal, and the obtained results compared with known analytical solutions. Three different cases were considered: a) small displacements analysis in the elastic material regimen, b) large displacements in the elastic regimen and c) large displacements including plasticity. In all cases, the finite element solution was validated and the best finite element model suitable for each problem was chosen.

Keywords

Slender structure; Beams; Finite Element Method; Large displacements; Plasticity

Sumário

1	Introdução	11
2	O Método dos Elementos Finitos	12
2.1	Formulação matemática	12
2.2	Tipos de elementos finitos	15
2.3	Ferramentas computacionais	17
3	Análise no regime elástico sob pequenos deslocamentos	18
3.1	Especificações da viga longa	19
3.2	Simulação da viga longa com elementos de viga	20
3.3	Especificações da viga curta	22
3.4	Simulação da viga curta com elementos de viga	23
3.5	Simulação da viga curta com elementos sólidos 3-D	25
3.6	Resultados	28
4	Análise no regime elástico sob grandes deslocamentos	35
4.1	Especificações da estrutura	36
4.2	Simulação com elementos de viga	38
4.3	Simulação com elementos de casca	42
4.4	Simulação com elementos 3-D	46
4.5	Resultados	49
5	Análise no regime plástico	54
5.1	Especificações da estrutura	55
5.2	Simulação com elementos de viga	56
5.3	Simulações com elementos 3-D	59
5.4	Resultados	61
6	Conclusão	68

Lista de figuras

2.1	Esquema ilustrativo de um elemento de viga curva tridimensional. [1]	15
2.2	Esquema ilustrativo de um elemento de casca tridimensional (retirado do <i>help</i> do ANSYS).	16
2.3	Esquema ilustrativo de um elemento sólido tridimensional (retirado do <i>help</i> do ANSYS).	16
3.1	Uma viga retangular considerada sob carregamento uniforme.	18
3.2	Variáveis de estado que descrevem a viga deformada sob os efeitos do carregamento uniforme.	19
3.3	Modelagem geométrica da viga retangular longa.	20
3.4	Malha computacional da viga retangular longa.	21
3.5	Carregamento e condições de contorno para a viga retangular longa.	21
3.6	Visualização da deflexão da viga retangular longa através de linhas de contorno.	22
3.7	Modelo geométrico da viga retangular curta.	23
3.8	Malha computacional da viga retangular curta modelada por elementos unidimensionais.	24
3.9	Carregamento e condições de contorno para a viga retangular curta modelada por elementos unidimensionais.	24
3.10	Visualização em linhas de contorno da viga retangular curta modelada por elementos unidimensionais.	25
3.11	Malha computacional da viga retangular curta modelada por elementos tridimensionais.	26
3.12	Carregamento e condições de contorno para a viga retangular curta modelada por elementos tridimensionais.	27
3.13	Visualização em mapa de contorno da deflexão da viga retangular curta modelada por elementos tridimensionais.	27
3.14	Deflexão máxima de um trecho da viga longa, para malhas com quantidades diferentes de elementos de viga.	28
3.15	Valores da deflexão máxima da viga longa para malhas com quantidades diferentes de elementos de viga.	29
3.16	Comparação dos resultados obtidos para a deflexão da viga retangular longa.	30
3.17	Comparação dos resultados para a tensão axial máxima na viga retangular longa.	30
3.18	Deflexão máxima de um trecho da viga curta, para malhas com quantidades diferentes de elementos de viga.	31
3.19	Valores da deflexão máxima da viga curta para malhas com quantidades diferentes de elementos de viga.	32
3.20	Comparação dos resultados para a deflexão da viga retangular curta.	33
4.1	Uma viga retangular com momento aplicado na extremidade.	35
4.2	Variáveis que descrevem a viga deformada sob os efeitos do momento na extremidade.	36

4.3	Modelo geométrico da viga sob grandes deslocamentos representada por elementos de viga.	38
4.4	Malha computacional gerada para a viga sob grandes deslocamentos com elementos de viga.	39
4.5	Carregamentos e condições de contorno para a viga sob grandes deslocamentos modelada com elementos de viga.	40
4.6	Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).	41
4.7	Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga ($\varphi = \pi$).	41
4.8	Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga ($\varphi = 2\pi$).	42
4.9	Modelo geométrico da viga sob grandes deslocamentos representada por elementos de casca.	43
4.10	Malha computacional gerada para a viga sob grandes deslocamentos com elementos de casca.	43
4.11	Carregamento e condições de contorno para a viga sob grandes deslocamentos modelada com elementos de casca.	44
4.12	Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de casca ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).	44
4.13	Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de casca ($\varphi = \pi$).	45
4.14	Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de casca ($\varphi = 2\pi$).	45
4.15	Malha computacional gerada para a viga sob grandes deslocamentos representada por elementos sólidos tridimensionais.	46
4.16	Carregamento e condições de contorno para a viga sob grandes deslocamentos representada por elementos sólidos tridimensionais.	47
4.17	Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos sólidos 3-D ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).	48
4.18	Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos sólidos 3-D ($\varphi = \pi$).	48
4.19	Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos sólidos 3-D ($\varphi = 2\pi$).	49
4.20	Comparação entre diferentes tamanhos de malha para a viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga.	50
4.21	Comparação entre diferentes tamanhos de malha para a viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga.	51
4.22	Gráfico com a visualização simultânea da solução analítica e dos resultados das nove simulações da viga sob grandes deslocamentos.	53
5.1	Relação tensão-deformação em um modelo de plasticidade bilinear.	54
5.2	Modelo de plasticidade utilizado, com pontos do histórico de tensões e deformações da simulação em destaque.	56
5.3	Modelo de plasticidade bilinear gerado no <i>ANSYS Workbench</i> .	57
5.4	Deflexão da estrutura sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos de viga após o carregamento.	58

5.5	Deflexão da estrutura sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos de viga após o descarregamento.	58
5.6	Deflexão da estrutura sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos 3-D após o carregamento.	60
5.7	Deflexão da estrutura sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos 3-D após o descarregamento.	60
5.8	Comparação entre diferentes tamanhos de malha para a viga sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos de viga (estrutura deformada).	61
5.9	Comparação entre diferentes tamanhos de malha para a viga sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos de viga (deslocamento da extremidade livre).	62
5.10	Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica para os deslocamentos dos pontos nodais da estrutura.	64
5.11	Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica para o perfil da tensão axial na estrutura após o carregamento.	65
5.12	Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica para os deslocamentos residuais dos pontos nodais da estrutura.	66
5.13	Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica para a tensão residual na estrutura.	67

Lista de tabelas

2.1	Elementos da biblioteca do <i>ANSYS</i> utilizados nas simulações.	17
3.1	Deflexão máxima da viga curta para diferentes tamanhos da malha tridimensional.	33
4.1	Momentos aplicados na viga sob grandes deslocamentos em função do ângulo central do arco de círculo.	37
4.2	Tamanhos de malha escolhidos para a viga sob grandes deslocamentos representada por elementos sólidos tridimensionais.	52
5.1	Deslocamento máximo da estrutura para diferentes tamanhos da malha tridimensional.	63

"Se você quer construir um navio, não peça às pessoas que consigam madeira, não lhes dê tarefas e trabalho. Fale antes a elas, longamente, sobre a grandeza e a imensidão do mar."

Antoine de Saint-Exupéry

1

Introdução

Na prática da engenharia, diversas estruturas possuem o comportamento de vigas unidimensionais, entre elas: barras, vigas, pilares e colunas em que deslocamentos transversais causam a formação da curvatura da linha longitudinal inicialmente reta. O presente trabalho tem por objetivo identificar, através de uma metodologia numérica, o comportamento de uma estrutura unidimensional esbelta submetida a grandes deslocamentos e à plastificação. A condição de estrutura esbelta indica que o comprimento da estrutura é muito maior do que as demais dimensões (largura e espessura), permitindo simplificações no modelo matemático. Para analisar numericamente o problema é utilizado um Método dos Elementos Finitos e as soluções obtidas são comparadas com premissas e resultados fornecidos pela teoria de vigas.

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

No capítulo 2, é apresentado um resumo do Método dos Elementos Finitos, incluindo seu histórico, formulação matemática e implementações em *softwares* comerciais.

No capítulo 3, é apresentada a simulação de vigas sob a hipótese de pequenos deslocamentos e regime elástico, com o objetivo de fazer uma revisão sobre os modelos de Euler-Bernoulli e Airy para vigas longas e curtas, respectivamente.

No capítulo 4, introduz-se no modelo numérico a hipótese de grandes deslocamentos, implicando em mudanças significativas nos resultados da simulação em relação à solução linear. Neste caso, o material ainda permanece no regime elástico.

No capítulo 5, a estrutura esbelta é simulada sob as condições de grandes deslocamentos e plasticidade simultaneamente, e as tensões e deformações na estrutura são analisadas após a aplicação e a remoção dos esforços externos.

Finalmente, no capítulo 6, são feitas considerações finais sobre os resultados e sugestões para trabalhos futuros.

2

O Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é, provavelmente, o método numérico mais difundido para o dimensionamento e a simulação de projetos de engenharia, sendo uma ferramenta importante na análise de estruturas. O desenvolvimento deste método se deu de forma mais significativa com o advento da computação digital, que permitiu com que as equações algébricas obtidas com a formulação de elementos finitos pudessem ser resolvidas de forma eficiente em um tempo viável de análise. [1]

2.1

Formulação matemática

A formulação teórica do Método dos Elementos Finitos considera que o domínio de análise (neste caso, a estrutura sólida) é representado por uma malha de pontos discretos denominados nós. Em um modelo composto por elementos tridimensionais, por exemplo, cada nó se desloca em cada uma das três direções, e o objetivo do método é calcular o deslocamento de cada nó em cada direção, isto é, calcular o vetor u para cada elemento i :

$$\hat{u}_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \cdots \end{bmatrix}_{3n \times 1} \quad (2-1)$$

Conhecidos os deslocamentos de todos os nós, pode-se calcular o deslocamento de qualquer ponto do elemento através de uma matriz de interpolação H :

$$u(x, y, z) = H_i(x, y, z) \cdot \hat{u}_i \quad (2-2)$$

A forma da matriz $H_i(x, y, z)$ varia conforme o tipo de elemento utilizado, mas seu princípio é sempre o mesmo: obter o deslocamento de um determinado ponto através de uma interpolação lagrangeana dos deslocamentos dos nós mais próximos.

As tensões e deformações associadas a cada nó da malha também são armazenadas em vetores na forma seguinte:

$$\tau_i = \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$$\epsilon_i = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

As tensões iniciais do problema, como efeitos térmicos ou tensões residuais, por exemplo, também são armazenadas em um vetor τ_{Ii} que é estruturado da mesma forma como o vetor das tensões τ_i . Assim, as tensões e deformações no elemento relacionam-se pela matriz constitutiva C_i na forma

$$\tau_i = C_i \cdot \epsilon_i + \tau_{Ii} \quad (2-5)$$

A matriz C_i varia conforme o tipo de elemento de utilizado e as premissas adotadas. Para o caso linear elástico, por exemplo, a matriz C_i tem a forma da equação 2-5 reproduzindo a lei de Hooke.

É necessário definir também uma relação de compatibilidade geométrica, relação entre os deslocamentos e deformações do elemento, dada por uma matriz B_i na forma

$$\epsilon_i(x, y, z) = B_i(x, y, z) \cdot \hat{u}_i \quad (2-6)$$

Por fim, também são necessárias estruturas para armazenar os valores dos esforços externos que atuam em cada ponto nodal do elemento. Tais esforços são divididos entre forças concentradas (R_{ci}), forças de superfície (f_{Si}) e forças

de corpo(f_{Bi}):

$$R_{ci} = \begin{bmatrix} R_{cxi} \\ R_{cyi} \\ R_{czi} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

$$f_{Si} = \begin{bmatrix} f_{Sxi} \\ f_{Syi} \\ f_{Szi} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

$$f_{Bi} = \begin{bmatrix} f_{Bxi} \\ f_{Byi} \\ f_{Bzi} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Após a definição de todos os tensores relevantes do problema, é possível relacioná-los para que seja obtido um sistema de equações algébricas representativo das condições de equilíbrio, condições de vinculação e equações constitutivas. Isto é feito utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, cujo enunciado é: "O equilíbrio de um corpo é satisfeito para qualquer campo de deslocamento pequeno e compatível se o incremento de trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo". [2]

Tal enunciado equivale a afirmar que o trabalho realizado pelas forças que atuam em cada elemento deve ser, no regime permanente, equivalente ao trabalho resultante das tensões internas no elemento. Em função dos tensores definidos, o Princípio dos Trabalhos Virtuais resulta na seguinte igualdade para cada elemento i :

$$\int_V \epsilon^t \tau dV = \int_V u^t f_B dV + \sum_{j=1}^n \delta u_j^t + \int_S \delta u_S^t f_S dS \quad (2-10)$$

Combinando-se as equações 2-2, 2-6 e 2-5 com a equação 2-10 e aplicando-se a relação obtida para todos os elementos da estrutura, resulta em:

$$\left(\sum_i \int_{V_i} B_i^t C_i B_i dV_i \right) \hat{u} = \sum_i \int_{V_i} H_i^t f_{Bi} dV_i + \sum_i \int_{S_i} H_{Si}^t f_{Si} dS_i - \sum_i \int_{V_i} B_i^t \tau_{Ii} dV_i + \sum_{j=1}^n R_{ci} \quad (2-11)$$

A equação 2-11 pode ser reescrita numa notação mais simples:

$$K\hat{u} = R \quad (2-12)$$

A matriz K é denominada matriz de rigidez do sistema e o vetor R representa os carregamentos nodais equivalentes. Assim, o problema se resume à resolução de um sistema linear, no qual podem ser empregados métodos diretos, como a decomposição LU, ou métodos iterativos, como o método de Gauss-Seidel.

2.2

Tipos de elementos finitos

As matrizes de interpolação, constitutiva e de compatibilidade geométrica dependem da formulação do elemento a ser utilizado em cada caso. Para uma série de elementos comumente utilizados, tais matrizes se encontram bem definidas na literatura e já implementadas em *softwares* comerciais. [1]

A Figura 2.1 mostra detalhes de um elemento de viga tridimensional genérico, considerando dois pontos nodais (um em cada extremidade do elemento).

Figura 2.1: Esquema ilustrativo de um elemento de viga curva tridimensional. [1]

A Figura 2.2 detalha um elemento de casca, considerando quatro pontos nodais (um em cada vértice do elemento).

Figura 2.2: Esquema ilustrativo de um elemento de casca tridimensional (retirado do *help* do *ANSYS*).

E, por fim, a Figura 2.3 mostra em uma ilustração esquemática de elemento sólido tridimensional com oito pontos nodais (um em cada vértice).

Figura 2.3: Esquema ilustrativo de um elemento sólido tridimensional (retirado do *help* do *ANSYS*).

Um elemento tridimensional é aquele de uma formulação mais geral, tendo o propósito de simular qualquer tipo de estrutura segundo as equações clássicas da Teoria da Elasticidade. O elemento de casca se baseia na hipótese de que uma das dimensões da estrutura, a espessura, é muito menor do que as demais, enquanto o elemento de viga que uma das dimensões, o comprimento, é significativamente maior do que as demais. Tais hipóteses permitem que simplificações sejam feitas no modelo, resultando que a estrutura

seja representada por uma quantidade menor de nós, o que implica na resolução de um sistema linear com matrizes mais compactas.

Outros tipos de elementos finitos, como elementos de placa e axissimétricos, estão disponíveis na literatura. Em muitos casos, diferentes tipos de elementos podem ser utilizados em conjunto, e uma mesma estrutura pode ser discretizada por diferentes tipos de elementos. No presente trabalho, a estrutura de interesse através de três elementos: viga, casca e sólido.

2.3

Ferramentas computacionais

Uma variedade de *softwares*, que utilizam o Método dos Elementos Finitos para a simulação de problemas de engenharia, está disponível comercialmente, entre eles: *ANSYS*, *SolidWorks*, *Abaqus*, *Cosmos*, *ADINA*, etc. Neste trabalho, optou-se por utilizar os programas *ANSYS Workbench* e *ANSYS Mechanical*, que se mostraram suficientes para as simulações de interesse.

Em cada uma das simulações apresentadas nos capítulos a seguir, mais detalhes são fornecidos sobre a configuração do *ANSYS* utilizada na modelagem. Em síntese, devem ser realizadas no ambiente computacional as seguintes etapas:

- escolha do tipo de elemento a ser utilizado;
- definição do material;
- definição da geometria e do sistema de coordenadas;
- geração da malha computacional;
- definição das condições de contorno e carregamentos;
- solução das equações;
- visualização dos resultados.

Os tipos de elemento implementados no *ANSYS* que foram utilizados ao longo do desenvolvimento deste trabalho estão listados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Elementos da biblioteca do *ANSYS* utilizados nas simulações.

Nome	Tipo	Número de nós	Graus de liberdade por nó
BEAM188	Viga	2	6 (3 deslocamentos + 3 rotações)
SHELL181	Casca	4	6 (3 deslocamentos + 3 rotações)
SOLID186	Sólido 3-D	20	3 (3 deslocamentos)

3

Análise no regime elástico sob pequenos deslocamentos

O primeiro estudo de caso selecionado para a verificação da acurácia do Método dos Elementos Finitos na simulação de estruturas unidimensionais consiste na simulação de vigas de seção transversal constante e retangular engastadas sob carregamento externo uniforme.

Foram analisadas uma viga longa e uma viga curta, ambas retangulares e com carga externa transversal distribuída uniformemente ao longo do comprimento. Para cada caso, os resultados obtidos pela modelagem do Método dos Elementos Finitos foram comparados com os resultados provenientes de modelos analíticos encontrados na literatura.

As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram as variáveis de estado e os parâmetros relevantes do problema.

Figura 3.1: Uma viga retangular considerada sob carregamento uniforme.

Para uma viga retangular longa, cuja razão $\frac{L}{d}$ é suficientemente grande para que a contribuição dos esforços cortantes para a sua deflexão possa ser desconsiderada, pode-se utilizar a solução de Euler-Bernoulli para prever a deflexão e o campo de tensões na viga.[3]

Aplicando-se as hipóteses de Euler-Bernoulli para o problema estudado, obtém-se a solução mostrada na equação 3-1 para a deflexão $v(x)$ da viga e na equação 3-2 para a tensão axial $\sigma_{x_{max}}$ máxima ao longo de seu comprimento.[4]

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (L - x)^2 (3L^2 + 2Lx + x^2) \quad (3-1)$$

Figura 3.2: Variáveis de estado que descrevem a viga deformada sob os efeitos do carregamento uniforme.

$$\sigma_{x_{max}}(x) = \frac{3qx^2}{hd^2} \quad (3-2)$$

No caso de vigas curtas, no entanto, a hipótese que desconsidera os efeitos dos esforços cortantes gera erros maiores nos resultados finais de tensão e deflexão da viga. [5] Assim, adota-se uma formulação mais genérica: considera-se o problema bidimensional, descrito nas coordenadas cartesianas x e y , para obter perfis de tensões e deslocamentos a partir da função de tensão de Airy correspondente às condições de contorno do problema. [6]

A fórmula para a deflexão da linha neutra $v(x)$ da viga a partir da função de tensão de Airy, é então obtida na forma

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (L - x)^2 (3L^2 + 2Lx + x^2) \quad (3-3)$$

e os resultados obtidos analiticamente para a deflexão da viga, seja ela longa ou curta, podem ser utilizados como referência para a validação dos modelos numéricos empregados na simulação do problema.

Três simulações distintas foram realizadas com o *ANSYS Workbench 16.2*, modificando-se o tipo de viga (longa/curta) e o modelo matemático (tipo de elemento finito) utilizado. Essas simulações estão detalhadas nas próximas subseções.

3.1

Especificações da viga longa

Na simulação numérica da considerada viga longa submetida a um carregamento uniforme ao longo do comprimento, foram utilizados os seguintes valores numéricos para as grandezas relevantes no problema:

- Comprimento da viga: $L = 10m$
- Largura da viga: $h = 0,5m$
- Altura da viga: $d = 0,2m$
- Módulo de elasticidade do material: $E = 200GPa$
- Carregamento externo: $q = 1kN/m$

3.2

Simulação da viga longa com elementos de viga

Para simular o comportamento estático da viga longa, optou-se por utilizar o elemento de viga padrão do *ANSYS Workbench*, que possui dois nós com seis graus de liberdade cada (três deslocamentos e três rotações) e se baseia na teoria de vigas de Timoshenko, que considera também o efeito das tensões cisalhantes.

A Figura 3.3 apresenta a geometria considerada para a representação de vigas longas.

Figura 3.3: Modelagem geométrica da viga retangular longa.

A partir do modelo geométrico, gera-se uma malha de elementos para a viga ao longo dos 10 metros de comprimento. A Figura 3.4 mostra a viga discretizada com um total de 100 elementos ao longo de seu comprimento, cada um com dois pontos nodais.

Figura 3.4: Malha computacional da viga retangular longa.

Na configuração da simulação, foi definida a condição de contorno "*Fixed Support*" (restrições de deslocamento e rotação) em uma das extremidades da viga e o carregamento uniforme ao longo de seu comprimento, conforme está mostrado na Figura 3.5.

Figura 3.5: Carregamento e condições de contorno para a viga retangular longa.

Para o caso da viga longa, foram mantidas as configurações padrão do ANSYS. Entre elas, destaca-se o número de substeps usados na aplicação do carregamento distribuído: estimado inicialmente para que apenas um substep seja necessário, mas que o número total de substeps da solução deve estar entre 1 e 10. Caso não haja convergência numérica com o valor máximo de substeps, a execução do solver resulta em uma mensagem de erro.

Por fim, foi acionado na modelagem o *solver* numérico do programa, que permite a visualização da solução obtida através de mapas de contorno como o apresentado na Figura 3.6, para a deflexão da viga ao longo do comprimento.

Figura 3.6: Visualização da deflexão da viga retangular longa através de linhas de contorno.

3.3

Especificações da viga curta

Para simular a deflexão da viga curta sob carregamento uniforme ao longo do comprimento, foram utilizados os seguintes valores numéricos para as grandezas relevantes no problema:

- Comprimento da viga: $L = 1m$
- Largura da viga: $h = 0,5m$
- Altura da viga: $d = 0,2m$
- Módulo de elasticidade do material: $E = 200GPa$
- Carregamento externo: $q = 1kN/m$

3.4

Simulação da viga curta com elementos de viga

O elemento de viga de Timoshenko, utilizado na simulação anterior, pode também ser aplicado para o caso da viga curta, uma vez que os efeitos do cisalhamento são aqui considerados. A geometria definida no programa para este caso está apresentada na Figura 3.7.

Figura 3.7: Modelo geométrico da viga retangular curta.

A malha utilizada nesta simulação está apresentada na Figura 3.8 com 100 elementos com 2 nós cada ao longo do comprimento de 1 metro da viga.

Figura 3.8: Malha computacional da viga retangular curta modelada por elementos unidimensionais.

Na Figura 3.9 estão apresentadas as condições "*Fixed Support*"(engaste) e "*Pressure Line*"(carregamento uniforme linear) para a viga curta.

Figura 3.9: Carregamento e condições de contorno para a viga retangular curta modelada por elementos unidimensionais.

As configurações padrão do solver numérico do ANSYS foram mantidas, neste caso, definindo-se entre 1 e 10 substeps para a aplicação dos carregamentos externos. Após a execução das rotinas numéricas do programa, a deflexão da viga pode ser novamente visualizada através de mapas de contorno, conforme mostrado na Figura 3.10.

Figura 3.10: Visualização em linhas de contorno da viga retangular curta modelada por elementos unidimensionais.

3.5

Simulação da viga curta com elementos sólidos 3-D

Para o caso da viga curta, foi considerada também a possibilidade de modelar o problema através de elementos sólidos tridimensionais, que utilizam a formulação mais genérica das leis da elasticidade. O elemento padrão do *ANSYS Workbench* para sólidos é um elemento cúbico de oito nós. A geometria do problema permanece igual à da simulação anterior (Figura 3.7), mas a malha computacional gerada passa a ser a mostrada na Figura 3.11. Neste caso, elementos 3-D com 20 pontos nodais são utilizados.

Figura 3.11: Malha computacional da viga retangular curta modelada por elementos tridimensionais.

Neste caso, o carregamento externo é uma pressão exercida na face superior da viga, cujo valor é mostrado na equação 3-4, e o engaste é representado pela restrição de deslocamentos na face correspondente. Tais condições são mostradas na Figura 3.12.

$$p = \frac{q}{L} = \frac{1kN/m}{1m} = 1kPa \quad (3-4)$$

Figura 3.12: Carregamento e condições de contorno para a viga retangular curta modelada por elementos tridimensionais.

Assim, é possível visualizar os resultados obtidos com o modelo de elementos finitos em mapas de contorno, cuja deflexão da viga é visualizada na Figura 3.13.

Figura 3.13: Visualização em mapa de contorno da deflexão da viga retangular curta modelada por elementos tridimensionais.

3.6

Resultados

3.6.1

Viga longa

Inicialmente, uma análise de convergência do modelo deve ser realizada, para diversas malhas de elementos finitos. Os resultados obtidos com diversos modelos numéricos, para diferente número de elementos, são comparados objetivando-se um modelo eficiente que aproxime bem a solução com o menor número possível de elementos.

A Figura 3.14 apresenta as curvas de deflexão da viga longa obtidas para diferentes malhas. Como é verificado nas soluções que a curva da viga se torna aproximadamente linear em pontos mais distantes do engaste, o gráfico contempla somente o trecho da viga mais próximo ao engaste, em cujos pontos a derivada sofre variações maiores e, portanto, a solução é mais sensível ao tamanho dos elementos.

Figura 3.14: Deflexão máxima de um trecho da viga longa, para malhas com quantidades diferentes de elementos de viga.

A Figura 3.15, por sua vez, mostra a variação da deflexão máxima da viga na sua extremidade livre em função do número de elementos usados na discretização do modelo.

Figura 3.15: Valores da deflexão máxima da viga longa para malhas com quantidades diferentes de elementos de viga.

Conclui-se, pela análise dos gráficos, que o modelo com 50 elementos de viga é suficiente para descrever a deformação da viga ao longo do comprimento sob os efeitos do carregamento externo uniforme, além de prever um valor consistente da deflexão na extremidade livre, cujo desvio em relação à solução analítica é de 0,26%.

A Figura 3.16 mostra graficamente a comparação entre a solução de Euler-Bernoulli e a solução calculada por elementos finitos para a deflexão da viga. Pelo gráfico resultante, percebe-se que as duas soluções são muito próximas, o que comprova a validade da solução obtida pelo Método dos Elementos Finitos.

Além disso, as curvas obtidas pelas soluções analítica e numérica para a tensão axial máxima ao longo do comprimento são mostradas na Figura 3.17. Novamente, as duas soluções são muito próximas, e apresentam exatamente o mesmo valor resultante para a tensão máxima (em $x = 0$): 6 MPa.

Figura 3.16: Comparação dos resultados obtidos para a deflexão da viga retangular longa.

Figura 3.17: Comparação dos resultados para a tensão axial máxima na viga retangular longa.

3.6.2

Viga curta

Uma análise de convergência do modelo também é feita para identificar as malhas de elementos de viga e 3-D apropriadas para a simulação da viga curta. A Figura 3.18 mostra a comparação entre a deflexão na região da viga próxima ao engaste calculada com diferentes malhas compostas por elementos da viga de Timoshenko, e o gráfico da Figura 3.19 mostra os valores da deflexão máxima também para diferentes tamanhos de malha.

Figura 3.18: Deflexão máxima de um trecho da viga curta, para malhas com quantidades diferentes de elementos de viga.

Figura 3.19: Valores da deflexão máxima da viga curta para malhas com quantidades diferentes de elementos de viga.

Verifica-se que a malha de 50 elementos é suficiente para que seja obtida uma solução numérica consistente, com desvio de 3,7% em relação à solução analítica.

Para o modelo 3D, a discretização pode ser feita nas três direções (x , y , z). No entanto, as propriedades da viga e do carregamento não variam na direção z da largura da viga. Dessa forma, não é necessária a existência de mais um elemento ao longo da largura, e a discretização pode ser feita somente no comprimento e na espessura da viga.

A Tabela 3.1 mostra os valores da deflexão máxima da linha média da viga para diferentes malhas de elementos tridimensionais. A tabela permite concluir que a combinação entre 200 elementos no comprimento e 5 elementos na espessura é o par que permite a obtenção do valor convergente com duas casas decimais e possui o menor número total de elementos ($200 \times 5 = 1000$ elementos). O erro do resultado em relação à solução analítica é de 3,7%.

Tabela 3.1: Deflexão máxima da viga curta para diferentes tamanhos da malha tridimensional.

Deflexão máxima (m)		Nx							
		5	10	20	50	100	200	500	1000
Ny	2	3,69E-07	3,72E-07	3,74E-07	3,76E-07	3,78E-07	3,78E-07	3,79E-07	3,79E-07
	5	3,72E-07	3,73E-07	3,75E-07	3,77E-07	3,78E-07	3,79E-07	3,79E-07	
	10	3,73E-07	3,74E-07	3,75E-07	3,77E-07	3,78E-07	3,79E-07		

Pode-se notar que a solução tridimensional demanda a utilização de uma quantidade maior de elementos do que a solução com malha unidimensional para que seja obtida uma resposta com precisão equivalente.

A Figura 3.20 apresenta o gráfico com as curvas da deflexão da viga curta obtidas com a solução analítica desenvolvida a partir da função de tensão de Airy, com a solução elementar de Euler-Bernoulli e com as duas soluções numéricas utilizadas.

Figura 3.20: Comparação dos resultados para a deflexão da viga retangular curta.

Os resultados permitem verificar que as curvas obtidas pelas duas soluções numéricas são muito próximas, e ambas também se aproximam da solução calculada analiticamente. Em todos os pontos, o erro da solução tridimensional foi ligeiramente inferior ao da solução unidimensional.

Vale ressaltar também que a curva proveniente da solução de Euler-Bernoulli difere consideravelmente das demais, apresentando um desvio de 17,5% na deflexão máxima em relação à solução analítica. Isso comprova que o modelo de Euler-Bernoulli não é apropriado para vigas curtas.

4

Análise no regime elástico sob grandes deslocamentos

O Método dos Elementos Finitos também pode ser aplicado na análise de vigas que apresentem grandes deslocamentos e ângulos de rotação. No entanto, uma nova formulação analítica se faz necessária para obter a solução do problema, pois as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko vistas nos casos anteriores assumem a hipótese de pequenos ângulos e deslocamentos.

É abordada nesta seção a situação mostrada nas Figuras 4.1 e 4.2, na qual uma viga de seção retangular é submetida a um momento aplicado na extremidade livre.

Figura 4.1: Uma viga retangular com momento aplicado na extremidade.

A principal diferença entre este problema e aqueles vistos nas seções anteriores é que aos pontos da viga se deslocam nas duas direções do plano em que o momento aplicado atua. Assim, para um ponto numa coordenada s da viga, sua posição deformada é descrita por um par ordenado $(x(s), y(s))$. Nos casos em que os ângulos de rotação são considerados pequenos, assume-se que $dx \approx ds$, mas tal hipótese deixa de ser realista na existência de ângulos maiores.

A partir da geometria do problema e dos princípios da Teoria da Elasticidade, pode-se deduzir analiticamente as equações 4-1 e 4-2 para definir a posição de um determinado ponto da linha neutra da viga após a aplicação do momento. [4]

$$x(s) = \frac{EI}{M} \sin \left[\frac{M}{EI} (L - s) \right] \quad (4-1)$$

Figura 4.2: Variáveis que descrevem a viga deformada sob os efeitos do momento na extremidade.

$$y(s) = \frac{EI}{M} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{M}{EI} (L - s) \right] \right\} \quad (4-2)$$

Uma breve análise das equações obtidas permite verificar que a viga deformada assume o formato de um arco de círculo cujo ângulo central φ é da forma

$$\varphi = \frac{ML}{EI} \quad (4-3)$$

Este resultado analítico pode ser usado como referência para a validação da solução numérica obtida com elementos finitos.

4.1

Especificações da estrutura

Para simular o comportamento da estrutura engastada sob grandes deslocamentos e momento concentrado na extremidade livre, foram utilizados os seguintes valores numéricos para as grandezas relevantes no problema:

- Comprimento da viga: $L = 10m$
- Largura da viga: $h = 0,5m$
- Altura da viga: $d = 0,2m$
- Módulo de elasticidade do material: $E = 2MPa$

Como a solução analítica do problema prevê que a viga deformada assume a forma de um arco de círculo com ângulo central φ proporcional ao momento M aplicado na extremidade, foram escolhidos três casos:

- $\varphi = \frac{\pi}{2}$;
- $\varphi = \pi$;
- $\varphi = 2\pi$.

Aplicando-se a equação 4-3 para deduzir o momento a ser aplicado na extremidade para que a viga se deforme segundo o ângulo φ desejado em cada caso, pode-se montar a Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Momentos aplicados na viga sob grandes deslocamentos em função do ângulo central do arco de círculo.

φ (rad)	M (N.m)
$\frac{\pi}{2}$	51.53
π	67.37
2π	55.09

Para cada caso, o momento na extremidade foi calculado com a equação 4-3, e a discretização do problema foi feita com três tipos distintos de elementos finitos:

- elementos de viga (malha 1-D);
- elementos de casca (malha 2-D);
- elementos sólidos (malha 3-D).

Foram realizadas, portanto, nove simulações ao todo. A análise numérica do problema da viga sob grandes deformações foi realizada com os programas *ANSYS Workbench 16.2* e *ANSYS Mechanical APDL 16.2*.

4.2

Simulação com elementos de viga

O primeiro modelo numérico utilizado para a simulação da viga sob grandes deslocamentos utiliza elementos de viga de Timoshenko ao longo do comprimento da estrutura.

A geometria da estrutura, modelada na ferramenta *Design Modeler* do *ANSYS Workbench*, é apresentada na Figura 4.3.

Figura 4.3: Modelo geométrico da viga sob grandes deslocamentos representada por elementos de viga.

Após a definição da geometria, a viga é dividida em elementos ao longo do comprimento, como mostra a Figura 4.4. A configuração padrão do programa, através do recurso "*Mesh Sizing*", utiliza elementos de mesmo tamanho ao longo da direção selecionada. O elemento de viga escolhido possui 2 pontos nodais.

Figura 4.4: Malha computacional gerada para a viga sob grandes deslocamentos com elementos de viga.

As configurações do modelo que devem ser ajustadas antes da execução das rotinas de cálculos incluem os carregamentos externos da viga e as condições de contorno. Assim como foi feito no caso de pequenos deslocamentos, a opção "*Fixed Support*", que anula todos os graus de liberdade (deslocamentos e rotações) do nó selecionado, é selecionada para representar o engaste.

O momento na outra extremidade é configurado através da opção "*Moment*", que permite a aplicação de um momento de três componentes (x , y e z) em qualquer nó da viga. Além disso, foi verificado através de testes que o modelo se torna mais estável numericamente se uma terceira condição for adicionada: a opção "*Displacement*" para deslocamento nulo ao longo da direção z , já que a viga só deforma no plano xy .

A Figura 4.5 mostra a viga modelada sob o efeito das três condições descritas.

Figura 4.5: Carregamentos e condições de contorno para a viga sob grandes deslocamentos modelada com elementos de viga.

Também foram definidos no ANSYS alguns parâmetros relativos à convergência do modelo e à não linearidade geométrica do problema:

- número inicial de substeps: 10;
- número mínimo de substeps: 1;
- número máximo de substeps: 100;
- "*Large deflection*": *on*.

Após a configuração completa do modelo e do ambiente de simulação, o solver do programa pode ser executado, e os resultados podem ser visualizados graficamente em mapas de contorno e curvas personalizadas.

As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 mostram a deflexão da viga visualizada no ambiente computacional para os casos em que a viga assume, respectivamente, a forma de um quarto de circunferência, meia circunferência e circunferência completa.

Figura 4.6: Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Figura 4.7: Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga ($\varphi = \pi$).

Figura 4.8: Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga ($\varphi = 2\pi$).

4.3

Simulação com elementos de casca

O segundo método utilizado foi a discretização da viga com elementos de casca. Optou-se por simular o problema no programa *ANSYS Mechanical APDL 16.2*.

A geometria básica do problema passa a ser representada por um retângulo plano cujas dimensões são o comprimento e a largura da viga, e a espessura é definida como um parâmetro constante ao longo do plano. A Figura 4.9 mostra o modelo feito sob tais premissas.

A Figura 4.10 mostra a malha computacional gerada a partir da geometria retangular. O elemento de casca utilizado possui 4 pontos nodais. O programa permite que o usuário defina o tamanho do lado dos elementos bidimensionais ao longo das duas direções existentes (x e y). No caso de momento aplicado na extremidade livre da viga, entretanto, não há a necessidade de se utilizar mais de um elemento ao longo da largura, já que nenhum dos carregamentos ou propriedades físicas da viga varia nesta direção.

Figura 4.9: Modelo geométrico da viga sob grandes deslocamentos representada por elementos de casca.

Figura 4.10: Malha computacional gerada para a viga sob grandes deslocamentos com elementos de casca.

A Figura 4.11 mostra as restrições nodais existentes: deslocamento e rotação nula no engaste, e momento constante na direção z na outra

extremidade da viga.

Figura 4.11: Carregamento e condições de contorno para a viga sob grandes deslocamentos modelada com elementos de casca.

As Figuras 4.12, 4.13 e 4.14 mostram a deflexão da viga nos casos em que o ângulo central φ é igual a, respectivamente: $\frac{\pi}{2}$, π e 2π .

Figura 4.12: Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de casca ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Figura 4.13: Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de casca ($\varphi = \pi$).

Figura 4.14: Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de casca ($\varphi = 2\pi$).

4.4

Simulação com elementos 3-D

O último método testado é a modelagem da viga como um sólido tridimensional, dividido em elementos 3-D ao longo das três direções (x , y e z). O problema foi simulado no *ANSYS Workbench*.

A geometria da estrutura é igual à da Figura 4.3, correspondente ao caso em que são utilizados elementos da viga. A diferença está na forma como o sólido é modelado: ao invés de um segmento de reta com uma seção transversal constante, a forma básica do problema é o próprio sólido extrudado, cuja definição não depende de nenhuma parâmetro adicional.

Definida a geometria do problema, a malha de elementos finitos é gerada. A Figura 4.15 apresenta a malha computacional do problema, considerando oito elementos ao longo do comprimento da viga, dois elementos ao longo da espessura e um único elemento na largura. O elemento 3-D utilizado é um paralelepípedo com vinte nós.

Figura 4.15: Malha computacional gerada para a viga sob grandes deslocamentos representada por elementos sólidos tridimensionais.

O tamanho do lado do elemento tridimensional em qualquer direção desejada pode ser arbitrado. No caso de momento na extremidade, não é necessário ter mais de um elemento ao longo da largura, já que todas as propriedades e carregamentos são constantes nessa direção.

Com a malha definida, podem ser configurados os carregamentos externos e as condições de contorno. No caso tridimensional, a opção "*Displacement*" é utilizada para representar o engaste da viga, forçando os deslocamentos nas direções x , y e z iguais a zero em toda a face engastada. A opção "*Moment*" é selecionada para aplicar o momento ao longo da face oposta da viga. A Figura 4.16 mostra tais condições aplicadas no modelo do ANSYS.

Figura 4.16: Carregamento e condições de contorno para a viga sob grandes deslocamentos representada por elementos sólidos tridimensionais.

Assim como foi feito no caso de elementos de viga e casca, foi ativado o modo de grandes deflexões para o cálculo numérico. A não linearidade do problema também implica em um número maior de passos (substeps) na aplicação do carregamento externo. No caso tridimensional, verificou-se através de testes a necessidade de se utilizar um número maior de substeps do que nas malhas 1-D e 2-D:

- número inicial de substeps: 50;
- número mínimo de substeps: 10;
- número máximo de substeps: 100.

As Figuras 4.17, 4.18 e 4.19 mostram a forma deformada da viga após a aplicação do momento externo e as linhas de contorno para o deslocamento total dos pontos da viga para os três respectivos casos: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$ e $\varphi = 2\pi$.

Figura 4.17: Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos sólidos 3-D ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Figura 4.18: Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos sólidos 3-D ($\varphi = \pi$).

Figura 4.19: Mapa de contorno para a deflexão da viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos sólidos 3-D ($\varphi = 2\pi$).

4.5

Resultados

Para cada um dos casos estudados, foram feitos testes para verificar a convergência do modelo numérico e malhas adequadas. Os resultados foram comparados entre si e com a solução analítica conhecida, para comprovar a acurácia dos métodos utilizados.

4.5.1

Análise de convergência

Para o modelo de elementos de viga, que possui malha unidimensional (com elementos somente ao longo do comprimento), foram testadas malhas com diferentes números de elementos para verificar o aspecto da curva resultante. O teste foi feito para o caso em que $\varphi = 2\pi$, visto que este é o caso em que ocorre a maior deformação da viga e no qual há, consequentemente, a maior influência da não linearidade geométrica das equações.

A Figura 4.20 mostra o gráfico que compara as curvas obtidas com malhas de 10, 20 e 40 elementos de viga.

Figura 4.20: Comparação entre diferentes tamanhos de malha para a viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga.

Verifica-se graficamente que a curva resultante de $N = 10$ apresenta uma variação acentuada da derivada em cada nó, mas as curvas obtidas com $N = 20$ e $N = 40$ já são mais suaves e próximas entre si. Assume-se, portanto, que vinte elementos são suficientes para representar bem a viga.

O mesmo teste foi feito para verificar quantos elementos de casca devem ser utilizados para representar a viga no segundo método. A malha, neste caso, é bidimensional, mas são necessários múltiplos elementos apenas ao longo do comprimento da viga. Assim como nos elementos de viga, optou-se por fazer o teste das malhas fazendo $\varphi = 2\pi$, situação em que ocorrem as maiores deformações.

A Figura 4.21 mostra a comparação entre as curvas obtidas com malhas de 10, 20 e 40 elementos de casca. Para $N = 10$, a curva apresenta novamente variações bruscas da derivada em cada nó, além de um desvio numérico de 0,13 m no valor da deflexão vertical da extremidade livre da viga, que é nula de acordo com a solução analítica. As curvas para $N = 20$ e $N = 40$ apresentam desvios inferiores a 4 cm e são mais suaves e próximas entre si. Escolhe-se,

portanto, a malha de 20 elementos para representar a viga ao longo de seu comprimento.

Figura 4.21: Comparação entre diferentes tamanhos de malha para a viga sob grandes deslocamentos modelada por elementos de viga.

Por fim, deve-se decidir o número de elementos a serem utilizados na modelagem da viga com elementos sólidos 3-D. Como a discretização é feita em duas direções, comprimento e espessura da viga, a visualização simultânea de curvas é mais difícil. Além disso, o modelo tridimensional é o que demanda maior tempo de execução do *solver*, o que torna o processo de teste com sucessivas malhas mais custoso.

A estratégia escolhida é o teste inicial de malhas com poucos elementos e o aumento gradual do número de elementos até que o modelo fosse executado com sucesso (sem erros de convergência) e a curva final seja aproximadamente um arco de círculo, conforme previsto pela solução analítica.

A Tabela 4.2 mostra a quantidade de elementos escolhida na discretização da viga, para os três diferentes valores do ângulo central φ .

Tabela 4.2: Tamanhos de malha escolhidos para a viga sob grandes deslocamentos representada por elementos sólidos tridimensionais.

φ (rad)	N_x	N_z	$N = N_x \cdot N_y$
$\frac{\pi}{2}$	4	2	8
π	2	2	2
2π	8	16	20

4.5.2 Gráficos

Definidas as malhas de elementos finitos apropriadas para cada caso, os resultados das simulações são comparados com a solução analítica. A Figura 4.22 apresenta o gráfico com todas as curvas numéricas e analíticas obtidas.

Verifica-se pelo gráfico que as curvas numéricas são, em todos os casos, próximas da solução prevista pelo método analítico. A solução com elementos de viga é a mais próxima da solução analítica. Para o caso em que $\varphi = \frac{\pi}{2}$, o erro do deslocamento total da extremidade livre da estrutura é inferior a 0,001%. O mesmo erro é de 0,2% para o modelo de elementos de casca e de 1,5% para o modelo tridimensional. O modelo 3-D é o que fornece resultados mais distantes da solução analítica em todos os casos.

Conclui-se que o elemento de viga é o mais adequado para a simulação do problema, pois é o que possui a formulação matemática mais simples, sendo suficiente para calcular com precisão a deformação da viga, mesmo no caso de grandes deflexões. O elemento tridimensional, por sua formulação mais complexa, é também capaz de simular a viga, mas envolve um custo computacional maior, além de ser o de mais difícil convergência e menor exatidão numérica.

Figura 4.22: Gráfico com a visualização simultânea da solução analítica e dos resultados das nove simulações da viga sob grandes deslocamentos.

5

Análise no regime plástico

O último estudo de caso realizado para validar o Método dos Elementos Finitos na simulação de estruturas esbeltas unidimensionais consiste na situação em que, além de grandes deslocamentos, o que implica na existência de equações diferenciais não lineares que governam o problema, ocorre também a plastificação do material, de forma que o modelo elástico linear utilizado nas simulações anteriores torna-se incapaz de representar o comportamento da estrutura após a aplicação e a remoção do carregamento.

O problema mantém a mesma formulação mostrada nas Figuras 4.1 e 4.2. As especificações do material, no entanto, mudam, pois a sua rigidez depende da deformação sofrida pela estrutura. Para aproximar o comportamento do material tanto no regime elástico como após o seu escoamento, foi escolhido o modelo isotrópico bilinear, explicitado na Figura 5.1.

Figura 5.1: Relação tensão-deformação em um modelo de plasticidade bilinear.

A simulação compreende a aplicação de um momento concentrado na extremidade livre da estrutura engastada inicialmente em repouso, seguida pela remoção deste mesmo momento, o que também pode ser entendido como a aplicação de um momento de mesma intensidade e sentido oposto.

Como visto na seção anterior, a aplicação de um momento concentrado na extremidade da estrutura faz com que esta se deforme e assuma o aspecto de um arco de círculo. Se as tensões na estrutura não ultrapassam o limite de escoamento do material, a hipótese elástica continua sendo válida e a estrutura retorna à sua posição original após a remoção do carregamento. Caso contrário, a plastificação do material provoca um comportamento histerético do sistema, e tensões e deformações residuais podem ser observadas após a remoção dos esforços. Analiticamente, é possível prever, a partir do valor do momento aplicado, a magnitude das tensões e deformações residuais. [4]

Dessa forma, o problema pode ser modelado numericamente por elementos finitos e a solução obtida pode ser comparada ao comportamento teórico previsto. Dois tipos distintos de elementos são testados para a solução numérica: elementos de viga (malha unidimensional) e elementos sólidos tridimensionais (malha 3-D).

5.1

Especificações da estrutura

Para simular o comportamento da estrutura sob grandes deslocamentos e condições de plastificação, foram utilizados os seguintes valores numéricos para as grandezas relevantes no problema:

- Comprimento da viga: $L = 10m$
- Largura da viga: $h = 0,5m$
- Altura da viga: $d = 0,2m$
- Módulo de elasticidade do material: $E = 2MPa$
- Rigidez do material após o escoamento: $E_p = 0,2MPa$
- Tensão de escoamento do material: $\sigma_y = 19746Pa$
- Momento aplicado: $M = 106,35N.m$

Definidos os valores para as grandezas explicitadas na Figura 5.1 e o valor do momento aplicado, pode-se traçar o gráfico da Figura 5.2, que mostra a curva bilinear do material e os valores de tensão e deformação na linha neutra esperados em cada etapa da simulação.

Figura 5.2: Modelo de plasticidade utilizado, com pontos do histórico de tensões e deformações da simulação em destaque.

5.2

Simulação com elementos de viga

O primeiro tipo de elemento utilizado para simular a estrutura é o elemento de viga, baseado na teoria de vigas de Timoshenko. Como todas as propriedades geométricas da viga e o tipo e magnitude do carregamento são os mesmos do problema abordado no capítulo anterior, a mesma geometria da Figura 4.3 pode ser utilizada e a malha computacional segue o mesmo padrão mostrado na Figura 4.4. Foram utilizados elementos de viga com 2 nós cada.

A principal mudança nas entradas do programa está na definição do material, pois a relação constitutiva do modelo não é dada pela hipótese linear elástica. Na seção "*Engineering Data*" do *ANSYS*, foram selecionados os modelos "*Isotropic Elasticity*", para representar o comportamento do material no regime elástico, e "*Bilinear Isotropic Hardening*", para definir a rigidez do material após o escoamento. O gráfico da Figura 5.3 apresenta a curva tensão-deformação resultante.

Figura 5.3: Modelo de plasticidade bilinear gerado no *ANSYS Workbench*.

É necessário também definir no *ANSYS* os parâmetros relativos à convergência do modelo e à não linearidade geométrica do problema, que são, neste caso:

- número de steps: 2;
- número inicial de substeps: 10;
- número mínimo de substeps: 1;
- número máximo de substeps: 100;
- "*Large deflection*": *on*.

O número de steps é igual a 2, pois o momento na extremidade é aplicado no primeiro passo e removido no segundo passo. A definição das condições de contorno e do carregamento é feita da mesma forma mostrada na Figura 4.5, diferindo somente na forma de descrever o carregamento. Ao invés de um único valor, deve-se definir o momento através de uma tabela de valores na qual o momento aplicado em cada step da simulação é definido.

Por fim, ao se executar a rotina de cálculos do programa, os mapas de contorno dos deslocamentos da estrutura podem ser visualizados, como mostram as Figuras 5.4 e 5.5.

Figura 5.4: Deflexão da estrutura sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos de viga após o carregamento.

Figura 5.5: Deflexão da estrutura sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos de viga após o descarregamento.

5.3

Simulações com elementos 3-D

O problema também pode ser simulado por elementos sólidos tridimensionais. As propriedades geométricas da viga a serem modeladas no *ANSYS* permanecem as mesmas da Figura 4.3, com a ressalva de que a geometria final deve ser obtida através da extrusão de uma área retangular para que se reconheça que elementos 3-D são a opção escolhida. A obtenção da malha computacional segue a mesma lógica mostrada na Figura 4.15, referente à simulação do mesmo problema no regime elástico. Os elementos tridimensionais utilizados possuem 20 pontos nodais cada. Além disso, a curva tensão-deformação do material é definida da mesma maneira da simulação com elementos de viga, resultando no gráfico da Figura 5.3.

Também são definidos os parâmetros relativos à convergência do modelo e à não linearidade geométrica do problema, que neste caso são:

- número de steps: 2;
- número inicial de substeps: 50;
- número mínimo de substeps: 1;
- número máximo de substeps: 100;
- "*Large deflection*": *on*.

O momento é definido por uma tabela que relaciona o seu módulo com cada step da simulação. Ao se executar o *solver* numérico do programa, os mapas de contorno dos deslocamentos da estrutura podem ser visualizados, como mostram as Figuras 5.6 e 5.7.

Figura 5.6: Deflexão da estrutura sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos 3-D após o carregamento.

Figura 5.7: Deflexão da estrutura sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos 3-D após o descarregamento.

5.4

Resultados

Para cada os dois tipos de elementos utilizados, foram feitos testes para verificar a convergência do modelo numérico e obter malhas suficientemente grandes para a obtenção de respostas consistentes. Os resultados foram comparados entre si e com a solução analítica desenvolvida em [4] para comprovar a acurácia do método utilizado.

5.4.1

Análise de convergência

Para a simulação com elementos de viga, o modelo foi executado utilizando malhas com 10, 20 e 50 elementos ao longo do comprimento. Os gráficos das Figuras 5.8 e 5.9 mostram o formato da viga deformada e o deslocamento total da extremidade livre da viga para cada tamanho de malha testado.

Figura 5.8: Comparação entre diferentes tamanhos de malha para a viga sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos de viga (estrutura deformada).

Figura 5.9: Comparação entre diferentes tamanhos de malha para a viga sob grandes deslocamentos e condições de plastificação modelada por elementos de viga (deslocamento da extremidade livre).

Pelos gráficos obtidos, verifica-se que o deslocamento nodal correspondente à extremidade da estrutura na qual o momento é aplicado é o mesmo para todos os tamanhos de malha testados, e o formato final da viga deformada é próximo nos três casos. No entanto, a malha com 10 elementos apresenta variações menos suaves na transição entre dois elementos consecutivos. Dessa forma, considera-se que a malha com 20 elementos é a mais apropriada para a simulação, pois apresenta resultados coerentes, suaves e parecidos com os de malhas com mais subdivisões.

Uma análise semelhante é feita para a modelagem com elementos sólidos 3-D. Vale lembrar que a discretização neste caso é feita nas três direções: comprimento, espessura e largura da viga. A princípio, a discretização ao longo da largura da viga não seria necessária, pois nenhuma das propriedades da viga ou do carregamento variam nesta direção. Porém, o modelo converge mais facilmente quando os elementos sólidos possuem um formato mais próximo ao cúbico, com lados da mesma ordem de grandeza. Por isso, para malhas mais refinadas, faz sentido também aumentar o número de elementos na largura da viga.

Para três graus de liberdade, a visualização simultânea de curvas torna-se mais complicada. Então, Os resultados das simulações são organizados conforme a Tabela 5.1, que relaciona a quantidade de elementos utilizados

em todas as direções com o deslocamento máximo da estrutura.

Tabela 5.1: Deslocamento máximo da estrutura para diferentes tamanhos da malha tridimensional.

Deslocamento máximo (m)				Nx			
				4	10	20	40
Ny	2	Nz	1	11,3	12,0	12,2	12,2
	4		1	11,0	11,7	11,8	11,8
	8		1	11,3	11,7	11,7	11,8
	10		2	11,3	11,7	11,8	11,8
	20		2	-	11,7	11,7	11,7
	40		2	-	11,7	11,7	11,8

Verifica-se, pela tabela, que uma malha com 20 elementos no comprimento, 10 elementos na espessura e 2 elementos na largura é capaz de fornecer um resultado consistente, que não sofre grandes variações se o número de elementos for aumentado em alguma das direções. Essa é, portanto, a malha escolhida para representar a estrutura.

5.4.2

Tensão e deformação após o carregamento

Após a primeira etapa da simulação, que é a aplicação do momento na extremidade, a estrutura assume o formato de um arco de círculo em ambas as simulações. A comparação entre as curvas obtidas e a solução analítica é apresentada na Figura 5.10.

Figura 5.10: Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica para os deslocamentos dos pontos nodais da estrutura.

Além disso, podem ser comparados à solução analítica os resultados para a tensão axial ao longo da espessura. Considera-se um ponto afastado do engaste, para que a concentração de tensões não influencie nos valores observados. A comparação entre as curvas está presente no gráfico da Figura 5.11.

Figura 5.11: Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica para o perfil da tensão axial na estrutura após o carregamento.

Pelos resultados de tensão e deformação obtidos, é possível concluir que o modelo de elementos sólidos 3-D é o mais apropriado para o problema, pois seus resultados são bastante próximos dos previstos pela formulação analítica, com erros de 0,59% para a tensão máxima e 1,45% para o deslocamento da extremidade livre.

Além disso, é possível concluir que o modelo de elementos de viga não apresenta bons resultados. Embora a viga ainda mantenha um formato circular quando deformada, o erro em relação à curva analítica neste caso é considerável: 33,7% para a tensão máxima e 3,84% para o deslocamento da extremidade livre. Tal desvio se explica pela distribuição de tensões calculada nos elementos de viga: o perfil obtido é linear ao longo de toda a seção transversal, o que deixa de ser verdadeiro quando ocorre plastificação em uma posição intermediária na espessura.

Para que um perfil coerente de tensões possa ser obtido ao longo da espessura, é necessário que exista mais de um elemento ao longo dessa direção.

Assim, as modelagens com elementos de viga ou de casca são inapropriadas para o caso em ocorre plastificação durante a flexão pura de vigas, e o modelo 3-D deve ser escolhido para tal caso.

5.4.3

Tensão e deformação residual

No segundo passo da simulação, a estrutura retorna à condição de momento nulo na extremidade, e as curvas de deslocamentos e tensões residuais podem ser analisadas.

A comparação entre as curvas obtidas e a solução analítica para os deslocamentos nodais da estrutura pode ser vista na Figura 5.12.

Figura 5.12: Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica para os deslocamentos residuais dos pontos nodais da estrutura.

A Figura 5.13 mostra a mesma comparação feita para o perfil de tensões residuais na estrutura.

Figura 5.13: Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica para a tensão residual na estrutura.

Os gráficos comparativos mostram somente a solução numérica referente à utilização de elementos 3-D, pois foi comprovado que a solução com elementos de viga não fornece bons resultados. Conclui-se que os resultados numéricos obtidos para tensões e deformações residuais na estrutura são bons, pois estão próximos das curvas previstas analiticamente, seguindo sempre a mesma tendência. O erro obtido é de 4,1% para o deslocamento da extremidade livre da estrutura.

Logo, o modelo de elementos sólidos tridimensionais é apropriado para a simulação completa do problema, contemplando o carregamento e o descarregamento da estrutura.

6

Conclusão

O problema da estrutura esbelta submetida a esforços laterais foi analisado em três situações diferentes:

- carregamento lateral uniforme, pequenos deslocamentos e regime elástico (Capítulo 3);
- momento na extremidade, grandes deslocamentos e regime elástico (Capítulo 4);
- momento na extremidade, grandes deslocamentos e plastificação (Capítulo 5).

Em todos os casos, verificou-se que é possível simular o problema pelo Método dos Elementos Finitos de forma acurada, desde que se escolha um tipo de elemento adequado e uma malha apropriada.

Nos casos em que não ocorre plastificação do material, a representação da estrutura por elementos de viga, que se baseiam na teoria de Timoshenko, é a estratégia mais recomendada, pois o modelo matemático é mais simples e fornece os resultados mais próximos aos previstos analiticamente.

No caso em que ocorre plastificação, os elementos de viga e casca deixam de ser apropriados para representar a estrutura, por considerarem somente um elemento ao longo da espessura, o que implica em uma tensão linear nesta direção. Ocorrendo plastificação, a variação da tensão ao longo da espessura não é constante, pois a rigidez do material é diferente entre os pontos da estrutura que sofrem escoamento e os que permanecem no regime elástico. Dessa forma, para o caso de plastificação do material, a simulação com elementos sólidos tridimensionais é recomendada.

Para futuros trabalhos relativos ao assunto, podem ser sugeridos os seguintes temas:

- simulação de vigas com perfil não-retangular;
- simulações com outros tipos de carregamento (por exemplo, força concentrada na extremidade);
- simulação dos laços de histerese completos para o caso em que ocorre plastificação.

Referências Bibliográficas

- [1] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [2] ALMEIDA, C. A. *Notas de Aula - Elementos Finitos na Engenharia Mecânica*. 2015.
- [3] GERE, J. M.; GOODNO, B. J. *Mecânica dos Materiais, tradução da 7a edição norte-americana*. Cengage Learning, 2010.
- [4] GODINHO, G. A. Estrutura esbelta unidimensional sob grandes deslocamentos e condições de plastificação - solução analítica. 2016.
- [5] TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Teoria da Elasticidade, 3a edição*. Editora Guanabara, 1980.
- [6] WANG, C. *Applied Elasticity*. Mc-Graw Hill, 1953.