



**Felipe Silva Placido dos Santos**

**Acelerando a decomposição de Benders estocástica  
para otimização de um modelo de gestão de estoque  
de revisão periódica (R, S) com *backorder* parcial e  
demanda incerta**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia de Produção do  
Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Fabrício Carlos Pinheiro de Oliveira

Rio de Janeiro  
Julho de 2016



**Felipe Silva Placido dos Santos**

**Acelerando a decomposição de Benders estocástica  
para otimização de um modelo de gestão de estoque  
de revisão periódica (R, S) com *backorder* parcial e  
demanda incerta**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia de Produção do  
Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio.  
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Fabrício Carlos Pinheiro de Oliveira**

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Rafael Martinelli Pinto**

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Luciana de Souza Pessoa**

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Coronel Armando Morado Ferreira**

Diretoria de Fabricação - Exército Brasileiro

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro Técnico e Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 06 de julho de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

### **Felipe Silva Placido dos Santos**

Graduou-se em Engenharia Mecânica e de Armamento pelo Instituto Militar de Engenharia (IME), em 2010. É oficial do Exército Brasileiro desde 2010.

#### Ficha Catalográfica

Placido, Felipe Silva Placido dos Santos

Acelerando a decomposição de Benders estocástica para otimização de um modelo de gestão de estoque de revisão periódica (R, S) com *backorder* parcial e demanda incerta / Felipe Silva Placido dos Santos; orientador: Fabrício Carlos Pinheiro de Oliveira. -2016.

127 f. :il. (color.) ; 30cm

Dissertação (mestrado)-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Controle de estoque (R, S). 3. Demanda incerta. 4. *Backorder* parcial. 5. Método *L-Shaped*. 6. Técnicas de aceleração. I. Oliveira, Fabrício Carlos Pinheiro de (Fabrício Oliveira). II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título

CDD: 658.5

A minha amada esposa pelo seu amor, apoio, incentivo e suporte, você sempre será a minha maior conquista.

## Agradecimentos

A minha madrinha Sônia Placido pelo seu amor de mãe e por sempre acreditar na minha capacidade, me transmitindo confiança e força para que eu pudesse vencer através das oportunidades que você me deu. Sem você na minha vida, este mestrado, provavelmente, nunca teria acontecido.

Ao meu pai Jorge que mesmo travando uma batalhada tão difícil durante a realização deste curso, não deixou de me prezar e incentivar. Obrigado por me deixar fazer parte desta luta e poder presenciar a sua incrível força inabalável.

A minha mãe Maria pelo seu amor incondicional e carinho, que até hoje consigo sentir de forma intensa através de simples palavras, um simples abraço ou um simples beijo seu.

A minha tia Antônia pelo amor, carinho, incentivo e constante preocupação.

Ao meu irmão e aos meus sobrinhos por juntos tornarem a minha vida mais alegre.

Ao Exército Brasileiro, por ter permitido a realização deste curso.

A Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro e ao Departamento de Engenharia Industrial, que me receberam e permitiram que deles eu fizesse parte durante a realização deste curso.

Ao meu orientador, professor Fabrício Oliveira, pela orientação ímpar e principalmente pela liberdade e confiança, que foram vitais para realização do presente trabalho.

A todos os amigos e amigas que, com suas palavras de incentivo e apoio, colaboraram para a realização deste trabalho.

Por fim, a minha maravilhosa esposa Vanessa Placido por todo o amor e carinho ao longo dos nossos 17 anos juntos, e por sempre estar me incentivando a buscar novos conhecimentos e a me desenvolver profissionalmente.

## Resumo

Santos, Felipe Silva Placido dos; Oliveira, Fabrício Carlos Pinheiro de (orientador). **Acelerando a decomposição de Benders estocástica para otimização de um modelo de gestão de estoque de revisão periódica (R, S) com *backorder* parcial e demanda incerta**. Rio de Janeiro, 2016. 127p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho apresenta uma proposta de aceleração da decomposição de Benders aplicada a uma versão mais geral e compacta (menos restrições e variáveis) do modelo de gestão de estoques, otimizado via programação estocástica de dois estágios que considera uma camada, um item, demanda incerta e política de controle (R, S). De maneira a ser possível considerar problemas de grande porte, foram aplicados os métodos *L-Shaped* tradicional com corte único e a sua forma estendida com múltiplos cortes. Resultados computacionais preliminares mostraram um substancial melhor desempenho computacional do método *L-Shaped* tradicional em relação à sua forma *multi-cut L-Shaped*, mesmo o primeiro necessitando de mais iterações para convergir na solução ótima. Tal observação motivou o desenvolvimento de uma nova técnica de aceleração da decomposição de Benders e de um conjunto de desigualdades válidas. Experimentos numéricos mostram que a abordagem proposta de combinar a técnica de aceleração elaborada com as desigualdades válidas desenvolvidas provê significativa redução do tempo computacional necessário para a solução de instâncias de grande porte.

## Palavras-chave

Controle de estoque (R, S); demanda incerta; *backorder* parcial; método *L-Shaped*; desigualdades válidas; técnicas de aceleração.

## Abstract

Santos, Felipe Silva Placido dos; Oliveira, Fabrício Carlos Pinheiro de (Advisor). **Accelerating Benders stochastic decomposition for the optimization of partial backorder control for periodic review (R, S) inventory system with uncertain demand.** Rio de Janeiro, 2016. 127p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This dissertation presents a speed up proposal for the Benders decomposition applied to a more general and compact version (less constraints and variables) of inventory management model, optimized via two-stage stochastic programming, which considers one layer, one item, uncertain demand and control policy (R, S). In order to be possible to consider large scale problems, the L-Shaped traditional method with single cuts and its extended form with multiple cuts were applied. Preliminary computational results showed a substantially better computational performance of the traditional L-Shaped method in comparison to the multi-cut L-Shaped method, even with the first requiring more iterations to converge on optimum solutions. This observation led to the development of a new technique to accelerate the decomposition of Benders and a set of valid inequalities. Numerical experiments show that the proposed approach of combining the elaborate acceleration technique with the developed valid inequalities, provide significant reduction in the computational time required to solve large scale instances.

## Keywords

Inventory policy (R, S); uncertain demand; partial backorder; L-Shaped method; valid inequalities; acceleration techniques.

# Sumário

1 Introdução	16
1.1. Objetivo	21
1.2. Contribuições	22
1.3. Organização do texto	22
1.4. Metodologia	23
2 Revisão Bibliográfica	24
2.1. Revisão de Modelos de Estoques	24
2.2. Revisão de técnicas de aceleração da decomposição de Benders	26
3 Descrição do problema	32
4 Modelo matemático proposto	34
4.1. Problema de primeiro estágio	37
4.2. Problema de segundo estágio	38
5 . Aplicação do método <i>L-Shaped</i> ao modelo proposto	43
5.1. Decomposição de Benders	43
5.2. Método <i>L-Shaped</i> tradicional ou <i>single-cut L-Shaped</i> (SLS)	44
5.3. Método <i>L-Shaped</i> com múltiplos cortes ou <i>multi-cut L-Shaped</i> (MLS)	47
5.4. Formulação <i>L-Shaped</i> para o modelo proposto	49
6 Técnicas de aceleração propostas	52
6.1. Desigualdades válidas para o modelo proposto	52
6.1.1. Desigualdade válida para recurso relativamente completo	52
6.1.2. Desigualdade válida de limite inferior	54
6.1.3. Desigualdade válida para determinação do limite inferior para escolha do período para o primeiro pedido	60



6.2. Aplicando as desigualdades válidas nas formulações SLS e MLS	61
6.3. Técnica de aceleração da decomposição de Benders proposta pelo autor	62
6.3.1. Técnica de aceleração proposta na forma pura	62
6.3.2. Técnica de aceleração proposta na forma híbrida	70
6.4. Aplicando a técnica de aceleração proposta no modelo proposto	73
6.5. Técnica aceleração na forma híbrida modificada aplicada ao MP	81
7 Resultados numéricos e análises	84
7.1. Validação do modelo	85
7.2. Análise de desempenho computacional das formulações <i>L-Shaped</i> do MP	100
7.3. Análise de desempenho computacional utilizando-se as desigualdades válidas nas formulações SLS e MLS do modelo proposto	105
7.4. Análise de desempenho computacional da técnica de aceleração proposta aplicada ao modelo proposto	108
8 Conclusões	115
Referências bibliográficas	118
Apêndice	124

## Lista de algoritmos

Algoritmo 1 - Pseudocódigo da formulação LT.LT	76
Algoritmo 2 - Pseudocódigo da formulação LE.LE	77
Algoritmo 3 - Pseudocódigo da formulação LT.LT.123	78
Algoritmo 4 - Pseudocódigo da formulação LE.LE.123	79
Algoritmo 5 - Pseudocódigo da da formulação LE123.LT123	80
Algoritmo 6 - Pseudocódigo da da formulação LE123.LTM23	83

## Lista de figuras

Figura 1 - Estrutura da cadeia de suprimentos do modelo proposto	32
Figura 2 - Pedidos e entregas realizados ao longo do horizonte de planejamento	33
Figura 3 - Fluxograma do método <i>single-cut L-Shaped</i>	47
Figura 4 - Fluxograma do método <i>multi-cut L-Shaped</i>	49
Figura 5 - Valores de $WY_{p,r}$ para $TE = 2$ .	55
Figura 6 - Fluxograma da técnica de aceleração proposta na versão pura e com estrutura SLS	64
Figura 7 - Fluxograma da técnica de aceleração proposta na versão pura e com estrutura MLS	65
Figura 8 - Comportamento dos limites superior e inferior pelo método <i>SLS</i>	67
Figura 9 - Comportamento dos limites superior e inferior pela técnica proposta	67
Figura 10 - Fluxograma da técnica de aceleração proposta na versão híbrida	72
Figura 11 - Sensibilidade do nível alvo $s$ com o custo fixo de pedido em diferentes períodos e $C1$ , $C2$ e $C3$	96
Figura 12 - Sensibilidade do nível alvo $s$ com o custo de estoque em diferentes cenários e custos de atraso	98
Figura 13 - Sensibilidade do nível alvo $s$ com o estoque inicial e diferentes valores de $\beta$	98
Figura 14 - Sensibilidade do período para primeiro pedido $k$ com o estoque inicial e diferentes valores de $\beta$	99
Figura 15 - Sensibilidade da periodicidade $r$ com o estoque inicial com diferentes valores de $\beta$	100
Figura 16 - Tempo de solução cumulativo do PMR da série I13H1F1B1C3	104
Figura 17 - Tempo de solução do PMR em cada iteração do processo de solução da série I13H1F1B1C3	104

## Lista de tabelas

Tabela 1 - Todos os possíveis produtos de $y=x_1x_2$ para $0 \leq x_1 \leq M$ e $x_2 = \{0,1\}$	41
Tabela 2 - Todos os possíveis produtos de $y=x_1x_2$ para $-M \leq x_1 \leq M$ e $x_2 = \{0,1\}$	41
Tabela 3 - Código com as formulações SLS e MLS formadas com as inserções de (5.1), (5.17), (5.22) e (5.23)	61
Tabela 4 - Código dos PSLS e PMLS formados com as inserções de (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31)	74
Tabela 5 - Código dos VH formados com as inserções de (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31)	75
Tabela 6 - Código dos VHM formados com as inserções de (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31)	82
Tabela 7 - Códigos para tamanho dos conjuntos e valores dos parâmetros de custo	84
Tabela 8 – Códigos dos grupos de conjuntos usados no presente trabalho e seus respectivos impactos no tamanho problema	85
Tabela 9 – Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I1 e I2	87
Tabela 10 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I3 e I4	88
Tabela 11 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I5 e I6	89
Tabela 12 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I7 e I8	90
Tabela 13 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I9 e I10	91
Tabela 14 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I11 e I12	92
Tabela 15 - Tempo de solução em segundos das instâncias das Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14 com B <sub>1</sub>	95

Tabela 16 - Valores obtidos para r e k considerando H1B1R1K1	97
Tabela 17 - Efeitos no tempo de solução do MP com aplicação dos métodos SLS e MLS com cortes de VFS	103
Tabela 18 - Efeitos no tempo de solução do MP com aplicação das técnicas SLS e MLS com cortes de VFM	103
Tabela 19 - Efeitos de diferentes combinações das desigualdades válidas no MPFSLS	107
Tabela 20 - Efeitos de diferentes combinações das desigualdades válidas no MPFMLS	107
Tabela 21 - Efeito da aplicação da técnica proposta na versão pura SLS	110
Tabela 22 - Efeito da aplicação da técnica proposta na versão pura MLS	110
Tabela 23 - Efeito da aplicação da técnica proposta na versão híbrida utilizando apenas a desigualdade (5.1)	110
Tabela 24 - Efeito da aplicação da técnica na versão híbrida com as desigualdades válida	112
Tabela 25 - Análise comparativa das técnicas com melhores desempenho computacional em relação a formulação LT	112

## Lista de Siglas

CIL	ciclo iterativo local
CS	cadeia de suprimentos
HW	Hadley e Whitin
MEDC	modelo equivalente determinístico completo
MLS	<i>multi-cut L-Shaped</i>
MP	modelo proposto
PED	problema escravo dual
PEP	problema escravo primal
PLIM	programação linear inteira mista
PMLS	modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão pura <i>MLS</i>
PMR	problema mestre relaxado
PMRG	problema mestre relaxado global
PMRL	problema mestre relaxado local
PNLIM	programação não-linear inteira mista
PSLS	modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão pura <i>SLS</i>
SG	solução global
SLS	<i>single-cut L-Shaped</i>
SSL	solução sub-ótima local
TAL	término antecipado do ciclo iterativo local
VH	modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão híbrida
VHM	modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão híbrida modificada
VFM	viabilidade com a formulação <i>multi-cut</i>
VFO	valor da função objetivo
VFS	viabilidade com a formulação <i>single-cut</i>

*“Sê escravo do saber se queres ser  
verdadeiramente livre”*

Sêneca

*“Pensar é o trabalho mais difícil  
que existe. Talvez por isso tão poucos se  
dediquem a ele”*

Henry Ford

# 1

## Introdução

Estoque são importantes em todos os tipos de organização porque eles proveem um meio de protegê-las de incertezas inerentes ao mercado, como flutuações na demanda, atrasos inesperados do tempo de entrega, rendimento da produção abaixo do esperado e variações nos custos envolvidos. Entretanto, a gestão destes estoques afeta significativamente as operações diárias da organização, pois os estoques precisam ser contados, pagos e usados em operações para atender a demanda de clientes e administradores (Krajewski et al., 2009). As perguntas chave que a administração de estoques deve responder, geralmente sujeitas a uma variedade de circunstâncias, são: quando pedir, quanto pedir e quanto manter como estoque de segurança (Namat & Chen, 1999; Silva, 2009). Focando em prover repostas para tais questionamentos de maneira eficiente, diversos trabalhos sugerem o uso de programação matemática para o apoio à tomada de decisão, (Fors, 1986; Downs et al., 2001; Stojkovska, 2013a, por exemplo).

A principal questão no que diz respeito à gestão de estoque é garantir a disponibilidade do produto para o consumidor final ao menor custo possível. Existem diversas políticas de controle de estoque na literatura, associadas com modelos matemáticos que têm como objetivo a minimização do custo total relacionado com a administração do estoque. Pode-se dividir tais modelos em dois grupos básicos: modelos determinísticos, em que se considera que todos os parâmetros são previamente conhecidos, e modelos probabilísticos, onde um ou mais parâmetros são considerados estocásticos, o que os torna mais próximos da realidade. Contudo, quando se considera o fator incerteza, tais modelos tornam-se mais complexos de serem resolvidos, sendo na maioria dos casos indispensável a utilização de métodos eficientes de solução para a obtenção de soluções ótimas em tempos de execução aceitáveis.

Entre os modelos determinísticos para planejamento de estoque, o modelo de lote econômico EOQ (*Economic Order Quantity*), desenvolvido por Harris (1913), é o mais difundido. Este modelo é usado como base para outros modelos presentes



na literatura, onde basicamente uma ou mais restrições simplificadoras do modelo EOQ são relaxadas. Entre as restrições simplificadoras pode-se destacar como as que mais se distanciam da prática em problemas reais: o reabastecimento instantâneo, entregas com atraso não serem permitidas, não existência de capacidade de armazenamento de estoque, custo de pedido independentemente do tamanho do lote (não existe descontos por quantidades pedidas) e principalmente a demanda determinística, constante e contínua. Apesar do modelo EOQ ser bastante criticado devido as suas simplificações matemáticas, o mesmo continua sendo largamente usado com relativa margem de sucesso na prática (Pentico e Drake, 2009).

No contexto de gestão de estoques, é sabido que quando a demanda varia ao longo do horizonte de planejamento, mas pode ser considerada determinística (ou seja, pode ser perfeitamente prevista), planejamentos ótimos podem ser obtidos usando o algoritmo de programação dinâmica de Wagner-Whitin (Axsäter, 2006). Contudo, as considerações simplificadoras adotadas nos modelos determinísticos, em especial a de demanda determinística, não representam a realidade prática, o que por fim motivou a desenvolvimento de modelos de controle de estoque capazes de considerar incerteza em um ou mais parâmetros do problema.

Considerando-se a incerteza na demanda, existem diversas políticas de controle de estoque na literatura que podem ser aplicadas, e entre elas, pode-se citar os clássicos sistemas  $(R, Q)$ ,  $(R, S)$ ,  $(R, s, S)$ ,  $(s, S)$  e  $(s, Q)$ . Nesses sistemas,  $R$ ,  $Q$ ,  $s$  e  $S$  representam o período de revisão, a quantidade fixa de pedido, ponto de pedido ou estoque de segurança e o nível alvo do estoque, respectivamente. Nos sistemas  $(R, Q)$ ,  $(R, S)$  e  $(R, s, S)$ , em cada  $R$  unidades de tempo (período de revisão), no primeiro, uma quantidade fixa  $Q$  de itens é encomendada e no segundo e terceiro, uma quantidade variável suficiente para elevar o nível do estoque até a posição  $S$  é encomendada em cada período de revisão; no terceiro a encomenda é realizada apenas se a posição do estoque é igual ou inferior ao ponto de pedido  $s$ . Os sistemas  $(s, Q)$  e  $(s, S)$  presumem revisão contínua e, em ambos, a quantidade de itens é pedida quando a posição de estoque é menor ou igual ao ponto de pedido  $s$ , sendo a quantidade pedida do sistema  $(s, Q)$  fixa igual a  $Q$  e a quantidade de  $(s, S)$  variável suficiente para elevar o nível do estoque até a posição  $S$  em cada pedido.

Segundo Fattahi et al. (2014), em aplicações reais, a revisão periódica de estoques é mais frequentemente adotada do que a revisão contínua. Segundo Hadley

e Whitin (1963), a revisão periódica nas políticas de reabastecimento de estoque é amplamente usada porque necessita de menos esforço transacional, permitindo maior facilidade no planejamento e cálculo de carga de trabalho necessária, facilitando o atendimento das necessidades tanto dos clientes quanto dos fornecedores, permitindo uma melhor coordenação de reposição, especialmente quando se faz necessária a gestão de múltiplos itens, além de gerar grande estabilidade para o sistema.

Hadley e Whitin (1963) e Silver e Peterson (1998) propuseram modelos que consideram a incerteza na demanda. Em muitos desses modelos, por questões de simplificação, os parâmetros de custo são considerados fixos ao longo do horizonte de planejamento e as demandas estocásticas são aproximadas para uma distribuição de probabilidade conhecida. O modelo proposto por Hadley e Whitin (1963), por exemplo, tem como principal limitação, em termos de incerteza, a demanda ser considerada independente no tempo e normalmente distribuída, que são premissas que limitam a aplicabilidade do modelo a problemas reais, uma vez que a demanda e outros parâmetros podem depender de diversos fatores, tais como incertezas inerentes do mercado, custo e período do ano (sazonalidade).

Segundo Cunha et al. (2014) uma forma de relaxar a hipótese de ter um modelo de demanda estocástica simplificado é usar a técnica de programação estocástica de dois estágios com recurso. A estrutura de dois estágios é compatível com as políticas de estoque supracitadas, quando a mesma é usada para modelar as variáveis de controle (i.e.,  $R$ ,  $S$ ,  $s$  e  $Q$ ) como as variáveis de primeiro estágio em cada sistema, que são aquelas que representam as decisões que devem ser tomadas antes das incertezas se revelarem. As variáveis remanescentes, ditas variáveis de segundo estágio ou variáveis de recurso, são determinadas após a incerteza se revelar. Uma das grandes vantagens da estrutura de programação estocástica de dois estágios é que os parâmetros estocásticos podem ser modelados sem a necessidade de assumir qualquer hipótese restritiva para o fenômeno estocástico, desde que o mesmo possa ser aproximado por um conjunto discreto de cenários. A garantia da compatibilidade do uso da programação estocástica de dois estágios para gestão de estoques pode ser verificada nos trabalhos de Cunha et al. (2014) e Fattahi et al. (2014).

Nos sistemas de gestão de estoques é comum considerar que a demanda não atendida ficará toda em atraso (*pure backorder case*) ou será completamente

perdida (*pure lost sales case*). Entretanto, uma forma mais geral de abordar a demanda não atendida consiste na hibridização dos casos ditos puros, a qual é conhecida na literatura como atraso parcial (*partial backorder case*). Quando apenas uma porcentagem da demanda não atendida fica em atraso sendo o restante perdido, tem-se o caso de atraso parcial, que pode ser aplicado em diversas situações reais.

Até a presente data, não foram encontrados trabalhos na literatura que utilizem otimização estocástica dois estágios na gestão de estoques considerando a possibilidade de atraso parcial. Nesse trabalho é proposto um modelo de otimização estocástica dois estágios que se propõe a definir políticas de controle de estoque com a possibilidade de atraso parcial e revisão periódica ( $R, S$ ) de maneira ótima, levando-se em conta a incerteza na demanda. O modelo proposto nesta dissertação é uma versão estendida do modelo de Cunha et al. (2014), o qual considera apenas os casos de atraso puro e perda de vendas puro.

Inicialmente o modelo de Cunha et al. (2014) foi baseado em programação não linear inteira mista (PNLIM) e em seguida reformulado com o uso de uma linearização exata para um programa linear inteiro misto (PLIM). Entretanto, a linearização proposta aumenta significativamente a quantidade de restrições e variáveis do modelo. Outrossim, no modelo proposto por Cunha et al. (2014) não existe parâmetro que representa a quantidade de estoque inicial, presente nos modelos de gestão de estoque da literatura, sendo necessário utilizar um artifício para que o mesmo seja computado de forma indireta no processo de solução.

O modelo proposto neste presente trabalho considera os casos de atraso puro, perda de vendas puro e atraso parcial na política de controle de estoques. É também proposta uma formulação que permite a representação do estoque inicial de maneira direta no modelo. Além disso, através de uma linearização mais eficiente que dispensa o uso de variáveis auxiliares, uma formulação com menos variáveis e restrições é proposta.

Entretanto, o aumento do porte do modelo proposto implica no aumento nos seus números de variáveis e restrições, o que em conjunto com o fato do problema ser um PLIM, torna impraticável resolver a sua versão equivalente determinística quando longos horizontes de planejamento e grandes quantidades de cenários são considerados, devido à alta demanda de desempenho computacional. No entanto, é sabido que o aumento do número de períodos e cenários conduz a uma redução na

porcentagem do erro absoluto do custo mínimo, como se pode observar no trabalho de Cunha et al. (2014). Tal *trade-off* torna evidente os benefícios que podem ser obtidos advindos do desenvolvimento de técnicas que sejam capazes de acelerar o processo de obtenção de soluções ótimas, em particular métodos eficientes para resolver problemas de largas escalas baseados em decomposição.

Van Slyke e Wets (1969) apresentaram o primeiro trabalho usando decomposição de Benders (1962) em um programa estocástico de dois estágios, o qual é conhecido como método *L-Shaped* tradicional ou *single-cut L-Shaped*. Birge e Louveaux (1988), explorando a estrutura da modelagem estocástica de dois estágios, estenderam o método para uma versão considerando múltiplos cortes (*multi-cut L-Shaped* ou *L-Shaped* com múltiplos cortes).

O modelo proposto nesta dissertação pode ser definido como um modelo de otimização estocástica de dois estágios com variáveis de primeiro estágio inteiras e contínuas (decisões de quando executar os pedidos ao longo do horizonte de planejamento e a determinação do nível alvo), sendo o segundo estágio composto por variáveis contínuas (quantidades do item pedido, em atraso, não atendidos e em mãos como decisões de recurso). Tais características permitem considerar-se uma estrutura de decomposição fundamentada em cenários com base na decomposição de Benders aplicada à otimização estocástica de dois estágios, dada a particular estrutura desse tipo de problema, onde as variáveis de primeiro estágio são tidas como variáveis complicadoras por serem os únicos elementos que promovem conexões, no segundo estágio, entre os subproblemas de cada cenário.

A eficiência computacional da decomposição de Benders é amplamente comprovada em diversos trabalhos que constam na literatura, especialmente no contexto de programação estocástica de dois estágios, como demonstrado por Castro et al. (2009), Khodr et al. (2009), Costa et al. (2012), Bertsimas et al. (2013) e Oliveira e Hamacher (2012), por exemplo.

Entretanto, a decomposição de Benders tradicional e, conseqüentemente, a sua versão estocástica (método *L-Shaped* tradicional com corte único e sua forma estendida com múltiplos cortes), sob certas condições, pode não apresentar eficiência computacional satisfatória quando aplicada, fato que pode ser verificado na literatura em alguns estudos anteriores como em Rei et al. (2009), Saharidis et al. (2011) e Tang et al. (2013), por exemplo. Assim, diversas estratégias para acelerar a decomposição de Benders têm sido propostas ao longo dos anos

(McDaniel e Davine, 1977; Magnanti e Wong, 1981; Papadakos, 2008; Saharidis et al., 2009; Saharidis e Ierapetritou, 2010; Sherali e Lunday, 2011; Yang e Lee, 2012; Oliveira et al., 2013).

No presente trabalho são propostas técnicas de aceleração da decomposição de Benders estocástica para o modelo de gestão de estoques proposto, através da aplicação de uma nova técnica de aceleração para o método *L-Shaped*, mas que pode ser usada na decomposição de Benders tradicional, em conjunto com desigualdades válidas desenvolvidas especificamente para o modelo proposto que se propõem a tornar a decomposição proposta mais eficiente.

### 1.1. Objetivo

Um dos objetivos centrais do presente trabalho é propor uma versão mais geral, porém mais compacta no que se refere ao total de variáveis e restrições, do modelo de gestão de estoque proposto originalmente por Cunha et al. (2014). Através de uma série de reformulações aplicadas ao modelo original, a formulação proposta incorpora a possibilidade de consideração de estoque inicial e *backorder* parcial. Além disso, é proposta uma linearização mais simples (e mais eficiente, uma vez que a mesma não necessita de variáveis auxiliares adicionais) que aquela apresentada originalmente por Cunha et al. (2014).

Para garantir resultados precisos com o modelo proposto considerando-se grandes conjuntos de cenários e longos horizontes de planejamento, porém obtendo desempenho computacional tratável, foram aplicados os métodos de aceleração *L-Shaped* tradicional e a sua versão estendida ou com múltiplos cortes. No entanto, a eficiência computacional obtida foi pouco satisfatória.

Nesse contexto, este trabalho tem como outro objetivo propor um método de solução baseado na associação da decomposição de Benders com estratégias que visam acelerar a convergência do método quando aplicado ao modelo de gestão de estoques proposto. Tais estratégias consistem no uso de desigualdades válidas desenvolvidas para o problema em questão e a aplicação de uma nova técnica de aceleração que tem como base a estrutura do método *L-Shaped*.

## 1.2. Contribuições

As principais contribuições oferecidas por esta dissertação são:

1. Proposta de um modelo mais geral que o proposto originalmente por Cunha et al. (2014) com inclusão de estoque inicial na sua formulação e consideração da possibilidade de *backorder* parcial, podendo ser modificado para considerar perda de vendas puro ou *backorder* puro de forma simples. Além disso, é proposta uma formulação mais simples para representar a não-linearidade do modelo original.
2. Aplicação do método *L-Shaped* no modelo proposto para se obter um melhor desempenho computacional.
3. Desenvolvimento de desigualdades válidas para melhorar o processo de solução da abordagem *L-Shaped* no modelo proposto.
4. Proposta de uma nova técnica de aceleração do método *L-Shaped*, mas geral o suficiente para ser utilizada em aplicações que se baseiam no método de Benders tradicional (i.e., problemas determinísticos).

## 1.3. Organização do texto

No que segue, no Capítulo 2 é apresentada uma breve revisão de modelos de gestão de estoque e uma revisão das principais técnicas de aceleração da decomposição de Benders na literatura, que também podem ser aplicadas no método *L-Shaped*. O Capítulo 3 descreve a estrutura do problema. O Capítulo 4 contém o modelo de gestão de estoques proposto. No Capítulo 5, os métodos *L-Shaped* tradicional e sua forma estendida com múltiplos cortes são apresentados e são propostas formulações aplicando-se os mesmos no modelo proposto no Capítulo 4. No Capítulo 6, são desenvolvidas as desigualdades válidas e a uma nova técnica de aceleração do método *L-Shaped* é proposta. O Capítulo 7 contém todos os resultados e análises dos experimentos numéricos realizados. Finalmente, conclusões e trabalhos futuros são apresentados no Capítulo 8.

#### 1.4. Metodologia

Para alcançar os objetivos listados, foram realizadas reformulações no modelo de Cunha et al. (2014) de maneira a torná-lo mais geral. Posteriormente, foram aplicados os métodos *L-Shaped* tradicional e sua forma com múltiplos cortes (*L-Shaped* estendido) para acelerar o processo de solução e permitir se obter soluções ótimas em tempos computacionais viáveis, mesmo quando considerados longos horizontes de planejamento e grande número de cenários. A fim de acelerar o método *L-Shaped* quando aplicado ao modelo proposto, foram desenvolvidas desigualdades válidas que foram capazes de otimizar a convergência do processo de solução e, conseqüentemente, melhorar o desempenho computacional do modelo proposto. Posteriormente, foi proposta uma nova técnica de aceleração do método *L-Shaped*, que possui três versões, visando obter um modelo com alto desempenho computacional, que gere soluções ótimas quando se considera longos horizontes de planejamento com demandas diárias e grandes números de cenários de demanda. A validação do modelo proposto foi realizada através da análise dos resultados obtidos de extensivos experimentos numéricos, onde os principais parâmetros e conjuntos do modelo proposto são variados. Finalmente, de forma a validar as estratégias de aceleração do modelo proposto, foram geradas instâncias cujas escalas foram aumentadas de forma gradativa, a fim de analisar, através de experimentos numéricos, cada versão da técnica de aceleração empregada de forma individual e quando combinadas.

## 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1.

### Revisão de Modelos de Estoques

No decorrer dos anos, novas formulações de modelos determinísticos têm sido propostas com o objetivo de reduzir as simplificações do modelo EOQ de Harris (1913) tornando-o mais geral e, conseqüentemente, mais adequado para aplicações reais, dentre as quais pode-se destacar os modelos clássicos encontrados na literatura de gestão de estoque: modelo de lote econômico de produção, modelo de desconto por quantidade e modelo de lote econômico com *backorder*

O modelo de lote econômico de produção EPQ (*Economic Production Quantity*) é uma adaptação do modelo EOQ com a modificação da suposição de reabastecimento instantâneo do estoque para reabastecimento a uma taxa finita e constante ao longo do tempo (Axsäter, 2006; Krajewski et al., 2009).

O modelo de desconto por quantidade relaxa a restrição de preço unitário constante e independente da quantidade encomendada do item no modelo EOQ, considerando descontos por quantidades em sua formulação, ou seja, os fornecedores podem dar descontos aos seus clientes caso esses comprem em grandes lotes, o que pode levar a economias de escalas.

Como pode ser verificado, por exemplo, em Pentico e Drake (2009), no modelo de lote econômico com *backorder* puro considera-se a existência de atrasos programados e o modelo de lote econômico com perda de vendas puro utiliza um critério obtido através de um rigoroso desenvolvimento matemático, que considera os valores do custo fixo de entrega do pedido, custo de venda perdida, custo de estoque por unidade e a demanda para decidir se os pedidos serão ou não realizados, podendo ser toda a demanda não satisfeita ou atendida seguindo o modelo EOQ.

Diversos modelos de lote econômico em que se considera o *backorder* parcial, onde uma fração da demanda não atendida fica em atraso e o restante é



perdido, têm sido propostos ao longo dos anos. Pentico e Drake (2009) propuseram uma formulação determinística de atraso parcial, usando o modelo EOQ como base, com equações mais fáceis de conseguir obter a solução ótima de forma analítica quando comparado aos modelos anteriores de Montgomery et al. (1973), Rosenberg (1979), Park (1982) e San José et al. (2005) que também propõem formulações de EOQ com atraso parcial.

Assim como foi proposto o EOQ com atraso parcial, também foram propostos os modelos EPQ com atraso parcial por Pentico et al. (2009) que posteriormente foi complementado por Zhang (2009) e Stojkovska (2013b), onde a taxa de itens em atraso é considerada constante; por Pentico et al. (2011), onde a taxa de itens em atraso é considerada dependente da fase de produção e por Hsieh e Dye (2012), que resolvem o mesmo problema de Pentico et al. (2011) sem usar equações diferenciais, apresentando um procedimento alternativo de decisão para determinação da solução ótima.

Entretanto, considerar todos os parâmetros de um modelo de gestão de estoque como determinísticos, principalmente a demanda, pode não ser uma estratégia satisfatória dependendo dos valores de custos envolvidos na gestão de estoque ou quando se considera a necessidade de um nível mínimo de atendimento obrigatório, por exemplo.

Entre os modelos que não consideram *backorder* parcial e consideram a demanda estocástica e seguindo uma distribuição de probabilidade conhecida, que melhor se aproxime da natureza da demanda em questão, pode-se destacar os modelos de Hadley e Whitin (1963), Archibald (1981), Buchanan e Love (1985), Chen e Zheng (1993), Axsäter (1996), Johansen e Thorstenson (1996) e Johansen e Thorstenson (2014).

Considerando-se atraso parcial e demanda estocástica seguindo uma distribuição de probabilidade conhecida, pode-se destacar os trabalhos de Das (1977), Posner e Yansouni (1981), Moizadeh (1989), Rabinowitz et al. (1995), Chu et al. (2001), Thangam e Uthayakumar (2007) e Hu et al. (2014).

Os únicos trabalhos encontrados na literatura, até a presente data, que usam programação estocástica de dois estágios aplicada a gestão de estoques foram os de Cunha et al. (2014) e Fattahi et al. (2014).

Fattahi et al. (2014), com base no sistema contínuo (s, S), modelaram uma rede de duas camadas com um fabricante, um vendedor, um item, incerteza no

parâmetro da demanda, perdas de vendas pura e analisaram o modelo na forma centralizada e descentralizada.

Cunha et al. (2014) propôs um modelo de controle de reposição e estoques via programação estocástica de dois estágios, considerando revisão periódica (R, S), um item e demanda incerta. Nesse modelo não existe um parâmetro referente ao estoque inicial, sendo necessário considerar os parâmetros de custos iguais a zero nos primeiros seis períodos do horizonte de planejamento para que o estoque inicial seja computado. Além disso, no modelo de Cunha et al. (2014) considera-se o caso de perdas de vendas puro, ou através de algumas alterações em suas restrições passa a considerar o caso de atraso puro (*backorder* puro).

## 2.2.

### Revisão de técnicas de aceleração da decomposição de Benders

Como citado no capítulo 1 desta dissertação, a aplicação da decomposição de Benders, que quando aplicada a problemas estocásticos de dois estágios é equivalente ao método *L-Shaped*, pode não fornecer resultados satisfatórios em termos de desempenho computacional, fornecendo, em alguns casos, tempos de soluções intratáveis, principalmente quando aplicada a problemas lineares inteiros mistos de grande porte. O método *multi-cut L-Shaped* (Birge e Louveaux, 1988) pode ser encarado como uma forma de aceleração do método *L-Shaped* tradicional, pois visa acelerar a convergência do processo de solução através da adição de múltiplos cortes no problema mestre relaxado (PMR), em cada iteração do processo iterativo de solução. Contudo, em determinados modelos essa técnica pode não proporcionar desempenho computacional superior, como será observado no Capítulo 7 desta dissertação.

No processo de solução do método *L-Shaped*, em cada iteração, o PMR do método *multi-cut L-Shaped* cresce em termos de dimensão mais rapidamente que o do método *single-cut L-Shaped*. Consequentemente, espera-se que no método *multi-cut L-Shaped*, a dificuldade de resolver o PMR e, consequentemente, o seu tempo de solução, aumente significativamente conforme os cortes são adicionados, quando o número de cenários é grande. Assim, apesar do método *L-Shaped* tradicional necessitar de mais iterações para atingir a solução ótima do que a sua versão estendida com múltiplos cortes, a escolha entre os dois métodos,

considerando o tempo computacional de solução, pode depender do problema em questão. Birge e Louveaux, (1988), por exemplo, com base nos resultados de seus experimentos, concluíram que o método *multi-cut L-Shaped* é mais eficaz quando o número de cenários não é relativamente muito maior que o número de soluções possíveis para o problema de primeiro estágio.

Ao longo dos anos, várias técnicas e estratégias têm sido propostas para acelerar a clássica decomposição de Benders, sendo as mesmas diretamente adaptáveis ao método *L-Shaped*. A tática de combinar uma ou mais técnicas de aceleração existentes na literatura é largamente usada em diversos trabalhos acadêmicos, como em Tang et al. (2013), Lei et al. (2014) e Oliveira et al. (2014), por exemplo. Contudo a eficiência de cada técnica ou combinação depende do problema em questão. Por exemplo, em Oliveira e Hamacher (2012) e Lei et al (2014) as formulações com o método *multi-cut L-Shaped* apresentam desempenho computacional superior à formulação com o método *single-cut L-Shaped*, quando aplicadas aos mesmos problemas e sob as mesmas condições, entretanto em Placido e Oliveira (2015) e na presente dissertação, a formulação *single-cut L-Shaped* apresenta desempenho significativamente melhor em relação a *multi-cut L-Shaped*.

Uma forma de acelerar a decomposição de Benders é gerar cortes mais eficientes, ou seja, cortes ou conjuntos de cortes que, quando adicionados ao PMR, visam possibilitar a convergência do processo de solução em menos iterações que o método original. Nesse contexto, alguns pesquisadores propõem a adição de um conjunto de cortes fortes (*strong cuts*) adicionais a cada iteração. Magnanti e Wong (1981) propuseram em seu trabalho um procedimento para gerar cortes Pareto-ótimo para ‘fortalecer’ os cortes ótimos de Benders, e dessa forma, acelerar a convergência do problema. A técnica de Magnanti e Wong (1981) resolve dois subproblemas a cada iteração do método da decomposição de Benders: o problema escravo dual (PED) que é associado à solução corrente do problema mestre e um subproblema associado a um ponto pertencente a envoltória convexa do conjunto viável do problema mestre (*core-point*) e ao valor da função objetivo (VFO) corrente do problema escravo. As maiores dificuldades desse método são a obtenção dos *core-points*, que não são fáceis de serem obtidos na maior parte dos casos, e o fato do subproblema de Magnanti e Wong (1981) se tornar instável, em alguns casos, por ser dependente do VFO do PED. Papadakos (2008), contornou as dificuldades da técnica de Magnanti e Wong (1981) propondo uma forma mais

simples de se obter os *core-points*, usando uma combinação linear entre uma solução inicial viável e a solução vigente, e mostrando que a restrição que relacionava o valor corrente do PED ao subproblema de Magnanti e Wong (1981) podia ser removida. Sherali e Lunday (2011) apresentaram uma estratégia diferente para gerar cortes não-dominados. A técnica consiste em gerar cortes de Benders não-dominados maximais através de perturbações nos termos independentes do subproblema de Benders. Os autores também mostram uma estratégia baseada no relaxamento complementar, que simplifica a geração de um corte de Benders adicional válido, quando comparado com a tradicional estratégia de Magnanti e Wong (1981). Mais recentemente, Oliveira et al. (2013) propuseram uma forma de lidar com a alternativa apresentada por Sherali e Lunday (2011) usando cortes “quase maximais”. A ideia chave do trabalho de Oliveira et al. (2013) está em, no início do algoritmo, usar cortes mais “rudimentares” e, ao longo do processo, ir obtendo cortes cada vez mais refinados e, desta forma, diminuir esforço computacional para adição dos cortes de Benders não-dominados. Saharidis e Ierapetritou (2010) sugerem a geração de um corte MFS (*maximum feasible subsystem*) adicional válido, sempre que um corte viável de Benders (tipo de corte gerado quando, dada uma determinada solução do PMR, a solução do PED é ilimitada - o que é equivalente a solução do problema escravo primal (PEP) ser inviável - para garantir a convergência do método) é gerado. O corte MFS é obtido resolvendo-se dois problemas extras de versões modificadas do PEP e ambos com restrições do tipo *Big M*. A proposta de Saharidis e Ierapetritou (2010) se mostra efetiva em acelerar a convergência de problemas em que o número de cortes de viabilidade gerado é maior que o número de cortes de otimalidade (gerados quando o PED possui solução ótima). Também no contexto de acelerar a convergência da decomposição de Benders quando cortes de otimalidade são difíceis de se obter, Yang e Lee (2012) propuseram a geração de cortes mais ajustados (*tighter cut*) usando a razão de distâncias de um ponto viável para um ponto inviável e para um corte de viabilidade. Os *tighter cuts* são obtidos resolvendo-se três problemas lineares extras em sequência, e a utilização dessa técnica, no problema de programação linear inteiro misto estudado pelos autores, mostrou reduções substanciais no tempo de solução e no número de iterações.

Saharidis et al. (2009) propuseram o uso do conceito de *covering cut bundle* (CCB) na decomposição de Benders. A estratégia consiste em, com o auxílio de um

subproblema adaptado com a técnica de CCB e usando os valores obtidos na última solução do problema mestre, gerar um conjunto de cortes de baixa densidade (cortes que envolvem um pequeno número de variáveis de decisão do problema mestre), ao invés de apenas um único corte, em cada iteração do processo de solução. Aplicação dessa técnica nos casos estudados pelos autores reduziu de forma significativa o número de iterações do método de Benders, levando a redução do tempo de solução.

McDaniel e Davine (1977) propuseram a estratégia de relaxar a integralidade das restrições do problema mestre, ao iniciar as iterações da decomposição de Benders, e dessa forma, garantir vários cortes para o problema mestre, sem precisar resolver um problema de programação inteira mista. Com isso, espera-se gerar informação proveitosa do problema de segundo estágio para o problema mestre, com menor demanda de desempenho computacional nas iterações em que o mestre está linearmente relaxado e redução do número total de iterações necessárias com o mestre inteiro misto para convergência do algoritmo. Os autores também propuseram algumas regras heurísticas para quando o mestre, durante as iterações, deve voltar a ser resolvido como um problema inteiro misto e assim garantir a convergência do algoritmo. Essa modificação no método da decomposição Benders é conhecida como *hot start*. Posteriormente Côté e Laughton (1984) sugeriram um algoritmo em que o problema mestre de Benders é resolvido usando relaxação Lagrangeana, necessitando apenas encontrar uma solução inteira viável ao invés da solução ótima, em cada iteração, melhorando, dessa forma, o desempenho computacional. Os autores consideram um problema mestre inteiro misto com variáveis binárias que, após aplicação do algoritmo proposto, se torna um inteiro puro, sendo necessário encontrar apenas uma solução inteira no problema mestre em cada iteração para a geração dos cortes de Benders. Contudo, os cortes gerados pela estratégia de Côté e Laughton (1984) podem falhar em garantir a convergência, fornecendo soluções sub-ótimas.

Roy (1983) propôs um novo tipo de decomposição chamada de decomposição cruzada, em que a ideia é usar de forma simultânea a decomposição de Benders e a decomposição dual (relaxação Lagrangeana). O autor prova que a solução do subproblema Lagrangeano pode agir como possível solução do problema mestre de Benders e vice-versa. Assim pode-se, de modo alternado, obter

as soluções dos dois subproblemas e, dessa forma, gerar informações mais eficientes para os problemas mestres.

Rei et al. (2009) propuseram o uso das ramificações locais (*local branching*) de Fischetti e Lodi, (2003) para acelerar a decomposição de Benders, quando aplicada à classe de problemas de programação linear inteira mista com variáveis binárias. O uso de ramificações locais no processo de solução, permite explorar a vizinhança das soluções obtidas pelo mestre para encontrar diferentes soluções viáveis. Esse processo pode melhorar simultaneamente o limite superior e inferior característicos do algoritmo da decomposição de Benders e, assim, reduzir a quantidade de iterações até se obter a solução ótima. Os autores também mostram como os cortes de viabilidade de Benders podem ser reforçados ou substituídos com restrições de ramificações locais. Rei et al. (2009) aplicaram suas ideias de hibridização do *local branching* com a decomposição de Benders em um problema geral de projeto de redes com duas variáveis inteiras binárias e obtiveram resultados satisfatórios.

Para os casos em que o problema de 2º estágio é muito difícil de se resolver, Zakeri et al. (1999) sugeriram um algoritmo em que os cortes são formados por pontos interiores do espaço de solução do problema escravo dual corrente, ao invés de seus pontos extremos ótimos. Os autores mostram que a geração desses cortes sub-ótimos, também chamados de cortes inexatos, é computacionalmente menos exigente. Os autores aplicaram o método proposto em problemas de agendamento, e resultados satisfatórios, em termos de redução do tempo de soluções, foram obtidos.

Outras técnicas muito utilizadas na literatura são o uso de desigualdades válidas e a desagregação dos cortes de Benders. A adição de uma série de desigualdades válidas no problema mestre restringe o seu domínio e pode proporcionar a obtenção de melhores limites inferiores e superiores desde a primeira iteração do processo de solução, tratando-se, portanto, de uma forma efetiva de acelerar a convergência, e podendo inclusive eliminar soluções inviáveis, reduzindo parcialmente ou totalmente os cortes de viabilidade.

A desagregação do corte de Benders foi introduzida por Dogan e Goetschalcky (1999) em um problema de programação inteira mista de produção-distribuição multi-período, resolvido via decomposição de Benders. Os cortes desagregados podem ser obtidos apenas para problemas em que a estrutura do

subproblema de Benders permite separá-lo em dois ou mais subproblemas independentes. A aplicação desse método permite que em cada iteração, múltiplos cortes de Benders do problema escravo dual sejam adicionados ao problema mestre, restringido de forma mais efetiva o espaço de solução do problema mestre e, consequentemente, acelerando a convergência do problema. Além disso, o tempo total de solução gasto em subproblemas mais simples é geralmente menor do que quando se resolve o subproblema completo.

A eficiência do uso das técnicas de desigualdades válidas e da desagregação do corte de Benders na aceleração da convergência da solução em problemas resolvidos via decomposição de Benders, pode ser comprovada em diversos estudos da literatura, que comumente as utilizam combinadas com outras técnicas de aceleração, visando obter desempenho computacional superior. Por exemplo, em Saharidis et al. (2011) os autores propuseram o uso de uma série de desigualdades válidas no PMR de problemas do tipo rede, obtendo reduções significativas no número de iterações do processo de solução; Tang et al. (2013) usam cortes Pareto-ótimo, desigualdades válidas e desagregação do corte de Benders para acelerar o processo de solução de um problema de localização de instalações com capacidade de expansão; Pishvaei et al. (2014) utilizam as técnicas de desigualdades válidas, desagregação do corte de Benders e *local branching* para acelerar de forma satisfatória uma abordagem de decomposição de Benders em um estudo de caso de cadeia de suprimento sob incerteza; Lei et al. (2014) aceleram um problema de roteamento e agendamento de instalação móvel utilizando as técnicas de relaxamento do gap de otimalidade, desigualdades válidas e desagregação do corte de Benders.

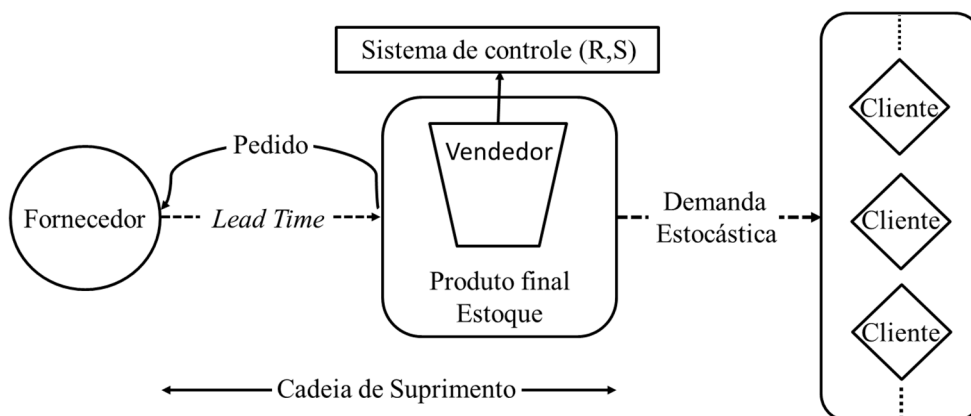
Cabe ressaltar que não foram encontrados na literatura trabalhos que proponham modelos considerando o uso da programação estocástica de dois estágios para auxiliar a tomadas de decisão no controle de reposição e estoques considerando-se *backorder* parcial. Além disso, não foram encontrados trabalhos de gestão de estoque via de programação estocástica dois estágios com a preocupação de desenvolver métodos que apresentem alto desempenho computacional quando são considerados problemas de grande escala. Finalmente, não foi encontrado nenhuma técnica de aceleração da decomposição de Benders igual ou similar a técnica aqui proposta.

### 3 Descrição do problema

Segundo Fatthi et al (2014) uma cadeia de suprimentos (CS) é uma rede de organizações que contém fornecedores, fabricantes, distribuidores, atacadistas e varejistas. Em um modelo descentralizado, cada entidade da CS controla a gestão de seu estoque considerando apenas os seus objetivos e restrições. No modelo centralizado, apenas um tomador de decisão determina as decisões considerando as restrições e os objetivos de toda a CS.

A complexidade da gestão de estoque cresce significativamente em uma CS de múltiplas camadas, quando se compara a gestão de apenas uma única camada. No contexto de múltiplas camadas, Fatthai et al. (2014), em suas pesquisas, verificam que a maioria dos trabalhos da literatura são formulados para duas camadas. Em Fattahi et al (2014), por exemplo, considera-se uma CS de duas camadas constituída de um único fabricante e um único vendedor.

No presente trabalho, considera-se uma CS de apenas uma única camada constituída de um único vendedor, um único item, demanda incerta e sistema de controle de estoque (R, S) conforme mostra a Figura 1. Entretanto, é válido ressaltar, que a estrutura do problema da Figura 1 abrange um contexto mais geral, podendo, por exemplo, o vendedor ser substituído por um hospital, os clientes por pacientes e o item por um determinado medicamento.



**Figura 1-Estrutura da cadeia de suprimentos do modelo proposto**



Nesta dissertação, é assumido que o vendedor utiliza o sistema de controle de reposição periódica de estoques ( $R, S$ ) para o item considerado, onde, particularmente para o modelo proposto,  $R$  é composto por  $k$  e  $r$ , onde  $k$  denota o período em que será realizado o primeiro pedido,  $r$  denota a periodicidade entre encomendas e  $S$ , que será representado por  $s$  no modelo matemático proposto no capítulo seguinte (todas as variáveis são representadas por letras minúsculas), denota o nível máximo de estoque (nível alvo) do item. Basicamente, o problema é determinar o nível alvo  $S$  ótimo, o período para primeiro pedido  $k$  ótimo e a periodicidade  $r$  ótima do sistema de controle de estoque do vendedor, relativo a um único item.

Para a estrutura da cadeia de suprimento apresentada na Figura 1, considere-se um horizonte de planejamento discreto e finito, com um número discreto de períodos  $p$ , que podem ser, por exemplo, dias, semanas ou meses. Admite-se que os pedidos recebidos no início de um período podem ser consumidos já no mesmo período. Os pedidos sempre são realizados no início dos períodos e devem ser feitos a cada  $r$  períodos, a partir do período  $k$ , como ilustrado na Figura 2, para o caso do tempo de entrega ser menor que a periodicidade dos pedidos.

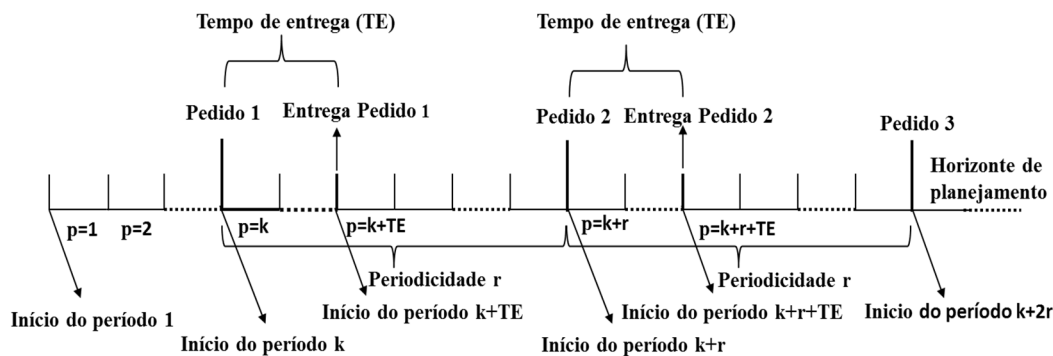


Figura 2- Pedidos e entregas realizados ao longo do horizonte de planejamento

O modelo matemático proposto no capítulo seguinte, é formulado via programação estocástica de dois estágios. Essa técnica permite simular a demanda estocástica por intermédio de cenários discretos e suas respectivas probabilidades. Assim, a demanda não precisa seguir uma distribuição de probabilidade conhecida, e é possível considerar fatores como sazonalidade em sua simulação utilizando métodos de previsão como séries temporais, por exemplo.

## 4

### Modelo matemático proposto

A presente formulação consiste de uma versão modificada do modelo de gestão de estoques originalmente proposto por Cunha et al. (2014) (disponível no apêndice). O modelo proposto é formulado via programação estocástica de dois estágios com incerteza no parâmetro de demanda e considera uma camada, um item e política de controle  $(R, S)$ . O modelo equivalente determinístico é originalmente formulado via PNLIM, o qual é linearizado de forma exata. As decisões do primeiro estágio dizem respeito à determinação propriamente dos parâmetros  $(R, S)$ . As decisões de segundo estágio são relativas aos níveis dos estoques e às quantidades pedidas ao longo do tempo, que são influenciadas diretamente pelas decisões de primeiro estágio e pela realização da incerteza na demanda.

O modelo proposto originalmente por Cunha et al. (2014) não possui um parâmetro que representa o estoque inicial. Assim, para considerá-lo no sistema, os autores propõem considerar nulos todos os custos dos seis primeiros períodos. Além disso, o modelo de Cunha et al. (2014) considera o caso de perda de vendas puro, mas que, com algumas modificações nas restrições, pode considerar atraso puro. Outrossim, a linearização exata proposta para restrição não linear do modelo original é realizada por partes, o que acaba por gerar a necessidade de utilização de variáveis auxiliares e um aumento significativo no número de variáveis e restrições no problema.

As modificações propostas na presente dissertação consistem na inserção da possibilidade de atraso parcial e um parâmetro que representa o estoque inicial de forma direta, visando obter um modelo mais geral que se adeque a um número maior de casos. Também é proposta uma linearização exata, para restrição que representa as quantidades do item pedidas ao longo do horizonte de planejamento por cenário, que não se baseia na inclusão de variáveis adicionais e requer menos restrições que a utilizada por Cunha et al. (2014).

Em relação ao modelo proposto, algumas premissas são consideradas com o intento de simplificação do presente contexto. Contudo, é importante destacar que o modelo pode ser estendido, para considerar situações mais gerais. As premissas são:

1. O limite superior  $\bar{S}$  do nível alvo  $s$  é também a restrição física da capacidade de estoque e não são considerados capacidades e custos de diferentes arcos de transporte entre a fornecedor e o vendedor.
2. Os pedidos em atraso não possuem limite de tempo de entrega específico, mas por se tratar de um problema de minimização, pode-se considerar que os pedidos em atraso devem ser atendidos o mais rápido possível, visando a diminuição dos custos.
3. O *lead time* de entrega é constante e predeterminado, mas pode ser indexado no tempo sem grandes dificuldades, assim como a taxa de *backorder*.
4. Apesar dos custos serem indexados no período, nas simulações serão considerados constantes ao longo do horizonte de planejamento, sem perda de generalidade.
5. No modelo proposto, para efeito de simplificação, é considerado um item e uma camada, mas ambos podem ser estendidos.

A notação a seguir será usada para apresentar o modelo proposto. Por uma questão de simplificação da notação, os domínios dos somatórios serão omitidos, exceto quando o somatório tiver seu domínio válido em um subconjunto particular. Assim, quando o domínio não for mencionado, o mesmo deve ser considerado o conjunto ao qual o índice se refere.

### Conjuntos

- $P$  — Períodos de tempo;
- $\Omega$  — Cenários;
- $\tau$  — Períodos de revisão;  $\tau \subset P$ .
- $K$  — Períodos para o primeiro pedido;  $K \subset P$ .

### Índices

- $p \in P$  — Período de tempo;
- $\xi \in \Omega$  — Cenário;
- $r \in \tau$  — Período de revisão;
- $k \in K$  — Período para primeiro pedido;

### Parâmetros

- $B^p$  – Custo da demanda não atendida por unidade do item no período  $p$ ;  
 $BA^p$  – Custo de atraso de entrega por unidade do item no período  $p$ ;  
 $CF^p$  – Custo fixo de pedido no período  $p$ ;  
 $H^p$  – Custo de estoque por unidade de item no período  $p$ ;  
 $D(\xi)^p$  – Demanda do item no cenário  $\xi$  e período  $p$ ;  
 $\beta$  – Fração da falta da demanda atendida em atraso;  $\beta \in [0,1]$ .  
 $II$  – Estoque inicial;  
 $\bar{S}$  – Limite superior para o nível de estoque do item;  
 $Pr(\xi)$  – Probabilidade do cenário  $\xi$ ;  
 $TE$  – Tempo de entrega ou lead time  
 Parâmetro auxiliar que indica o período que o pedido ocorre  
 $W^{p,r,k}$  – dependendo do valor de  $k$  e  $r$ ;  $W^{p,r,k} \in \{0,1\}$ ;  $r = 1, \dots, |R|$ ;  $p = 1, \dots, |P|$ ;  $k = 1, \dots, |K|$ .

Onde  $W^{p,r,k}$  é representado pela seguinte matriz:

		$k$														
		1					2					3 ...				
		$r$					$r$					$r \dots$				
		1	2	3	4	...	1	2	3	4	...	1	2	3	4	...
$p$	1	1	1	1	1	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...
	2	1	0	0	0	...	1	1	1	1	...	0	0	0	0	...
	3	1	1	0	0	...	1	0	0	0	...	1	1	1	1	...
	4	1	0	1	0	...	1	1	0	0	...	1	0	0	0	...
	5	1	1	0	1	...	1	0	1	0	...	1	1	0	0	...
	6	1	0	0	0	...	1	1	0	1	...	1	0	1	0	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

### Variáveis

- $a(\xi)^p$  – Quantidade de demanda atendida no cenário  $\xi$  e período  $p$ ;  
 $f(\xi)^p$  – Quantidade de demanda não atendida no cenário  $\xi$  e período  $p$ ;  
 $i(\xi)^p$  – Estoque em mãos no final de cada período  $p$ , em cada cenário  $\xi$ ;  
 $it(\xi)^p$  – Posição do estoque total (estoque em mãos mais pedidos pendentes) no fim de cada período, em cada cenário  $\xi$ ;  
 $l(\xi)^p$  – Quantidade de itens em atraso no cenário  $\xi$  e período  $p$ ;  
 $q(\xi)^p$  – Quantidade de item pedida no início de cada período, em cada cenário  $\xi$ .  
 $s$  – Nível alvo dos estoques do item ao longo do horizonte de tempo;

- $v^p$  — Indica se existe ou não encomenda do item no período  $p$ ;  $v^p \in \{0,1\}$ .  
 $u^{r,k}$  — Variável auxiliar na determinação do tamanho do ciclo  $R$  e do período  $k$  em que ocorre o primeiro pedido;  $u^{r,k} \in \{0,1\}$ .

#### 4.1. Problema de primeiro estágio

O problema de primeiro estágio diz respeito às decisões das variáveis de controle, as quais devem ser tomadas antes da realização da incerteza no sistema. No presente trabalho, as variáveis de primeiro estágio são as decisões de periodicidade  $R$ , período em que ocorre o primeiro pedido  $K$  e o nível alvo  $s$ . O problema de primeiro estágio é dado por:

$$\min_{s,v,u} \sum_p CF^p v^p + E_\Omega[Q(v,s,\xi)] \quad (3.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{r,k} u^{r,k} = 1 \quad (3.2)$$

$$\sum_{r,k} W_p^{r,k} u^{r,k} = v^p \quad \forall p \quad (3.3)$$

$$s \leq \bar{S} \quad (3.4)$$

$$u^{r,k} \in \{0,1\} \quad \forall r, \forall k \quad (3.5)$$

$$v^p \in \{0,1\} \quad \forall p \quad (3.6)$$

$$s \geq 0 \quad (3.7)$$

Na expressão (3.1), o primeiro termo representa o custo de encomenda e  $E_\Omega[Q(v,s,\xi)]$  representa o valor esperado do custo associado ao problema de segundo estágio. A restrição (3.2) indica que existe exatamente um único par de valores para o tamanho do ciclo  $R$  e para o período em que será realizado o primeiro pedido ( $R = r$  e  $K = r$ , quando  $u^{r,k} = 1$ ). A restrição (3.3) indica os períodos em que ocorrem os pedidos no horizonte de planejamento em função da escolha dos valores de  $R$  e  $K$ . A restrição (3.4) estabelece o limite superior da variável que representa o nível alvo do estoque (restrição da capacidade). Em (3.5) e (3.6) têm-se as variáveis de primeiro estágio, que determinam quando serão realizados os

pedidos, são definidas como binárias. Em (3.7) a variável nível alvo, de primeiro estágio, é definida como contínua e não-negativa.

#### 4.2.

#### Problema de segundo estágio

O problema de segundo estágio visa minimizar o valor dos custos de manutenção do estoque, demandas perdidas e demandas em atraso ao longo do horizonte de tempo, dadas as escolhas de  $v^p$  ( $R$  e  $K$ ) e  $s$  e um cenário observado  $\xi$ . Basicamente, no segundo estágio, determina-se as variáveis de segundo estágio ou recurso, que representam o comportamento da gestão do estoque, após demanda se tornar conhecida, visando minimizar o valor do custo total.

$$Q(v, s, \xi) = \min_{a, f, i, it, l, q} \sum_p [H^p i(\xi)^p + B^p f(\xi)^p + BA^p l(\xi)^p] \quad (3.8)$$

Sujeito a:

$$a(\xi)^p + f(\xi)^p + l(\xi)^p = D(\xi)^p + l(\xi)^{p-1} \quad \forall p \quad (3.9)$$

$$(1 - \beta)l(\xi)^p - \beta f(\xi)^p \leq 0 \quad \forall p \quad (3.10)$$

$$II + i(\xi)^{p-1} + q(\xi)^{p-TE} = i(\xi)^p + a(\xi)^p \quad \forall p = 1 \quad (3.11)$$

$$i(\xi)^{p-1} + q(\xi)^{p-TE} = i(\xi)^p + a(\xi)^p \quad \forall p \geq 2 \quad (3.12)$$

$$II + it(\xi)^{p-1} + q(\xi)^p = it(\xi)^p + D(\xi)^p - f(\xi)^p \quad \forall p = 1 \quad (3.13)$$

$$it(\xi)^{p-1} + q(\xi)^p = it(\xi)^p + D(\xi)^p - f(\xi)^p \quad \forall p \geq 2 \quad (3.14)$$

$$q(\xi)^p - (s - it(\xi)^{p-1} - II) \leq \bar{S} (1 - v^p) \quad \forall p = 1 \quad (3.15)$$

$$q(\xi)^p - (s - it(\xi)^{p-1}) \leq \bar{S} (1 - v^p) \quad \forall p \geq 2 \quad (3.16)$$

$$q(\xi)^p - (s - it(\xi)^{p-1} - II) \geq \bar{S} (v^p - 1) \quad \forall p = 1 \quad (3.17)$$

$$q(\xi)^p - (s - it(\xi)^{p-1}) \geq \bar{S} (v^p - 1) \quad \forall p \geq 2 \quad (3.18)$$

$$q(\xi)^p \leq \bar{S} v^p \quad \forall p \quad (3.19)$$

$$a(\xi)^p, i(\xi)^p, it(\xi)^p, l(\xi)^p, q(\xi)^p, f(\xi)^p \geq 0 \quad \forall p \quad (3.20)$$

Os termos da função objetivo (3.8) modelam os custos totais de estoque ( $H^p i(\xi)^p$ ), perda de vendas ( $B^p f(\xi)^p$ ) e atraso ( $BA^p l(\xi)^p$ ). A restrição (3.9) representa as quantidades da demanda que serão atendidas, perdidas e ficarão em atraso, em cada período, para cada cenário  $\xi$ . A restrição (3.10) garante que a quantidade da demanda que será atendida em atraso será, no máximo, a fração  $\beta$  do

total da demanda não atendida, em cada período, para cada cenário  $\xi$ . As restrições (3.11) e (3.12) representam o balanço dos estoques em mãos do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ . As restrições (3.13) e (3.14) representam o balanço das posições dos estoques (em mãos mais pedidos em trânsito) do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ . O conjunto de restrições (3.15) - (3.19) define as quantidades do item a serem pedidas no início de cada período, por cenário  $\xi$  e representam a linearização das restrições (3.21) e (3.22). Finalmente, em (3.20) as variáveis de segundo estágio são definidas como contínuas e não negativas.

$$q(\xi)^p = (s - it(\xi)^{p-1} - II)v^p \quad \forall p = 1 \quad (3.21)$$

$$q(\xi)^p = (s - it(\xi)^{p-1})v^p \quad \forall p \geq 1 \quad (3.22)$$

A formulação apresentada permite destacar duas modificações propostas nesta dissertação em relação ao modelo originalmente proposto por Cunha et al. (2014). A inserção da possibilidade de estoque inicial no modelo proposto, através da criação do conjunto  $K$  (períodos para realizar o primeiro pedido) e incorporação do índice  $k$  no parâmetro  $W$  e na variável  $u$  e a inclusão do parâmetro  $II$  que representa a quantidade de estoque inicial nas restrições (3.11), (3.13), (3.15) e (3.17). No modelo de Cunha et al. (2014), o primeiro pedido é sempre realizado no primeiro período, o que de fato deve ocorrer quando não se considera estoque inicial no modelo e existe demanda nos primeiros pedidos. Caso contrário, visando a minimização de custos, a melhor solução pode implicar em ter o primeiro pedido sendo realizado após o primeiro período. Quando se inclui a consideração de estoque inicial no modelo ou quando não existe demanda nos primeiros períodos, realizar um pedido no primeiro período do horizonte de planejamento não é necessariamente, uma estratégia ótima. Assim, a forma de inclusão do estoque inicial proposta torna o modelo mais geral, podendo esse ser aplicado a um número maior de casos e permitindo, inclusive, que seja utilizado em uma estratégia de horizonte rolante.

O atraso parcial (*backorder* parcial) é inserido com a criação da variável  $l$  e dos parâmetros  $BA$  e  $\beta$ , a inclusão da restrição (3.10) no modelo e as modificações nas equações (3.9), (3.13), (3.14) e a adição do último termo na função objetivo (custo devido ao atraso). Vale ressaltar que o sinal de menor ou igual na restrição

(3.10) indica que a quantidade da demanda que ficará em atraso, pode ser no máximo igual à fração  $\beta$  do total da demanda não atendida em determinado período e cenário. Logo, como se trata de um problema de minimização, considerando-se o custo de atraso como sendo menor que o custo de perda da venda, como geralmente ocorre na prática, as variáveis  $l$ , quase sempre terão seu valor máximo. Contudo, em problemas onde é necessário garantir um nível mínimo de atendimento da demanda (i.e., com restrições referentes à nível de serviço) basta que as restrições (3.10) sejam reescritas como sendo:

$$(1 - \beta)l(\xi)^p - \beta f(\xi)^p \geq 0. \quad \forall p \quad (3.23)$$

É importante destacar que, considerando-se a restrição (3.10), fazendo  $\beta = 0$ , tem-se  $l = 0$ , ou seja, considera-se o caso de perdas de vendas puro (*'pure' lost sales case*). Fazendo  $\beta = 1$  e substituindo-se (3.10) por (3.23) no modelo proposto se obtém  $f = 0$ , logo se garante o caso de atraso puro (*'pure' backorder*).

As restrições de (3.15) a (3.19) foram propostas nesta dissertação e tratam-se de uma forma alternativa de representar as quantidades do item pedidas ao longo do horizonte de planejamento, em cada cenário. Em comparação ao modelo original de Cunha et al. (2014), onde a linearização exata entre variáveis binárias e contínuas de dois produtos ocorre de forma separada, o conjunto de restrições proposto não utiliza variáveis auxiliares e requer um número menor de restrições sem comprometer a qualidade da linearização.

Na literatura, a linearização exata de  $y = x_1 x_2$ , sendo  $0 \leq x_1 \leq M$  e  $x_2$  uma variável binária, é dada pelo seguinte conjunto de restrições:

$$y \leq Mx_2 \quad (3.24)$$

$$y \leq x_1 \quad (3.25)$$

$$y \geq x_1 + M(x_2 - 1) \quad (3.26)$$

$$y \geq 0 \quad (3.27)$$

A validade das restrições (3.24) - (3.27) pode ser verificada na Tabela 1 onde todas as possíveis situações são consideradas.



$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	Restrições implicam em:	
$0 \leq x_1 \leq M$	0	0	$y \leq 0$ $y \leq x_1$ $y \geq x_1 + M$ $y \geq 0$	$y = 0$
$0 \leq x_1 \leq M$	1	$x_1$	$y \leq M$ $y \leq x_1$ $y \geq x_1$ $y \geq 0$	$y = x_1$

**Tabela 1 - Todos os possíveis produtos de  $y=x_1x_2$  para  $0 \leq x_1 \leq M$  e  $x_2 = \{0,1\}$**

Entretanto, considerando-se  $-M \leq x_1 \leq M$  e  $x_2$  uma variável binária a linearização exata de  $y = x_1x_2$  pode ser dada por:

$$y \leq Mx_2 \quad (3.28)$$

$$y \leq x_1 + M(1 - x_2) \quad (3.29)$$

$$y \geq x_1 + M(x_2 - 1) \quad (3.30)$$

$$y \geq -Mx_2 \quad (3.31)$$

A validade das restrições (3.28) - (3.30) podem ser verificadas na Tabela 2 onde todas as possíveis situações são consideradas.

$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	Restrições implicam em:	
$-M \leq x_1 \leq M$	0	0	$y \leq 0$ $y \leq x_1 + M$ $y \geq x_1 - M$ $y \geq 0$	$y = 0$
$-M \leq x_1 \leq M$	1	$x_1$	$y \leq M$ $y \leq x_1$ $y \geq x_1$ $y \geq -M$	$y = x_1$

**Tabela 2 - Todos os possíveis produtos de  $y=x_1x_2$  para  $-M \leq x_1 \leq M$  e  $x_2 = \{0,1\}$**

Fazendo  $x_1 = (s - it(\xi)^{p-1} - II)$  em  $p = 1$  e  $x_1 = (s - it(\xi)^{p-1})$  para  $p \geq 2$ , observa-se que em ambos os casos, considerando a formulação do problema de primeiro estágio, têm-se  $-\bar{S} \leq x_1 \leq \bar{S}$ . Logo, para  $y = q(\xi)^p$  e  $x_2 = v^p$ , a linearização de (3.21) e (3.22) é realizada conforme (3.28) - (3.30), sendo a restrição (3.31) desconsiderada pois  $q(\xi)^p \geq 0$ . Assim, pode-se constatar que valores das variáveis de primeiro estágio que resultam em  $x_1 < 0$ , ou seja,  $q(\xi)^p < 0$ , tornam o problema de segundo estágio inviável, portanto o modelo proposto não é de recurso relativamente completo. Vale ressaltar que no modelo Cunha et al. (2014) pode-se fazer uma linearização similar à proposta neste trabalho usando (3.24) - (3.27).

A linearização proposta representada pelo conjunto de restrições (3.15) - (3.19) gera  $3x|P|x|\Omega|$  restrições o que representa uma diminuição de  $2x|P|x|\Omega|+3x|P|$  restrições em relação a linearização proposta por Cunha et al. (2014), conforme o conjunto de restrições (9.14) - (9.23) apresentadas no apêndice. Além disso, a linearização (9.14) - (9.23) utiliza as variáveis auxiliares  $sv^p$ ,  $iti(\xi)^p$  e  $itv(\xi)^p$ , enquanto que (3.15) - (3.19) não utiliza nenhuma variável auxiliar. Assim, apesar de o modelo proposto ser mais geral (maior complexidade), o mesmo possui  $|P|x|\Omega|+3x|P|$  restrições e  $|P|x|\Omega|-|R|x|K|+|P|+|R|$  variáveis a menos que o modelo de Cunha et al. (2014). Vale ressaltar, que para o caso de  $|K|$  e  $|R|$  se aproximarem do valor de  $|P|$ , e  $|\Omega|$  ser menor que  $|P|$ , o modelo proposto pode possuir mais variáveis que o modelo de Cunha et al. (2014). Isto ocorre pelo fato de se propor um modelo mais geral com estoque inicial e *backorder* parcial.

## 5.

### **Aplicação do método *L-Shaped* ao modelo proposto**

Uma das maiores dificuldades em lidar com programação matemática é o crescimento do problema conforme aumenta-se o tamanho dos conjuntos que indexam as suas variáveis e restrições, o que é agravado quando se trata de problemas estocásticos, ao se considerar um número elevado de cenários. Geralmente, resolver o problema equivalente determinístico diretamente pode implicar em ter que lidar com um problema com elevado número de restrições e variáveis, podendo ser inviável computacionalmente ou levar tempo em demasia para se obter a solução ótima, comprometendo a utilidade do modelo. Dessa forma, diversas técnicas de aceleração de problemas de programação matemáticas têm sido propostas e utilizadas ao longo dos anos. Entretanto, em muitos casos, em especial em modelos estocásticos via programação de dois estágios, a aplicação de apenas uma técnica de aceleração não garante resultados computacionalmente satisfatórios, sendo necessário combinar duas ou mais técnicas de aceleração.

#### **5.1.**

##### **Decomposição de Benders**

Benders (1962) propôs um método de decomposição para resolução de problemas de programação inteira mista que vem sendo aplicado com sucesso a problemas em diversos contextos (Geoffrion & Graves, 1974; Magnanti et al., 1986; Costa, 2005; Camargo et al., 2009). Segundo Conejo et al., (2006) aplicação da decomposição de Benders é apropriada quando o problema em estudo pode ser considerado como um problema com variáveis complicadoras, ou seja, variáveis que quando são fixadas com valores particulares, tornam o problema matemático restante relativamente fácil de resolver.

A ideia-chave da decomposição de Benders consiste em decompor o problema original em dois ou mais problemas simples e resolvê-los de forma iterativa, até se obter a solução ótima. No caso mais comum, o problema é decomposto em dois problemas, chamados de mestre e escravo. A versão relaxada

do problema original, que deve conter todas as variáveis inteiras do problema é o dito PMR. A versão simplificada do problema original, no qual as variáveis referentes ao problema mestre são fixadas e as restrições referentes exclusivamente ao espaço de variáveis do problema mestre são suprimidas, é chamado de problema escravo primal (PEP). No método de Benders, pode-se trabalhar com a versão dual do PEP (PED) ou com as informações duais associadas com as restrições do PEP. Em ambos os casos, as variáveis comuns com o problema mestre (variáveis complicadoras), presentes em sua estrutura, são fixadas durante a solução, com os valores obtidos pelo PMR, em cada iteração do programa. Assim, de forma iterativa, pode-se resolver o PMR e o PED (ou PEP e obter a informação dual), que são dois problemas mais simples que o original, até se atingir a solução ótima e, dessa forma, espera-se que o tempo de solução seja menor quando comparado com o tempo de solução do problema completo, principalmente para os casos de grande porte.

## 5.2.

### Método *L-Shaped* tradicional ou *single-cut L-Shaped* (SLS)

O método *L-Shaped* de Van Slyke e Wets (1969) se baseia na adaptação da decomposição de Benders (1962) para problemas de programação estocástica de dois estágios. Na estrutura de programação de dois estágios, o PMR é composto pelo problema de primeiro estágio e o PEP pelo problema de segundo estágio, sendo o PED a representação dual do PEP.

Para uma breve explicação do método *L-Shaped*, considera-se o seguinte problema:

$$\min_{x,y,z} C_1^T x + C_2^T y + \sum_{\xi} Pr(\xi) q(\xi)^T z(\xi) \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$Ax + By \leq c \quad (4.2)$$

$$Tx + Jy + V(\xi)z(\xi) \leq h \quad (4.3)$$

$$x \in \{0,1\}, y \geq 0 \quad (4.4)$$

$$z(\xi) \geq 0 \quad (4.5)$$

Onde  $Pr(\xi)$  é a probabilidade de cada cenário  $\xi$ , e os parâmetros  $C_1, C_2, q(\xi), A, B, T, J, h, c$  e  $V(\xi)$  são vetores conhecidos, dentro do domínio dos números reais e com dimensões compatíveis.

O problema acima trata-se de um programa linear estocástico de dois estágios, com o primeiro estágio composto por variáveis inteiras binárias e variáveis contínuas, assim como na formulação de gestão de estoques proposta. O problema de primeiro estágio tem a função objetivo formada pelos dois primeiros termos da função objetivo (4.1) somados ao valor esperado do problema de segundo estágio, e é sujeito à restrição (4.2) e as definições em (4.4). O problema de segundo estágio ou escravo primal é formado pelo terceiro termo da função objetivo (4.1) a restrição (4.3) e a definição em (4.5).

A decomposição do problema (4.1) - (4.5) no PEP é dada por:

PEP:

$$\min_z \sum_{\xi} Pr(\xi) q(\xi)^T z(\xi) \quad (4.6)$$

Sujeito a:

$$V(\xi)z(\xi) \leq h - T\bar{x} - J\bar{y} \quad \forall \xi \quad (4.7)$$

$$z(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \quad (4.8)$$

A representação dual do problema escravo primal é:

PED:

$$\begin{aligned} \max_u T(\bar{x}, \bar{y}) &= \max_u E_{\Omega}[M(\bar{x}, \bar{y}, \xi)] \\ &= \max_u \sum_{\xi} Pr(\xi) [u(\xi)^T (h - T\bar{x} - J\bar{y})] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sujeito a:

$$V^T(\xi)u(\xi) \leq q(\xi) \quad \forall \xi \quad (4.10)$$

$$u(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \quad (4.11)$$

Onde  $u(\xi)$  é a variável dual associada à restrição (4.7) e as barras de  $\bar{x}, \bar{y}$  em (4.9) significam que as respectivas variáveis são fixas e com valores provenientes das soluções do PMR. Com base no PED e no problema de primeiro estágio, o problema mestre relaxado é dado por:

PMR:

$$\min_{x,y,z} C_1^T x + C_2^T y + m \quad (4.12)$$

Sujeito a:

$$Ax + By \leq c \quad (4.13)$$

$$\sum_{\xi} Pr(\xi)[(u(\xi)^T)^b(h - Tx - Jy)] \leq m \quad \forall b \in B \subseteq U_V \quad (4.14)$$

$$\sum_{\xi} Pr(\xi)[(u(\xi)^T)^i(h - Tx - J\bar{y})] \leq 0 \quad \forall i \in I \subseteq U_R \quad (4.15)$$

$$x \in \{0,1\}, y \geq 0, m \in \mathbb{R} \quad (4.16)$$

Onde cada  $b$  e  $i$  está relacionado a uma solução  $u(\xi)^b \in B$  e  $u(\xi)^i \in I$ , sendo  $B$  e  $I$  respectivamente, os subconjuntos dos pontos extremos ( $U_V$ ) e raios extremos ( $U_R$ ) do poliedro  $U$ , que é definido por (4.10) – (4.11).

As inequações (4.14) e (4.15) não são restrições definidas explicitamente, mas apenas implicitamente, por um número finito de cortes de Benders (restrições do tipo (4.14) ou (4.15) são geradas através de informações advindas das soluções do PED ou das informações duais das soluções do PEP). A principal ideia do método *L-Shaped* (Van Slyke & Wets, 1969) é relaxar as restrições (4.14) e (4.15) e adicioná-las gradualmente, seguindo um processo de solução iterativo. Esses cortes, que podem ser considerados hiperplanos de suporte da função objetivo do problema de segundo estágio, eventualmente fornecem boas estimativas para o valor de (4.9), em um número finito de iterações. Em outras palavras, é importante observar que existe uma restrição (4.14) e (4.15) para cada ponto extremo e raio extremo do problema escravo dual, respectivamente, no problema mestre completo. Assim, mesmo em um problema de tamanho moderado, o número de restrições (4.14) e (4.15) é tipicamente grande demais para ser explicitamente tratado. Entretanto, é esperado que apenas uma pequena fração destas restrições sejam adicionadas ao PMR, para se obter a solução ótima. A descrição esquemática para o método *L-Shaped* tradicional ou *single-cut L-Shaped* (SLS) pode ser observada na Figura 3. Conforme a Figura 3, no processo iterativo que rege o método *L-Shaped*, em cada iteração é obtida uma solução para o problema mestre, a qual passa a ser tratada como parâmetro no PED (ou PEP), o qual, por sua vez, é resolvido para obtenção da informação dual, que deve ser usada para a geração do corte de

Benders a ser adicionado ao PMR. Caso o PED possua solução ótima limitada, o corte gerado é do tipo (4.14), conhecido como corte de otimalidade. No entanto, se o PED for ilimitado (o que implica o PEP ser inviável) gera-se o corte (4.15), conhecido como corte de viabilidade.

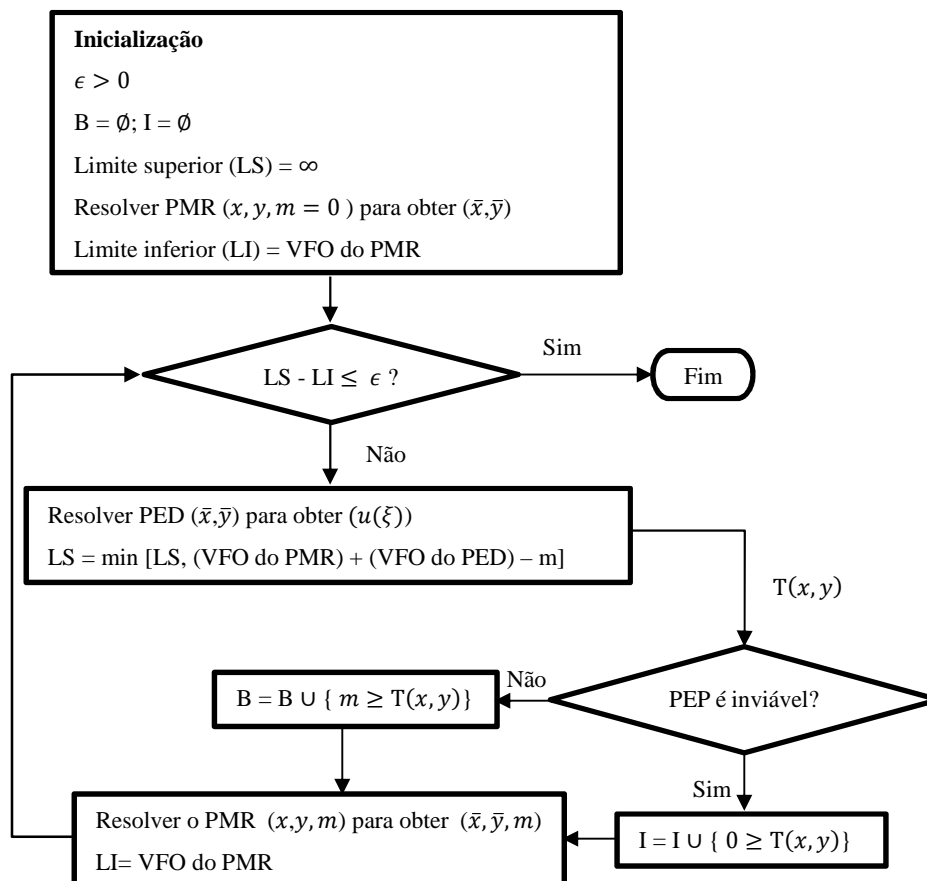


Figura 3- Fluxograma do método *single-cut L-Shaped*

### 5.3.

#### Método *L-Shaped* com múltiplos cortes ou *multi-cut L-Shaped* (MLS)

Birge e Louveaux (1988) mostraram que a estrutura de problemas estocásticos de dois estágios permite que sejam adicionados múltiplos cortes ao problema mestre, ao invés de um único corte, em cada iteração e que o uso desse método pode aumentar substancialmente a velocidade de convergência do método. A ideia principal consiste em adicionar múltiplos cortes ao problema mestre, sendo cada corte relacionado a um respectivo cenário. Dessa forma, transfere-se uma quantidade de informação do problema de segundo estágio para o problema mestre

no mínimo equivalente em comparação ao método SLS. Birge e Louveaux (1988) mostram que o número máximo de iterações para o método *multi-cut L-Shaped* (MLS) é dado por:

$$1 + |\Omega| (q^n - 1) \quad (4.17)$$

Enquanto o número máximo de iterações para o método SLS é dado por:

$$[1 + |\Omega|(q - 1)]^n \quad (4.18)$$

Onde  $n$  representa o número de restrições de recurso,  $|\Omega|$  o número de cenários  $\xi$ , e  $q$  representa o total de segmentos da curva de custo do segundo estágio, que é linear por partes. Embora  $q$  possa ser complicado de calcular em problemas reais, a equação (4.17) mostra que o número máximo de iterações necessárias, para o algoritmo do método MLS atingir a solução ótima cresce linearmente com o número de cenários, enquanto a equação (4.18) mostra que esse crescimento é exponencial para a forma tradicional.

A principal diferença entre os métodos MLS e SLS é a formulação do problema mestre, que deve ser convenientemente adequado à estrutura MLS, como se segue.

PMR (MLS):

$$\min_{x,y,z} C_1^T x + C_2^T y + \sum_{\xi} Pr(\xi)m(\xi) \quad (4.19)$$

Sujeito a:

$$Ax + By \leq c \quad (4.20)$$

$$[(u(\xi)^T)^b(h - Tx - Jy)] \leq m(\xi) \quad \forall \xi, \forall b \in B \subseteq U_V \quad (4.21)$$

$$[(u(\xi)^T)^i(h - Tx - Jy)] \leq 0 \quad \forall \xi, \forall i \in I \subseteq U_R \quad (4.22)$$

$$x \in \{0,1\}, y \geq 0 \quad (4.23)$$

$$m(\xi) \in \mathbb{R} \quad \forall \xi \quad (4.24)$$

É importante ressaltar que as estruturas de múltiplos cortes e corte único podem ser utilizadas de maneira independente para o caso de cortes de viabilidade em ambos os métodos MLS e SLS. Por exemplo, (4.22) pode ter a forma *single-cut* sendo substituído pelo corte (4.15) no método MLS, e o método SLS pode ter múltiplos cortes de viabilidade por iteração, substituindo (4.15) por (4.22).



A descrição esquemática para o método MLS é apresentada na Figura 4.

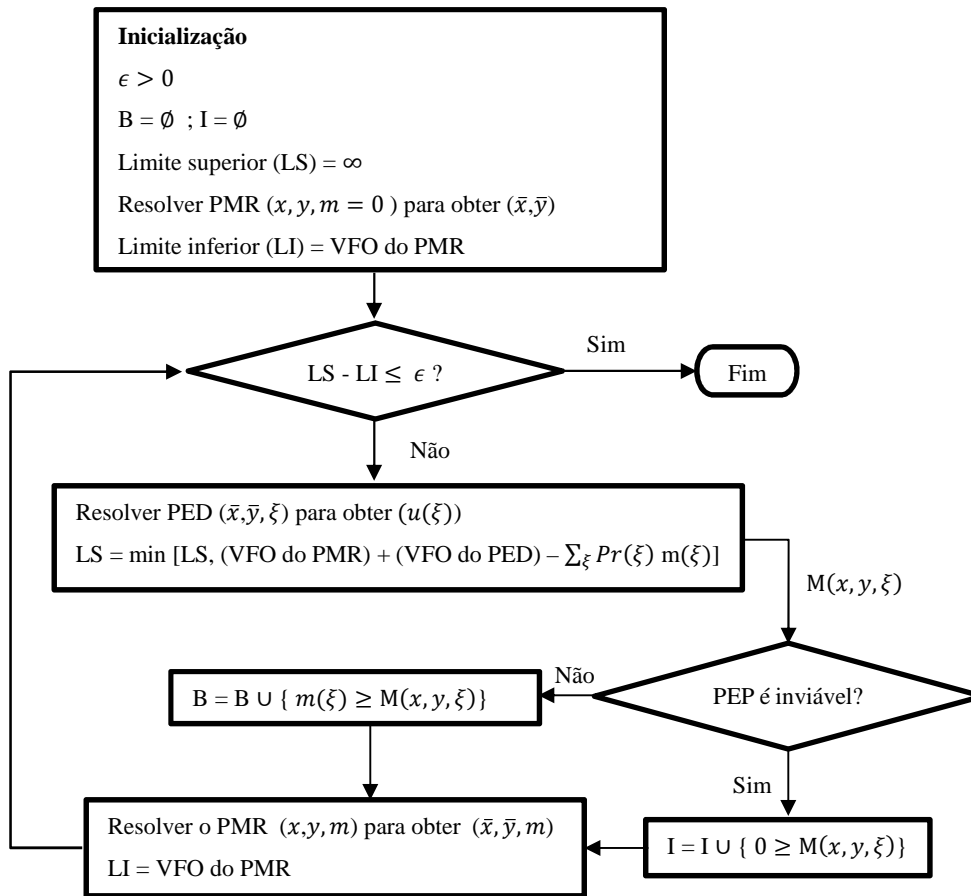


Figura 4-Fluxograma do método *multi-cut L-Shaped*

#### 5.4. Formulação *L-Shaped* para o modelo proposto

Inicialmente será apresentado a formulação SLS para o modelo de gestão de estoque proposto, iniciando pelo problema escravo dual, que é o mesmo para ambas as versões do método *L-Shaped*. No problema escravo dual do modelo proposto as variáveis complicadoras  $s$  e  $v^p$  são consideradas parâmetros fixos  $\bar{s}$  e  $\bar{v}^p$ , enquanto  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $\pi$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $\omega$  são as variáveis duais associadas com as restrições (3.9), (3.10), (3.11-3.12), (3.13-3.14), (3.15-3.16), (3.17-3.18) e (3.19) respectivamente. Assim, o problema escravo dual pode ser formulado como se segue:

$$\begin{aligned}
\text{Max}_{\alpha, \gamma, \sigma, \pi, \mu, \rho, \omega} Q(\bar{v}, \bar{s}) &= \text{Max}_{\alpha, \gamma, \sigma, \pi, \mu, \rho, \omega} \sum_{\xi} Pr(\xi) E(\bar{v}, \bar{s}, \xi) = \\
&= \text{Max}_{\alpha, \gamma, \sigma, \pi, \mu, \rho, \omega} \sum_{\xi, p} Pr(\xi) [D(\xi)^p (\alpha(\xi)^p + \pi(\xi)^p) + \bar{s} \bar{v}^p \omega(\xi)^p \\
&\quad + \bar{s} (\bar{v}^p - 1)(\rho(\xi)^p - \mu(\xi)^p) + \bar{s} (\rho(\xi)^p + \mu(\xi)^p)] \\
&\quad + \sum_{\xi} Pr(\xi) H[\pi(\xi)^{p=1} + \sigma(\xi)^{p=1} + \mu(\xi)^{p=1} + \rho(\xi)^{p=1}]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Sujeito a:

$$\pi(\xi)^{p+1} - \pi(\xi)^p + \mu(\xi)^{p+1} + \rho(\xi)^{p+1} \leq 0 \quad \forall \xi, \forall p \tag{4.26}$$

$$\sigma(\xi)^{p+1} - \sigma(\xi)^p \leq H^p \quad \forall \xi, \forall p \tag{4.27}$$

$$-\sigma(\xi)^p + \alpha(\xi)^p \leq 0 \quad \forall \xi, \forall p \tag{4.28}$$

$$\pi(\xi)^p + \alpha(\xi)^p - \beta \gamma(\xi)^p \leq B^p \quad \forall \xi, \forall p \tag{4.29}$$

$$\pi(\xi)^p + \sigma(\xi)^{p+TE} + \omega(\xi)^p + \mu(\xi)^p + \rho(\xi)^p \leq 0 \quad \forall \xi, \forall p \tag{4.30}$$

$$\alpha(\xi)^p - \alpha(\xi)^{p+1} + (1 - \beta) \gamma(\xi)^p \leq BA^p \quad \forall \xi, \forall p \tag{4.31}$$

$$\alpha(\xi)^p, \pi(\xi)^p, \sigma(\xi)^p \in \mathbb{R} \quad \forall \xi, \forall p \tag{4.32}$$

$$\rho(\xi)^p \geq 0 \quad \forall \xi, \forall p \tag{4.33}$$

$$\omega(\xi)^p, \mu(\xi)^p, \gamma(\xi)^p \leq 0 \quad \forall \xi, \forall p \tag{4.34}$$

O problema escravo dual do modelo proposto, quando comparado ao modelo equivalente determinístico completo que seria composto por (3.1-3.7) e (3.8-3.20), demanda menor esforço computacional para ser resolvido, pois possui menos variáveis e restrições e é um modelo linear contínuo. Além disso, ele pode ser decomposto para ser resolvido para cada cenário de forma independente, o que pode diminuir significativamente o seu tempo de solução, especialmente para os casos em que se considera grandes números de cenários. Além disso, essa característica pode ser aproveitada em contextos onde a computação paralela esteja disponível. A formulação do problema mestre relaxado *single-cut L-Shaped* para o modelo proposto é dada por:

$$\min_{v, u, s} \sum_p CF^p v^p + m \tag{4.35}$$

Sujeito a:

$$\sum_{r, k} u^{r, k} = 1 \tag{4.36}$$

$$\sum_{r,k} W^{p,r,k} u^{r,k} = v^p \quad \forall p \quad (4.37)$$

$$0 \leq s \leq \bar{s} \quad (4.38)$$

$$Q(v, s)^b \leq m \quad \forall b \in B \subseteq U_V \quad (4.39)$$

$$Q(v, s)^i \leq 0 \quad \forall i \in I \subseteq U_R \quad (4.40)$$

$$u^{r,k} \in \{0,1\} \quad \forall r, \forall k \quad (4.41)$$

$$v^p \in \{0,1\} \quad \forall p \quad (4.42)$$

$$m \geq 0 \quad (4.43)$$

Na formulação MLS, o problema escravo é a formulação (4.25-4.34) por cenário. A principal mudança ocorre no problema mestre, que passa a receber um corte para cada cenário em cada iteração, ou seja, múltiplos cortes são adicionados ao problema mestre, em cada iteração do método MLS. Vale ressaltar que, visando um melhor desempenho computacional, o PED sempre é resolvido por cenário, em cada iteração, e após todas as soluções serem obtidas, no método SLS um corte ponderado (corte de Benders) é adicionado ao PMR, e no método MLS são adicionados múltiplos cortes (um corte para cada cenário). A formulação do problema mestre relaxado *multi-cut L-Shaped* para o modelo proposto é dada a seguir.

$$\min_{v,u,s} \sum_p CF^p v^p + \sum_{\xi} Pr(\xi) m(\xi) \quad (4.44)$$

Sujeito a:

$$E(v, s, \xi)^b \leq m(\xi) \quad \forall \xi, \forall b \in B \subseteq U_V \quad (4.45)$$

$$E(v, s, \xi)^i \leq 0 \quad \forall \xi, \forall i \in I \subseteq U_R \quad (4.46)$$

$$m(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \quad (4.47)$$

$$(4.36), (4.37), (4.38), (4.41), (4.42) \quad (4.48)$$

## 6

## Técnicas de aceleração propostas

### 6.1.

#### Desigualdades válidas para o modelo proposto

Uma forma eficiente de acelerar a decomposição de Benders é incorporar mais informação do problema de segundo estágio no problema mestre, sem ser necessariamente através da adição dos cortes de Benders. Isso pode ser feito adicionando inequações que exploram características específicas do problema de segundo estágio e que limitam as escolhas das variáveis de primeiro estágio, sem impossibilitar que a solução ótima do problema seja adquirida.

#### 6.1.1.

##### Desigualdade válida para recurso relativamente completo

O modelo de Cunha et al. (2014) possui recurso relativamente completo, ou seja, para qualquer solução viável do problema de primeiro estágio, o problema de segundo estágio possui solução viável. Contudo, isso não se aplica ao modelo com as modificações propostas nesse trabalho, devido à inserção da possibilidade de estoque inicial. No modelo proposto (MP), soluções do primeiro estágio com valores pequenos para o nível alvo  $s$  podem inviabilizar o problema de segundo estágio, dependendo da quantidade do estoque inicial e se o primeiro pedido for realizado nos primeiros períodos do horizonte de planejamento. Por exemplo, considerando-se que o primeiro pedido ocorre no primeiro período, das restrições (3.15) e (3.17), tem-se que a variável  $q(\xi)^p$  assume valores negativos quando  $s < II$ , o que configura uma inviabilidade. Uma solução inviável no problema de segundo estágio implica em um problema escravo dual ilimitado. Assim, para garantir a convergência do método *L-Shaped* tradicional e sua forma com múltiplos cortes, sempre que o problema escravo dual for ilimitado, são inseridos no problema mestre relaxado os cortes de viabilidade do tipo (4.14) com a formulação *single-cut* (VFS) ou de viabilidade do tipo (4.21) com a formulação *multi-cut* (VFM).

A inserção dos cortes de viabilidade garante convergência da solução ótima nas modelagens *single-cut L-Shaped* (SLS) e *multi-cut L-Shaped* (MLS) no modelo proposto (MP). Entretanto, o fato do modelo proposto não possuir recurso relativamente completo pode ser prejudicial, em relação ao tempo de solução, pois pode fazer com que o processo de solução necessite de iterações adicionais que apenas eliminam soluções inviáveis do modelo no PMR (cortes de viabilidade). Assim, o desenvolvimento de desigualdades válidas para o problema mestre que torne o modelo com recurso relativamente completo é desejado pois, a princípio, garante um menor número de iterações e, conseqüentemente, reduz o tempo de solução.

Quando se aplicam os métodos *L-Shaped* no MP, ele é dividido em um PMR e um PED. O problema mestre recebe informações do problema de segundo estágio, conforme as iterações são realizadas e os cortes de Benders são inseridos. Assim, o PMR, por não ter informações suficientes, principalmente no início do ciclo iterativo, pode obter como solução um par de valores  $(v^p, s)$  que torna o PED ilimitado (ou tornaria o PEP inviável). Isso ocorre quando, considerando os valores obtidos para  $(v^p, s)$  no PMR, o valor de  $s$  é menor que o estoque em mãos, proveniente do estoque inicial, no período de primeiro pedido e em ao menos um cenário. Isso porque as equações (3.15-3.16) e (3.17-3.18) tornam o modelo inviável, pois uma quantidade negativa de pedido deveria ser realizada para elas serem satisfeitas. Assim, pode-se afirmar que as desigualdades em (5.1) garantem que o modelo proposto se torne de recurso completo em ambas as formulações com os métodos SLS e MLS.

$$s \geq II - \sum_k \left( DK(\xi)^k \sum_r u^{r,k} \right) \quad \forall \xi \quad (5.1)$$

Onde

$$DK(\xi)^k = \sum_{p=1}^{k-1} D(\xi)^p \quad \forall k, \xi \quad (5.2)$$

Sendo  $DK(\xi)^k$  a soma das demandas desde o primeiro período do horizonte de planejamento até o período anterior a todos os possíveis períodos para o primeiro pedido  $k$ , em cada cenário, a expressão  $\sum_k (DK(\xi)^k \sum_r u^{r,k})$  representa soma das

demandas desde o primeiro período do horizonte de planejamento até o período anterior ao primeiro pedido determinado na solução do PMR, em cada cenário. Assim,  $II - \sum_k (DK(\xi)^k \sum_r u^{r,k})$  indica o estoque em mãos, proveniente do estoque inicial, no período para o primeiro pedido, em cada cenário, logo (5.1) garante que  $s$  não assumirá valores inferiores a este valor.

### 6.1.2. Desigualdade válida de limite inferior

Por uma questão de simplificação, será inicialmente considerado no desenvolvimento das desigualdades que serão propostas a seguir, uma versão simplificada do modelo, sem estoque inicial e com perdas de vendas ou atraso puro. Posteriormente, serão adicionadas, por partes, as modificações propostas.

As desigualdades em (5.3) definem limites inferiores válidos para o método MLS quando aplicado ao problema original de Cunha et al. (2014) em que se considera o estoque inicial igual a zero e o primeiro pedido sempre realizado no primeiro período ( $u^{r,k}$  passa a ser  $u^r$ ) e com perda de vendas puro ou atraso puro, onde o parâmetro  $B$  representa o custo de perda, sendo  $BA$  seu substituto em (5.3) e (5.6) no caso de atraso puro. A validade de (5.3) pode ser comprovada ao se analisar o desenvolvimento de seus termos. Além disso, é importante frisar que (5.4), (5.5) e (5.6) são definições de parâmetros e  $TE$ , como definido anteriormente no Capítulo 4, é o tempo de entrega ou *lead time*.

$$m(\xi) \geq \sum_{p=1}^{TE} B^p D(\xi)^p + \sum_{p|p>TE} \left[ D(\xi)^p \left( \sum_r MC^{p,r} u^r \right) \right] \quad \forall \xi \quad (5.3)$$

Onde

$$WH^{p,r} = 1 - WX^{(p-TE),r} \quad \forall p, \forall r \quad (5.4)$$

$$WY^{p,r} = (WH^{p,r} + WY^{p-1,r})WH^{p,r} \quad \forall p, \forall r \quad (5.5)$$

$$MC^{p,r} = \min[WY^{p,r}H^p, B^p] \quad \forall p, \forall r \quad (5.6)$$

Sabendo-se que  $WX^{p,r}$  é a versão simplificada da matriz  $W^{p,r,k}$  sem o índice  $k$ , ou seja, a matriz utilizada em Cunha et al. (2014), o parâmetro  $WH^{p,r}$  assume valor “1” nos períodos do horizonte de planejamento em que não ocorre entrega de pedidos e valor “0” nos períodos em que ocorre entrega. Logo, o

parâmetro  $WY^{p,r}$  fornece o número mínimo de dias que uma determinada quantidade de itens deve ficar estocada para atender um período específico em que não ocorre entrega de pedido (que é equivalente ao número de períodos corridos desde a última entrega). Na Figura 5 pode-se observar os valores dos elementos de  $WY^{p,r}$  para  $TE = 2$ .

		$p$												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	....
$r$	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	2	1	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
	3	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...
	4	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	...
	5	1	2	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	...
	6	1	2	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Figura 5 – Valores de  $WY^{p,r}$  para  $TE = 2$ .

Assim,  $MC^{p,r}$  representa os menores custos, ao longo do horizonte de planejamento, entre estocar para atender uma determinada demanda de um período em que não ocorre entrega ou simplesmente não a atender (ou atrasar o seu atendimento, quando considera-se o caso de atraso puro).

Quando as variáveis  $u^r$  têm seus valores determinados, o menor custo possível gerado pelo segundo estágio é o menor custo proveniente apenas do atraso ou apenas da perda de vendas até a véspera da realização da primeira entrega, somado aos menores custos entre estocar (custo por estocar) que é calculado de forma determinística para cada cenário, e o custo de perda (ou custo de atraso para o caso de atraso puro), a partir da primeira entrega inclusive.

Para o caso de estoque inicial igual a zero, a véspera da primeira entrega sempre ocorre no período  $p = TE$  e, conseqüentemente, a primeira entrega sempre será no período  $p = TE + 1$ . Isso se justifica, pois o primeiro pedido, nesse caso, sempre ocorrerá no primeiro período. Assim, até o período  $p = TE$  (inclusive), tem-se somente custos de atraso  $\sum_p^{TE} BAD(\xi)^p$  ou de perda  $\sum_p^{TE} BD(\xi)^p$ , por cenário.

A partir do período  $TE + 1$  (inclusive), o menor custo possível é o de estocar sendo toda demanda atendida, em cada período e em cada cenário, ou o custo de perda de venda em períodos em que atender a demanda com itens estocados seja mais oneroso. O custo mínimo de estocar seria o custo da configuração determinística em que, para cada cenário, toda entrega atende exatamente toda a demanda até a próxima entrega, ou seja, como um sistema  $(R, Q)$ , onde  $Q$  seria

variável, tanto no período como no cenário, e teria os valores exatos para atender toda a demanda a partir de uma entrega até o período anterior à próxima entrega, sendo o estoque em mãos em cada entrega sempre igual a zero. Logo, dado o parâmetro  $WY^{p,r}$ , o custo de estoque mínimo, em que toda demanda é atendida após a primeira entrega em cada cenário, será de  $\sum_{p|p>TE} [H^p D(\xi)^p (\sum_r WY^{p,r} u^r)]$ . Entretanto, atender de forma determinística todos os períodos, após a primeira entrega, pode não ser a estratégia de menor custo dependendo o valor de  $B^p$  (ou  $BA^p$  para o caso de atraso puro). Isso porque, para valores de custos de perda de vendas não muito distantes que o custo de estocar ou para periodicidades de pedidos muitos grandes, pode ser mais econômico não atender a demanda de um determinado período (ou atrasar o atendimento). Assim, a estratégia que garante o menor custo, após a primeira entrega inclusive, para qualquer situação, será de  $\sum_{p|p>TE} [D(\xi)^p (\sum_r MC^{p,r} u^r)]$ .

As desigualdades em (5.7) são de limite inferior válidas para o problema em que se considera a possibilidade de existir estoque inicial e o caso puro de perda de vendas ou atraso, sendo o parâmetro  $B^p$  o custo de perda e  $BA^p$  seu substituto em (5.7) e (5.16) no caso de atraso puro. A validade de (5.7) pode ser comprovada quando o desenvolvimento de seus termos é analisado.

$$m(\xi) \geq \sum_{p,r,k} [(H^p CII(\xi)^p - B^p CFII(\xi)^p) WK1^{p,k} u^{r,k}] + \sum_{p,r,k} [MCK^{p,r,k} D(\xi)^p WK2^{p,k} u^{r,k}] \quad \forall \xi \quad (5.7)$$

Onde

$$CII(\xi)^p = \max((II - D(\xi)^p + CII(\xi)^{p-1}), 0) \quad \forall p = 1 \quad (5.8)$$

$$CII(\xi)^p = \max((-D(\xi)^p + CII(\xi)^{p-1}), 0) \quad \forall p \geq 2 \quad (5.9)$$

$$CFII(\xi)^p = \min((II - D(\xi)^p + CII(\xi)^{p-1}), 0) \quad \forall p = 1 \quad (5.10)$$

$$CFII(\xi)^p = \min((-D(\xi)^p + CII(\xi)^{p-1}), 0) \quad \forall p \geq 2 \quad (5.11)$$

$$WK1^{p,k} = 1 \quad \forall k, \forall p \leq TE + k - 1 \quad (5.12)$$

$$WK2^{p,k} = 1 - WK1^{p,k} \quad \forall p, \forall k \quad (5.13)$$

$$WYK^{p,r,k} = (WHK^{p,r,k} + WYK^{p-1,r,k}) WHK^{p,r,k} \quad \forall p, \forall r, \forall k \quad (5.14)$$

$$WHK^{p,r,k} = 1 - W^{(p-TE),r,k} \quad \forall p, \forall r, \forall k \quad (5.15)$$



$$MCK^{p,r,k} = \min[WYK^{p,r,k}H^p, B^p] \quad (5.16)$$

Os parâmetros  $MCK^{p,r,k}$ ,  $WHK^{p,r,k}$  e  $WYK^{p,r,k}$  são extensões dos parâmetros  $MC^{p,r}$ ,  $WH^{p,r}$  e  $WY^{p,r}$ , respectivamente, por considerarem a possibilidade do primeiro pedido poder ser realizado no período  $k$ .

Quando as variáveis  $u^{r,k}$  têm seus valores determinados, o menor custo possível gerado pelo segundo estágio é o custo da perda de vendas (ou custo de atraso para o caso de atraso puro) mais o custo de estocar a quantidade de item remanescente (proveniente do estoque inicial) até a véspera da realização da primeira entrega inclusive, somado aos menores custos entre estocar para atender as demandas, que é calculado de forma determinística para cada cenário, e o custo de perda (ou custo de atraso para o caso de atraso puro), a partir da primeira entrega inclusive.

Considerando-se a possibilidade de existir estoque inicial na formulação proposta, a véspera da primeira entrega sempre ocorre no período  $p = TE + k - 1$  e conseqüentemente, a primeira entrega sempre será no período  $p = TE + k$ , isso porque o primeiro pedido, nesse caso, sempre ocorrerá no início do período  $p = k$ . No intervalo  $p = 1$  até  $p = TE + k - 1$ , que é representado por  $WK1^{p,k}$  com valores iguais a “1”, em função de  $p$  e  $k$ , como pode ser observado em (5.12), ocorrem custos de estoque, provenientes do estoque inicial  $II$ , e possíveis custos de perda de vendas (ou de atrasos para o caso de atraso puro), por cenário. O custo de estoque até a véspera do primeiro pedido pode ser representado por  $\sum_{p,r,k}[H^p CII(\xi)^p WK1^{p,k} u^{r,k}]$ , onde  $CII(\xi)^p$  é a quantidade de estoque em mãos, proveniente do estoque inicial, que não será utilizada no período  $p$ , em cada cenário. Os possíveis custos de perda ou atraso (substituindo  $B$  por  $BA$ , no caso de atraso puro), são dados por  $\sum_{p,r,k}[-B^p CFII(\xi)^p WK1^{p,k} u^{r,k}]$ , em que  $-CFII(\xi)^p$  é a quantidade de demanda não atendida com o estoque em mãos, proveniente do estoque inicial, no período  $p$ , em cada cenário.

A partir do período  $p = TE + k$  (inclusive), o menor custo possível é o de estocar (custo de estoque) sendo toda demanda atendida, em cada período e em cada cenário, ou o custo de perda de vendas em períodos em que atender a demanda com itens estocados seja mais oneroso. O custo mínimo de estocar seria o custo da configuração determinística onde, para cada cenário, toda entrega atende

exatamente toda a demanda até a próxima entrega, como um sistema (R, Q), onde Q é variável, tanto por período como por cenário, e teria os valores exatos para atender toda a demanda a partir de uma entrega até o período anterior a próxima entrega, sendo o estoque em mãos em cada entrega sempre igual a zero. Assim, considerando-se (5.12) e (5.13) tem-se que o parâmetro  $WK2^{p,k}$  representa o intervalo  $TE + k \leq p \leq |P|$  com valor “1” em função de  $p$  e  $k$ , logo o menor custo do problema de segundo estágio para  $p \geq TE + k$ , em função da escolha da periodicidade  $r$  e do período para o primeiro pedido  $k$ , ou seja  $u^{r,k}$ , em cada cenário, será de  $\sum_{p,r,k} [MCK^{p,r,k} D(\xi)^p WK2^{p,k} u^{r,k}]$ .

As desigualdades em (5.17) definem um limite inferior válido para as variáveis  $m(\xi)$  no problema em que se considera a possibilidade de existir estoque inicial e atraso parcial (*backorder* parcial). A validade de (5.17) pode ser comprovada analisando-se o desenvolvimento de seus termos. Cabe frisar que (5.26) e (5.27) são definições de parâmetros adicionais.

$$m(\xi) \geq \sum_{p,r,k} \{ (H^p CII(\xi)^p - MCK3^p CFII(\xi)^p) WK1^{p,k} u^{r,k} \} + \sum_{p,r,k} [MCK2^{p,r,k} D(\xi)^p WK2^{p,k} u^{r,k}] \quad \forall \xi \quad (5.17)$$

Onde

$$CII(\xi)^p = \max((II - D(\xi)^p + CII(\xi)^{p-1}), 0) \quad \forall p = 1 \quad (5.18)$$

$$CII(\xi)^p = \max((-D(\xi)^p + CII(\xi)^{p-1}), 0) \quad \forall p \geq 2 \quad (5.19)$$

$$CFII(\xi)^p = \min((II - D(\xi)^p + CII(\xi)^{p-1}), 0) \quad \forall p = 1 \quad (5.20)$$

$$CFII(\xi)^p = \min((-D(\xi)^p + CII(\xi)^{p-1}), 0) \quad \forall p \geq 2 \quad (5.21)$$

$$WK1^{p,k} = 1 \quad \forall k, \forall p \leq TE + k - 1 \quad (5.22)$$

$$WK2^{p,k} = 1 - WK1^{p,k} \quad \forall p, \forall k \quad (5.23)$$

$$WYK^{p,r,k} = (WHK^{p,r,k} + WYK^{p-1,r,k}) WHK^{p,r,k} \quad \forall p, \forall r, \forall k \quad (5.24)$$

$$WHK^{p,r,k} = 1 - W^{(p-TE),r,k} \quad \forall p, \forall r, \forall k \quad (5.25)$$

$$MCK2^{p,r,k} = \min[WYK^{p,r,k} H^p, B^p, (B^p(1 - \beta) + BA^p \beta)] \quad \forall p, \forall r, \forall k \quad (5.26)$$

$$MCK3^p = \min[B^p, (B^p(1 - \beta) + BA^p \beta)] \quad \forall p \quad (5.27)$$

A validação dos termos de (5.17) segue passos similares da validação dos termos de (5.7). Entretanto, faz-se necessário considerar a possibilidade de ocorrer custos devido a atrasos e perdas de vendas no problema de segundo de estágio, ao

invés de apenas um deles, como ocorre nos casos de perda de vendas pura ou atraso puro.

A diferença de (5.17) em relação a (5.7) está na utilização dos parâmetros  $MCK2^{p,r,k}$  e  $MCK3^p$  que incorporam em (5.17) a possibilidade de atraso parcial no cálculo de custo mínimo proveniente do problema de segundo estágio. Quando se considera atraso parcial na formulação, o menor custo referente a demanda não atendida no intervalo  $1 \leq p \leq TE + k$  é dado por  $\sum_{p,r,k}\{(-[B^p(1-\beta) + BA^p\beta]CFII(\xi)^p)WK1^{p,k}u^{r,k}\}$  para  $BA^p \leq B^p$  e, para  $BA^p \geq B^p$ , por  $\sum_{p,r,k}\{(-[B^p]CFII(\xi)^p)WK1^{p,k}u^{r,k}\}$ . Logo, uma forma generalizada de representar esse custo é através da utilização de (5.27) na equação  $\sum_{p,r,k}\{(-MCK3^pCFII(\xi)^p)WK1^{p,k}u^{r,k}\}$ , o que fornece o custo mínimo em cada período para todos os possíveis valores de  $BA^p$  e  $B^p$ . Um argumento similar ao anterior pode ser usado para explicar o uso de  $MCK2^{p,r,k}$  em  $\sum_{p,r,k}[MCK2^{p,r,k}D(\xi)^pWK2^{p,k}u^{r,k}]$ , tendo em vista que no segundo estágio podem ocorrer custos de estocar, perda e atraso.

As desigualdades (5.3), (5.7) e (5.17) consideram aplicação do método MLS no modelo proposto. Para o método SLS, as desigualdades assumem, respectivamente, as seguintes formas:

$$m \geq \sum_{\xi} Pr(\xi) \left\{ \sum_{p=1}^{TE} B^p D(\xi)^p + \sum_{p|p>TE} \left[ D(\xi)^p \left( \sum_r MC^{p,r} u^r \right) \right] \right\} \quad (5.28)$$

$$m \geq \sum_{\xi} Pr(\xi) \left\{ \sum_{p,r,k} [(H^p CII(\xi)^p - B^p CFII(\xi)^p)WK1^{p,k}u^{r,k}] \right. \\ \left. + \sum_{p,r,k} [MCK^{p,r,k}D(\xi)^pWK2^{p,k}u^{r,k}] \right\} \quad (5.29)$$

$$m \geq \sum_{\xi} Pr(\xi) \left\{ \sum_{p,r,k} \{(H^p CII(\xi)^p - MCK3^p FII(\xi)^p)WK1^{p,k}u^{r,k}\} \right. \\ \left. + \sum_{p,r,k} [MCK2^{p,r,k}D(\xi)^pWK2^{p,k}u^{r,k}] \right\} \quad (5.30)$$

Vale ressaltar que as desigualdades (5.3) e (5.28) que consideram o estoque inicial nulo e apenas perda de vendas ou atraso puros podem ser usadas no modelo proposto por Cunha et al. (2014).

### 6.1.3.

#### **Desigualdade válida para determinação do limite inferior para escolha do período para o primeiro pedido**

Uma forma eficaz de melhorar o tempo de solução do modelo equivalente determinístico completo, e consequentemente do método *L-Shaped*, é desenvolver desigualdades válidas que limitem as possíveis soluções do problema. Esse tipo de desigualdade válida, quando usada no PMR, o direcionam na determinação da solução ótima, restringido o domínio das variáveis de primeiro estágio, sem impossibilitar que a solução ótima seja obtida. Assim, tanto o número de iterações na busca da solução ótima quanto o tempo de solução podem ser reduzidos.

Considerando-se o caso determinístico (com apenas um cenário), realizar o primeiro pedido em um determinado período para atender um período no qual a demanda seja totalmente atendida pelo estoque em mãos proveniente do estoque inicial geraria um custo de estoque desnecessário. Admitindo-se a inclusão dos cenários, pode-se considerar que o limite inferior para a escolha do período do primeiro pedido é o mínimo entre os períodos mais cedo em que o estoque em mãos, proveniente do estoque inicial, não pode mais atender a totalidade da demanda de cada cenário, subtraído pelo tempo de entrega ou *lead time*. Logo, essa restrição pode ser representada pela seguinte equação:

$$\sum_{r, (k|k \geq MK)} u^{r,k} = 1 \quad (5.31)$$

Onde

$$DKS(\xi)^p = \sum_{p=1}^p D(\xi)^p \quad \forall p, \forall \xi \quad (5.32)$$

$$DKM(\xi)^p = II - DKS(\xi)^p \quad \forall p, \forall \xi \quad (5.33)$$

$$MK = (\text{Min } (p | DKM(\xi)^p < 0)) - TE \quad (5.34)$$

Com um raciocínio semelhante ao usado para o desenvolvimento da restrição (5.31), poder-se-ia criar uma restrição com limite superior para as

variáveis inteiras, contudo as desigualdades válidas de limite inferior (5.17) e (5.30) dispensam tal necessidade.

## 6.2.

### Aplicando as desigualdades válidas nas formulações SLS e MLS

Com os desenvolvimentos das desigualdades (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31), sete são as possíveis modificações na formulação *L-Shaped* tradicional e na formulação *L-Shaped* estendida, onde todos eles têm como PED a problema composto por (4.25) - (4.34), diferenciando-se entre si na formulação do PMR, que pode receber diferentes combinações de inserções de (5.1), (5.17) e (5.31) no caso do método MLS e de (5.1), (5.30) e (5.31) no caso do método SLS. A Tabela 3 apresenta os códigos dos possíveis modelos propostos na formulação *single-cut L-Shaped* (SLS) ou *L-Shaped* tradicional (LT) e na formulação *multi-cut L-Shaped* (MLS) ou *L-Shaped* estendida (LE) considerando-se as possíveis utilizações de (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31) nos PMR formados por (4.35) - (4.43) e (4.44) - (4.48), respectivamente.

SLS	Restrições inseridas no PMR			MLS	Restrições inseridas no PMR		
LT	-	-	-	LE	-	-	-
LT1	(5.1)	-	-	LE1	(5.1)	-	-
LT2	-	(5.30)	-	LE2	-	(5.17)	-
LT3	-	-	(5.31)	LE3	-	-	(5.31)
LT12	(5.1)	(5.30)	-	LE12	(5.1)	(5.17)	-
LT13	(5.1)	-	(5.31)	LE13	(5.1)	-	(5.31)
LT23	-	(5.30)	(5.31)	LE23	-	(5.17)	(5.31)
LT123	(5.1)	(5.30)	(5.31)	LE123	(5.1)	(5.17)	(5.31)

**Tabela 3 - Código com as formulações SLS e MLS formadas com as inserções de (5.1), (5.17), (5.22) e (5.23)**

Assim LT é a formulação *L-Shaped* tradicional (ou SLS) composta por 4.25-4.34 (PED) e 4.35-4.43 (PMR) e LE é a formulação *L-Shaped* estendida (ou MLS) composta por 4.25-4.34 (PED) e 4.44-4.48 (PMR).

### 6.3.

#### **Técnica de aceleração da decomposição de Benders proposta pelo autor**

A nova técnica de aceleração apresentada a seguir utiliza dois PMR em sua formulação, um problema mestre relaxado local (PMRL) e um problema mestre relaxado global (PMRG) e possui duas versões dependendo da estrutura de solução destes problemas. Quando o PMRL e o PMRG possuem a mesma estrutura de solução, ou seja, SLS ou MLS, trata-se da forma ou versão pura da técnica proposta, enquanto quando possuem estruturas de soluções diferentes trata-se da versão híbrida.

O desenvolvimento da técnica considera a sua aplicação em problemas de programação linear estocástica inteira 0-1 mista. Contudo, vale ressaltar que ela pode se estender a PLIM determinísticos. Mas, a sua eficiência, em termos de melhora do tempo de solução, assim como na maioria das técnicas de aceleração da decomposição da Benders presentes na literatura, depende do problema em questão.

#### 6.3.1.

##### **Técnica de aceleração proposta na forma pura**

Na versão pura da técnica proposta, as estruturas de soluções dos PMR podem ser a SLS ou MLS, ou seja, ambos PMRL e PMRG podem ter a estrutura de SLS, que também pode ser considerada uma decomposição clássica de Benders de corte único, ou a estrutura MLS.

O foco da técnica é a redução do tempo de solução através da diminuição do tempo gasto nas soluções do PMR inteiro misto. A motivação para o seu desenvolvimento remonta ao fato do método SLS apresentar desempenho superior ao método MLS, em termos de tempo de solução, quando ambos foram aplicados no modelo matemático estocástico de gestão de estoque proposto nesse presente trabalho (conforme pode ser observado no capítulo seguinte). Analisando-se os tempos de solução obtidos nos experimentos realizados, pode-se observar um aumento exponencial de dificuldade de solução do PMR do tipo PLIM, quando múltiplos cortes são inseridos em cada iteração do método MLS, o que torna o seu desempenho inferior ao método SLS, mesmo necessitando de menos iterações para obter as soluções ótimas.

A ideia principal da técnica proposta é obter a solução ótima do problema (SOP) resolvendo o PMR na forma PLIM menos vezes que nos métodos SLS e MLS e com conjuntos de cortes mais eficientes. Isso pode ser realizado resolvendo-se dois problemas mestres em um processo iterativo, sendo estes um PMRL, que seria PMR com as variáveis inteiras com valores fixos (linear contínuo) e um PMRG (PLIM), que se trata do PMR, mas que após o início do processo iterativo de solução, recebe um conjunto de cortes antes de ser resolvido, um corte (ou cortes no caso da versão pura MLS) referente a solução anterior obtida pelo PMRG (ou na inicialização do programa) mais alguns cortes que o fortalecem. Na técnica proposta, o PMRL junto ao PED, em um ciclo iterativo na forma do método *L-Shaped* ou ciclo iterativo local (CIL), busca os valores ótimos das variáveis contínuas para uma dada combinação vigente de valores de variáveis inteiras fixadas. As soluções obtidas pelo PMRL ao final de cada CIL, ou seja, em cada processo iterativo em que um novo conjunto de variáveis inteiras é fixado no PMRL e um novo CIL entre o PMRL e o PED é iniciado, serão chamadas de soluções sub-ótimas locais (SSL) ou soluções por término antecipado do ciclo local (TAL). Os fluxogramas lógicos do método puro, para o caso dos PMRL e PMRG com estrutura SLS, e para o caso de ambos com estrutura MLS são mostrados nas Figuras 6 e 7, respectivamente.

Na Figura 6 o PMRL e PMRG são diferenciados apenas pelas variáveis  $x$  fixadas ( $\bar{x}_{fixo}$ ) no PMRL com os valores obtidos quando o PMRG é resolvido. Observando-se a Figura 6, verifica-se que inicialmente são determinados os valores iniciais dos limites inferior e superior, parâmetros característicos do método *L-Shaped*, sendo atribuído infinito para o limite superior ( $LS$ ) e o VFO do PMRG para o limite inferior ( $LI$ ). Em seguida, verifica-se se a condição de parada é satisfeita, caso não seja, as variáveis  $x$  são fixadas com seus valores vigentes, o que torna o problema mestre um problema linear contínuo, que trata-se do PMRL. Na sequência, inicia-se um processo iterativo de solução denominado CIL onde, usando-se o método *L-Shaped* tradicional, busca-se a SSL para o valor vigente de  $\bar{x}_{fixo}$ . Dessa forma, o CIL termina toda vez que a condição de parada é satisfeita, ou seja, quando a SSL é encontrada (valor de  $LS$  no final do CIL for menor que o seu valor no início do CIL) ou quando verifica-se que as variáveis fixas  $\bar{x}_{fixo}$  vigentes gerariam uma SSL com VFO maior (considerando-se um problema de

minimização) que a última SSL obtida, e assim o CIL se encerra de forma antecipada, ou seja, não ocorre diminuição do valor que o  $LS$  tinha no início do CIL, logo obtém-se a solução por TAL. Após o término do CIL,  $\bar{x}_{fixo}$  são desafixadas e o PMRG é resolvido, obtendo-se uma solução global (SG), em seguida verifica-se, através da condição de parada, se a última SSL obtida pelo PMRL é a SOP (i.e,  $SG=SSL$ ). Logo, caso a SOP não seja obtida, ou seja, a condição de parada não seja satisfeita, fixa-se as variáveis  $x$  com os seus respectivos valores inteiros da SG vigente do PMRG e se inicia um novo CIL. Assim, tem-se em sequências e de forma intercalada, CIL e novas SG, até que a SOP seja obtida.

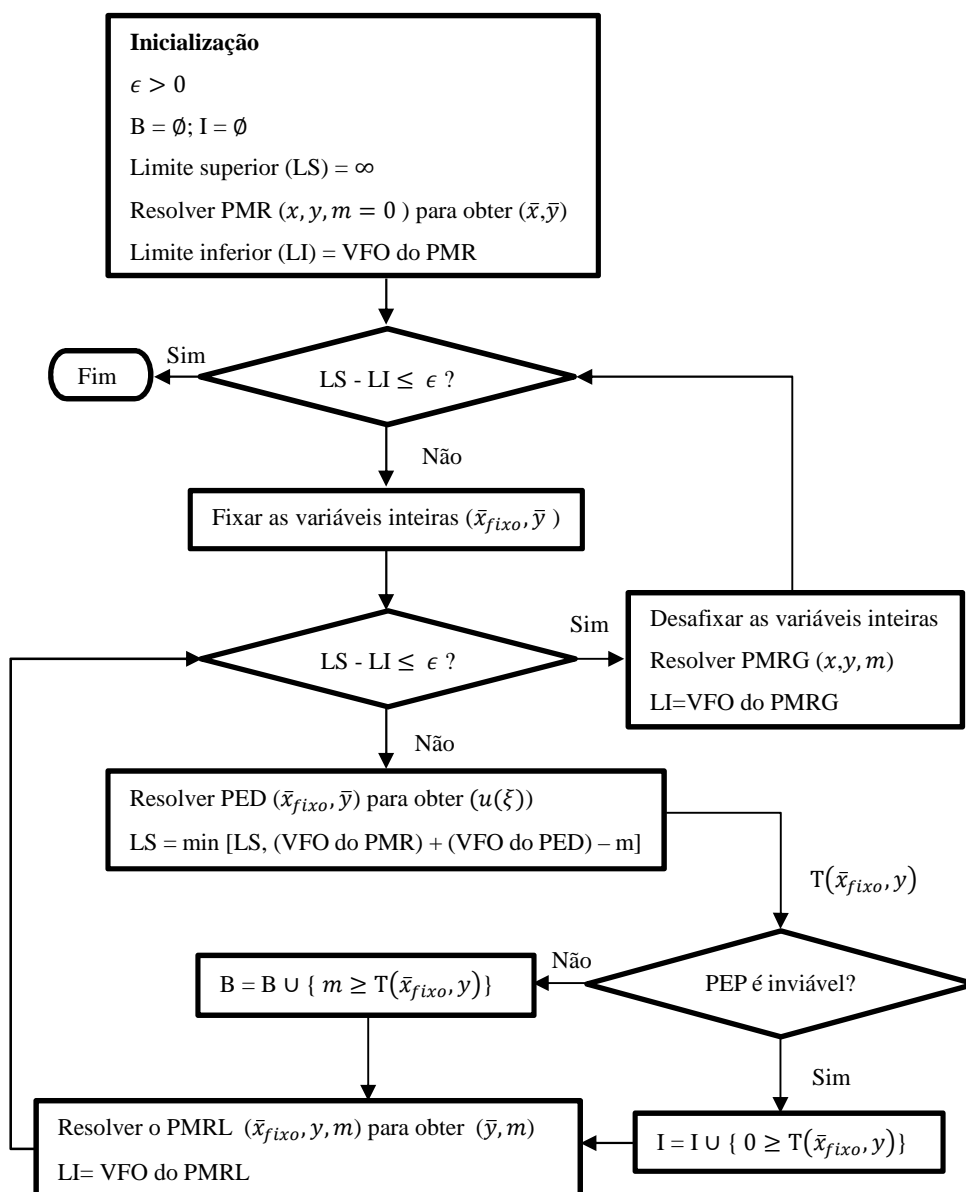


Figura 6 - Fluxograma da técnica de aceleração proposta na versão pura e com estrutura SLS



Apesar do fluxograma da técnica proposta (Figura 6) usar a estrutura SLS, a utilização da estrutura MLS não altera a lógica do método, diferenciando-se apenas por gerar múltiplos cortes por cenário em cada iteração, após cada solução do PED, e a variável  $m$  do PMR ser indexada no cenário, como pode-se observar na Figura 7. É válido ressaltar que na versão pura, pelo fato do PMRL e do PMRG se diferenciarem apenas pelas variáveis  $x$  estarem com valores fixos no PMRL, nas Figuras 6 e 7 os mesmos poderiam ser referenciados apenas por PMR, entretanto mais adiante, na versão híbrida da técnica proposta, os PMRL e PMRG são problemas com estrutura de soluções diferentes.

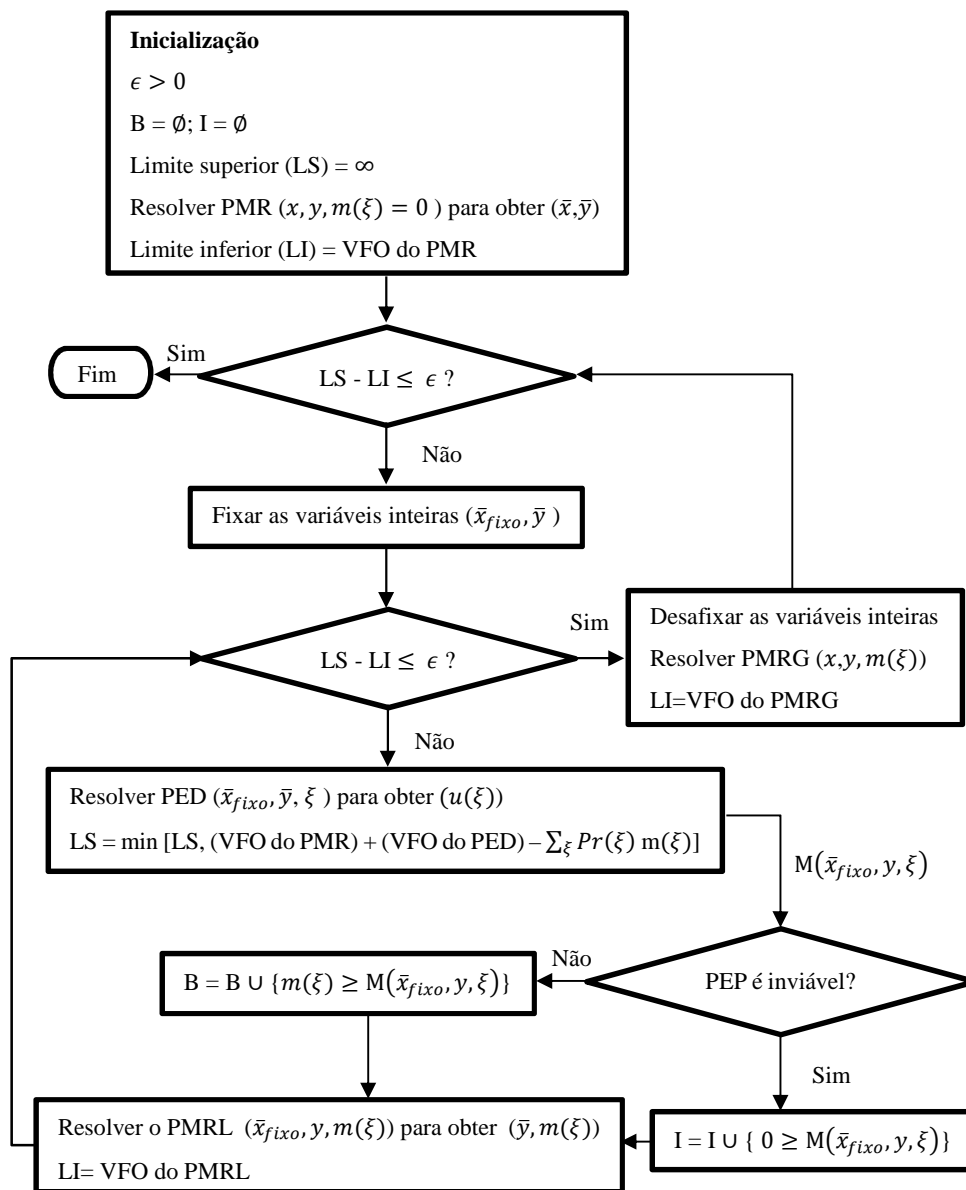


Figura 7 - Fluxograma da técnica de aceleração proposta na versão pura e com estrutura MLS

Analisando os fluxogramas das Figuras 6 e 7, verifica-se que na pior das hipóteses, a convergência da SOP ocorrerá quando todas as combinações possíveis de valores das variáveis inteiras forem obtidas pelo PMRG. Essa técnica pode fazer com que a quantidade de iterações para se obter a SOP aumente em relação aos métodos SLS e MLS, fazendo com que o PED seja resolvido mais vezes. Contudo, a diminuição do tempo gasto resolvendo menos vezes o PLIM compostos por restrições advindas do CIL, pode compensar de forma significativa na redução do tempo total de solução.

Um ponto chave da técnica proposta é a manutenção do menor limite superior obtido após iniciar-se as buscas pelas SSL. Dessa forma, um conjunto de valores  $\bar{x}_{fixo}$  no PMRL para a busca de sua referida SSL que geraria ao final do CIL um VFO superior ao  $LS$  atual (considerando-se problema de minimização), tem seu CIL encerrado antes da SSL ser obtida, ou seja, ocorre um TAL. Dessa forma, a quantidade de iterações do CIL pode diminuir. Logo, essa técnica tem sua eficiência substancialmente elevada quando se consegue usar desigualdades válidas no PMR, relacionadas, principalmente, com as variáveis inteiras, por duas principais razões:

1. Soluções próximas a SOP podem ser obtidas pelo PMRG desde as primeiras iterações do processo de solução, o que conseqüentemente favorece a obtenção de valores menores do  $LS$ . Assim, os CIL se tornam mais rápidos, em razão dos TAL que irão ocorrer com mais frequência (menor número de iterações nos CIL).
2. Quanto mais refinadas forem as desigualdades válidas, ou seja, mais limitarem o domínio das variáveis sem impossibilitar obtenção da SOP, mais restrita pode ficar a escolha dos possíveis valores das variáveis  $x$  que contém a SOP. Assim, o PMRG pode determinar a SOP necessitando de menos CIL, ou seja, o número de SG (número de vezes que o PMRG é resolvido) é diminuído.

Para ilustrar os conceitos apresentados, as Figuras 8 e 9 mostram os valores dos limites superior e inferior durante o processo de solução de uma mesma instância, pelos métodos *L-Shaped* tradicional e puro *single-cut*, respectivamente, ambos utilizando (5.1).

Na Figura 8 observa-se um típico comportamento dos valores de  $LS$  e  $LI$ , que pode ser equiparado ao comportamento de cada CIL como, por exemplos, os da Figura 9. Imaginado que a Figura 8 representa o processo de solução de um CIL,

caso o valor de  $LS$  no início do processo seja igual a  $LS1$ , verifica-se que a convergência da solução não será afetada, pois a partir do ponto vermelho,  $LS$  diminui, passando seguir o comportamento plotado, e ao final do processo de solução uma  $SSL$  será obtida. Entretanto, caso o valor de  $LS$  no início do processo seja igual a  $LS2$ , o valor de  $LS$  permanece inalterado e no ponto preto ocorre um  $TAL$ , o que em um processo de solução pela técnica proposta, por exemplo, o da Figura 9, significa que a última  $SSL$  obtida, que fornece  $VFO$  igual a  $LS2$ , é melhor que a solução que seria obtida na convergência da Figura 8, sendo portanto desnecessário dar continuidade ao dito  $CIL$ .

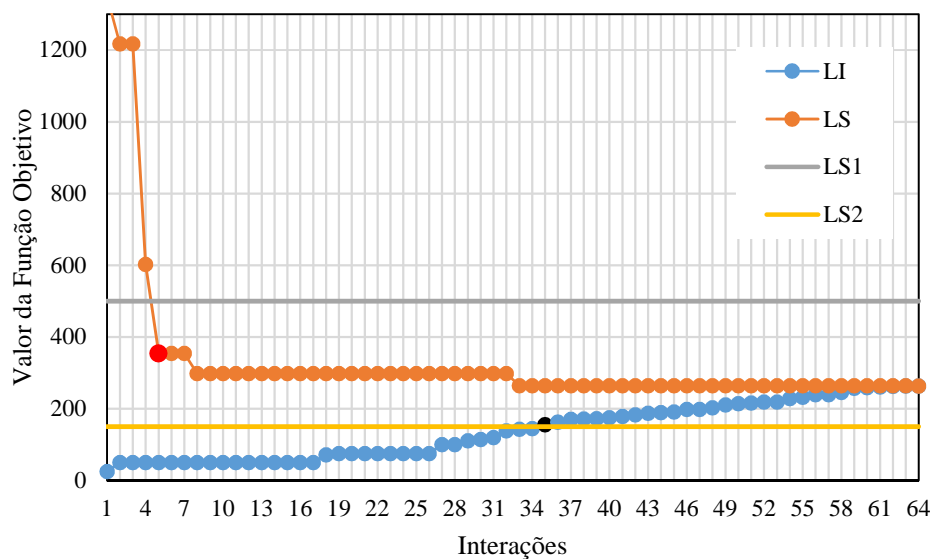


Figura 8 - Comportamento dos limites superior e inferior pelo método SLS

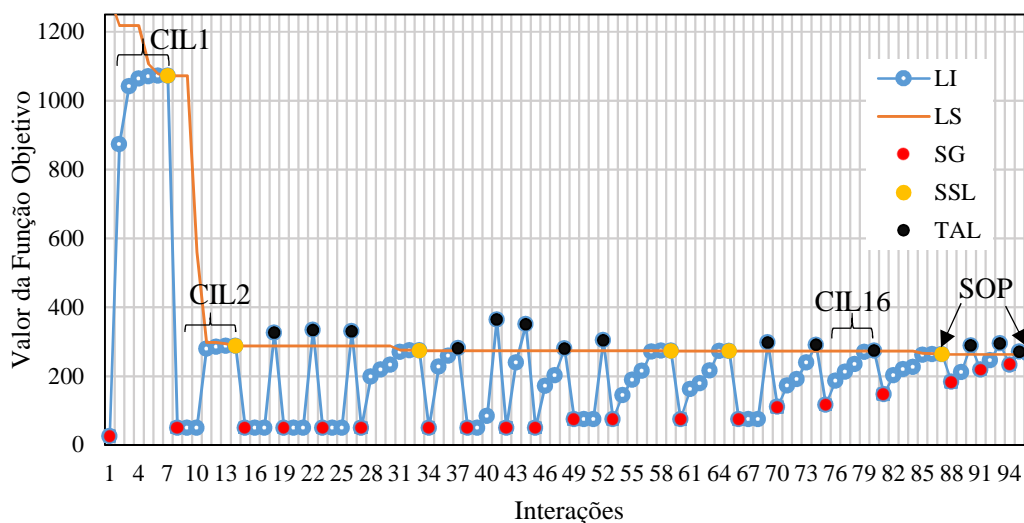


Figura 9 - Comportamento dos limites superior e inferior pela técnica proposta

A Figura 9 ilustra um comportamento típico dos valores de  $LS$  e  $LI$  quando a técnica de aceleração proposta é aplicada. Os pontos amarelos, vermelhos e pretos representam os valores de  $LI$  quando uma SSL é obtida, uma SG é obtida e um TAL ocorre, respectivamente. Analisando a Figura 9, como esperado devido à lógica da técnica proposta, pode-se observar que sempre que uma SSL é obtida ocorre diminuição do valor de  $LS$  e a SOP sempre será a última SSL obtida no processo iterativo de solução. Vale ressaltar, que uma SSL pode ser obtida sem ocorrer diminuição do valor do  $LS$  durante um CIL, no caso do problema apresentar múltiplas soluções de primeiro estágio. Também verifica-se que um CIL sempre ocorre entre a obtenção de duas SG consecutivas e que os valores de  $LI$  referentes as SG possuem comportamento típico da decomposição de Benders, ou seja, conforme as interações são realizadas os mesmos são iguais ou maiores que o valor anterior.

A convergência à SOP no PMRG, que se trata de um PLIM, deve ocorrer, na pior das hipóteses, quando todas as possíveis combinações de valores das variáveis inteiras forem obtidas pelo PMRG e fixadas no PMRL para realização do CIL. Entretanto, pode não ser trivial notar que o PMRL sempre encontrará a SOP durante o processo de solução da técnica proposta.

Sempre que a parte  $x$  de uma SG atual que forneceria uma SSL melhor que outras SSL anteriormente determinadas pelo PMRL for obtida pelo PMRG; quando os valores vigentes de  $x$  forem fixados no PMRL ( $\bar{x}_{fixo\ vigente}$ ), e se iniciar o CIL, esse se encerrará apenas quando a SSL, referente ao  $\bar{x}_{fixo\ vigente}$ , for obtida, ou seja, não ocorrerá TAL. Isso pode ser comprovado ao se analisar a estrutura lógica da técnica proposta.

Quando um CIL se inicia, existem duas possibilidades do mesmo se encerrar: por TAL ou pela obtenção da SSL. Considerando-se  $LSf$  o valor da VFO do PMRL quando fosse obtida a SSL do  $\bar{x}_{fixo\ vigente}$ , ao término do CIL. Admitindo-se que o CIL iniciara com  $\bar{x}_{fixo\ vigente}$  e sendo o  $LS$  um valor inicial atribuído no início do algoritmo (infinito, por exemplo) ou o VFO referente a última SSL obtida pelo PMRL. Se o CIL atual gera uma SSL com VFO melhor que  $LS$ , ou seja,  $LSf < LS$  (para o caso de minimização), o mesmo irá se encerrar quando  $0 \leq LS - LI \leq \epsilon$ , e o valor de  $LS$  ao fim do ciclo será menor que o seu valor no início, logo ao fim do CIL vigente será obtida uma SSL, melhor que todas as outras

anteriormente obtidas. Caso contrário, se o determinado conjunto de valores  $\bar{x}_{fixo\ vigente}$  gerasse uma SSL pior do que a última SSL obtidas em algum CIL anterior, significa que  $LSf > LS$ , logo o valor de  $LS$  não se altera durante CIL vigente, sendo esse interrompido quando  $0 \leq LS - LI \leq \epsilon$  (TAL tipo 1) ou  $LS - LI < 0$  (TAL tipo 2). Dessa forma, enquanto a SSL que gera a SOP não for obtida pelo PMRL, o PMRG sempre vai determinar uma nova SG, cujo valor do  $LI$  correspondente não irá satisfazer  $0 \leq LS - LI \leq \epsilon$ , pois o valor de  $LS$  ainda não será o mínimo possível.

É importante ressaltar que o TAL tipo 1 é improvável de ocorrer para pequenos valores de tolerância. Por exemplo, os gráficos das Figuras 8 e 9 foram ambos obtidos usando-se tolerância de  $10^{-5}$ , e pode-se verificar a ocorrência de apenas TAL tipo 2, que trivialmente não impedem a obtenção da SOP. No método proposto, mesmo após a melhor SSL ser obtida, ou seja, a SOP, o processo de solução pode não terminar imediatamente, podendo o PMRG ainda obter algumas SG que geram  $LI$  inferiores a  $LS + \epsilon$ , sendo necessário a realização de mais alguns CIL, até que a última SSL obtida seja identificada como a SOP, ou seja, SG ser igual a SSL. Isso pode ser verificado no exemplo da Figura 9. Contudo, após a melhor SSL ser obtida, e principalmente quando se trabalha com tolerâncias maiores, pode ocorrer um TAL tipo 1, o que poderia fazer o com que solução obtida ao fim da iteração não fosse a SOP. Entretanto, é sabido que a SOP sempre será a última SSL obtida pelo PMRL durante o processo de solução, logo em uma abordagem mais conservadora, a última SSL determinada deve ser armazenada conforme o processo iterativo de solução ocorre, assim no final do processo a SOP sempre será obtida.

Uma forma mais simples de demonstrar a convergência da técnica proposta seria observar que, assim como em alguns métodos expostos no Capítulo 2, o CIL entre o PMRL e o PED pode ser encarado como problemas auxiliares resolvidos dentro de uma abordagem *L-Shaped*. Observa-se que, verificando a lógica da técnica proposta na Figura 6, sempre que o PMRG é resolvido, esta solução é fixada no PED e um corte de Benders é gerado e adicionado ao PMRG. Na sequência, uma quantidade de cortes, proveniente do CIL, é gerada e adicionada ao PMRG, cortes estes que fortalecem a aproximação vigente. Em seguida, o PMRG é resolvido e a

condição de parada é verificada para o algoritmo encerrar (SOP obtida) ou o ciclo continuar.

É importante destacar que as análises acima consideram que os processos de obtenção de SSL e SG não inviabilizam matematicamente os PMRG e PMRL. Essa condição é garantida quando cortes de viabilidade não precisam ser utilizados no processo iterativo de solução proposto, ou seja, quando o modelo em questão possui recurso relativamente completo, o que, no caso do modelo proposto na presente dissertação, é assegurado quando utilizamos a desigualdade (5.1).

Quando a técnica de aceleração proposta é aplicada no modelo de gestão de estoque proposto sem a utilização das desigualdades válidas, uma quantidade significativa de cortes de viabilidade é gerada, o que pode tornar o método ineficiente ou matematicamente inviável. Contudo, mesmo não utilizando a desigualdade (5.1), mas usando (5.17) e (5.31) no modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão pura MLS ou (5.30) e (5.31) no modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão pura SLS o problema de inviabilidade dos PMR não ocorreu durante os testes realizados, uma vez que o PMRG obtém soluções inteiras e contínuas mais próximas da solução ótima global, desde o início do processo iterativo, diminuindo notavelmente o número de cortes de viabilidade.

### **6.3.2. Técnica de aceleração proposta na forma híbrida**

Na forma híbrida, o PMRL é estruturado com a forma MLS e o PMRG tem a estrutura SLS, ou seja, tratam-se de problemas com estruturas de solução diferentes. Dessa forma, tem-se o benefício de os CIL serem realizados com menos iterações e com menor demanda de desempenho computacional por estarem na forma MLS e pelo fato do PMRL se tratar de um problema linear simplificado e com apenas variáveis contínuas. O PMRG irá receber os mesmos cortes inseridos no PMRL durante a busca pelas SSL, mas na forma de média ponderada entre os cenários (corte único). Assim, além do problema PMRG PLIM poder ser resolvido menos vezes, as suas resoluções ocorrem na forma SLS, que exige menor desempenho computacional.

Entretanto, quando pondera-se os cortes para inseri-los na forma SLS no PMRG, pode ocorrer perda de informação proveniente da solução do PED, em

comparação aos cortes na forma MLS, podendo fazer com que o PMRG repita soluções inteiras, que já foram anteriormente obtidas e fixadas no CIL, para realização de um novo CIL, e dessa forma, a quantidade de iterações para se atingir o ótimo global pode aumentar. Para evitar que ocorra esse efeito indesejado, será necessário a inclusão de “cortes ótimos locais” (COL) no PMRG, ao final de cada CIL, ou seja, quando a SOP for obtida o PMRG terá uma quantidade de COL igual ao número de CIL.

Admitindo-se que o CIL vigente na forma MLS pela busca de uma determinada SSL encerrou e sendo a variável  $m$  definida como não negativa ( $m \geq 0$ ) pertencente ao PMRG; no fim do CIL, temos as variáveis inteiras binárias com os seus valores fixos e o valor final das variáveis  $m(\xi)$  pertencentes ao PMRL. Sendo  $C_n^{b,i}$  um parâmetro binário que recebe valores de  $n$  variáveis binárias  $x_n^i$  com índice  $i$  genérico, onde  $b$  é o número do corte de Benders no final de cada CIL, tem-se:

$$C_n^{b,i} = \bar{x}_n^i \text{ para } \sum_i \bar{x}_n^i > 0 \quad (5.35)$$

Onde  $\bar{x}_n^i$  é o valor de  $x_n^i$  (variáveis inteiras do PMRG que são fixas no PMRL) no fim do CIL. Assim, o seguinte COL é adicionado no PMRG:

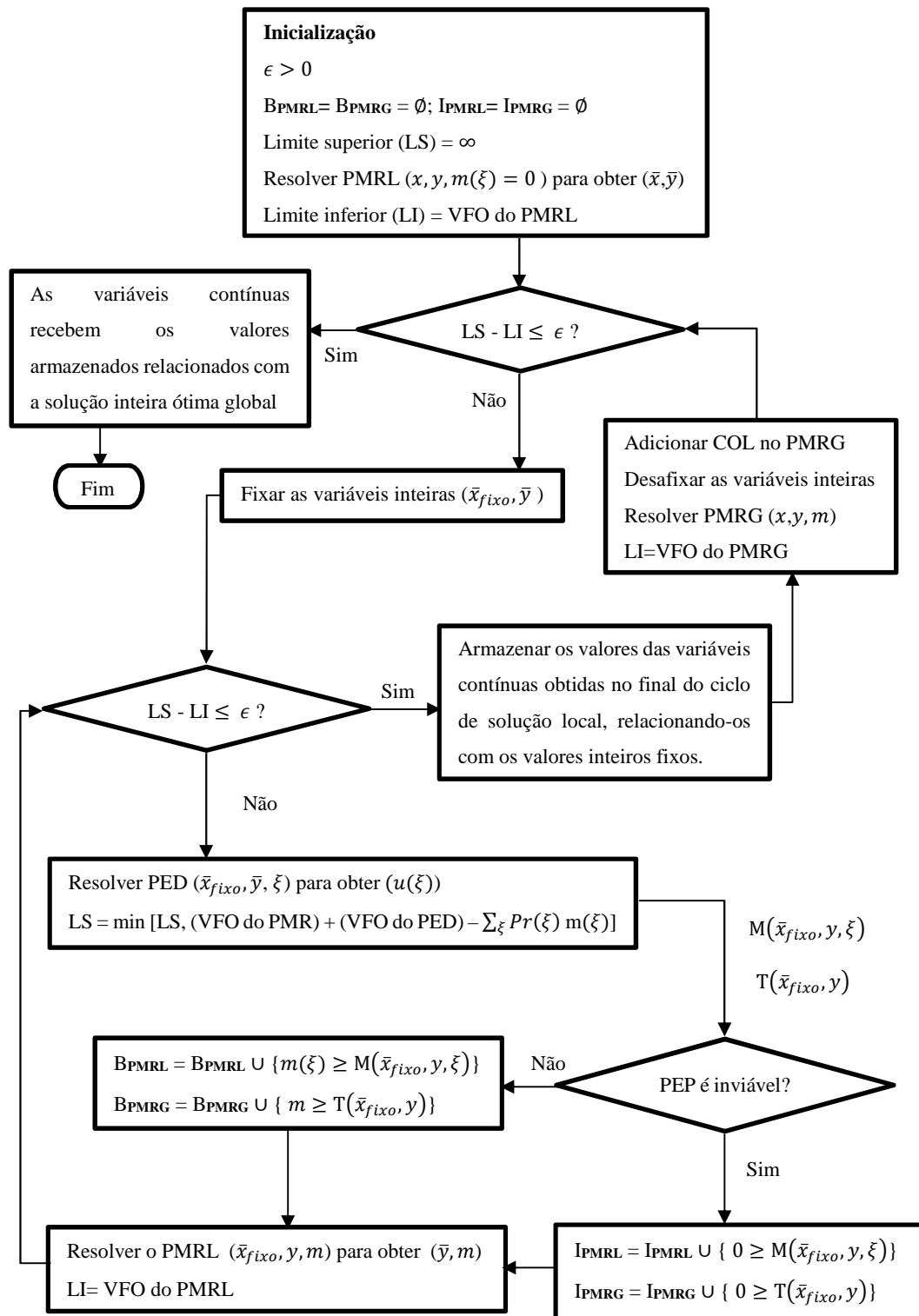
$$\left( \sum_{\xi} Pr(\xi) \bar{m}(\xi) \right) \frac{(\sum_{i,n} [C_n^{b,i} x_n^i] - \sum_{i,n} [C_n^{b,i}] + 1)}{N} \leq m \quad \left| \sum_{i,n} \bar{x}_n^i > 0 \quad (5.36)$$

$$\left( \sum_{\xi} Pr(\xi) \bar{m}(\xi) \right) \left( 1 - \sum_{i,n} x_n^i \right) \leq m \quad \left| \sum_{i,n} \bar{x}_n^i = 0 \quad (5.37)$$

Onde  $\bar{m}(\xi)$  é o valor de  $m(\xi)$  obtido no final do CIL e  $N$  é o número total de variáveis binárias com índice  $i$  genérico.

Observando-se a definição (5.36), nota-se que para quaisquer valores das variáveis inteiras diferentes do valor obtido no final do CIL vigente, o lado esquerdo da equação é nulo ou negativo, e quando o valor é igual ao obtido no final do CIL vigente,  $m$  é no mínimo igual ao valor de  $\sum_{\xi} Pr(\xi) \bar{m}(\xi)$  que o PMRL obteve no final do CIL buscando a SSL. Uma análise análoga a (5.36) pode ser feita para

(5.37). Vale ressaltar que as equações (5.36) e (5.37) abrangem diversos tipos de problemas com variáveis inteiras 0-1, entretanto não se tratam de equações gerais.



**Figura 10 - Fluxograma da técnica de aceleração proposta na versão híbrida**

Na técnica híbrida, quando o PMRG obtém a SOP, as variáveis de decisões contínuas podem apresentar valores um pouco diferentes dos seus valores ótimos,



obtidos no fim do processo de solução local, devido à perda de informação provenientes das soluções do PED, em virtude das ponderações dos cortes. Assim, torna-se necessário armazenar os valores obtidos para cada variável de decisão contínua, ao fim de cada CIL, relacionando-os aos valores inteiros fixados no CIL corrente. Logo, ao fim do processo de solução, utiliza-se como valores ótimos das variáveis contínuas os valores armazenados e relacionados às variáveis inteiras da SOP determinadas no fim do processo iterativo de solução. Vale ressaltar que o armazenamento dos valores das variáveis contínuas é necessário somente nos casos em que a máxima precisão nos valores dessas variáveis faz-se necessário.

O fluxograma da técnica na versão híbrida encontra-se representado na Figura 10. Como já mencionado anteriormente, na versão híbrida os PMRL e PMRG são problemas com estruturas diferentes de solução, assim recomenda-se que a definição do limite superior, nesse caso, seja como na Figura 10, localizada logo após a solução do PED, para que problemas de convergência sejam evitados. A lógica da versão híbrida é essencialmente a mesma da versão pura, logo a garantia da convergência na SOP pode ser confirmada seguindo os mesmos passos de verificação do processo lógico da técnica proposta na versão pura.

#### 6.4.

#### **Aplicando a técnica de aceleração proposta no modelo proposto**

A técnica proposta em sua forma pura tem como característica o PMRL e o PMRG serem o mesmo problema, ambos com estrutura SLS (ou *L-Shaped* tradicional) ou MLS (ou *L-Shaped* estendido), diferenciando-se pelo fato de que no PMRL as variáveis inteiras têm valores fixos determinados pelo PMRG.

Considera-se LT.LT a formulação pura da técnica proposta com estrutura de solução *L-Shaped* tradicional composta por 4.25-4.34 (PED) e 4.35-4.43 (PMR) e LE.LE é a formulação pura da técnica proposta com estrutura de solução *L-Shaped* estendida composta por 4.25-4.34 (PED) e 4.44-4.48 (PMR).

Assim, considerando-se a possibilidade de utilização de (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31) nos PMR das versões puras da técnica proposta, existem oito possibilidades de formulações que seguem os fluxogramas das Figuras 6 e 7, conforme mostra a Tabela 4.

Na versão híbrida da técnica proposta, o PMRL e o PMRG são problemas com estrutura de soluções diferentes, sendo o PMRL com estrutura MLP e o PMRG

com estrutura SLS, dessa forma, considera-se que LE.LT é formulação híbrida da técnica proposta com estrutura de solução *L-Shaped* tradicional no PMRG e *L-Shaped* estendida no PMRL, sendo composta por 4.25-4.34 (PED), 4.35-4.43 (PMRG) e 4.44-4.48 (PMRL). Logo, com a aplicação da versão híbrida da técnica proposta no presente modelo e a possibilidade de utilização de (5.1) e (5.17) no PMRL e (5.1), (5.30) e (5.31) no PMRG, tem-se as possibilidades de formulações, que seguem o fluxograma da Figura 10, contidas na Tabela 5. Vale ressaltar que na versão híbrida não é necessário a inclusão das desigualdades (5.17) e (5.31) no PMRL pelo fato das variáveis inteiras estarem fixas durante o CIL, contudo as mesmas são utilizadas para uma melhor inicialização do algoritmo.

“PSLS”=modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão pura SLS

“PMLS”=modelo proposto formulado com técnica proposta na versão pura MLS

“RIPMR”=restrições inseridas no PMR

PSLS	RIPMR			PMLS	RIPMR		
LT.LT	-	-	-	LE.LE	-	-	-
LT.LT.1	(5.1)	-	-	LE.LE.1	(5.1)	-	-
LT.LT.2	-	(5.30)	-	LE.LE.2	-	(5.17)	-
LT.LT.3	-	-	(5.31)	LE.LE.3	-	-	(5.31)
LT.LT.12	(5.1)	(5.30)	-	LE.LE.12	(5.1)	(5.17)	-
LT.LT.13	(5.1)	-	(5.31)	LE.LE.13	(5.1)	-	(5.31)
LT.LT.23	-	(5.30)	(5.31)	LE.LE.23	-	(5.17)	(5.31)
LT.LT.123	(5.1)	(5.30)	(5.31)	LE.LE.123	(5.1)	(5.17)	(5.31)

**Tabela 4 - Código dos PSLS e PMLS formados com as inserções de (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31)**

Os pseudocódigos dos Algoritmos 1 e 2 representam a aplicação da técnica proposta na versão pura, com as formulações SLS e MLS, respectivamente, e especificamente no modelo de gestão de estoque proposto no presente trabalho. Para o caso de se considerar a utilização das desigualdades válidas (5.17), (5.30) e (5.31), nas versões puras, é necessário alterar o PMR (4.35-4.43) para PMR (4.35-4.43, 5.30, 5.31) no Algoritmo 1 e PMR (4.44-4.48) para PMR (4.44-4.48, 5.17, 5.31) no Algoritmo 2. Os pseudocódigos dos Algoritmos 3 e 4 representam aplicação da técnica proposta na versão pura ao modelo proposto, especificamente para as formulações LT.LT123 e LE.LE123, respectivamente. Para o caso de se

considerar a utilização apenas das desigualdades (5.17) é necessário retirar (5.30) e (5.31) do PMR no Algoritmos 3 e retirar (5.17) e (5.31) do PMR no Algoritmo 4.

O COL, característico da versão híbrida da técnica proposta e específico para o modelo proposto, pode ser verificado em (5.38).

$$m_{global} \geq \sum_{r,k} LO^{r,k,b} u^{r,k} \quad (5.38)$$

Onde

$$LO^{r,k,b} = \left[ \sum_{\xi} (Pr(\xi) \bar{m}(\xi)) \right] \bar{u}^{r,k} \quad (5.39)$$

Sendo  $\bar{m}(\xi)$  e  $\bar{u}^{r,k}$  os valores obtidos na resolução do PMRL para as variáveis  $m(\xi)$  e  $u^{r,k}$ , ao final de cada CIL.

“VH”=modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão híbrida

“RIPMRG”=restrições inseridas no PMRG;

“RIPMRL”=restrições inseridas no PMRL

VH	RIPMRG			RIPMRL		
LE.LT	-	-	-	-	-	-
LE1.LT1	(5.1)	-	-	(5.1)	-	-
LE2.LT2	-	(5.30)	-	-	(5.17)	-
LE3.LT3	-	-	(5.31)	-	-	(5.31)
LE12.LT12	(5.1)	(5.30)	-	(5.1)	(5.17)	-
LE13.LT13	(5.1)	-	(5.31)	(5.1)	-	(5.31)
LE23.LT23	-	(5.30)	(5.31)	-	(5.17)	(5.31)
LE123.LT123	(5.1)	(5.30)	(5.31)	(5.1)	(5.17)	(5.31)

**Tabela 5 - Código dos VH formados com as inserções de (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31)**

Na versão híbrida, ao fim de cada processo de solução local, é necessário armazenar o valor obtido referente a variável  $s$  para que no fim do ciclo iterativo de solução global seja possível resgatar o valor exato obtido pelo PMRL. Esse armazenamento será feito conforme (5.40).

$$G^{b,r,k} = \bar{s} \bar{u}^{r,k} \quad (5.40)$$

Onde  $G^{b,r,k}$  é um parâmetro que armazena os valores da variável  $s$  ao final de cada CIL e  $\bar{s}$  e  $\bar{u}^{r,k}$  são os valores obtidos para as variáveis  $s$  e  $u^{r,k}$  pelo PMRL ao final de cada ciclo iterativo do local.

O pseudocódigo do Algoritmo 5, representa a aplicação da técnica proposta na versão híbrida, especificamente para LE123.LT123.

### Início

1. Ler  $P, \Omega, \tau, K$  //tamanho dos conjuntos//
2. Ler  $B^p, BA^p, CF^p, H^p$  //parâmetros de custos//
3. Ler  $D(\xi)^p, Pr(\xi)$  //parâmetros de incerteza//
4. Ler  $\beta, II, \bar{S}, TE, W^{p,r,k}$  //demais parâmetros//
5. Ler  $\epsilon$  //tolerância admitida//
6. Ler  $LS, LI$  //parâmetros de limite superior e inferior//
7. PMR (4.35-4.43) //PMR = PMRL = PMRG//
8. PED (4.25-4.34)
9.  $LS \leftarrow \infty$
10. Resolver PMR
11.  $LI \leftarrow$  VFO do PMR
12. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
  13. Fixar  $u^{r,k}; \bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  14. Fixar  $v^p; \bar{v}^p \leftarrow v^p$  //  $\bar{v}^p$  é usado na solução do PED//
  15. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
    16. Resolver PED
    17. Se VFO do PED =  $\infty$  então adicionar (4.40) no PMRL
    18. senão adicionar (4.39) no PMRL
    19.  $LS \leftarrow \min[LS, \text{VFO do PMR} + \text{VFO do PED} - m]$
    20. Resolver PMRL
    21.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRL;  $\bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  22. Fim (Enquanto)
  23. Desafixar  $u^{r,k}$
  24. Desafixar  $v^p$
  25. Resolver PMRG
  26.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRG
27. Fim (Enquanto)
28. Fim

**Algoritmo 1- Pseudocódigo da formulação LT.LT**

**Início**

1. Ler  $P, \Omega, \tau, K$  //tamanho dos conjuntos//
2. Ler  $B^p, BA^p, CF^p, H^p$  //parâmetros de custos//
3. Ler  $D(\xi)^p, Pr(\xi)$  //parâmetros de incerteza//
4. Ler  $\beta, II, \bar{S}, TE, W^{p,r,k}$  //demais parâmetros//
5. Ler  $\epsilon$  //tolerância admitida//
6. Ler  $LS, LI$  //parâmetros de limite superior e inferior//
7. PMR (4.44-4.48) //PMR = PMRL = PMRG//
8. PED (4.25-4.34)
9.  $LS \leftarrow \infty$
10. Resolver PMR
11.  $LI \leftarrow$  VFO do PMR
12. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
  13. Fixar  $u^{r,k}; \bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  14. Fixar  $v^p; \bar{v}^p \leftarrow v^p$  //  $\bar{v}^p$  é usado na solução do PED//
  15. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
    16. Resolver PED
    17. Se VFO do PED =  $\infty$  então adicionar (4.40) no PMRL
    18. senão adicionar (4.45) no PMRL
    19.  $LS \leftarrow \min[LS, \text{VFO do PMR} + \text{VFO do PED} - \sum_{\xi} Pr(\xi)m(\xi)]$
    20. Resolver PMRL
    21.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRL;  $\bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  22. Fim (Enquanto)
  23. Desafixar  $u^{r,k}$
  24. Desafixar  $v^p$
  25. Resolver PMRG
  26.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRG
27. Fim (Enquanto)
28. Fim

**Algoritmo 2- Pseudocódigo da formulação LE.LE**

**Início**

1. Ler  $P, \Omega, \tau, K$  //tamanho dos conjuntos//
2. Ler  $B^p, BA^p, CF^p, H^p$  //parâmetros de custos//
3. Ler  $D(\xi)^p, Pr(\xi)$  //parâmetros de incerteza//
4. Ler  $\beta, II, \bar{S}, TE, W^{p,r,k}$  //demais parâmetros do sistema//
5. Ler  $\epsilon$  //tolerância admitida//
6. Ler  $LS, LI$  //parâmetros de limite superior e inferior//
7. PMR (4.35-4.43, 5.1, 5.30, 5.31) //PMR = PMRL = PMRG//
8. PED (4.24-4.34)
9.  $LS \leftarrow \infty$
10. Resolver PMR
11.  $LI \leftarrow$  VFO do PMR
12. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
  13. Fixar  $u^{r,k}; \bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  14. Fixar  $v^p \bar{v}^p \leftarrow v^p$  //  $\bar{v}^p$  é usado na solução do PED//
  15. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
    16. Resolver PED
    17. Adicionar (4.39) no PMRL
    18.  $LS \leftarrow \min[LS, \text{VFO do PMR} + \text{VFO do PED} - m]$
    19. Resolver PMRL
    20.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRL;  $\bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  21. Fim (Enquanto)
  22. Desafixar  $u^{r,k}$
  23. Desafixar  $v^p$
  24. Resolver PMRG
  25.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRG
26. Fim (Enquanto)
27. Fim

**Algoritmo 3- Pseudocódigo da formulação LT.LT.123**

**Início**

1. Ler  $P, \Omega, \tau, K$  //tamanho dos conjuntos//
2. Ler  $B^p, BA^p, CF^p, H^p$  //parâmetros de custos//
3. Ler  $D(\xi)^p, Pr(\xi)$  //parâmetros de incerteza//
4. Ler  $\beta, II, \bar{S}, TE, W^{p,r,k}$  //demais parâmetros//
5. Ler  $\epsilon$  //tolerância admitida//
6. Ler  $LS, LI$  //parâmetros de limite superior e inferior//
7. PMR (4.44-4.48, 5.1, 5.17, 5.31) //PMR = PMRL = PMRG//
8. PED (4.25-4.34)
9.  $LS \leftarrow \infty$
10. Resolver PMR
11.  $LI \leftarrow$  VFO do PMR
12. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
  13. Fixar  $u^{r,k}; \bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  14. Fixar  $v^p; \bar{v}^p \leftarrow v^p$  //  $\bar{v}^p$  é usado na solução do PED//
  15. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
    16. Resolver PED
    17. Adicionar (4.45) no PMRL
    18.  $LS \leftarrow \min[LS, \text{VFO do PMR} + \text{VFO do PED} - \sum_{\xi} Pr(\xi)m(\xi)]$
    19. Resolver PMRL
    20.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRL;  $\bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  21. Fim (Enquanto)
  22. Desafixar  $u^{r,k}$
  23. Desafixar  $v^p$
  24. Resolver PMRG
  25.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRG
26. Fim (Enquanto)
27. Fim

**Algoritmo 4- Pseudocódigo da formulação LE.LE.123**

**Início**

1. Ler  $P, \Omega, \tau, K$  //tamanho dos conjuntos//
2. Ler  $B^p, BA^p, CF^p, H^p$  //parâmetros de custos//
3. Ler  $D(\xi)^p, Pr(\xi)$  //parâmetros de incerteza//
4. Ler  $\beta, II, \bar{S}, TE, W^{p,r,k}$  //demais parâmetros //
5. Ler  $\epsilon, LS, LI$  // tolerância admitida e parâmetros de limite superior e inferior//
6. PMRG (4.35-4.43, 5.1, 5.30, 5.31)
7. PMRL (4.44-4.48, 5.1, 5.17, 5.31)
8. PED (4.25-4.34)
9.  $LS \leftarrow \infty$
10. Resolver PMRL
11.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRL
12. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
  13. Fixar  $u^{r,k}; \bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  14. Fixar  $v^p; \bar{v}^p \leftarrow v^p$  //  $\bar{v}^p$  é usado na solução do PED//
  15. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
    16. Resolver PED
    17. Adicionar (4.45) no PMRL
    18. Adicionar (4.39) no PMRG
    19.  $LS \leftarrow \min[LS, \sum_p CF^p v^p + \text{VFO do PED}]$
    20. Resolver PMRL
    21.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRL;  $\bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  22. Fim (Enquanto)
  23.  $G^{b,r,k} \leftarrow \bar{s} \bar{u}^{r,k}$  //  $b$  é o número do corte de Benders //
  24. Adicionar (5.38) no PMRG //COL//
  25. Desafixar  $u^{r,k}$
  26. Desafixar  $v^p$
  27. Resolver PMRG
  28.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRG
29. Fim (Enquanto)
30.  $s \leftarrow \sum_{b,r,k} G^{b,r,k} u^{r,k}$
31. Fim

**Algoritmo 5- Pseudocódigo da formulação LE123.LT123**



## 6.5.

### Técnica aceleração na forma híbrida modificada aplicada ao MP

O modelo proposto para gestão de estoques com política de controle (R, S) quando decomposto em um problema mestre e um problema escravo, no PMR, apresenta a característica particular da variável  $s$  não possuir restrição relacionada com outra variável do problema e também não fazer parte diretamente da função objetivo. Assim, considerando-se a aplicação da técnica de aceleração proposta na forma híbrida, pode-se remover a variável  $s$  do PMRG e usar apenas COL no mesmo. Logo, o modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão híbrida (VH) passa resolver um problema inteiro no PMRG, o que pode representar uma diminuição no tempo de solução, uma vez que, neste trabalho, observou-se que resolver o problema inteiro puro, demanda menor esforço computacional do que o problema inteiro misto.

Considerando-se alteração proposta no PMRG, tem-se o modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão híbrida modificada (VHM), onde o PMRG é formado por (4.34), (4.35), (4.36), (4.40), (4.41), (4.42), e a desigualdade válida (5.1) será inserida após cada resolução do PMRG, de maneira garantir que o valor inicial do nível alvo  $s$ , em cada CIL, gere cortes de otimalidade em todas as iterações locais. Basicamente, essa mudança consiste em iniciar a busca pelo ótimo local, sempre com o valor máximo entre o mínimo admitido em função de  $u^{r,k}$  em (5.1) e um determinado valor escolhido (no caso optou-se pelo valor médio do seu limite superior). Além disso, esse procedimento pode diminuir o número de iterações do processo de solução, tendo em vista que os primeiros valores obtidos para a variável  $s$ , pelo PMRG, quando novos valores das variáveis inteiras são obtidos pelo mesmo, são distantes do obtido na SOP (geralmente valores extremos).

Considera-se LE.LTM a formulação híbrida da técnica proposta com estrutura de solução *L-Shaped* tradicional no PMRG e *L-Shaped* estendida no PMRL, sendo composta por 4.24-4.33 (PED), 4.34, 4.35, 4.36, 4.40, 4.41, 4.42 (PMRG) e 4.43-4.47 (PMRL).

A versão híbrida modificada também possui 8 possibilidades de formulações quando aplicada ao modelo proposto e considera-se a possibilidade de utilização de (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31) conforme mostra a Tabela 6. Contudo

para fins de experimentos computacionais, apenas a formulação LE123.LTM23 será utilizada. O pseudocódigo de LE123.LTM23 é apresentado no Algoritmo 6.

“VHM”=modelo proposto formulado com a técnica proposta na versão híbrida modificada.

“RIPMRG”=restrições inseridas no PMRG

“RIPMRL”=restrições inseridas no PMRL

VHM	RIPMRG			RIPMRL		
LE.LTM	-	-	-	-	-	-
LE1.LTM	-	-	-	(5.1)	-	-
LE2.LTM2	-	(5.30)	-	-	(5.17)	-
LE3.LTM3	-	-	(5.31)	-	-	(5.31)
LE12.LTM2	-	(5.30)	-	(5.1)	(5.17)	-
LE13.LTM3	-	-	(5.31)	(5.1)	-	(5.31)
LE23.LTM23	-	(5.30)	(5.31)	-	(5.17)	(5.31)
LE123.LTM23	-	(5.30)	(5.31)	(5.1)	(5.17)	(5.31)

**Tabela 6 - Código dos VHM formados com as inserções de (5.1), (5.17), (5.30) e (5.31)**

**Início**

1. Ler  $P, \Omega, \tau, K$  //tamanho dos conjuntos//
2. Ler  $B^p, BA^p, CF^p, H^p$  //parâmetros de custos//
3. Ler  $D(\xi)^p, Pr(\xi)$  //parâmetros de incerteza//
4. Ler  $\beta, II, \bar{S}, TE, W^{p,r,k}$  //demais parâmetros//
5. Ler  $\epsilon, LS, LI$  // tolerância admitida e parâmetros de limite superior e inferior//
6. PMRG (4.35, 4.36, 4.37, 4.41, 4.42, 4.43, 5.1, 5.30, 5.31)
7. PMRL (4.44-4.48, 5.1, 5.17, 5.31)
8. PED (4.25-4.34)
9.  $LS \leftarrow \infty$
10. Resolver PMRL
11.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRL
12. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
  13. Fixar  $u^{r,k}; \bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  14. Fixar  $v^p; \bar{v}^p \leftarrow v^p$  //  $\bar{v}^p$  é usado na solução do PED//
  15. Enquanto  $(LS - LI > \epsilon)$  executar
    16. Resolver PED
    17. Adicionar (4.45) no PMRL
    18.  $LS \leftarrow \min[LS, \sum_p CF^p v^p + \text{VFO do PED}]$
    19. Resolver PMRL
    20.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRL;  $\bar{s} \leftarrow s$  //  $\bar{s}$  é usado na solução do PED//
  21. Fim (Enquanto)
  22.  $G^{b,r,k} \leftarrow \bar{s} \bar{u}^{r,k}$  //  $b$  é o número do corte de Benders //
  23. Adicionar (5.38) no PMRG //COL//
  24. Desafixar  $u^{r,k}$
  25. Desafixar  $v^p$
  26. Resolver PMRG // fornece apenas  $v^p$  para solução do PED//
  27.  $LI \leftarrow$  VFO do PMRG
  28.  $\bar{s} \leftarrow \max[(II - \sum_k (DK(\xi)^k \sum_r u^{r,k})), \bar{S}/2]$  // usado na solução do PED//
  29. Fim (Enquanto)
  30.  $s \leftarrow \sum_{b,r,k} G^{b,r,k} u^{r,k}$
  31. Fim

**Algoritmo 6- Pseudocódigo da formulação LE123.LTM23**

## 7

### Resultados numéricos e análises

Todas as modelagens aqui propostas foram implementadas usando o AIMMS 3.14 e resolvidas usando o CPLEX 12.6 (opção ‘yes’ em *unbounded ray*, demais configurações seguem a opção *default*). Todos os experimentos foram realizados em um notebook core i7- 4510 2.0 GHz com 8G RAM. O custo de atraso utilizado foi igual a 12 (BA=12) e considerado fixo. Os cenários da demanda foram gerados aleatoriamente, seguindo uma distribuição normal com média 50 e variância 75, sendo realizada uma simulação de demanda para cada combinação de tamanho de cenário e período (quando se varia apenas os conjuntos  $\tau$  ou  $K$ , o parâmetro da demanda não é alterado). O tempo de entrega (*lead time*) é igual a dois períodos e considerado fixo, o tempo limite de solução e a tolerância ( $\epsilon$ ) adotados são de uma hora (3600 segundos) e  $10^{-5}$ , respectivamente.

A Tabela 7 apresenta os códigos usados para os tamanhos dos conjuntos e os dados do problema para a criação de todas as instâncias que foram usadas para a validação do modelo matemático proposto e análises de desempenho, nas subseções posteriores do presente capítulo. A Tabela 8 contém os códigos que representam os tamanhos dos conjuntos das instâncias utilizadas e seus respectivos impactos no tamanho do problema.

“CF”=custo fixo

“CE”=custo de estocar

“CPV”=custo de perda de vendas

“CD”=código; “PD”= periodicidades; “VL”= valor

Cenário		Período		PD		1º Pedido		CF		CE		CPV	
CD	$ \Omega $	CD	$ P $	CD	$ R $	CD	$ K $	CD	VL	CD	VL	CD	VL
$\Omega_1$	10	P <sub>1</sub>	12	R <sub>1</sub>	10	K <sub>1</sub>	10	F <sub>1</sub>	25	H <sub>1</sub>	0.2	B <sub>1</sub>	25
$\Omega_2$	20	P <sub>2</sub>	24	R <sub>2</sub>	20	K <sub>2</sub>	20	F <sub>2</sub>	50	H <sub>2</sub>	0.4	B <sub>2</sub>	50
$\Omega_3$	30	P <sub>3</sub>	36					F <sub>3</sub>	75	H <sub>3</sub>	0.6		
$\Omega_4$	50	P <sub>4</sub>	72					F <sub>4</sub>	150				
$\Omega_5$	100	P <sub>5</sub>	90										
$\Omega_6$	250	P <sub>6</sub>	180										
$\Omega_7$	500	P <sub>7</sub>	365										

**Tabela 7 - Códigos para tamanho dos conjuntos e valores dos parâmetros de custo**

Código	Tamanho dos Conjuntos	Nº de variáveis			Nº de restrições
		Binárias	Contínuas ( $\beta = 0$ )	Contínuas ( $\beta > 0$ )	
I1	$\Omega_1 P_1 R_1 K_1$	112	601	721	854
I2	$\Omega_1 P_2 R_1 K_1$	124	1.201	1.441	1.706
I3	$\Omega_1 P_3 R_1 K_1$	136	1.801	2.161	2.558
I4	$\Omega_2 P_1 R_1 K_1$	112	1.201	1.441	1.694
I5	$\Omega_2 P_2 R_1 K_1$	124	2.401	2.881	3.386
I6	$\Omega_2 P_3 R_1 K_1$	136	3.601	4.321	5.078
I7	$\Omega_3 P_1 R_1 K_1$	112	1.801	2.161	2.534
I8	$\Omega_3 P_2 R_1 K_1$	124	3.601	4.321	5.066
I9	$\Omega_3 P_3 R_1 K_1$	136	5.401	6.481	7.598
I10	$\Omega_4 P_1 R_1 K_1$	112	3.001	3.601	4.214
I11	$\Omega_4 P_2 R_1 K_1$	124	6.001	7.201	8.426
I12	$\Omega_4 P_3 R_1 K_1$	136	9.001	10.801	12.638
I13	$\Omega_4 P_4 R_1 K_1$	172	18.001	21.601	25.274
I14	$\Omega_5 P_4 R_1 K_1$	172	36.001	43.201	50.474
I15	$\Omega_5 P_4 R_2 K_1$	272	36.001	43.201	50.474
I16	$\Omega_6 P_4 R_2 K_1$	272	90.001	108.001	126.074
I17	$\Omega_6 P_4 R_2 K_2$	472	90.001	108.001	126.074
I18	$\Omega_7 P_4 R_2 K_2$	472	180.001	216.001	252.074
I19	$\Omega_7 P_5 R_2 K_2$	490	225.001	270.001	315.092
I20	$\Omega_6 P_6 R_2 K_2$	580	225.001	270.001	315.182
I21	$\Omega_7 P_6 R_2 K_2$	580	450.001	540.001	630.182
I22	$\Omega_6 P_7 R_2 K_2$	765	456.251	547.501	639.117
I23	$\Omega_7 P_7 R_2 K_2$	765	912.501	1.095.001	1.277.867

**Tabela 8 – Códigos dos grupos de conjuntos usados no presente trabalho e seus respectivos impactos no tamanho problema**

## 7.1. Validação do modelo

No trabalho de Cunha et al. (2014), os autores compararam os resultados obtidos pelo modelo de programação estocástica de dois estágios para o sistema de gestão de estoques (R, S) proposto com o método de Hadley e Whitin (HW) em várias instâncias. Os resultados obtidos mostraram que o modelo proposto pelos autores gera resultados muito próximos do modelo de HW quando a demanda segue uma distribuição normal, e dessa forma, foi comprovado que a formulação estocástica de dois estágios é válida para modelar a política de gestão de estoque com revisão periódica (R, S) e demanda incerta. Assim, uma vez que a formulação proposta nesse presente trabalho se trata de um modelo de programação estocástica de dois estágios mais geral que aquele originalmente proposto em Cunha et al. (2014), a sua validação foi realizada através da análise da estabilidade e coerência dos resultados obtidos, quando os valores dos parâmetros acrescentados ( $\beta$  e  $II$ )

são variados junto aos principais parâmetros e conjuntos do modelo proposto nesse presente trabalho.

As instâncias utilizadas no presente trabalho foram baseadas naquelas utilizadas em Hadley e Whitin (1963), Axsäel (2006) e Cunha et al. (2014). Os resultados obtidos nas Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14 (valores obtidos da função objetivo, periodicidade, nível alvo e período para realização do primeiro pedido) são provenientes de uma única rodada de otimização para cada instância testada, e em todos os casos a solução ótima foi determinada ( $\text{gap}=0,00\%$ ), sendo mostrado na Tabela 15 o tempo de solução, em segundos, de todas as instâncias com  $B_1$ .

Observando as Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14 nota-se um valor de custo total elevado nas instâncias em que o estoque inicial é nulo. Tal fato é ainda mais evidente quando comparamos os pares de VFO, dentro de um mesmo conjunto I, em que apenas um parâmetro, o que representa o estoque inicial, é alterado de nulo para 265 unidades. Essa diferença significativa no custo total é esperada, uma vez que o tempo de entrega considerado é de dois períodos a partir da realização de cada pedido. Assim, sendo o estoque inicial igual a zero, as demandas dos dois primeiros períodos do horizonte de planejamento sempre serão totalmente perdidas ( $\beta = 0$ ), que é o caso dos resultados em análise, ou parcialmente perdidas ( $\beta > 0$ ), e no caso específico em que existe demanda em todos os períodos de cada cenário, o primeiro pedido sempre ocorrerá no primeiro período na solução ótima.

Para contornar a impossibilidade de representar o estoque inicial em seu modelo, Cunha et al. (2014) consideraram todos os parâmetros de custos (pedido, perda de vendas e estocar) iguais a zero nos seis primeiros períodos do horizonte de tempo, de forma que fosse possível formar estoque inicial e assim evitar o custo de perda de vendas nos primeiros períodos. Admitindo-se como estoque inicial o valor de 265 unidades (definido considerando a necessidade de cinco períodos em média) no presente modelo, o custo de perda de vendas dos dois primeiros períodos não ocorre, e os valores ótimos da função objetivo obtido nas instâncias com  $\beta = 0$  e  $II = 265$  são similares aos encontrados em Cunha et al. (2014). Assim sendo, fica evidente que a modelagem proposta nesse trabalho apresenta uma forma mais abrangente de considerar o estoque inicial quando aplicada em casos reais, sem a limitação do primeiro pedido sempre ocorrer obrigatoriamente no primeiro período.

“VP. Custos” = valores dos parâmetros de custo

“VFO” = Valor da função objetivo

VP. Custos			I1												I2											
			$II = 0; \beta = 0$				$II = 265; \beta = 0$				$II = 265; \beta = 0.7$				$II = 0; \beta = 0$				$II = 265; \beta = 0$				$II = 265; \beta = 0.7$			
			VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k
F <sub>1</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	2.733	231	2	1	323	231	2	3	323	231	2	3	3.038	238	2	1	648	238	2	4	645	235	2	4
		B <sub>2</sub>	5.170	231	2	1	323	231	2	3	323	231	2	3	5.451	242	2	1	652	239	2	4	648	238	2	4
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	2.878	230	2	1	520	230	2	3	519	230	2	3	3.332	227	2	1	1.008	227	2	3	984	224	2	3
		B <sub>2</sub>	5.316	231	2	1	520	231	2	3	519	230	2	3	5.776	238	2	1	1.022	238	2	4	1.007	232	2	4
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	2.972	172	1	1	716	230	2	3	704	174	1	4	3.554	177	1	1	1.290	177	1	4	1.264	177	1	4
		B <sub>2</sub>	5.421	175	1	1	718	231	2	3	716	230	2	3	6.009	183	1	1	1.331	183	1	4	1.289	180	1	4
F <sub>2</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	2.813	337	6	1	430	280	3	4	414	280	3	4	3.285	290	3	1	835	290	3	4	826	279	3	4
		B <sub>2</sub>	5.250	337	6	1	435	337	4	3	427	280	3	4	5.696	293	3	1	841	293	3	4	835	290	3	4
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.028	230	2	1	645	230	2	3	644	230	2	3	3.632	227	2	1	1.283	227	2	3	1.259	278	3	4
		B <sub>2</sub>	5.466	231	2	1	645	231	2	3	644	230	2	3	6.076	238	2	1	1.297	238	2	4	1.281	278	3	4
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.170	228	2	1	841	230	2	3	836	228	2	3	3.902	224	2	1	1.609	224	2	3	1.575	223	2	3
		B <sub>2</sub>	5.611	230	2	1	843	231	2	3	841	230	2	3	6.379	231	2	1	1.662	235	2	4	1.615	224	2	3
F <sub>3</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	2.863	337	6	1	505	280	3	4	489	280	3	4	3.478	338	4	1	1.010	290	3	4	1.001	279	3	4
		B <sub>2</sub>	5.300	337	6	1	510	337	4	3	502	280	3	4	5.896	293	3	1	1.016	293	3	4	1.010	290	3	4
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.131	331	6	1	740	280	3	4	723	280	3	4	3.918	278	3	1	1.461	279	3	4	1.434	278	3	4
		B <sub>2</sub>	5.576	337	6	1	770	231	2	3	738	280	3	4	6.370	290	3	1	1.496	290	3	4	1.456	278	3	4
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.320	228	2	1	966	230	2	3	952	272	3	4	4.202	224	2	1	1.884	224	2	3	1.850	223	2	3
		B <sub>2</sub>	5.761	230	2	1	968	231	2	3	966	230	2	3	6.679	231	2	1	1.937	235	2	4	1.887	278	3	4
F <sub>4</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.013	337	6	1	585	498	10	4	569	498	10	4	3.872	432	6	1	1.400	440	6	4	1.390	439	6	4
		B <sub>2</sub>	5.450	337	6	1	630	498	10	4	582	498	10	4	6.281	433	6	1	1.414	449	6	4	1.398	440	6	4
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.281	331	6	1	965	280	3	4	948	280	3	4	4.479	323	4	1	1.986	279	3	4	1.959	278	3	4
		B <sub>2</sub>	5.726	337	6	1	1009	280	3	4	963	280	3	4	6.957	338	4	1	2.021	290	3	4	1.981	278	3	4
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.545	328	6	1	1199	280	3	4	1.177	272	3	4	4.938	278	3	1	2.419	278	3	4	2.382	274	3	4
		B <sub>2</sub>	5.997	331	6	1	1244	280	3	4	1.197	280	3	4	7.411	279	3	1	2.486	279	3	4	2.412	278	3	4

**Tabela 9 – Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I1 e I2**

“VP. Custos” = valores dos parâmetros de custo

“VFO” = Valor da função objetivo

VP. Custos			I3												I4											
			$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$				$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$			
			VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k
F <sub>1</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.418	238	2	1	960	238	2	3	948	237	2	3	2.913	238	2	1	341	238	2	3	338	238	2	3
		B <sub>2</sub>	5.917	241	2	1	977	241	2	3	958	238	2	3	5.509	244	2	1	343	244	2	3	340	238	2	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.863	232	2	1	1.456	234	2	3	1.418	230	2	3	3.054	219	2	1	539	221	2	3	528	221	2	3
		B <sub>2</sub>	6.387	238	2	1	1.495	238	2	3	1.449	232	2	3	5.677	238	2	1	556	238	2	3	543	232	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	4.122	176	1	1	1.849	176	1	4	1.773	173	1	4	3.181	173	1	1	720	219	2	3	707	219	2	3
		B <sub>2</sub>	6.697	182	1	1	1.998	237	2	3	1.845	176	1	4	5.827	221	2	1	764	238	2	3	730	221	2	3
F <sub>2</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.795	292	3	1	1.311	289	3	3	1.284	286	3	4	2.975	338	6	1	437	338	4	3	437	338	4	3
		B <sub>2</sub>	6.289	294	3	1	1.324	293	3	3	1.310	289	3	3	5.567	339	6	1	437	339	4	3	437	338	4	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	4.313	232	2	1	1.881	234	2	3	1.843	230	2	3	3.204	219	2	1	664	221	2	3	653	221	2	3
		B <sub>2</sub>	6.837	238	2	1	1.920	238	2	3	1.874	232	2	3	5.827	238	2	1	681	238	2	3	668	232	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	4.720	226	2	1	2.345	226	2	3	2.281	225	2	3	3.333	219	2	1	845	219	2	3	832	219	2	3
		B <sub>2</sub>	7.291	237	2	1	2.423	237	2	3	2.339	230	2	3	5.977	221	2	1	889	238	2	3	855	221	2	3
F <sub>3</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	4.057	342	4	1	1.545	343	4	3	1.538	342	4	3	3.025	338	6	1	512	338	4	3	512	338	4	3
		B <sub>2</sub>	6.543	344	4	1	1.552	346	4	3	1.544	343	4	3	5.617	339	6	1	512	339	4	3	512	338	4	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	4.737	279	3	1	2.239	282	3	4	2.184	279	3	4	3.286	320	6	1	789	221	2	3	764	275	3	4
		B <sub>2</sub>	7.287	238	2	1	2.323	289	3	3	2.244	282	3	4	5.900	338	6	1	799	338	4	3	787	323	4	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	5.170	226	2	1	2.770	226	2	3	2.706	225	2	3	3.483	219	2	1	970	219	2	3	957	219	2	3
		B <sub>2</sub>	7.741	237	2	1	2.848	237	2	3	2.764	230	2	3	6.127	221	2	1	1.014	238	2	3	980	221	2	3
F <sub>4</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	4.681	442	6	1	2.134	395	5	2	2.125	393	5	3	3.175	338	6	1	633	473	10	4	599	473	9	4
		B <sub>2</sub>	7.168	444	6	1	2.139	395	5	2	2.134	395	5	2	5.767	339	6	1	665	392	5	3	634	500	9	4
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	5.605	336	4	1	3.062	339	4	3	3.009	279	3	4	3.436	320	6	1	985	467	10	4	950	467	9	4
		B <sub>2</sub>	8.114	342	4	1	3.090	343	4	3	3.056	337	4	3	6.050	338	6	1	1.024	338	4	3	1.011	372	5	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	6.240	276	3	1	3.681	279	3	4	3.610	275	3	4	3.684	319	6	1	1.252	266	3	4	1.205	266	3	4
		B <sub>2</sub>	8.852	286	3	1	3.837	286	3	4	3.686	279	3	4	6.320	323	6	1	1.311	338	4	3	1.258	275	3	4

**Tabela 10 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I3 e I4**



“VP. Custos” = valores dos parâmetros de custo

“VFO” = Valor da função objetivo

VP. Custos			I5												I6											
			$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$				$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$			
			VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k
F <sub>1</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.070	237	2	1	672	237	2	3	661	235	2	3	3.554	240	2	1	976	240	2	3	964	238	2	3
		B <sub>2</sub>	5.510	248	2	1	686	248	2	3	671	238	2	3	6.166	242	2	1	991	242	2	3	974	240	2	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.380	234	2	1	1.034	234	2	3	1.012	227	2	4	4.014	231	2	1	1.485	234	2	3	1.444	227	2	2
		B <sub>2</sub>	5.840	237	2	1	1.070	237	2	3	1.033	235	2	3	6.658	240	2	1	1.528	240	2	3	1.485	236	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.588	178	1	1	1.348	178	1	4	1.310	174	1	4	4.310	178	1	1	1.866	180	1	3	1.826	177	1	3
		B <sub>2</sub>	6.087	181	1	1	1.403	187	1	3	1.366	178	1	4	6.981	185	1	1	1.934	185	1	3	1.878	181	1	3
F <sub>2</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.297	281	3	1	879	282	3	4	846	277	3	4	3.931	286	3	1	1.313	289	3	2	1.299	284	3	2
		B <sub>2</sub>	5.734	291	3	1	893	288	3	3	880	277	3	4	6.549	297	3	1	1.324	294	3	2	1.314	290	3	2
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.680	234	2	1	1.304	275	3	4	1.267	274	3	4	4.464	231	2	1	1.910	234	2	3	1.876	230	2	3
		B <sub>2</sub>	6.140	237	2	1	1.345	237	2	3	1.305	275	3	4	7.108	240	2	1	1.953	240	2	3	1.910	236	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.968	227	2	1	1.656	227	2	4	1.601	222	2	4	4.882	229	2	1	2.378	229	2	3	2.329	226	2	3
		B <sub>2</sub>	6.452	235	2	1	1.709	235	2	3	1.655	228	2	4	7.579	237	2	1	2.469	237	2	3	2.390	230	2	3
F <sub>3</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.482	336	4	1	1.044	382	5	3	1.021	277	3	4	4.223	341	4	1	1.572	336	4	2	1.560	334	4	2
		B <sub>2</sub>	5.914	342	4	1	1.054	345	4	3	1.043	382	5	3	6.849	353	4	1	1.608	340	4	2	1.585	338	4	2
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.914	276	3	1	1.479	275	3	4	1.442	274	3	4	4.876	281	3	1	2.265	282	3	2	2.227	280	3	4
		B <sub>2</sub>	6.393	281	3	1	1.569	286	3	3	1.480	275	3	4	7.558	240	2	1	2.325	289	3	2	2.271	283	3	2
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	4.268	227	2	1	1.900	274	3	4	1.857	271	3	4	5.332	229	2	1	2.803	229	2	3	2.754	226	2	3
		B <sub>2</sub>	6.752	235	2	1	1.984	235	2	3	1.900	274	3	4	8.029	237	2	1	2.894	237	2	3	2.815	230	2	3
F <sub>4</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.862	424	6	1	1.390	475	7	4	1.352	472	7	4	4.865	444	6	1	2.164	391	5	3	2.137	434	6	3
		B <sub>2</sub>	6.296	429	6	1	1.435	386	5	3	1.383	475	7	4	7.492	451	6	1	2.212	402	5	2	2.166	436	6	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	4.497	322	4	1	2.004	275	3	4	1.967	274	3	4	5.760	330	4	1	3.076	332	4	2	3.044	328	4	2
		B <sub>2</sub>	6.964	336	4	1	2.089	382	5	3	2.005	275	3	4	8.446	341	4	1	3.144	336	4	2	3.090	332	4	2
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	4.921	274	3	1	2.425	274	3	4	2.382	271	3	4	6.393	279	3	1	3.759	279	3	4	3.660	276	3	4
		B <sub>2</sub>	7.415	276	3	1	2.536	276	3	4	2.425	274	3	4	9.113	284	3	1	3.885	283	3	2	3.750	280	3	4

Tabela 11 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I5 e I6

“VP. Custos” = valores dos parâmetros de custo

“VFO” = Valor da função objetivo

VP. Custos			I7												I8											
			$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$				$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$			
			VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k
F <sub>1</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	2.868	232	2	1	343	238	2	3	331	270	3	4	3.120	233	2	1	639	233	2	3	633	232	2	3
		B <sub>2</sub>	5.421	238	2	1	347	280	3	2	343	232	2	3	5.637	234	2	1	650	234	2	3	638	233	2	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.012	223	2	1	535	219	2	4	520	217	2	4	3.416	228	2	1	986	231	2	3	970	226	2	3
		B <sub>2</sub>	5.584	177	1	1	562	238	2	3	533	219	2	4	5.940	233	2	1	1.003	233	2	3	984	231	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.099	171	1	1	717	171	1	4	699	171	1	4	3.627	175	1	1	1.306	177	1	4	1.266	173	1	4
		B <sub>2</sub>	5.669	175	1	1	761	219	2	4	716	217	2	4	6.177	180	1	1	1.351	232	2	3	1.303	178	1	4
F <sub>2</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	2.934	329	6	1	422	272	3	4	406	270	3	4	3.387	285	3	1	880	285	3	2	854	283	3	4
		B <sub>2</sub>	5.494	330	6	1	447	280	3	2	419	272	3	4	5.913	289	3	1	892	286	3	2	878	286	3	4
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.162	223	2	1	650	270	3	4	632	269	3	4	3.716	228	2	1	1.261	231	2	3	1.245	226	2	3
		B <sub>2</sub>	5.736	232	2	1	687	238	2	3	646	270	3	4	6.240	233	2	1	1.278	233	2	3	1.259	231	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.299	221	2	1	843	217	2	4	825	216	2	4	3.988	224	2	1	1.590	224	2	3	1.561	223	2	3
		B <sub>2</sub>	5.885	223	2	1	886	219	2	4	841	217	2	4	6.539	232	2	1	1.626	232	2	3	1.592	226	2	3
F <sub>3</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	2.984	329	6	1	488	479	10	4	475	479	10	4	3.579	336	4	1	1.048	341	4	3	1.029	283	3	4
		B <sub>2</sub>	5.544	330	6	1	522	394	5	3	489	486	10	4	6.095	343	4	1	1.055	344	4	3	1.047	340	4	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.251	323	6	1	725	270	3	4	707	269	3	4	4.016	228	2	1	1.510	280	3	4	1.461	275	3	4
		B <sub>2</sub>	5.817	329	6	1	768	272	3	4	721	270	3	4	6.540	233	2	1	1.553	233	2	3	1.502	280	3	4
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.449	221	2	1	951	269	3	4	930	265	3	4	4.288	224	2	1	1.865	224	2	3	1.836	223	2	3
		B <sub>2</sub>	6.035	223	2	1	997	270	3	4	947	269	3	4	6.839	232	2	1	1.901	232	2	3	1.867	226	2	3
F <sub>4</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.134	329	6	1	563	479	10	4	550	479	10	4	4.014	430	6	1	1.408	483	7	4	1.370	475	7	4
		B <sub>2</sub>	5.694	330	6	1	600	486	10	4	564	486	10	4	6.540	393	5	1	1.451	444	6	3	1.403	483	7	4
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.401	323	6	1	931	468	10	4	919	468	10	4	4.611	323	4	1	2.035	280	3	4	1.986	275	3	4
		B <sub>2</sub>	5.967	329	6	1	975	479	10	4	939	479	10	4	7.158	336	4	1	2.096	341	4	3	2.027	280	3	4
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.659	321	6	1	1.176	269	3	4	1.155	265	3	4	5.032	273	3	1	2.461	274	3	4	2.398	271	3	4
		B <sub>2</sub>	6.238	328	6	1	1.222	270	3	4	1.172	269	3	4	7.621	283	3	1	2.573	284	3	4	2.452	275	3	4

Tabela 12 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I7 e I8

“VP. Custos” = valores dos parâmetros de custo

“VFO” = Valor da função objetivo

V.P. Custos			I9												I10											
			$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$				$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$			
			VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k
F <sub>1</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.361	235	2	1	941	230	2	4	926	227	2	4	2.826	233	2	1	338	233	2	3	335	232	2	3
		B <sub>2</sub>	5.802	238	2	1	968	238	2	3	942	230	2	4	5.346	238	2	1	345	238	2	3	338	233	2	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.788	224	2	1	1.399	224	2	4	1.366	220	2	4	2.980	231	2	1	542	232	2	3	537	230	2	3
		B <sub>2</sub>	6.273	235	2	1	1.458	230	2	4	1.403	226	2	4	5.502	233	2	1	552	233	2	3	542	232	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	4.063	171	1	1	1.802	172	1	4	1.750	171	1	4	3.095	176	1	1	744	230	2	3	734	225	2	3
		B <sub>2</sub>	6.584	180	1	1	1.896	180	1	4	1.805	175	1	4	5.627	183	1	1	756	232	2	3	743	230	2	3
F <sub>2</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.693	279	3	1	1.241	279	3	4	1.217	277	3	4	2.920	345	6	1	463	345	4	3	458	337	4	3
		B <sub>2</sub>	6.146	286	3	1	1.277	287	3	4	1.237	279	3	4	5.442	351	6	1	470	238	2	3	462	345	4	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	4.238	224	2	1	1.824	224	2	4	1.791	220	2	4	3.130	231	2	1	667	232	2	3	662	230	2	3
		B <sub>2</sub>	6.723	235	2	1	1.883	230	2	4	1.828	226	2	4	5.652	233	2	1	677	233	2	3	667	232	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	4.613	220	2	1	2.252	220	2	4	2.205	219	2	4	3.280	227	2	1	869	230	2	3	859	225	2	3
		B <sub>2</sub>	7.163	230	2	1	2.347	226	2	4	2.262	220	2	4	5.807	232	2	1	881	232	2	3	868	230	2	3
F <sub>3</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.983	330	4	1	1.516	279	3	4	1.492	277	3	4	2.970	345	6	1	526	371	5	3	510	369	5	3
		B <sub>2</sub>	6.442	334	4	1	1.550	338	4	3	1.512	279	3	4	5.492	351	6	1	541	405	5	3	523	371	5	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	4.598	275	3	1	2.138	275	3	4	2.091	270	3	4	3.246	329	6	1	792	232	2	3	780	273	3	4
		B <sub>2</sub>	7.086	279	3	1	2.208	279	3	4	2.132	275	3	4	5.791	345	6	1	802	233	2	3	792	232	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	5.063	220	2	1	2.677	220	2	4	2.630	219	2	4	3.430	227	2	1	994	230	2	3	984	225	2	3
		B <sub>2</sub>	7.613	230	2	1	2.772	226	2	4	2.687	220	2	4	5.957	232	2	1	1.006	232	2	3	993	230	2	3
F <sub>4</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	4.560	422	6	1	2.094	381	5	2	2.070	375	5	4	3.120	345	6	1	654	492	10	4	619	492	9	4
		B <sub>2</sub>	7.014	427	6	1	2.113	386	5	2	2.093	381	5	2	5.642	351	6	1	691	405	5	3	666	500	9	4
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	5.459	318	4	1	2.963	275	3	4	2.916	270	3	4	3.396	329	6	1	1.008	367	5	3	989	366	5	3
		B <sub>2</sub>	7.965	330	4	1	3.033	279	3	4	2.957	275	3	4	5.941	345	6	1	1.051	371	5	3	1.004	367	5	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	6.070	270	3	1	3.553	270	3	4	3.485	265	3	4	3.654	319	6	1	1.288	270	3	4	1.230	269	3	4
		B <sub>2</sub>	8.598	277	3	1	3.660	277	3	4	3.547	270	3	4	6.221	333	6	1	1.373	337	4	3	1.280	274	3	4

**Tabela 13 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I9 e I10**

“VP. Custos” = valores dos parâmetros de custo

“VFO” = Valor da função objetivo

VP. Custos			I11												I12											
			$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$				$II = 0 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0$				$II = 265 ; \beta = 0.7$			
			VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k	VFO	s	r	k
F <sub>1</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.141	237	2	1	671	238	2	3	661	236	2	3	3.496	234	2	1	976	237	2	3	953	230	2	3
		B <sub>2</sub>	5.651	244	2	1	686	246	2	3	673	238	2	3	6.057	242	2	1	994	242	2	3	974	237	2	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.443	229	2	1	1.026	232	2	3	1.004	228	2	3	3.920	228	2	1	1.453	229	2	3	1.414	227	2	3
		B <sub>2</sub>	5.981	237	2	1	1.057	235	2	2	1.031	233	2	3	6.542	234	2	1	1.528	237	2	3	1.450	229	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	3.628	177	1	1	1.315	177	1	4	1.276	175	1	4	4.242	176	1	1	1.892	176	1	4	1.821	175	1	4
		B <sub>2</sub>	6.173	183	1	1	1.413	182	1	4	1.321	178	1	4	6.871	184	1	1	1.965	188	1	3	1.891	178	1	4
F <sub>2</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.370	283	3	1	890	283	3	4	859	283	3	4	3.873	286	3	1	1.315	287	3	3	1.298	282	3	3
		B <sub>2</sub>	5.888	292	3	1	919	292	3	1	891	284	3	4	6.449	295	3	1	1.333	290	3	3	1.312	286	3	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	3.743	229	2	1	1.301	232	2	3	1.279	228	2	3	4.370	228	2	1	1.878	229	2	3	1.839	227	2	3
		B <sub>2</sub>	6.281	237	2	1	1.341	238	2	3	1.306	233	2	3	6.992	234	2	1	1.953	237	2	3	1.875	229	2	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	4.019	226	2	1	1.632	226	2	3	1.599	224	2	3	4.774	226	2	1	2.334	227	2	3	2.276	223	2	3
		B <sub>2</sub>	6.590	234	2	1	1.701	234	2	3	1.644	228	2	3	7.423	230	2	1	2.437	230	2	3	2.332	227	2	3
F <sub>3</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.565	335	4	1	1.065	283	3	4	1.034	283	3	4	4.127	334	4	1	1.581	335	4	1	1.548	331	4	3
		B <sub>2</sub>	6.086	338	4	1	1.104	344	4	1	1.066	284	3	4	6.712	344	4	1	1.623	346	4	2	1.578	335	4	1
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	4.006	281	3	1	1.509	281	3	4	1.471	278	3	4	4.808	277	3	1	2.267	279	3	4	2.192	275	3	4
		B <sub>2</sub>	6.540	283	3	1	1.600	284	3	1	1.510	281	3	4	7.442	234	2	1	2.330	287	3	3	2.266	279	3	4
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	4.319	226	2	1	1.907	226	2	3	1.874	224	2	3	5.224	226	2	1	2.759	227	2	3	2.701	223	2	3
		B <sub>2</sub>	6.890	234	2	1	1.976	234	2	3	1.919	228	2	3	7.873	230	2	1	2.862	230	2	3	2.757	227	2	3
F <sub>4</sub>	H <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	3.998	432	6	1	1.458	390	5	3	1.417	481	7	4	4.783	437	6	1	2.138	389	5	3	2.113	382	5	3
		B <sub>2</sub>	6.526	438	6	1	1.484	394	5	3	1.459	439	6	4	7.379	447	6	1	2.164	394	5	3	2.135	389	5	3
	H <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	4.585	328	4	1	2.034	281	3	4	1.996	278	3	4	5.633	329	4	1	3.053	326	4	3	2.988	322	4	3
		B <sub>2</sub>	7.130	335	4	1	2.129	283	3	4	2.035	281	3	4	8.253	334	4	1	3.162	335	4	1	3.051	326	4	3
	H <sub>3</sub>	B <sub>1</sub>	5.020	274	3	1	2.468	277	3	4	2.412	272	3	4	6.302	273	3	1	3.699	275	3	4	3.600	270	3	4
		B <sub>2</sub>	7.579	282	3	1	2.576	282	3	4	2.469	278	3	4	8.993	281	3	1	3.900	282	3	4	3.699	275	3	4

Tabela 14 - Valores das funções objetivos e variáveis de primeiro estágio para cada instância considerada com I11 e I12

Pode-se verificar nas Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14 que, considerando-se os valores de um mesmo grupo de conjuntos I, quando aumenta-se apenas um parâmetro de custo, o valor ótimo da função objetivo sempre aumenta. Quando se mantém todos os parâmetros de custos fixos, ao se aumentar apenas a quantidade de períodos contempla-se o aumento proporcional de VFO. Também pode-se constatar que o VFO para C3 ( $II = 265$  e  $\beta = 0.7$ ) sempre é menor ou igual ao valor de C2 ( $II = 265$  e  $\beta = 0$ ), para o mesmo grupo de conjunto I e parâmetros de custo, e as diferenças entre os valores ficam mais notáveis principalmente quando se aumenta o número de períodos e os parâmetros de custo, em especial o custo de perda de vendas. Contudo, mesmo entre as maiores diferenças de VFO observadas entre instâncias que se diferenciam apenas em C2 e C3, nenhuma é superior a 8,29% do menor valor, o que permite inferir que nas soluções ótimas com *backorder* parcial ou perda de vendas pura, grande parte da demanda é atendida em sua totalidade nos seus respectivos períodos e cenários, para os parâmetros de custos considerados.

Variando-se apenas o número de cenários, num mesmo horizonte de planejamento e mesmos conjuntos de parâmetros, pode-se verificar nas Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14 que os valores de periodicidade obtidos na solução ótima apresentam variabilidades significativas em algumas instâncias do menor horizonte de tempo (12 períodos), mas, no geral, têm baixa variabilidade, principalmente quando se aumenta o número de períodos. Isso também pode ser observado no caso específico exposto na Tabela 16 que mostra os valores obtidos para  $r$  e  $k$ , nas Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14, para  $H_1 B_1 R_1 K_1$  fixos e variando-se os demais parâmetros e conjuntos. Destacando os casos de conjunto de valores com maior variabilidade de periodicidade observados na Tabela 16, verifica-se que os mesmos têm horizonte de tempo de 12 períodos e parâmetros C2F<sub>3</sub> e C3F<sub>3</sub>, apresentando uma solução com valores de periodicidade significativamente maior que as demais ( $r = 10$ ), além disso todas as soluções são diferentes entre si. Nesses casos, a diferença entre o maior e menor valor de VFO é de 7,03% e 7,23% do maior valor de C2F<sub>3</sub> e C3F<sub>3</sub> e 7,58% e 7,79% do menor valor de C2F<sub>3</sub> e C3F<sub>3</sub>, respectivamente, sendo o menor valor, em ambos os casos, justamente o de maior valor de periodicidade, ou seja, o de  $r = 10$ . Além disso, pode-se verificar que o valor da variável  $s$  cresce junto com o tamanho da periodicidade  $r$  não apenas nesses casos

em específico, mas em todos os demais que se pode verificar nas Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14.

Considerando-se o valor de 265 para o estoque inicial, que atende em média 5 períodos de demanda, e sendo o *lead time* igual a dois períodos, espera-se que na solução ótima o primeiro pedido seja, na grande maioria dos casos, no período igual ou inferior a 4, sendo 3 e 4 as soluções de maior frequência. Analisando as Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14 ou mais diretamente o exemplo da Tabela 16, verifica-se que nenhuma solução tem  $k$  igual ou maior que 5 e as soluções mais frequentes para o primeiro pedido são o 4º e 3º períodos. Também se observa que sempre que o estoque inicial é igual a zero o primeiro pedido sempre ocorre no primeiro período, o que era de se esperar, quando se leva em consideração o alto custo de perda de vendas em relação aos demais custos no problema e principalmente, o fato de sempre haver demanda em todos os períodos do horizonte de planejamento.

Os valores do nível alvo  $s$  verificados nas Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14 crescem com o aumento do custo fixo de pedido e com o decréscimo do custo de estocar quando fixamos os demais parâmetros e conjuntos. Mantendo-se todos os parâmetros de custos e conjuntos fixos e variando apenas  $\beta$  verifica-se poucas variabilidades nos valores de  $r$  obtidos nas instâncias testadas, com exceção em alguns casos como o de horizonte de planejamento igual 12 períodos, onde variabilidades mais significativas podem ser encontradas, mas que conforme analisado anteriormente, não causam grande impacto no valor de VFO.

Analisando os tempos de solução contidos na Tabela 15 para cada instância considerada, podemos verificar que o tempo de solução médio cresce quando, em um mesmo grupo de conjuntos I, altera-se os parâmetros II e  $\beta$ . O aumento ocorre quando se têm estoque inicial e quando  $\beta > 0$ , uma vez que para valores de  $\beta$  diferentes de zero o número de variáveis contínuas é maior, como mostra a Tabela 8, o que acaba por tornar o modelo proposto mais difícil de se resolver. Conforme aumenta-se o total dos cenários e períodos, observa-se o crescimento no tempo médio de solução, sendo o crescimento do horizonte de planejamento o fator de maior impacto. Isso pode ser observado, por exemplo, analisando os tempos médios de solução de I3C3 (2.16 segundos) que considera 10 cenários e 36 períodos e I10C3(1.76 segundos) com 50 cenários e 12 períodos.

“C1” = ( $II = 0$  e  $\beta = 0$ )

“C2” = ( $II = 265$  e  $\beta = 0$ )

“C3” = ( $II = 265$  e  $\beta = 0.7$ )

“Sab” = Simulação com  $F_a H_b B_1$

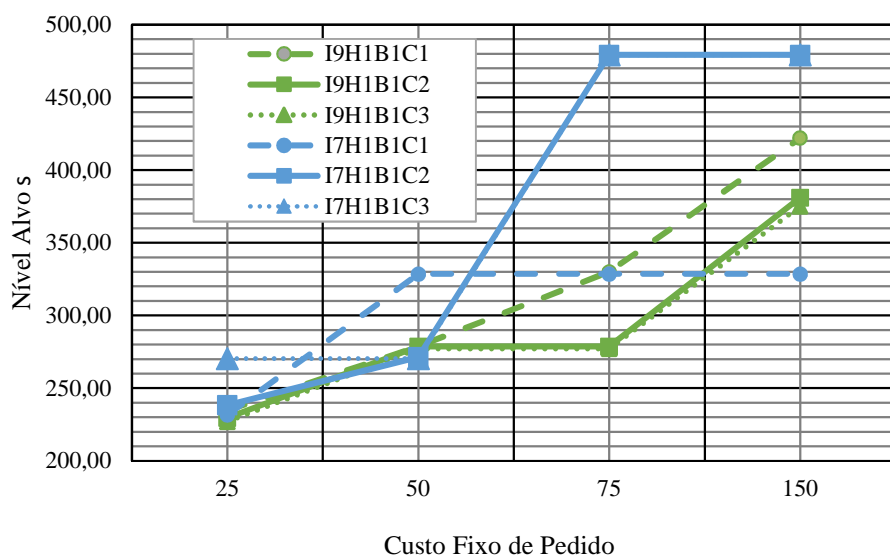
“MD” = Média

		S11	S12	S13	S21	S22	S23	S31	S32	S33	S41	S42	S43	MD
I1	C1	0.14	0.12	0.11	0.11	0.15	0.14	0.12	0.12	0.14	0.10	0.12	0.11	0.12
	C2	0.17	0.19	0.14	0.22	0.18	0.14	0.19	0.15	0.20	0.25	0.27	0.18	0.19
	C3	0.24	0.24	0.25	0.30	0.26	0.25	0.26	0.21	0.24	0.18	0.20	0.25	0.24
I2	C1	0.40	0.28	0.35	0.43	0.40	0.37	0.47	0.45	0.40	0.49	0.59	0.48	0.43
	C2	0.75	0.56	0.44	0.81	0.78	0.73	0.80	0.74	0.64	0.96	0.90	0.75	0.74
	C3	0.81	0.82	0.74	0.95	0.89	0.83	0.99	0.79	0.84	1.03	1.28	0.99	0.91
I3	C1	0.80	0.66	0.69	1.05	0.83	0.69	0.92	0.87	0.80	0.98	1.07	1.08	0.87
	C2	1.52	1.29	1.17	1.61	1.78	1.56	1.75	1.68	1.44	1.98	2.27	2.04	1.67
	C3	2.04	2.01	1.48	2.20	2.14	1.80	2.33	2.33	2.40	2.40	2.61	2.23	2.16
I4	C1	0.23	0.22	0.27	0.21	0.25	0.29	0.25	0.31	0.28	0.22	0.26	0.21	0.25
	C2	0.39	0.35	0.31	0.45	0.36	0.37	0.49	0.57	0.40	0.53	0.45	0.51	0.43
	C3	0.48	0.40	0.31	0.45	0.48	0.53	0.69	0.64	0.58	0.54	0.51	0.55	0.51
I5	C1	1.14	0.87	0.88	1.04	0.99	1.05	1.16	1.04	1.29	1.36	1.27	1.17	1.11
	C2	1.53	1.77	1.36	2.00	2.06	1.89	2.40	2.15	1.59	2.33	2.42	2.06	1.96
	C3	2.12	2.17	2.36	2.26	2.01	1.98	2.11	2.07	2.08	2.72	2.70	2.56	2.26
I6	C1	1.97	1.76	1.77	2.38	1.98	1.87	2.59	2.25	1.94	2.59	2.76	2.85	2.23
	C2	3.34	3.56	3.05	4.43	4.43	3.67	4.94	4.98	5.21	4.36	5.12	4.98	4.34
	C3	4.63	3.84	3.68	5.67	4.72	5.38	5.12	5.03	5.18	6.29	6.41	6.90	5.24
I7	C1	0.41	0.36	0.33	0.35	0.45	0.42	0.35	0.42	0.41	0.34	0.45	0.54	0.40
	C2	0.67	0.61	0.50	0.99	0.63	0.64	0.80	0.51	0.72	0.64	1.12	0.74	0.71
	C3	0.67	0.89	0.75	1.03	0.67	0.78	0.69	0.65	0.69	0.77	0.91	0.83	0.78
I8	C1	1.68	1.42	1.33	2.02	1.97	1.60	2.18	2.03	1.94	1.88	2.29	2.63	1.91
	C2	3.45	2.96	2.22	3.19	2.64	3.01	4.08	3.75	2.80	4.41	3.78	3.07	3.28
	C3	3.47	3.11	3.31	4.57	4.09	3.71	4.87	5.03	3.70	4.99	5.41	5.74	4.33
I9	C1	3.30	3.65	2.65	4.38	3.72	3.40	4.66	3.91	3.78	4.52	4.68	4.39	3.92
	C2	9.67	7.34	5.07	8.24	6.68	6.36	8.15	7.86	5.97	9.48	8.37	8.42	7.63
	C3	8.53	8.86	6.03	10.70	11.06	8.10	12.54	10.99	9.83	11.30	13.05	13.19	10.35
I10	C1	0.83	0.79	0.75	0.63	0.84	0.80	0.89	0.72	0.85	0.67	0.70	0.60	0.76
	C2	1.21	1.15	1.03	1.74	1.20	1.21	1.91	1.98	1.47	2.02	2.18	1.86	1.58
	C3	1.91	1.57	1.43	2.10	1.69	1.81	1.67	2.08	1.74	1.68	1.66	1.78	1.76
I11	C1	3.41	2.71	3.27	4.20	3.79	3.82	4.22	4.29	3.53	4.10	5.20	4.68	3.94
	C2	6.61	5.90	4.84	8.03	6.05	6.53	8.00	6.20	5.69	8.06	8.20	6.07	6.68
	C3	6.25	6.69	5.68	9.12	7.87	7.05	9.25	8.52	9.80	12.40	10.49	9.04	8.51
I12	C1	7.11	5.40	5.52	8.75	7.28	6.92	10.30	7.99	6.37	8.39	10.23	9.55	7.82
	C2	14.38	13.19	10.17	16.89	15.05	13.97	17.95	18.51	14.04	20.67	20.68	16.83	16.03
	C3	19.37	15.35	14.79	21.26	19.13	18.29	23.37	21.41	22.58	28.01	24.13	24.65	21.03

**Tabela 15 - Tempo de solução em segundos das instâncias das Tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14 com  $B_1$**

As Figuras 11, 12 e 13 mostram comportamento do nível alvo  $s$  em algumas séries específicas. A Figura 11 mostra o comportamento do nível alvo  $s$  conforme se varia o valor fixo de pedido para casos com 36 e 12 períodos com C1, C2 e C3 e demais parâmetros e conjuntos fixos. Nesta, pode-se observar que o valor do nível alvo  $s$  sempre cresce ou se mantém quando ocorre aumento no custo fixo de pedido, além disso, pode-se notar que os valores de  $s$  apresentam uma variabilidade maior,

no mesmo horizonte de tempo, entre a série com C1 e as séries com C2 e C3, principalmente nas séries com 12 períodos, onde altos valores são observados nos maiores custos fixos de pedido, fato que está de acordo com os valores de periodicidade que podem ser observados, considerando C2 e C3 com  $F_3$  e  $F_4$ , na Tabela 16. O crescimento ou manutenção do valor de  $s$  também ocorre com o decréscimo do custo de estoque, como pode ser observado na Figura 12 que mostra a sensibilidade do nível alvo para diferentes valores de custo de estoque em diferentes tamanhos de cenários e custos de atraso. Ainda na Figura 12, também podemos notar que os valores do nível alvo  $s$  sempre são maiores na série com  $B_2$ , para cada valor de custo de estoque, quando comparamos duas séries diferenciadas apenas no custo de perda. Isso era esperado, pois aumentando-se o valor do custo de perda de vendas, para se minimizar gasto total, aumenta-se o gasto de estocar e diminui-se o gasto com perdas.

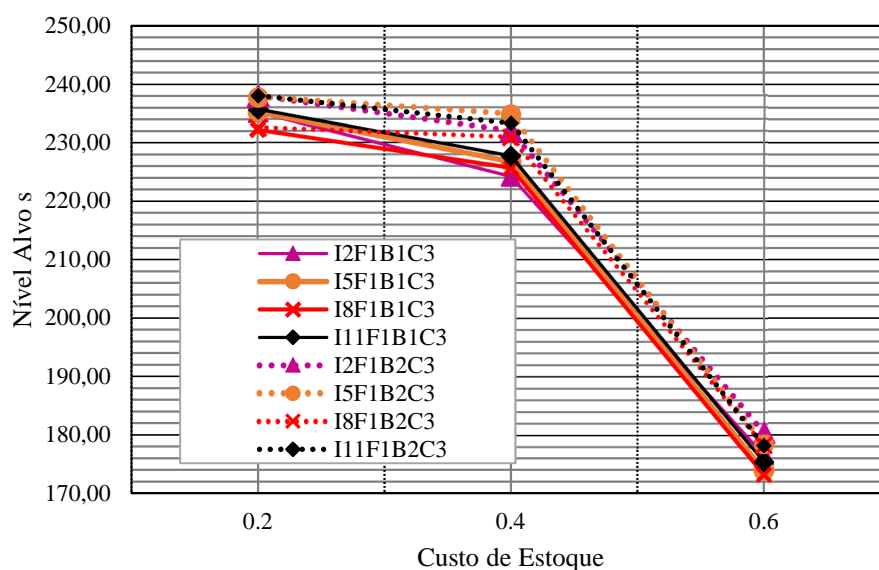


**Figura 11 - Sensibilidade do nível alvo  $s$  com o custo fixo de pedido em diferentes períodos e C1, C2 e C3**

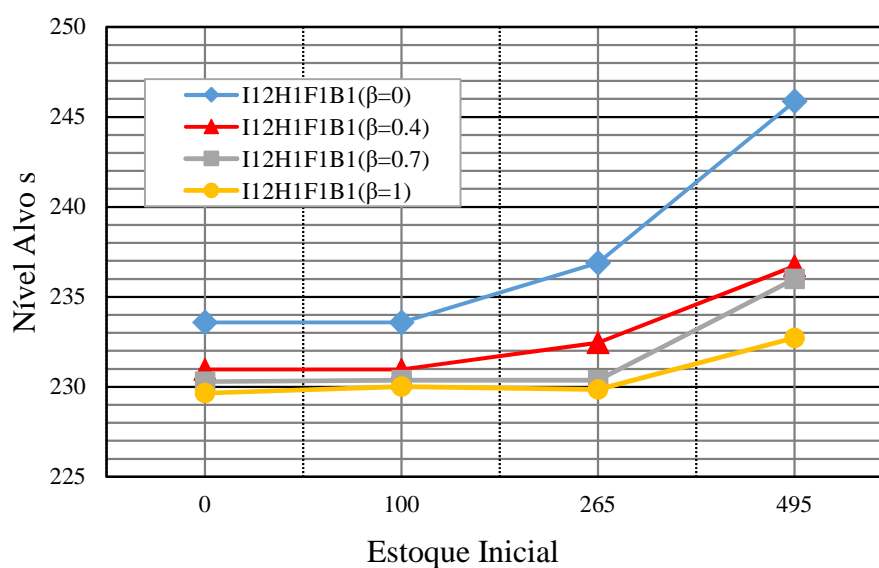


Períodos		12				24				36				12				24				36				
Cenários		10	20	30	50	10	20	30	50	10	20	30	50	10	20	30	50	10	20	30	50	10	20	30	50	
Parâmetros		Valores de r												Valores de k												
C1	F <sub>1</sub>	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	F <sub>2</sub>	6	6	6	6	3	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	F <sub>3</sub>	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	F <sub>4</sub>	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C2	F <sub>1</sub>	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	4	3
	F <sub>2</sub>	3	4	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	4	3	4	4	2	4	3	3	2	4	3
	F <sub>3</sub>	3	4	10	5	3	5	4	3	4	4	3	4	4	3	4	3	4	3	3	4	3	3	2	4	1
	F <sub>4</sub>	10	10	10	10	6	7	7	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	2	3	2	3	3
C3	F <sub>1</sub>	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	3	4	3	3	3	3	3	3	4	3
	F <sub>2</sub>	3	4	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	4	3	4	4	4	4	4	4	2	4	3
	F <sub>3</sub>	3	4	10	5	3	3	3	3	4	4	3	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4	3	2	4	3
	F <sub>4</sub>	10	9	10	9	6	7	7	7	5	6	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	4	3

Tabela 16 - Valores obtidos para r e k considerando H<sub>1</sub>B<sub>1</sub>R<sub>1</sub>K<sub>1</sub>



**Figura 12 - Sensibilidade do nível alvo  $s$  com o custo de estoque em diferentes cenários e custos de atraso**

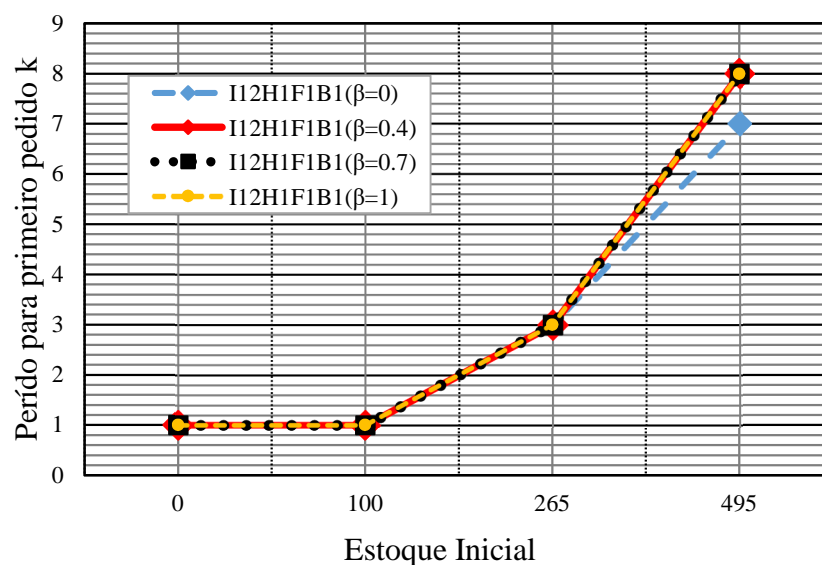


**Figura 13 - Sensibilidade do nível alvo  $s$  com o estoque inicial e diferentes valores de  $\beta$**

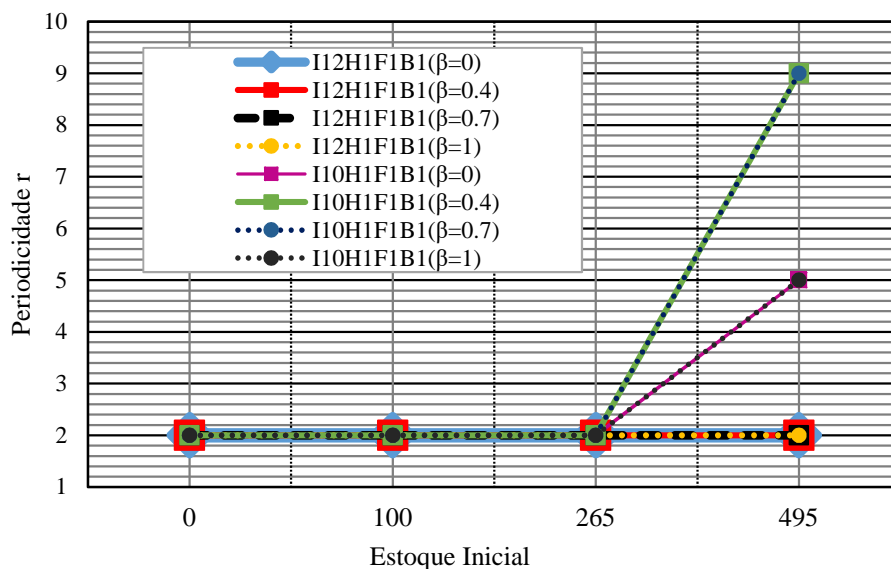
A Figura 13 fornece o comportamento do nível alvo  $s$  quando se varia a quantidade de estoque inicial para diferentes valores de  $\beta$  na série I12F1B1 em que os valores obtidos para periodicidade têm pouca variação. Nessa Figura, pode-se observar que o menor e maior valores obtidos para o nível alvo são 229,65 ( $\beta = 1$ ;  $II = 0$ ) e 245,87 ( $\beta = 0$ ;  $II = 495$ ), o que representa uma variação de 6,60% do menor valor, ou seja, pode-se constatar que o valor do estoque inicial tem impacto modesto no valor do nível alvo. Como previsto, quando se considera o

equilíbrio entre os custos de estocar, atraso e perda de vendas na minimização do custo total, também se verifica que para um mesmo valor de estoque inicial o valor de  $s$  sempre diminui ou não se altera conforme o valor de  $\beta$  aumenta. O maior impacto do valor do estoque inicial ocorre na determinação do período para o primeiro pedido, onde  $k$  aumenta ou se mantém conforme  $II$  cresce, como pode ser visto na Figura 14, a qual mostra o comportamento de  $k$ , na série I12F1B1, com diferentes valores de  $\beta$ , quando o valor de  $II$  varia. Outro ponto a se observar é que o valor de  $k$  se mantém ou aumenta conforme  $\beta$  cresce.

Analisando a Figura 15, a qual mostra o comportamento da periodicidade  $r$  das séries I12F1B1 e I10F1B1 quando se varia o estoque inicial para diferentes valores de  $\beta$ , pode-se verificar que a variação de  $\beta$  e  $II$  não tem influência significativa quando se considera um horizonte de planejamento mais longo. Em contrapartida, ambos podem influenciar o valor de  $r$  de forma mais evidente para um horizonte de tempo mais curto.



**Figura 14 - Sensibilidade do período para primeiro pedido  $k$  com o estoque inicial e diferentes valores de  $\beta$**



**Figura 15 - Sensibilidade da periodicidade  $r$  com o estoque inicial com diferentes valores de  $\beta$**

Com base nas análises supracitadas, pode-se constatar que o modelo proposto apresenta soluções coerentes quando se varia os valores dos parâmetros e conjuntos do sistema nas instâncias consideradas. Também pode-se inferir que o modelo apresenta menor variabilidade nos valores das variáveis de primeiro estágio, conforme aumenta-se o tamanho do horizonte planejamento. Assim, pode-se concluir que o modelo proposto é estável e consistente.

## 7.2. Análise de desempenho computacional das formulações *L-Shaped* do MP

Os tempos de solução em segundos obtidos com a aplicação dos métodos SLS e MLS no modelo proposto, para as instâncias com  $F_1H_1B_1$ ,  $II = 265$ ,  $\beta = 0,7$  e os grupos de conjuntos de I12-I19 da Tabela 8, podem ser verificados nas Tabelas 17 e 18 com os cortes de viabilidade no formato SLS em ambos os métodos, na primeira, e no formato MLS também em ambos os métodos, na segunda. As Tabelas 17 e 18 também fornecem as quantidades de cortes de otimalidade e viabilidade necessários para se atingir a convergência à solução ótima e o *gap* de otimalidade ao fim do processo de solução de cada um dos métodos. Os resultados obtidos nas Tabelas 17 e 18 são provenientes de uma única rodada de otimização dos métodos *L-Shaped* aplicados ao modelo proposto, para cada instância considerada.

Analisando as Tabelas 17 e 18, pode-se verificar em ambas que o modelo equivalente determinístico completo (MEDC), em relação à formulação SLS, tem melhor desempenho de CPU apenas em  $I_{12}$ , que se trata da instância de menor escala. A partir de  $I_{13}$  em diante, o método SLS passa a apresentar o menor tempo de solução para cada instância, chegando a ser 8,5 vezes mais rápido que o MEDC e 18,8 vezes mais rápido que o método MLS em  $I_{17}$  na Tabela 17, e com uma velocidade superior a 19,3 vezes a velocidade do método MLS em  $I_{17}$  na Tabela 18. A partir de  $I_{18}$ , apenas o método SLS foi capaz de obter a solução ótima dentro do limite de uma hora, sendo que o método MLS começa a ultrapassar o limite de tempo adotado em  $I_{18}$  com cortes de viabilidade no formato *single-cut* (VFS) na Tabela 17 e em  $I_{17}$  no formato *multi-cut* (VFM) na Tabela 18 e o MEDC ultrapassa o limite a partir de  $I_{18}$ . Além disso, é importante ressaltar que para o problema em questão e instâncias testadas, observou-se ser mais eficiente resolver o equivalente determinístico do que utilizar o método MLS.

Com base nos resultados das Tabelas 17 e 18 pode-se constatar, nos presentes casos, que os métodos SLS e MLS ambos com cortes VFM convergiram com números de cortes de viabilidade significativamente menores que suas respectivas versões com cortes de VFS. Entretanto, quando foram utilizados cortes de VFM, a quantidade de cortes ótimos para convergência do problema aumentou em relação aos métodos com cortes de VFS. Dessa forma, apesar do número total de cortes para convergência à solução ótima, em ambos os métodos *L-Shaped* com cortes de VFM, diminuírem em todas as instâncias testadas, a redução dos cortes totais ocorreu em proporção menor que a redução da quantidade cortes viáveis, devido ao aumento relevante do número de cortes de otimalidade, quando comparamos os métodos com cortes de VFS. No geral, os métodos com cortes de VFM da Tabela 18 possuem desempenho ligeiramente melhor que aqueles com cortes de VFS da Tabela 17 nas instâncias de menores escalas, contudo, ao passo que as escalas das instâncias crescem, as formulações apresentadas na Tabela 17 com cortes de VFS são consideravelmente mais rápidas que aquelas apresentadas Tabela 18.

Considerando-se os casos apresentados nas Tabelas 17 e 18, observa-se que, de maneira geral, os resultados da Tabela 18 com cortes de VFM, em ambos os métodos, são melhores que os das Tabelas 17 com cortes de VFS nas instâncias de menores escalas, contudo conforme aumenta-se os tamanhos dos conjuntos,

principalmente o horizonte de planejamento, os métodos SLS e MLS com cortes de VFS passam a apresentar desempenho significativamente melhor. Assim, pode-se inferir que para os casos de grandes escalas, utilizar o corte de VFS é a melhor estratégia em ambos os métodos *L-Shaped*, especialmente para instâncias a partir de  $I_{18}$  e  $I_{15}$  para os métodos SLS e MLS respectivamente.

Observando os resultados das Tabelas 17 e 18 pode-se inferir que, para o modelo proposto, o método SLS é mais eficiente que o método MLS, apresentando performance significativamente superior, fato que se torna mais evidente conforme as instâncias crescem em escala. Mesmo o método SLS necessitando, em todas as instâncias, de mais iterações para convergir na solução ótima do que método MLS. Como ambos os métodos possuem o mesmo problema escravo, pode-se afirmar que as soluções médias por iteração do problema escravo em cada método possuem valores próximos. Assim, considerando-se o fato do método SLS apresentar tempos de soluções notavelmente menores que o método MLS, mesmo o método SLS necessitando de mais iterações para convergir, pode-se inferir que acrescentar múltiplos cortes de Benders ao problema mestre aumenta exponencialmente a sua dificuldade de solução para o caso em questão. Isso também pode ser comprovado ao se analisar as Figuras 16 e 17 que mostram o tempo cumulativo de solução do PMR conforme as iterações ocorrem e o tempo de solução do PMR em cada iteração, respectivamente, e ambas considerando o processo de solução da série  $I13H1F1B1C3$  com os métodos MLS e SLS com cortes de VFS.

Analizando a Figura 16 e a Tabela 17, pode-se observar que o tempo de solução total do PMR usando o método MLS equivale a 93,4% do seu tempo total de solução. Também se verifica, ao analisar a Figura 17, que conforme o método progride no processo iterativo, o tempo de solução do PMR usando o método MLS aumenta significativamente quando comparado à quando se usa o método SLS, que tem aumento relativo desprezível.

Contudo, como já supracitado, existem técnicas de aceleração na literatura, que quando combinadas com os métodos SLS e MLS, podem melhorar significativamente o desempenho do tempo de solução. Além disso, o fato do método MLS apresentar sempre menores quantidades de iterações, foi um dos indicadores da possibilidade de desenvolvimento de um método híbrido que fosse capaz de aproveitar o menor tempo de solução do PMR no método SLS e a menor quantidade de iterações para convergência na solução ótima do método MLS.

TC	MEDC	Método <i>L-Shaped</i> Tradicional					Método <i>L-Shaped</i> Estendido				
	CPU [s]	CPU [s]	QO	QV	NTC	GAP	CPU [s]	QO	QV	NTC	GAP
I <sub>12</sub>	17.41	26.77	139	50	189	0,00%	175.53	113	42	155	0,00%
I <sub>13</sub>	51.21	34.49	137	47	184	0,00%	226.38	121	49	170	0,00%
I <sub>14</sub>	220.85	59.23	136	54	190	0,00%	454.73	119	46	165	0,00%
I <sub>15</sub>	188.86	81.46	190	41	231	0,00%	805.69	125	59	184	0,00%
I <sub>16</sub>	1834.04	173.19	199	47	246	0,00%	2132.75	123	42	165	0,00%
I <sub>17</sub>	1563.52	184.21	198	43	241	0,00%	3457.92	137	34	171	0,00%
I <sub>18</sub>	>TL	323.61	192	52	244	0,00%	>TL	100	28	128	62,05%
I <sub>19</sub>	>TL	678.77	321	29	350	0,00%	>TL	65	15	80	91,85%

“TC” = tamanho dos conjuntos

“CPU” = tempo de solução em segundos

“QO” = quantidades de cortes ótimos inseridos no PMR

“QV” = quantidades de cortes de viabilidade inseridos no PMR

**Tabela 17 - Efeitos no tempo de solução do MP com aplicação dos métodos SLS e MLS com cortes de VFS**

TC	MEDC	Método <i>L-Shaped</i> Tradicional					Método <i>L-Shaped</i> Estendido				
	CPU [s]	CPU [s]	QO	QV	NTC	GAP	CPU [s]	QO	QV	NTC	GAP
I <sub>12</sub>	17.41	25.19	164	7	171	0,00%	203.66	134	7	141	0,00%
I <sub>13</sub>	51.21	30.07	157	7	164	0,00%	214.24	133	8	141	0,00%
I <sub>14</sub>	220.85	52.54	163	7	170	0,00%	402.1	122	7	129	0,00%
I <sub>15</sub>	188.86	79.23	213	7	220	0,00%	892.12	152	7	159	0,00%
I <sub>16</sub>	1834.04	155.22	209	7	216	0,00%	2521.59	143	8	151	0,00%
I <sub>17</sub>	1563.52	186.18	215	7	222	0,00%	>TL	107	6	113	83,45%
I <sub>18</sub>	>TL	391.22	230	7	237	0,00%	>TL	78	6	84	90,32%
I <sub>19</sub>	>TL	982.48	334	8	342	0,00%	>TL	71	8	79	91,66%

“NTC” = número total de cortes ou iterações

“MEDC”=modelo equivalente determinístico completo

“GAP” =  $(LS - LI) \times 100 / LS$

“TL”= tempo limite (3600 s)

**Tabela 18 - Efeitos no tempo de solução do MP com aplicação das técnicas SLS e MLS com cortes de VFM**

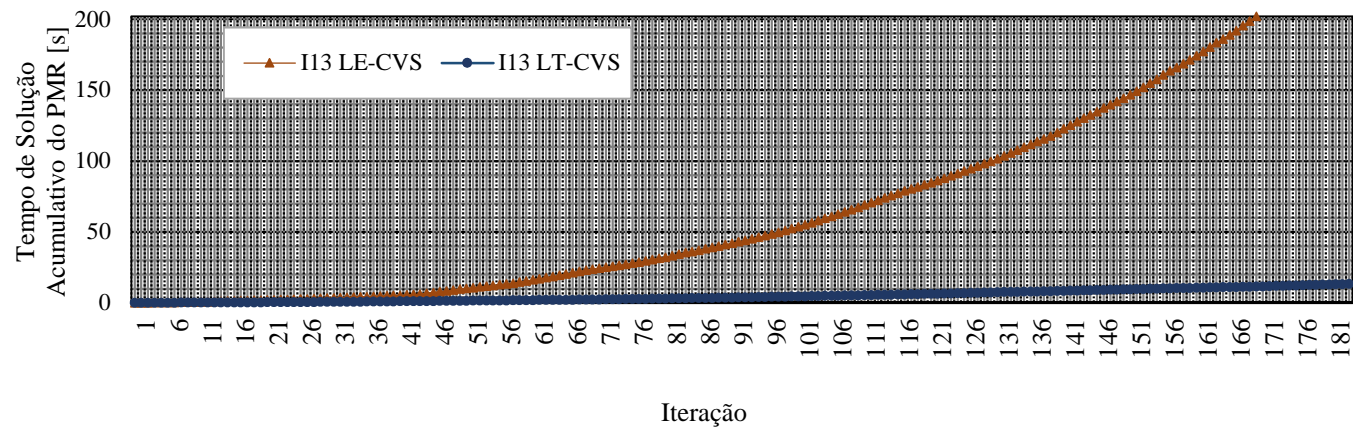


Figura 16 - Tempo de solução cumulativo do PMR da série I13H1F1B1C3

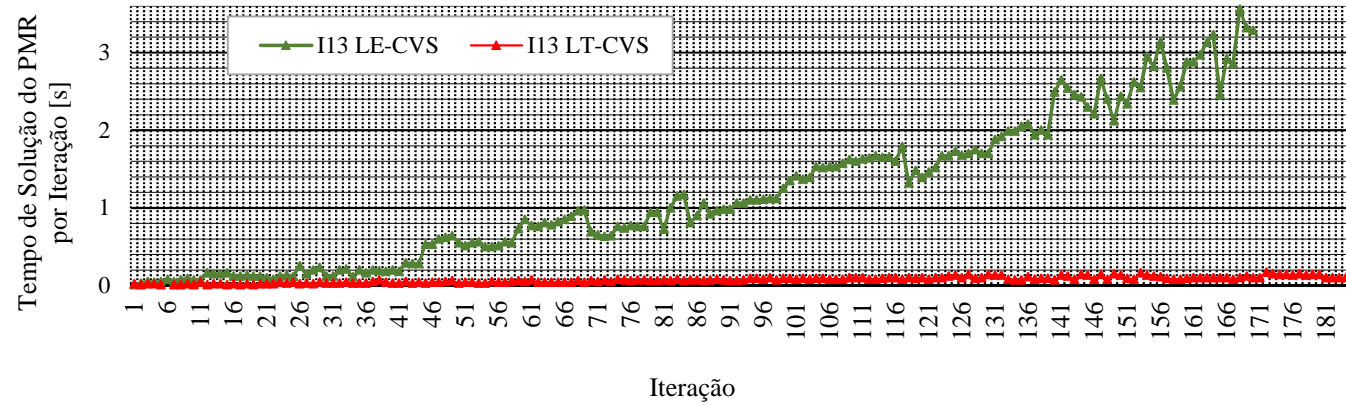


Figura 17 - Tempo de solução do PMR em cada iteração do processo de solução da série I13H1F1B1C3



### 7.3.

#### **Análise de desempenho computacional utilizando-se as desigualdades válidas nas formulações SLS e MLS do modelo proposto**

Considerando-se as instâncias com  $F_1H_1B_1$ , custo de atraso igual a 12 ( $BA = 12$ ),  $II = 250$ ,  $\beta = 0.7$  e os grupos de conjuntos de I12-I19 da Tabela 7, as Tabelas 19 e 20 mostram os efeitos da utilização das desigualdades válidas, quando inseridas nos PMR do modelo proposto na formulação SLS ou *L-Shaped* tradicional e no modelo proposto na formulação MLS ou *L-Shaped* estendido, respectivamente, e ambos com CVS. Os resultados obtidos nas Tabelas 19 e 20 são provenientes de uma única rodada de otimização para cada instância considerada e foram utilizados os mesmos cenários de demanda da seção 6.2.

Analisando-se as Tabelas 19 e 20, ao compararmos os pares de métodos que se diferenciam apenas por usar e não usar a desigualdade (5.1), por exemplo, LT e LT1 ou LE3 e LE13, pode-se constatar que a desigualdade (5.1) apesar de eliminar a necessidade de cortes de viabilidade quando utilizada, no geral aumenta de forma significativa a quantidade de cortes de otimalidade em alguns problemas da Tabela 3, que, inclusive, chega a apresentar um número maior de cortes totais, em alguns casos.

Ainda, considerando-se os resultados das Tabelas 19 e 20 e comparando os pares de métodos que se diferenciam apenas por usar ou não a desigualdade (5.1), observa-se que nos casos em que as formulações da Tabela 3 que utilizam (5.1) e apresentam melhor desempenho de tempo de solução, a redução de tempo de solução é pouco relevante. No entanto, a medida que os modelos crescem em escala, podemos constatar que a presença de (5.1) nas formulações SLS e MLS piora notavelmente o desempenho, com exceção das formulações LT123 e LE123. Quando as desigualdades (5.17) e (5.30) estão presentes em SLS e MLS, respectivamente, pode-se verificar desempenhos mais próximo, salvo a exceção de LE2 e LE12 em I<sub>19</sub> na Tabela 20, onde LE12 tem tempo de solução significativamente melhor.

Quando se compara os pares supracitados, pode-se verificar que mesmo em casos onde o número total de cortes do método sem utilizar (5.1) é significativamente maior, na maioria das vezes, os métodos sem (5.1) nas instâncias de maior porte apresentam tempo de solução significativamente menor, como, por

exemplo, LT com 350 (29 de viabilidade) cortes e LT1 com 337 cortes em  $I_{19}$  na Tabela 19 e LE com 184 (59 de viabilidade) cortes e LE1 com 181 cortes em  $I_{15}$  na Tabela 20.

Assim, analisando-se os resultados obtidos das instâncias consideradas nas Tabelas 19 e 20, pode-se inferir que, no geral, gerar cortes viáveis é menos oneroso em termos de tempo computacional para o processo de solução do que gerar apenas cortes ótimos usando (5.1).

Observando-se os resultados das Tabelas 19 e 20, verifica-se que a inserção de (5.17) e (5.31) na abordagem MLS e (5.30) e (5.31) para a abordagem SLS melhoram a eficiência dos métodos. Isso fica notável quando se compara LT com LT2 e LT3 e LE com LE2 e LE3, sendo a desigualdade válida de limite inferior substancialmente mais eficiente. Além disso, pode-se notar, ao observar-se todos os modelos que contém (5.17) ou (5.30), ou seja, LT2, LT23, LT123, LE2, LE23 e LE123, que o aumento do conjunto periodicidade de 10 para 20 ( $I_{14}$  para  $I_{15}$ ) e o aumento do conjunto dos períodos para o primeiro pedido de 10 para 20 ( $I_{16}$  para  $I_{17}$ ) não impactam significativamente no tempo de solução, podendo-se inclusive verificar-se em alguns casos pequenas reduções no tempo quando ocorre o aumento de algum desses conjuntos.

Os resultados das Tabelas 19 e 20 mostram que o uso de desigualdades válidas pode melhorar significativamente o processo de solução dos métodos SLS e MLS, principalmente as desigualdades válidas de limite inferior (5.17) e (5.30) que aproveitam a estrutura da decomposição Benders, reduzindo drasticamente o número de iterações para convergência à solução ótima e, conseqüentemente, o tempo de solução. As formulações MLS apresentam melhora substancial de desempenho computacional com a introdução da desigualdade válida (5.17), exibindo desempenho significativamente superior às formulações MLS sem (5.17), passando a serem notavelmente melhores do que resolver o modelo equivalente determinístico a partir de  $I_{14}$ . Contudo, quando comparamos as formulações MLS e SLS com as mesmas desigualdades válidas, as SLS, mesmo necessitando de mais iterações para obterem a solução ótima, apresentam performance substancialmente superior em relação ao tempo de solução.

“TC” = tamanho dos conjuntos;

“CPU” = tempo de solução em segundos

“CO” = quantidades de cortes ótimos inseridos no PMR

“MPFSLS” = modelo proposto com formulação *single-cut L-Shaped*

“QV” = quantidades de cortes viáveis inseridos no PMR (ou quantidade de iterações em que uma solução infinita foi obtida pelo PED)

	TC	LT	LT1	LT2	LT3	LT12	LT13	LT23	LT123
I <sub>12</sub>	CPU	26.77	26.29	10.18	20.32	9.59	18.31	5.83	5.53
	QV/QO	139/50	166/0	57/20	112/37	64/0	127/0	38/11	44/0
I <sub>13</sub>	CPU	34.49	42.60	22.57	34.00	20.28	29.95	12.89	10.86
	QV/QO	137/47	177/0	66/20	128/33	75/0	142/0	47/14	51/0
I <sub>14</sub>	CPU	59.23	72.36	24.88	57.88	26.29	48.28	15.41	14.69
	QV/QO	136/54	171/0	51/18	127/36	64/0	136/0	36/10	43/0
I <sub>15</sub>	CPU	81.46	131.94	25.32	88.93	27.06	89.85	15.44	15.6
	QV/QO	190/41	251/0	51/18	186/33	64/0	199/0	36/10	43/0
I <sub>16</sub>	CPU	173.19	254.21	64.38	174.69	59.87	186.66	42.73	39.52
	QV/QO	199/47	261/0	61/22	191/33	70/0	208/0	44/13	49/0
I <sub>17</sub>	CPU	184.21	458.97	65.76	263.3	71.02	331.67	42.87	45.31
	QV/QO	198/43	309/0	61/22	258/30	70/0	271/0	44/13	49/0
I <sub>18</sub>	CPU	323.61	752.88	115.16	566.85	172.41	674.38	83.65	85.4
	QV/QO	192/52	315/0	57/21	271/24	69/0	282/0	46/13	48/0
I <sub>19</sub>	CPU	678.77	1003.35	151.93	559.32	167.31	741.79	131.28	143.49
	QV/QO	321/29	337/0	66/20	284/24	76/0	296/0	48/15	53/0

**Tabela 19 - Efeitos de diferentes combinações das desigualdades válidas no MPFSLS**

“TL” = tempo limite (3600s)

“MPFMLS” = modelo proposto com formulação *multi-cut L-Shaped*

	TC	LE	LE1	LE2	LE3	LE12	LE13	LE23	LE123
I <sub>12</sub>	CPU	175.53	174.76	27.17	101.96	23.28	98.26	10.75	12.65
	QV/CO	113/42	130/0	37/19	89/22	42/0	96/0	23/11	30/0
I <sub>13</sub>	CPU	226.38	494.59	53.92	332.13	53.25	310.59	40.99	27.58
	QV/CO	121/49	154/0	42/19	116/39	50/0	131/0	31/14	37/0
I <sub>14</sub>	CPU	454.73	1136.41	133.94	699.89	185.09	768.22	67.03	60.89
	QV/CO	119/46	155/0	37/18	113/39	44/0	131/0	26/10	32/0
I <sub>15</sub>	CPU	805.69	2847.59	139.93	1449.80	186.28	1847.79	66.78	61.79
	QV/CO	125/59	181/0	37/18	123/51	44/0	151/0	26/10	32/0
I <sub>16</sub>	CPU	2132.75	>TL	335.62	>TL	314.52	>TL	139.88	150.76
	QV/CO	123/42	139/0	40/22	92/47	44/0	101/0	27/13	33/0
I <sub>17</sub>	CPU	3457.92	>TL	336.96	>TL	347.02	>TL	158.49	178.58
	QV/CO	137/34	119/0	40/22	108/24	44/0	118/0	27/13	33/0
I <sub>18</sub>	CPU	>TL	>TL	627.28	>TL	741.09	>TL	333.49	418.08
	QV/CO	100/28	76/0	35/21	83/10	44/0	81/0	27/13	32/0
I <sub>19</sub>	CPU	>TL	>TL	1300.96	>TL	901.44	>TL	682.83	749.68
	QV/CO	65/15	69/0	41/20	72/11	47/0	71/0	32/15	38/0

**Tabela 20 - Efeitos de diferentes combinações das desigualdades válidas no MPFMLS**

Nas Tabelas 19 e 20 os modelos que apresentam o melhor desempenho, quando se considera grandes quantidades de cenários, são LT23 e LE23, respectivamente, apesar de LT123 e LE123 sempre necessitarem de menos cortes

totais para a convergirem nas soluções ótimas, em cada instância testada. Contudo, vale ressaltar que os desempenhos computacionais apresentados por LT23 e LE23 não são muito distantes de LT123 e LE123, respectivamente, nos casos testados, e que quando o número de cenários não é muito maior que o número de períodos os modelos LT123 e LE123 geram soluções ligeiramente mais rápidas. Assim, considerando-se as instâncias testadas nas Tabelas 19 e 20 pode-se admitir que a formulação SLS com melhor desempenho em termos de tempo de solução é a LT23, que na instância de maior porte da Tabela 19 (500 cenários, 90 períodos, 20 periodicidades e 20 períodos para o primeiro pedido) obtém a solução ótima em 131,28 segundos (2,18 min), ou seja, 5,2 vezes mais rápido (11,3 min mais rápido) que LE23, 5,17 vezes mais rápido (11,3 min mais rápido) que de LT e 27,48 vezes mais rápido (1 hora mais rápido) que o MEDC.

#### 7.4.

#### **Análise de desempenho computacional da técnica de aceleração proposta aplicada ao modelo proposto**

Na presente seção verifica-se o efeito da aplicação das versões da técnica de aceleração proposta, analisando e comparando os resultados obtidos com alguns resultados anteriores. Para efeito da avaliação, apenas algumas formulações das Tabelas 4 e 5 foram utilizadas, e os CVS são utilizados quando necessário.

Considerando-se todas as instâncias com F1H1B1,  $II = 265$ ,  $\beta = 0.7$  e as matrizes de demanda (I12-I19) utilizadas na seção 6.3 e 6.2, gerou-se os resultados das Tabelas 21, 22, 23, 24, em uma única rodada de otimização, sendo que na última foram acrescentados os grupos de conjuntos (I<sub>20</sub>-I<sub>23</sub>).

A Tabela 21 fornece as quantidades de iterações (globais e locais) e os tempos em segundos para convergência às soluções ótimas quando se aplica a versão pura SLS da técnica quando aplicada ao modelo proposto para as formulações LT.LT.23 e LT.LT.123, e os resultados obtidos através do método SLS para as formulações LT23 e LT123 e que também estão contidos na Tabela 19. A Tabela 22 fornece as quantidades de iterações (globais e locais) e os tempos em segundos para convergência às soluções ótimas quando se aplica a versão pura MLS da técnica ao modelo proposto para formulações LE.LE.23 e LE.LE.123, e os resultados obtidos usando o método MLS para as formulações LE23 e LE123. A Tabela 23 fornece os tempos de soluções em segundos e as quantidades de iterações (globais e locais)

quando se aplica a técnica de aceleração proposta no modelo proposto nas versões híbrida para a formulação LE1.LT1 e puras para as formulações LT.LT.1 e LE.LE.1, e mostra os resultados obtidos através dos métodos SLS e MLS, que também podem ser verificados nas Tabelas 19 e 20. A Tabela 24 fornece os tempos, em segundos, para obtenção da solução ótima e as quantidades de iterações (globais e locais) quando se aplica a técnica de aceleração proposta na forma híbrida e sua versão modificada para as formulações LE123.LT123 e LE123.LTM23, e os resultados das formulações LT.LT.123 e LE.LE.123 que foram as formulações que obtiveram os melhores resultados nas Tabelas 19 e 20.

Observando os resultados da Tabela 23 pode-se verificar que a aplicação da técnica de aceleração proposta sem o uso das desigualdades válidas, principalmente as de limite inferior, para direcionar as soluções do PMRG de forma mais eficiente, desde as primeiras iterações do processo de solução, faz com que ocorra um aumento significativo no número de iterações necessárias para se convergir à SOP quando são comparadas com LE e LT. Isso ocorre devido ao fato do PMRG possuir poucas restrições que incluem as variáveis de primeiro estágio, fazendo com que o mesmo obtenha várias soluções, com valores de variáveis e da função objetivo, muito distantes da SOP no início do processo iterativo, fazendo com que os TAL ocorram com baixa frequência durante os CIL.

No caso de LT.LT.1, o aumento de iterações é ainda mais significativo devido a maior quantidade de cortes necessários pelo método SLS, para o encerramento de cada CIL. Entretanto, pode-se constatar que o método LE1.LT1 apresenta desempenho substancialmente superior ao método MLS, chegando a apresentar uma velocidade de solução 5,78 vezes maior em  $I_{17}$ . Além disso, LE1.LT1 obtém a SOP em todas as instâncias testadas dentro do limite de tempo estabelecido. Contudo, sem a utilização das desigualdades válidas (5.17), (5.30) e (5.31) o método SLS se mostra superior em desempenho computacional aos demais métodos da Tabela 23.

TC	LT23		LT123		LT.LT.23			LT.LT.123		
	CPU[s]	QO/QV	CPU[s]	QO	CPU[s]	QIG	QO/QV	CPU[s]	QIG	QO
I <sub>12</sub>	5.83	38/11	5.53	44	4.11	8	38/11	3.67	8	44
I <sub>13</sub>	12.89	47/14	10.86	51	9.24	12	47/14	7.34	11	51
I <sub>14</sub>	15.41	36/10	14.69	43	12.5	8	36/10	11.13	8	43
I <sub>15</sub>	15.44	36/10	15.6	43	12.65	8	36/10	14.77	8	43
I <sub>16</sub>	42.73	44/13	39.52	49	37.81	10	44/13	31.17	9	49
I <sub>17</sub>	42.87	44/13	45.31	49	42.23	10	44/13	33.72	9	49
I <sub>18</sub>	83.65	46/13	85.6	48	97.37	10	46/13	65.09	9	48
I <sub>19</sub>	131.28	48/15	143.49	53	87.17	10	44/12	73.47	9	48

Tabela 21 - Efeito da aplicação da técnica proposta na versão pura SLS

T C	LE23		LE123		LE.LE.23			LE.LE.123		
	CPU[s]	QO/QV	CPU[s]	QO	CPU[s]	QIG	CPU[s]	CPU[s]	QIG	QO
I <sub>12</sub>	10.75	23/11	12.65	30	5.12	8	23/11	5.06	8	30
I <sub>13</sub>	40.99	31/14	27.58	37	19.57	12	31/14	12.22	11	37
I <sub>14</sub>	67.03	26/10	60.89	32	26.83	8	26/10	25.42	8	32
I <sub>15</sub>	66.78	26/10	61.79	32	27.51	8	26/10	26.52	8	32
I <sub>16</sub>	139.88	27/13	150.76	33	71.23	10	27/13	68.01	9	34
I <sub>17</sub>	158.49	27/13	178.58	33	80.11	10	27/13	79.59	9	34
I <sub>18</sub>	333.49	27/13	418.08	32	174.69	9	27/13	162.25	8	32
I <sub>19</sub>	682.83	32/15	749.68	38	161.5	9	27/12	151.14	8	33

Tabela 22 - Efeito da aplicação da técnica proposta na versão pura MLS

TC	LE		LT		LE.LE.1			LT.LT.1			LE1.LT1		
	CPU[s]	QO/QV	CPU[s]	QO/QV	CPU[s]	QIG	QO	CPU[s]	QIG	QO	CPU[s]	QIG	QO
I <sub>12</sub>	175.53	113/42	26.77	139/50	103.37	64	178	28.77	75	286	25.61	82	199
I <sub>13</sub>	226.38	121/49	34.49	137/47	314.64	81	218	50.84	86	331	48.62	86	216
I <sub>14</sub>	454.73	119/46	59.23	136/54	743.49	81	234	98.57	85	347	99.92	86	245
I <sub>15</sub>	805.69	125/59	81.46	190/41	2422.05	99	262	153.62	171	426	156.71	173	318
I <sub>16</sub>	2132.75	123/42	173.19	199/47	>TL	-	-	311.02	174	432	388.83	175	316
I <sub>17</sub>	3457.92	137/34	184.21	198/43	>TL	-	-	401.58	225	459	598.27	223	367
I <sub>18</sub>	>TL	-	323.61	192/52	>TL	-	-	889.21	223	481	1439.55	220	365
I <sub>19</sub>	>TL	-	678.77	321/29	>TL	-	-	1077.57	224	477	1324.89	227	373

Tabela 23 - Efeito da aplicação da técnica proposta na versão híbrida utilizando apenas a desigualdade (5.1)

“TC” = tamanho dos conjuntos;

“CPU” = tempo médio de solução em segundos

“QIG” = quantidade total de iterações globais ou número de vezes que o problema mestre global é resolvido

“QO” = quantidades de cortes ótimos inseridos nos PMLR e PMGR

“QV” = quantidades de cortes viáveis inseridos nos PMLR e PMGR

“TL” = tempo limite (3600 segundos)

Analisando as Tabelas 21 e 22, ao comparar-se os tempos de solução de LE.LE.123 com LE.LE.23 e LT.LT.123 com LT.LT.23, verifica-se que a adição da desigualdade (5.1) não reduziu o tempo solução em apenas em  $I_{15}$  da Tabela 21, ou seja, sua presença em conjunto de (5.17), (5.30) e (5.31), mesmo que de forma modesta, melhora o processo de solução, principalmente nas duas últimas instâncias que possuem maior porte.

Comparando LT123 com LT.LT.123 e LT23 com LT.LT.23 na Tabela 21 e os resultados da Tabela 23, observa-se valores iguais ou próximos de cortes ótimos e viáveis dos métodos SLS e da técnica de aceleração proposta na Tabela 21. Isso demonstra a significativa melhora na eficiência de convergência de técnica de aceleração proposta, quando se utiliza as desigualdades válidas, principalmente as desigualdades de limite inferior (5.17) e (5.30). Uma análise similar pode ser feita com os resultados da Tabela 22.

Verificando-se a Tabela 23, pode-se constatar que o método híbrido LE123.LT123 converge com o número de cortes ótimos iguais ou próximos da versão pura MLS LE.LE.123, aproveitando a eficiência de convergência da estrutura de múltiplos cortes nos CIL. Além disso, o melhor desempenho da técnica híbrida destaca o aproveitamento do PMRL linear com apenas variáveis contínuas e estrutura MLS e a menor demanda desempenho computacional na solução do PMRG PLIM com estrutura SLS, em relação versões puras da técnica proposta.

Ainda, analisando-se os resultados expostos na Tabela 24, a versão híbrida modificada LE123.LTM23, apesar de necessitar de maior número de iterações globais em relação a LE123.LT123 em algumas instâncias, possui um PMRG mais simples de resolver e necessita de menos cortes ótimos para atingir a convergência, ou seja, menor número de iterações locais, o que significa uma menor quantidade de vezes que o PED e o problema PMRL são resolvidos. Além disso, sempre iniciar a busca por uma SSL, conforme linha 28 do Algoritmo 6, se mostrou uma alternativa eficiente, tendo em vista a diminuição do número de cortes ótimos necessários para a convergência.

TC	LE.LE123			LT.LT123			LE123.LT123			LE123.LTM23		
	CPU[s]	QIG	QO	CPU[s]	QIG	QO	CPU[s]	QIG	QO	CPU[s]	QIG	QO
I <sub>12</sub>	5.06	8	30	3.67	8	44	2.78	8	30	1.87	8	23
I <sub>13</sub>	12.22	11	37	7.34	11	51	5.83	11	38	4.38	12	33
I <sub>14</sub>	25.42	8	32	11.13	8	43	9.12	8	32	7.01	8	27
I <sub>15</sub>	26.52	8	32	14.77	8	43	9.77	8	32	7.23	8	27
I <sub>16</sub>	68.01	9	34	31.17	9	49	25.45	9	35	19.7	10	30
I <sub>17</sub>	79.59	9	34	33.72	9	49	28.96	9	35	21.49	10	30
I <sub>18</sub>	162.25	8	32	65.09	9	48	71.52	9	33	62.11	10	29
I <sub>19</sub>	151.14	8	33	73.47	9	48	60.84	9	34	46.51	10	30
I <sub>20</sub>	95.79	9	33	60.02	9	49	45.26	9	34	35.85	10	30
I <sub>21</sub>	212.41	8	33	122.3	9	48	106.42	9	34	77.08	10	30
I <sub>22</sub>	1293.96	17	55	361.45	17	70	242.76	17	57	198.28	19	53
I <sub>23</sub>	2182.15	17	56	475.54	17	65	507.37	17	58	428.36	19	55

“CPU” = tempo de solução em segundos

“TC” = tamanho dos conjuntos

“QIG” = quantidade total de iterações globais ou número de vezes que o problema mestre global é resolvido

“QO” = quantidades de cortes ótimos inseridos nos PMLR e PMGR (ou quantidade de iterações em que uma solução ótima foi obtida pelo PED)

**Tabela 24 - Efeito da aplicação da técnica proposta na versão híbrida com as desigualdades válidas**

T C	LT	LT23		LT123		LT.LT123		LE123.LT123		LE123.LTM23	
	CPU[s]	FA	CPU[s]	FA	CPU[s]	FA	CPU[s]	FA	CPU[s]	FA	CPU[s]
I <sub>12</sub>	29.69	5,0	5.92	5,3	5.56	7,5	3.94	10,0	2.97	13,5	2.20
I <sub>13</sub>	47.23	4,0	11.69	4,6	10.22	6,2	7.58	8,2	5.76	10,1	4.69
I <sub>14</sub>	77.56	3,8	20.66	4,2	18.68	5,2	15.00	6,8	11.49	8,6	8.97
I <sub>15</sub>	127.73	6,0	21.28	6,4	19.82	8,2	15.53	11,1	11.53	14,3	8.96
I <sub>16</sub>	248.12	5,5	45.04	5,8	42.45	7,1	34.98	9,1	27.15	11,6	21.31
I <sub>17</sub>	324.28	6,9	47.34	6,4	50.88	8,8	36.79	10,9	29.74	14,6	22.20
I <sub>18</sub>	545.03	6,1	88.86	5,7	95.77	7,6	71.79	9,2	59.13	12,0	45.57
I <sub>19</sub>	723.77	5,8	124.52	5,6	129.86	7,5	96.87	9,4	76.97	11,8	61.16
I <sub>20</sub>	1132.30	8,2	137.55	9,0	126.38	10,7	105.78	12,6	89.75	16,1	70.23
I <sub>21</sub>	1744.26	6,6	265.40	7,1	245.43	8,6	201.81	9,8	177.65	12,6	138.41
I <sub>22</sub>	2419.02	6,4	375.24	7,1	338.72	7,8	308.90	9,0	270.24	11,0	220.69
I <sub>23</sub>	>TL	>4,7	773.60	>5,5	655.13	>6,3	572.62	>6,4	564.96	>7,3	490.91

“TL”=tempo limite (3600 s)

“FA”=fator de aceleração (tempo LT/tempo X)

“X”=formulação em questão

**Tabela 25 - Análise comparativa das técnicas com melhores desempenho computacional em relação a formulação LT**



Os resultados da Tabela 25 foram obtidos através da realização de dez rodadas de otimização para cada instância, com diferentes cenários de demanda para cada mudança no tamanho dos conjuntos de cenários ou períodos de cada rodada. A Tabela 25 fornece os tempos de soluções médios de LT, LT23, LT123, LT.LT.123, LE123.LT123 e LE123.LTM23 e razão média entre os tempos de solução das técnicas de aceleração propostas aplicadas ao modelo proposto em relação a LT.

Analisando-se a Tabela 25, pode-se constatar que, em uma análise mais extensiva, a formulação LT123 tem desempenho melhor que LT23, apresentando menor tempo de solução em um número maior de instâncias, principalmente nas últimas quatro instâncias que possuem as maiores escalas. Apesar de LT.LT123 apresentar valores de tempos médios de soluções próximos de LT123 em algumas instâncias, a técnica de aceleração proposta na forma pura SLS tem desempenho computacional médio superior em todas as instâncias, apresentando performance computacional notavelmente melhor em algumas instâncias, sobretudo em  $I_{23}$ . Assim, a aplicação da técnica de aceleração proposta da versão pura SLS em modelos não estocásticos pode ser vantajosa.

Ainda verificando-se os resultados expostos na Tabela 25, observa-se que a formulação LE123.LT123 apresenta melhora relevante de desempenho computacional em relação à formulação forma pura LT.LT.123. A formulação híbrida modificada demonstra ser a técnica com o melhor desempenho computacional médio, exibindo expressivos aumentos de fator de aceleração, e desempenho médio significativamente melhor que LT123 e LT.LT.123 em todas as instâncias da Tabela 25. Além disso, LE123.LTM23 se mostra superior computacionalmente a LE123.LT123, em todos os casos, obtendo relevantes reduções de tempo médio de solução a partir de  $I_{18}$ .

Os resultados da Tabela 25 mostram que a aplicação da técnica híbrida modificada em conjunto com as desigualdades válidas desenvolvidas permite o modelo de gestão de estoque proposto gerar soluções em tempos aceitáveis, quando consideram-se longos horizontes de planejamento com demandas diárias e grandes números de possíveis cenários. Considerando-se um horizonte de tempo de 365 dias, para 250 e 500 diferentes cenários possíveis, a formulação LE123.LTM23 obtém a solução ótima em tempos médios de 3.68 e 8.18 minutos, respectivamente, apresentando fatores de aceleração de 11,0 e maior que 7,3 (LT ultrapassa o tempo limite de 1 hora de execução), respectivamente, em relação a formulação LT, que

por sua vez se mostrou substancialmente superior que resolver o equivalente determinístico do modelo proposto e a formulação LE.

Assim, a técnica de aceleração proposta permite que o modelo proposto possa ser utilizado em casos ou situações em que seja necessário considerar-se a demanda diária para se ter resultados satisfatórios e um longo horizonte de planejamento, mesmo considerando-se grandes quantidades de cenários. Por exemplo, casos em que a capacidade máxima de estoque atende à demanda total de poucos dias (menos de uma semana, por exemplo) ou que os itens a serem estocados possuam prazos de validade curtos.

## 8 Conclusões

Neste presente trabalho foi proposto um modelo de gestão de estoque com política de revisão periódica (R, S) com *backorder* parcial, otimizado via programação estocástica de dois estágios, com uma camada, um item e demanda incerta.

O modelo apresentado nesta dissertação tem como base o modelo proposto originalmente por Cunha et al. (2014). Entretanto, a formulação proposta inclui um parâmetro referente ao estoque inicial e considera a possibilidade de *backorder* parcial, podendo ser transformado para perda de vendas pura ou atraso puro de forma simples. Assim, o presente modelo pode ser considerado mais geral e, além disso, nele foi aplicado uma linearização exata mais direta, o que possibilitou uma formulação com uma quantidade menor de restrições e variáveis, quando comparada com o modelo de Cunha et al. (2014).

A análise dos resultados obtidos ao testar o modelo equivalente determinístico em uma ampla quantidade de instâncias, variando seus conjuntos e principais parâmetros, revelou que o presente modelo é estável e gera resultados consistentes. Contudo, para se obter soluções ótimas em intervalos de tempos aceitáveis quando considerados modelos de grande porte, foram aplicados os métodos SLS e MLS, ambos com CVS e CVM. Tanto o método SLS quanto o MLS com CVS exibiram melhor desempenho pois, apesar de ocorrer significativa redução dos cortes de viabilidade necessários para convergência da solução ótima quando o CVM foi utilizado, foram observados consideráveis aumentos dos números de cortes de otimalidade necessários.

Os resultados obtidos nos experimentos mostram que apesar do método SLS sempre necessitar de mais iterações do que o método MSL para obter as soluções ótimas, o método SLS apresentou desempenho expressivamente melhor, exibindo tempos de solução de 5,3 a 18,8 vezes menores que o método MLS, e tempos de solução inferiores a 8,4 vezes a do modelo equivalente determinístico nas instâncias

de maior porte testadas. Vale destacar que o método MLS se mostrou inferior computacionalmente ao modelo equivalente determinístico.

A fim de permitir formulações mais complexas considerando, por exemplo, mais itens, mais camadas e longos horizontes de planejamento com demandas diárias, e ainda assim obter soluções ótimas com intervalos de tempo tratáveis, foram desenvolvidas desigualdades válidas e uma nova técnica de aceleração que possui três variantes: versão pura SLS, versão pura MLS e a versão híbrida que utiliza as ambas estruturas MLS e SLS. Além disso, foi possível desenvolver uma formulação híbrida modificada específica para o tipo do modelo proposto no presente trabalho, devido à característica particular do seu problema mestre.

A aplicação conjunta das desigualdades válidas nas formulações SLS e MLS no modelo proposto melhorou substancialmente os seus processos de solução, reduzindo em média 79,1% e 80,5%, respectivamente, as quantidades necessárias de cortes para convergência das soluções. Isso acarretou em uma notável melhora no tempo computacional dos métodos. Contudo, o método SLS ainda permaneceu com o melhor desempenho computacional obtendo soluções de 2,5 a 5,2 vezes mais rápidas que a do método MLS, e de 3,2 a 4,8 vezes maior que o método SLS sem o conjunto de desigualdades válidas. Vale ressaltar, que as desigualdades válidas de limite inferior, que a aproveitam a estrutura de solução do método *L-Shaped*, foram as principais responsáveis pela melhoria de desempenho computacional com os métodos MLS e SLS

Entre as formas da técnica de aceleração proposta, a versão híbrida modificada combinada com o conjunto de desigualdades válidas se destacou computacionalmente, demonstrando ter o melhor desempenho computacional médio em todas as instâncias de um conjunto de testes composto por dez rodadas de otimização em cada instância. A formulação com técnica híbrida modificada apresentou soluções de 1,3 a 2,5 vezes mais rápidas que a as soluções de SLS, em média, com ambos utilizando as desigualdades propostas.

A aplicação da versão híbrida modificada no modelo proposto permite obter a solução ótima quando se considera um horizonte de planejamento de um ano (365 dias) com demandas diárias, 20 periodicidades e 20 períodos para o primeiro pedido, em um tempo médio de 8,18 min, considerando-se 500 cenários, e de 3,68 min, com 250 cenários, que podem ser consideráveis aceitáveis. Além disso, a formulação proposta na versão pura SLS mostrou boa performance computacional,

apresentando velocidades médias de 1,2 a 1,9 vezes mais rápidas que o método SLS, com ambos utilizando o conjunto de desigualdades válidas. Assim, a forma pura SLS da técnica proposta pode ser satisfatória em problemas não estocásticos em que a forma híbrida não seja aplicável.

É importante destacar que a convergência da solução, quando aplica-se algumas das formas da técnica de aceleração proposta, é garantida quando o modelo possui recurso relativamente completo, o que no presente caso é assegurado quando a desigualdade válida (5.1) é utilizada. Caso contrário, se houver a necessidade de um número grande de cortes de viabilidade durante o processo iterativo de solução, o PMRG ou PMRL pode se tornar matematicamente inviável durante o processo iterativo de solução.

Os resultados obtidos no presente trabalho suportam a conclusão de que formulações mais complexas, considerando, por exemplo, mais itens, descontos por quantidades encomendadas, mais camadas, simulações de demandas estocástica mais complexas com grande quantidade cenários e longos horizontes de planejamento (demandas diárias, inclusive), para o sistema de controle (R, S), podem ser eficientemente abordadas utilizando o modelo e abordagem de aceleração propostos. Além disso, a técnica de aceleração proposta é geral o suficiente para ser utilizada em outros modelos da literatura, inclusive em aplicações que se baseiam no método de Benders tradicional (i.e., problemas determinísticos).

Como trabalhos futuros, sugere-se aplicar o modelo proposto para melhorar o controle de estoque de algum item ou conjuntos de itens de uma determinada organização ou cadeia de suprimentos de múltiplas camadas. Ademais, visa-se aplicar a técnica de aceleração proposta na presente dissertação em outros modelos, inclusive em modelos PLIM sem variáveis contínuas no problema mestre, a fim de verificar se ocorre melhoria de performance computacional, e se possível, aperfeiçoá-la e combiná-la com outras técnicas já existentes, buscando potencializar o desempenho computacional nos modelos futuramente testados.

## Referências bibliográficas

- ARCHIBALD, B. C. Continuous Review (s, S) Policies with Lost Sales. **Management Science**, 1981. 1171-1177.
- AXSÄTER, S. Using the deterministic EOQ formula in stochastic inventory control. **Management Science**, 1996. 830–834.
- AXSATER, S. **Inventory Control**. 2nd. ed. New York: Springer. 2. ed. New York: Springer, 2006.
- BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. **Numerische Mathematik**, v. 4, p. 238-252, 1962.
- BERTSIMAS, D. et al. Adaptive Robust Optimization for the Security Constrained Unit Commitment Problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, p. 52-61, 2013.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. V. A multicut algorithm for two-stage stochastic linear programs. **European Journal of Operational Research**, p. 384-392, 1988.
- BUCHANAN, D. J.; LOVE, R. F. A (Q,R) inventory model with lost sales and earlang-distributed lead times. **Naval Research Logistics Quarterly**, 1985. 605-611.
- CAMARGO, R. S. D.; GILBERTO DE MIRANDA, J.; LUNA, H. P. L. Benders Decomposition for Hub Location Problems with Economies of Scale. **Transportation Science**, v. 43, p. 86-97, 2009.
- CASTRO, R.; CAMARGO, R. S. D.; JÚNIOR, G. D. Método de Decomposição de Benders Aplicado a Localização de Concentrados em Redes do Tipo Eixo-Raio com Alocação. **XLI-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, 2009. 1168-1179.
- CHEN, F.; ZHENG, Y.-S. Inventory models with general backorder costs. **European Journal of Operational Research**, 1993. 175–186.
- CHU, C. W. et al. A dynamic two-segment partial backorder control of (r,Q) inventory system. **Computers & Operations Research**, 2001. 935-953.
- CONEJO, A. J. et al. **Decomposition Techniques in Mathematical Programming**. [S.l.]: Springer, 2006.

- COSTA, A. M. A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. **Computers & Operations Research**, p. 1429–1450, 2005.
- COSTA, A. M. et al. Accelerating Benders Decomposition with Heuristics. **Pesquisa Operacional**, v. 32, p. 3-19, 2012.
- CÔTÉ, G.; LAUGHTON, M. A. Large-scale mixed integer programming: Benders-type heuristics. **European Journal of Operational Research**, p. 327-333, 1984.
- CUNHA, P. S. A.; OLIVEIRA, F.; RAUPP, F. M. P. Controle de reposição de estoques de um item com demanda incerta via programação estocástica. **XLVI-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, Setembro 2014. 1460-1471.
- DAS, C. The (S-1, S) inventory model under time limit on backorders. **Operations Research**, 1977. 835-850.
- DOGAN, K.; GOETSCHALCKX, M. A primal decomposition method for the integrated design of multi-period production–distribution systems. **IIE Transactions**, p. 1027-1036, 1999.
- DOWNS, B.; METTERS, R.; SEMPLE, J. Managing Inventory with Multiple Products, Lags in Delivery, Resource Constraints, and Lost. **Management Science**, 2001. 464-479.
- FATTAHI, M. et al. Investigating replenishment policies for centralised and decentralised supply chains using stochastic programming approach. **International Journal of Production Research**, p. 41-69, 2014.
- FISCHETTI, M.; LODI, A. Local branching. **Mathematical Programming**, p. 23-47, 2003.
- FORS, N. Mathematical programming approach to inventory control. **Computers & Industrial Engineering**, 1986. 166–169.
- GEOFFRION, A. M.; GRAVES, G. W. Multicommodity distribution system design by Benders Decomposition. **Management Science**, p. 822-844, 1974.
- HADLEY, G.; WHITIN, T. M. **Analysis of Inventory System**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1963.
- HARRIS, F. W. How many parts to make at once. **Factory, The magazine of management**, v. 10, p. 135-136, 1913.
- HSIEH, T.-P.; DYE, C.-Y. A note on “The EPQ with partial backordering and phase-dependent backordering rate”. **Omega**, 2012. 131-133.

- HU, F.; LIM, C.-C.; LU, Z. Optimal production and procurement decisions in a supply chain with an option contract and partial backordering under uncertainties. **Applied Mathematics and Computation**, 2014. 1225–1234.
- JOHANSEN, S. G.; THORSTENSON, A. A. Optimal (s,Q) Inventory Policy with Poisson Demand and Lost Sales: Discount and Undiscounted Cases. *International Journal of Productions Economics*, 1996. 359-371.
- JOHANSEN, S. G.; THORSTENSON, A. Emergency orders in the periodic-review inventory system with fixed ordering costs and compound Poisson demand. **International Journal of Production Economics**, 2014. 147–157.
- KHODR, H. M. et al. Distribution systems reconfiguration based on OPF using benders decomposition. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 24, p. 2166-2176, 2009.
- KRAJEWSKI, L. J.; RITZMAN, L. P.; MALHOTRA, M. K. **Administração de Produção e Operações**. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.
- LEI, C.; LIN, W.-H.; MIAO, L. A multicut L-shaped based algorithm to solve a stochastic programming model for the mobile facility routing and scheduling problem. **European Journal of Operational Research**, p. 699–710, 2014.
- MAGNANTI, T. L.; MIREAULT, P.; WONG, R. T. Tailoring Benders decomposition for uncapacitated network design. **Netflow at Pisa**, p. 112–154, 1986.
- MAGNANTI, T. L.; WONG, R. T. Accelerating benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. **Operations Research** **29**, 1981. 464–483.
- MCDANIEL, D.; DEVINE, M. A Modified Benders' Partitioning Algorithm for Mixed Integer Programming. **Management Science**, p. 312-319, 1977.
- MOINZADEH, K. Operating characteristics of the (S – 1, S) inventory system with partial backorders and constant resupply times. **Management Science**, 1989. 472-477.
- MONTGOMORY, D. C.; BAZARRA, M. S.; KESWANI, A. K. Inventory models with a mixture of backorders and lost sales. **Naval Research Logistics Quarterly**, p. 255-263, 1973.
- NAMIT, K.; CHEN, J. Solution to the inventory model for gamma lead-time demand. **International Journal of Physical Distribution & Logistics Management**, v. 29, p. 138-154, 1999.



- OLIVEIRA, F.; GROSSMANN, I. E.; S.HAMACHER. Accelerating Benders Stochastic decomposition for optimization under uncertainty of the petroleum product supply chain. **Computer & Operations Research**, v. 49, p. 47-58, 2014.
- OLIVEIRA, F.; HAMACHER, S. Stochastic Benders decomposition for the supply chain investment planning problem under demand uncertainty. **Pesquisa Operacional**, 2012. 663-676.
- PAPADAKOS, N. Practical enhancements to the Magnanti–Wong method. **Operation Research Letters**, p. 444–449, 2008.
- PARK, K. S. Inventory model with partial backorders. **International Journal of Systems Science**, p. 1313-1317, 1982.
- PENTICO, D. W.; DRAKE, M. J. The deterministic EOQ with partial backordering: A new approach. **European Journal of Operational Research**, p. 102–113, 2009.
- PENTICO, D. W.; DRAKE, M. J.; TOEWS, C. The deterministic EPQ with partial backordering: A new approach. **Omega**, p. 624-636, 2009.
- PENTICO, D. W.; DRAKE, M. J.; TOEWS, C. The EPQ with partial backordering and phase-dependent backordering rate. **Omega**, 2011. 574-577.
- PISHVAEE, M. S.; RAZMI, J.; TORABI, S. A. An accelerated Benders decomposition algorithm for sustainable supply chain network design under uncertainty: A case study of medical needle and syringe supply chain. **Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review**, p. 14–38, 2014.
- PLACIDO, F.; OLIVEIRA, F. A Benders stochastic decomposition approach for the optimization under uncertainty of inventory control considering periodic review policy. **XLVII-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, Agosto 2015. 1391-1402.
- POSNER, M. J. M.; YANSOUNI, B. A class of inventory models with customer impatience. **Naval Research Logistics Quarterly**, 1972. 483-492.
- RABINOWITZ, G. et al. A partial backorder control for continuous review (r, Q) inventory system with poisson demand and constant lead time. **Computers & Operations Research**, 1995. 689–700.
- REI, W. et al. Accelerating Benders Decomposition by Local Branching. **INFORMS Journal on Computing**, p. 333-345, 2009.

- ROSENBERG, D. A new analysis of a lot-size model with partial backordering. **Naval Research Logistics Quarterly** **26**, 1979. 349–353.
- ROY, T. J. V. Cross Decomposition for Mixed Integer Programming. **Mathematical Programming**, p. 46-63, 1983.
- SAHARIDIS, G. K. D.; BOILE, M.; THEOFANIS, S. Initialization of the Benders master problem using valid inequalities applied to fixed-charge network problems. **Expert Systems with Applications**, 2011. 6627–6636.
- SAHARIDIS, G. K. D.; IERAPETRITOU, M. G. Improving benders decomposition using maximum feasible subsystem (MFS) cut generation strategy. **Computers & Chemical Engineering**, 34, 2009. 1237–1245.
- SAHARIDIS, G. K. D.; MINOUX, M.; IERAPETRITOU, M. G. Accelerating Benders method using covering cut bundle generation. **International Transactions in Operational Research**, p. 221-237, 2010.
- SAN JOSÉ, L. A.; SICILIA, J.; GARCÍA-LAGUNA. The lot size-reorder level inventory system with customers impatience functions. **Computers & Industrial Engineering**, p. 349–362, 2005.
- SHERALI, H. D.; LUNDAY, B. J. On generating maximal nondominated Benders cuts. **Annals of Operations Research**, 2011. 1-16.
- SILVA, G. L. C. **Modelo de Estoque para peças de reposição sujeita à demanda intermitente e lead-time estocástico. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção)-Escola de Engenharia**. [S.l.]. 2009.
- SILVER, E. A.; PETERSON, R. **Decision Systems for Inventory Management and Production Planning**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- STOJKOVSKA, I. Mathematical Programming Approach to the Optimality of the Solution for Deterministic Inventory Models with Partial Backordering. **Advances in Operations Research**, 2013. 1-7.
- STOJKOVSKA, I. On the optimality of the optimal policies for the deterministic EPQ with partial backordering. **Omega**, 2013. 919–923.
- TANG, L.; JIANG, W.; SAHARIDIS, G. K. D. An improved Benders decomposition algorithm for the logistics facility location problem with capacity expansions. **Annals of Operations Research**, p. 165-190, 2013.
- THANGAM, A.; UTHAYAKUMAR, R. A two-level supply chain with partial backordering and approximated Poisson demand. **European Journal of Operational Research**, 2008. 228–242.

VAN SLYKE, R. M. V.; WETS, R. L-Shaped Linear Programs with Applications to Optimal Control and Stochastic Programming. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 17, p. 638-663, 1969.

YANG, Y.; LEE, J. M. A tighter cut generation strategy for acceleration of Benders decomposition. **computers and Chemical Engineering**, p. 84-93, 2012.

ZAKERI, G.; PHILPOTT, A. B.; RYAN, D. M. Inexact Cuts in Benders Decomposition. **SIAM Journal on Optimization**, p. 643–657, 1999.

ZHANG, R.-Q. A note on the deterministic EPQ with partial backordering. **Omega**, 2009. 1036-1038.

## Apêndice

### Modelo proposto por Cunha et al. (2014)

Segue o modelo de gestão de estoques, otimizado via programação estocástica de dois estágios, proposto originalmente por Cunha et al. (2014), que considera uma camada, um item, demanda incerta, política de controle (R, S) e perdas de vendas pura.

#### Conjuntos

- $P$  — Períodos de tempo;
- $\Omega$  — Cenários;
- $\tau$  — Períodos de revisão;  $\tau \subset P$ .

#### Índices

- $p \in P$  — Período de tempo;
- $\xi \in \Omega$  — Cenário;
- $r \in \tau$  — Período de revisão;

#### Parâmetros

- $B^p$  — Custo da demanda não atendida por unidade do item no período  $p$ ;
- $CF^p$  — Custo fixo de pedido no período  $p$ ;
- $H^p$  — Custo de estoque por unidade de item no período  $p$ ;
- $D(\xi)^p$  — Demanda do item no cenário  $\xi$  e período  $p$ ;
- $\bar{S}$  — Limite superior para o nível de estoque do item;
- $Pr(\xi)$  — Probabilidade do cenário  $\xi$ ;
- $TE$  — Tempo de entrega ou lead time
- $\overline{ITI}$  — Limite superior da posição do estoque total do item;
- Parâmetro auxiliar que indica o período que o pedido ocorre
- $W^{p,r}$  — dependendo do valor  $r$ ;  $W^{p,r} \in \{0,1\}$ ;  $r = 1, \dots, |R|$ ;  $p = 1, \dots, |P|$ ;

Onde  $W^{p,r}$  é representado pela seguinte matriz:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & & & & r & & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
 p & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

### Variáveis

- $a(\xi)^p$  – Quantidade de demanda atendida no cenário  $\xi$  e período  $p$ ;
- $f(\xi)^p$  – Quantidade de demanda não atendida no cenário  $\xi$  e período  $p$ ;
- $i(\xi)^p$  – Estoque em mãos no final de cada período  $p$ , em cada cenário  $\xi$ ;
- $it(\xi)^p$  – Posição do estoque total (estoque em mãos mais pedidos pendentes) no fim de cada período, em cada cenário  $\xi$ ;
- $q(\xi)^p$  – Quantidade de item pedida no início de cada período, em cada cenário  $\xi$ .
- $s$  – Nível alvo dos estoques do item ao longo do horizonte de tempo;
- $v^p$  – Indica se existe ou não encomenda do item no período  $p$ ;  $v^p \in \{0,1\}$ .
- $u^r$  – Variável auxiliar na determinação do tamanho do ciclo  $R$ ;  $u^r \in \{0,1\}$ .
- $sv^p$  – Variável auxiliar do nível alvo dos estoques no período  $p$
- $itl(\xi)^p$  – Posição do estoque total (estoque em mãos mais pedidos pendentes) no início de cada período, em cada cenário  $\xi$ ;
- $itlv(\xi)^p$  – Variável auxiliar Posição do estoque total (estoque em mãos mais pedidos pendentes) no início de cada período, em cada cenário  $\xi$ ;

Problema de primeiro estágio:

$$\min_{u,v,s} \sum_p CF^p v^p + E_{\Omega}[Z(v, s, \xi)] \quad (9.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_r u^r = 1 \quad (9.2)$$

$$\sum_r W^{r,p} u^r = v^p \quad \forall p \quad (9.3)$$

$$s \leq \bar{S} \quad (9.4)$$

$$s \geq 0 \quad (9.5)$$

$$v^p \in \{0,1\} \quad \forall p \quad (9.6)$$

$$u^r \in \{0,1\} \quad \forall r, \forall k \quad (9.5)$$

Na expressão (9.1), o primeiro termo representa o custo de encomenda e  $E_\Omega[Z(v, s, \xi)]$  representa o valor esperado do custo associado ao problema de segundo estágio. A restrição (9.2) indica que existe exatamente um único valor para o tamanho do ciclo  $R$  ( $R = r$  quando  $u^r = 1$ ). A restrição (9.3) indica os períodos em que ocorrem os pedidos no horizonte de planejamento em função da escolha do valor de  $R$  (o primeiro pedido sempre ocorre no primeiro período). A restrição (9.4) estabelece o limite superior da variável que representa o nível alvo do estoque (restrição da capacidade). Em (9.5) e (9.6) têm-se as variáveis de primeiro estágio, que determinam quando serão realizados os pedidos, são definidas como binárias. Em (9.7), a variável nível alvo, de primeiro estágio, é definida como contínua e não-negativa.

Problema de segundo estágio:

$$Z(v, s, \xi) = \min_{a, f, i, it, l, q, v, s, sv, iti, itiv} \sum_p [H^p i(\xi)^p + B^p f(\xi)^p] \quad (9.8)$$

Sujeito a:

$$a(\xi)^p + f(\xi)^p = D(\xi)^p \quad \forall p \quad (9.9)$$

$$i(\xi)^{p-1} + q(\xi)^{p-TE} = i(\xi)^p + a(\xi)^p \quad \forall p \quad (9.10)$$

$$it(\xi)^{p-1} + q(\xi)^p = it(\xi)^p + a(\xi)^p \quad \forall p \quad (9.11)$$

$$q(\xi)^p = (s - it(\xi)^{p-1}) v^p \quad \forall p \quad (9.12)$$

$$a(\xi)^p, i(\xi)^p, it(\xi)^p, f(\xi)^p, q(\xi)^p \geq 0 \quad \forall p \quad (9.13)$$

Os termos da função objetivo (9.8) modelam os custos totais de estoque ( $H^p i(\xi)^p$ ) e perda de vendas ( $B^p f(\xi)^p$ ). A restrição (9.9) representa as quantidades da demanda que serão atendidas e perdas, em cada período, para cada cenário  $\xi$ . A restrição (9.10) representam o balanço dos estoques em mãos do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ . A restrição (9.11) representa o balanço das posições dos estoques (em mãos mais pedidos em trânsito) do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ . A restrição não linear (9.12) define as quantidades do item a serem pedidas no início de cada período, por cenário  $\xi$ . Finalmente, em (9.13), as variáveis de segundo estágio são definidas como contínuas e não negativas.

Verifica-se que o modelo original se trata de um PNLIM, mas substituindo a restrição (9.12) pela linearização exata (9.14) - (9.23), proposta por Cunha et al. (2014), se torna um PLIM.

$$q(\xi)^p = sv^p - itiv(\xi)^p \quad \forall p \quad (9.14)$$

$$sv^p \leq \bar{S}v^p \quad \forall p \quad (9.15)$$

$$sv^p \leq s \quad \forall p \quad (9.16)$$

$$sv^p \geq s - \bar{S}(1 - v^p) \quad \forall p \quad (9.17)$$

$$itiv(\xi)^p \leq \overline{ITI}v^p \quad \forall p \quad (9.18)$$

$$itiv(\xi)^p \leq iti(\xi)^p \quad \forall p \quad (9.19)$$

$$itiv(\xi)^p \geq iti(\xi)^p - \overline{ITI}(1 - v^p) \quad \forall p \quad (9.20)$$

$$iti(\xi)^p = it(\xi)^{p-1} \quad \forall p \quad (9.21)$$

$$sv^p \geq 0 \quad \forall p \quad (9.22)$$

$$iti(\xi)^p, itiv(\xi)^p \geq 0 \quad \forall p \quad (9.23)$$

A linearização de (9.12), representada pelo conjunto de restrições (9.14) - (9.23) tem  $5x|P|x|\Omega| + 3x|P|$  restrições.