

■ PROJETO MATEMÁTICA ■

COMUNIDADE E UNIVERSIDADE

Número 8

Resolução de Problemas

Autores:

Gilda de La Rocque Palis

Alcilea Augusto

João Bosco Pitombeira



PROJETO MATEMÁTICA

COMUNIDADE E UNIVERSIDADE

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Gilda de La Rocque Palis

Alcilea Augusto

João Bosco Pitombeira

2017

Resumo: Este trabalho expõe a metodologia utilizada no curso sobre "Problemas do Primeiro Grau", oferecido na PUC-Rio pelo Projeto Matemática, Comunidade e Universidade, no segundo semestre de 1989, para professores de Matemática no nível básico. Na ocasião, foram apresentados fundamentos teóricos sobre Resolução de Problemas. Neste tomo, a apresentação foi atualizada, com a inclusão de publicações que surgiram depois daquela data.

Palavras chave: Formação continuada de professores que ensinam Matemática no ensino fundamental e médio; problemas; resolução de problemas, heurística.

SUMÁRIO

PROJETO MATEMÁTICA COMUNIDADE E UNIVERSIDADE	1
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	1
INTRODUÇÃO	3
METODOLOGIA ADOTADA	3
Desenvolvimento das reuniões	4
PROBLEMA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, O QUE SÃO?	6
Algumas sugestões de leitura	6

INTRODUÇÃO

O Projeto Matemática Comunidade e Universidade ofereceu o curso “Problemas do 1º Grau”, no segundo semestre de 1989, para professores de 1ª a 4ª séries do então denominado 1º Segmento do 1º Grau. Este curso foi divulgado em 23 de junho de 1989 e fazia parte de um Programa de Formação Continuada em Matemática para professores do 1º e 2º Graus, conferindo um certificado aos participantes que completassem certo número de créditos obtidos em diversas atividades oferecidas.

A equipe responsável pelo curso era formada pelos matemáticos Alcilea Augusto, Gilda de La Rocque Palis e João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho; e pela psicopedagoga Maria Lucia Fraga.

O objetivo do curso englobava, além do desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, a valorização de conjecturas, a necessidade de argumentação na resolução de problemas, e a reflexão sobre a transferência à prática escolar.

O curso consistiu de seis reuniões de 2 horas nos dias 22 e 29 de agosto, 05 e 12 de setembro, e 10 e 24 de outubro, em uma sala na PUC-Rio.

A obtenção de créditos no curso estava vinculada, além da frequência, à apresentação de um trabalho de final de curso. Para elaboração deste trabalho, estava reservado um período entre a 4ª e a 5ª reunião.

METODOLOGIA ADOTADA

A metodologia do curso abrangia: Apresentação da equipe, objetivos do curso, cronograma e metodologia das reuniões; formação dos grupos de trabalho, cada um com o seu relator; distribuição dos problemas a serem realizados em grupo, durante um período de tempo pré - determinado.

Constava sempre das propostas do Projeto, como um todo, que os métodos de ensinar fossem revistos e avaliados, sempre a partir do

experimental do grupo quanto a esses métodos. Assim, construímos uma série de problemas para serem resolvidos pelos participantes, antes de procedermos a uma reflexão sobre o papel da “Resolução de Problemas” como estratégia didática.

A metodologia do curso também abrangia compromisso com as tarefas, cooperação nos grupos e comunicação entre participantes. Estes podiam reclamar o “dar exercícios antes da matéria” ou “dar exercícios sem indicação de processos de resolução”. A equipe defendia esta estratégia como formadora no plano de desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas.

Desenvolvimento das reuniões

Nas reuniões, foram propostos problemas para serem resolvidos pelos participantes em grupo e estudados os diferentes encaminhamentos adotados. Nesse curso, os problemas propostos aos professores alunos eram problemas modelados por equações do 1º grau, em 2 ou 3 incógnitas, cujos enunciados, contextos e dados numéricos podem ser adaptados aos diferentes níveis de escolaridade. O tempo para resolução dos problemas nos grupos era de 40 minutos.

A seguir, os relatores faziam uma exposição do trabalho de seus respectivos grupos, comentando formas de encaminhar os problemas que foram bem sucedidas ou não, explicitando esses encaminhamentos. Apontavam também o que tentaram sem sucesso e o que pensavam que pudesse ser uma forma de resolver um problema, mas que não foi testada por falta de tempo.

Ouvidos os grupos, a equipe de Matemática fazia uma síntese da Matemática trabalhada e, ao final de cada reunião, a psicopedagoga coordenava uma discussão final do grupo. Nessa discussão, eram tratados diversos temas, por exemplo: a metodologia do curso, compromisso com a tarefa, cooperação nos grupos, comunicação em

geral, o “dar exercício” antes da matéria, “dar problemas” sem muitas indicações de processos a empregar. Foi enfatizado o sentido formador no plano de desenvolvimento de estratégias na resolução de problemas dessa "falta de indicação de direções a seguir". Durante toda a reunião, a psicopedagoga fazia anotações.

Na primeira reunião (22/08/1989), a equipe condutora do curso se apresentou e informou os objetivos do curso, o cronograma e metodologia das reuniões. De acordo com essa metodologia, os participantes se organizaram em 4 grupos (2 grupos de seis, 1 de sete e 1 de cinco), cada grupo escolheu seu relator e a Atividade 1 foi distribuída.

As duas reuniões seguintes (29-08-89 e 05-09-89) se passaram de forma similar, trabalhando com as Atividades 2 e 3. A quarta reunião (12-09-89) foi reservada para discutir a tarefa a ser realizada em casa e que havia sido proposta na terceira reunião. A apresentação do trabalho final foi realizada na 5ª reunião; a 6ª reunião (24-10-89) foi reservada para comentários da equipe coordenadora do curso e seu encerramento.

A equipe coordenadora teve dificuldades com a sincronização do tempo utilizado pelos grupos para resolução dos exercícios propostos com o tempo disponível nas reuniões. O desempenho dos grupos melhorou bastante ao longo das reuniões. E indicou que nem sempre os alunos considerados “melhores” pelas avaliações usuais são os “melhores” na resolução de problemas não usuais.

Observação: As Atividades trabalhadas ao longo do curso Problemas de Primeiro Grau serão apresentadas e discutidas em textos posteriores.

PROBLEMA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMA, O QUE SÃO?

Algumas sugestões de leituras

Pesquisas realizadas mostram que o professor considera que ensinar uma criança a “raciocinar” para encontrar a solução de problemas como uma das maiores dificuldades do ensino da Matemática. Apresentamos uma definição possível dos termos “problema” e “resolução de problema”.

“.... Um problema é uma situação na qual um indivíduo ou um grupo é solicitado a executar uma tarefa para a qual não existe um algoritmo prontamente acessível que determine completamente o método de resolução” (Lester, 1978). Portanto, resolução de problema é um conjunto de ações empreendidas para executar a tarefa (isto é, resolver o problema)...

Os artigos/livros citados abaixo, de 1 a 6, forneceram um apoio ao trabalho que desenvolvemos no curso Problemas de Primeiro Grau em 1989. Os artigos de 6 em diante podem fornecer um referencial teórico interessante para os professores leitores deste trabalho.

A referência bibliográfica (Dante, 1989) se destina a estudantes do curso de Magistério e professores do 1º grau. Neste livro, podemos encontrar várias sugestões de problemas no nível de 1ª a 5ª série. Além disso, discussões sobre:

- objetivos da resolução de problemas;
- distinção entre exercício e problema;
- características de um bom problema;
- estratégias para resolução de problemas.

Payne (1975) apresenta muitos trabalhos tratando da aprendizagem de crianças entre 3 e 8 anos. Os trabalhos, dirigidos a professores da escola primária tratam da aprendizagem e cognição, currículo e pesquisa sobre aprendizado nessa

faixa etária. Na época chegamos a pensar em organizar uma tradução para o português de parte dessa publicação, mas não chegamos a concretizar esse objetivo.

Quanto a Polya (1973,1995), um dos matemáticos mais influentes do século 20, contribuindo com a pesquisa matemática em várias áreas, era um professor *par excellence*, sempre mantendo muito interesse por questões pedagógicas. De acordo com o Google Academico, o livro acima mencionado já foi citado 8868 vezes.

É muito interessante e proveitoso conhecer as 4 fases da resolução de problemas propostas por Polya bem como heurísticas de resolução de problemas.

Polya (1973) apresenta um método para orientar a resolução de problemas matemáticos em 4 etapas: **Compreender o problema, Planejar sua resolução (traçar um plano), Executar o plano (colocar o plano em prática), verificar (comprovar o resultado)**. Essas etapas são amplamente discutidas e exemplificadas da pg 5 a 36 desse livro. Quanto ao raciocínio heurístico, este é apresentado a partir da pg.112 e utilizado em diversas ocasiões do livro. Polya define heurístico como um adjetivo que significa “servindo para descobrir”.

BIBLIOGRAFIA – alguns comentários a partir da referencia 7

- (1) Lester, F. K., Jr. (1978). Mathematical Problem Solving in the Elementary School: Some Educational and Psychological Considerations. In L. L. Hatfield & D. A. Bvradbard (Eds.), Mathematical problem solving Papers from a research workshop (pp. 53–86). Columbus, Ohio. (ERIC Document Reproduction Service)
- (2) DANTE, L.R. (1989) Didática da Resolução de Problemas de Matemática. Editora Ática.
- (3) Payne, J.N., Editor, (1975), Mathematics Learning in Early

Childhood. The NCTM, 37th Yearbook, The NCTM, Inc.

Acesso em <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED107534.pdf>

(4) Polya, G., (1973, How to solve it. A New Aspect of Mathematical Method. Second Edition, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.(este trabalho já foi citado 8860 vezes de acordo com o Google Acadêmico).

Acesso https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf

(5) POLYA, G., A arte de Resolver Problemas, (1995), Editora Interciência, Tradução e adaptação de “How to solve it” por Heitor Lisboa de Araújo.

Acesso <http://www.mat.ufmg.br/~michel/inicmat2010/livros/polya.pdf>

(6) Palis, Gilda de La Rocque, Pitombeira, João Bosco. Uma Equação Diofantina e Suas Resoluções. Revista do Professor de Matemática, SBM, v.19, 1991.

Acesso <http://rpm.org.br/cdrpm/19/9.htm>

(7) KILPATRICK, Jeremy. George Polya's influence on mathematics education. Mathematics Magazine, v. 60, n. 5, p. 299-300, 1987.

Kilpatrick discorre sobre o legado de Polya na arte de resolver problemas e ensinar. Segundo Kilpatrick, a atenção que Polya dava à arte de ensinar era a mesma atenção que dava à arte de resolver problemas. Polya defendia que palavras e figuras não podem substituir a experiência de estar em uma classe onde o professor resolve problemas com o aluno e lhe dá a oportunidade de aplicar o que aprendeu. Apesar de alguns professores de matemática terem adotado o que pensavam ter compreendido da abordagem de Polya na área de resolução de problemas, poucos alteraram seu ensino e reorganizaram currículos refletindo as ideias pedagógicas desafiadoras de Polya. Acesso em

www.maa.org/sites/default/files/Jeremy_Kilpatrick52328.pdf

(8) CHARNAY, Roland. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In Parra, Cecília (org). Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

Para Charnay, os problemas são disparadores da aprendizagem e não um meio para verificação da aprendizagem. Defende então uma reflexão aprofundada sobre o uso desse recurso em sala de aula e suas contribuições à aprendizagem.

Em suas palavras: "Os alunos podem ser convidados a pensarem sobre suas próprias estratégias de resolução, a compartilharem com os colegas suas idéias e perceberem outras possibilidades de resolução da mesma situação-problema. Por isso atitudes naturais dos alunos que não encontram espaço no modelo tradicional de ensino, como é o caso da curiosidade e da confiança em suas próprias idéias, passam a ser valorizadas nesse processo investigativo"

(9) Romero Danielle D'Ávila, 2007. O ensino da Matemática através da resolução de problemas. Acesso em [http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2007 / anaisEvento/arquivos/CI-238-14.pdf](http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2007/anaisEvento/arquivos/CI-238-14.pdf)

Segundo esta autora: "Apesar das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e de autores como Smole e Pozo vislumbrarem esse caminho, ainda podemos observar que são poucas as práticas em sala de aula que conseguem desenvolver essa proposta. Na verdade, os problemas estão sendo utilizados como treinos para a aplicação de conhecimentos adquiridos previamente pelos alunos. O que ocorre é o ensino de conceitos ou técnicas e então a apresentação de problemas para a verificação (por parte do professor) se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para muitos alunos, resolver problemas significa fazer cálculos com os números apresentados no enunciado.

Nesse processo mecânico em que são trabalhadas, as situações problema estão a serviço da reprodução, onde até os textos são elaborados para garantir que os alunos sigam a mesma sequência de operações. Esse ensino baseado na aprendizagem de técnicas, em que primeiro ensina-se de forma expositiva a operação a ser aplicada e em seguida solicita-se aos alunos que resolvam problemas para exercitarem os algoritmos aprendidos, tem mostrado indícios de ineficiência quanto aos objetivos de se trabalhar com resolução de problemas.”

(10) Smole, K.C.S., Resolução de Problemas e pensamento matemático. Para Viver Juntos, São Paulo, p. 12 - 13 , 01 Set. 2008.

Neste artigo, a autora enfatiza:

“Enfrentar e resolver uma situação-problema não significa apenas compreender o que é exigido, aplicar as técnicas ou fórmulas adequadas e obter a resposta correta, mas, além disso, uma atitude de investigação científica em relação aquilo que está sendo resolvido e mesmo diante da solução que se obtém.”

“Dessa forma, um problema não acaba na conferência da resposta, porque exige a discussão das soluções, a análise dos dados e, finalmente, uma revisão e o questionamento da própria situação inicial”

“Por isso, ao resolvidor, deve ficar claro que a resposta correta é tão importante quanto o processo de resolução. Ele deve perceber ainda que podem surgir diferentes soluções, que precisam ser comparadas entre si e justificadas em relação àquilo que se desejava resolver.”

(11) WALLE, John A. Van de, 2009, Matemática no ensino fundamental. (Formação de professores em sala de aula), 6ª edição. São Paulo: Artmed, 2009.

Este pesquisador defende que a Resolução de Problemas deva

ser pensada como metodologia de ensino, conferindo-lhe mais sentido e maior significado e cenário, após um longo período ensinando **sobre** resolução de problemas e ensinando matemática **para** resolver problemas.

Segundo Walle, um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta.

Nesse caso, o problema matemático passaria a ser olhado como o disparador do processo de construção do conhecimento, se tornando o elemento primeiro das aulas de Matemática, seguido da formalização de conceitos. Os conhecimentos prévios de que dispunham os alunos seriam pressupostos para a resolução de problemas e o professor o mediador do processo.

(12) Bagne, Juliana e Nacarato Adair Mendes, 2012, a prática do diálogo em sala de aula: uma condição para a elaboração conceitual matemática dos alunos. Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul, v.20, n2, p.186-214, jul./dez.

Este autor trabalha com algumas ideias de Walle ao escrever: “Concebemos, portanto, como Van de Walle (2009), que algumas posturas do professor perante a turma contribuem para que as tarefas propostas em sala se configurem como boas situações de aprendizagem. No entanto, o que é aceito como “desafio” para um grupo de alunos, pode não ser para os outros. Refletimos a respeito dessas condições, compreendendo, portanto, a importância do engajamento mútuo diante de propostas coletivas, já que o trabalho em grupos pode diminuir essas distâncias. Em tal ambiente, os alunos passam a trabalhar juntos, elaborando estratégias, avaliando-as, certificando-se de que o caminho percorrido está correto (ou precisa ser revisto), visando a solucionar a proposta das tarefas.

Além disso, quanto ao envolvimento do aluno no processo de

ensino e de aprendizagem, Van de Walle (2009, p.58) destaca que “os estudantes devem compreender que a responsabilidade para determinar se as respostas estão corretas e por que elas estão corretas também é deles”. O aluno reflete sobre as tarefas propostas e, após comprovar suas estratégias, sente que é capaz de “criar ideias significativas sobre a matemática”; enfim, aprende matemática “fazendo matemática.”

(13) CHAPMAN, Olive. Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT (2013-2015 Issues)*, v. 3, n. 1, p. 19-36, 2015.

Este autor reconhece que o conhecimento sobre o ensino de resolução de problemas é uma rede complexa de conhecimentos interligados. Em suas palavras:

“In recent years, considerable attention has been given to the knowledge teachers ought to hold for teaching mathematics. Teachers need to hold knowledge of mathematical problem solving for themselves as problem solvers and to help students to become better problem solvers. Thus, a teacher's knowledge of and for teaching problem solving must be broader than general ability in problem solving. In this article a category-based perspective is used to discuss the types of knowledge that should be included in mathematical problem-solving knowledge for teaching. In particular, what do teachers need to know to teach for problem-solving proficiency? This question is addressed based on a review of the research literature on problem solving in mathematics education. The article discusses the perspective of problem-solving proficiency that framed the review and the findings regarding six categories of knowledge that teachers ought to hold to support students' development of problem-solving proficiency. It concludes that mathematics problem-solving knowledge for teaching is a complex network of interdependent knowledge.”

Chapman apresenta, em uma tabela, resumos de modelos de resolução de problemas propostos por alguns autores além de Polya:

(14) GATTI, Bernardete A. Formação de professores: condições e problemas atuais. REVISTA INTERNACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES, v. 1, n. 2, 2016.

Essa autora fala em seu resumo:

“Preocupações com a melhor qualificação da formação de professores e com suas condições de exercício profissional não são recentes. Porém, hoje, avolumam-se essas preocupações ante o quadro agudo de desigualdades sócio-culturais que vivemos e ante os desafios que o futuro próximo parece nos colocar. A formação de quem vai formar torna-se central nos processos educativos formais – os professores - na direção da preservação de uma civilização que contenha possibilidades melhores de vida e co-participação de todos. Por isso, compreender e discutir a formação, as condições de trabalho e carreira dos professores, e, em decorrência sua configuração identitária profissional, se torna importante para a compreensão e discussão da qualidade educacional de um país, ou de uma região. Essa é a essência deste artigo.”

15) Pommer. Wagner Marcelo, 2013, Equações Diofantinas Lineares no Ensino Básico: Uma abordagem didático-epistemológica, 1ª edição, Edição do autor, SÃO PAULO.

Acesso em <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11292/1/Wagner%20Marcelo%20Pommer.pdf>

Alguns trechos retirados (às vezes resumidos) do livro de Pommer:

A intenção deste livro foi fazer uma abordagem dos principais tipos possíveis de estratégias de resolução de uma Equação Diofantina Linear. São consideradas situações-problema envolvendo implicitamente a busca de soluções inteiras da equação

$ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$, conhecida como equação diofantina linear a duas incógnitas.

O autor lembra que o termo heurística provém do latim *heuristica* e do grego *heuristiké*, significando um conjunto de regras e métodos que conduzem a arte da descoberta. Por isso, heurística, no contexto científico, se refere à área da ciência que objetiva a descoberta de fatos e conhecimentos, provendo o pesquisador de orientações ou até de um método de investigação baseado na aproximação progressiva de problemas. No contexto educacional, a heurística está diretamente ligada aos processos de aprendizagem, onde o aluno se torna um pesquisador, testando hipóteses, conjecturando, formulando e validando ideias, propiciando entorno de constituição de significados ao saber, o que remete necessariamente aos atos criativos de um ser.

Nesse sentido, heurística pode ser definida como a arte de inventar e de fazer descobertas, permitindo a aquisição de um conjunto de estratégias ou táticas de resolução de situações-problema.

A atividade heurística, definida como um esquema psíquico através do qual o homem cria, elabora e descobre a resolução de um problema, é o eixo central dos estudos sobre como o ser humano pensa, iniciados por Polya e que fundamentam a resolução de problemas, um eixo fundamental para o trabalho didático em sala de aula.”

O livro de Pommer menciona o artigo a seguir, já citado anteriormente: Roque, G. de La ; Pitombeira, J. B. Uma equação diofantina e suas resoluções. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, 1991. v. 19, p. 39-47.

Observação: As Atividades trabalhadas ao longo do curso Problemas de Primeiro Grau serão apresentadas em textos posteriores.