Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Leonardo Henrique Caldeira Pires Ferrari

Aspectos da Topologia e da Teoria dos Pontos Fixos

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Ricardo de Sá Earp

Rio de Janeiro
Junho 2017

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Leonardo Henrique Caldeira Pires Ferrari

Aspectos da Topologia e da Teoria dos Pontos Fixos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ricardo de Sá Earp
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Graham Andrew Smith
Instituto de Matemática – UFRJ

Prof. Marcos Craizer
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Nicolau Saldanha
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Renata Martins Rosa
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador do Centro Técnico Científico
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 9 de junho de 2017

Leonardo Henrique Caldeira Pires Ferrari

Graduou-se em Matemática na PUC-Rio em 2014, tendo participado de um programa de iniciação científica em 2011 e sido premiado por excelência no desempenho acadêmico em 2012.

Ficha Catalográfica

Ferrari, Leonardo Henrique Caldeira Pires

Aspectos da topologia e da teoria dos pontos fixos/ Leonardo Henrique Caldeira Pires Ferrari; orientador: Ricardo de Sá Earp. — Rio de Janeiro: PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2017.

v., 141 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Dissertação 2. Topologia geral; 3. Topologia diferencial; 4. Teoria de ponto fixo; 5. Teoria do grau; 6. Teoria dos jogos; I. Sá Earp, Ricardo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha família pelo suporte o qual a conclusão desse mestrado não teria sido possível, e em especial à minha mãe, pelo seu esforço sempre presente em prover o necessário para que eu pudesse dar continuidade à minha vida acadêmica e profissional.

Eu gostaria de agradecer também ao Departamento de Matemática da PUC-Rio, seus professores, coordenadores e secretários por todo o apoio que me deram durante o meu mestrado, e em particular ao meu orientador, Ricardo Sá Earp, pela sua disponibilidade e paciência ao lidar comigo nesses últimos dois anos, e por todos os seus sábios conselhos e sugestões que me guiaram ao longo de todo esse período.

Queria agradecer por fim aos meus colegas e amigos, que sempre me incentivaram a continuar nesse caminho escolhido, e principalmente à Yunelsy, por toda a ajuda dada com o LaTeX, sem a qual esta dissertação não teria sido concluída.

Agradeço também á FAPERJ, pelo suporte financeiro durante esse último ano de mestrado.

Resumo

Ferrari, Leonardo Henrique Caldeira Pires; Sá Earp, Ricardo. **Aspectos da Topologia e da Teoria dos Pontos Fixos**. Rio de Janeiro, 2017. 141p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esse trabalho tem como objetivo reunir os teoremas topológicos de ponto fixo clássicos e seus corolários, além de teoremas de ponto fixo provenientes da teoria do grau e algumas importantes aplicações desses teoremas a variadas áreas — desde as clássicas aplicações à teoria de EDOs e EDPs à uma aplicação à teoria dos jogos. Um exemplo é o Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff, para aplicações compactas em convexos de espaços localmente convexos, do qual segue como corolário que todo compacto convexo de um espaço vetorial normado (não necessariamente de dimensão finita) possui a propriedade do ponto fixo. No que se refere à teoria dos jogos em particular, foi deduzido o Teorema de Nash, que determina condições sobre as quais certos jogos possuem equilíbrios nos seus espaços das estratégias. Toda a topologia geral necessária nas demonstrações foi desenvolvida extensiva e detalhadamente a partir de topologia elementar, seguindo algumas das referências bibliográficas. O Teorema de Extensão de Dugundji — uma extensão do Teorema de Extensão de Tietze a fechados de espaços métricos sobre espaços localmente convexos —, por exemplo, é demonstrado com detalhes e usado diversas vezes ao longo da dissertação.

Palavras–chave

Topologia geral; Topologia diferencial; Teoria de ponto fixo; Teoria do grau; Teoria dos jogos; Teorema de extensão Dugundji; Teorema antipodal de Borsuk; Teorema do ponto fixo de Borsuk; Teorema do ponto fixo de Brouwer; Teorema do ponto fixo de Schauder; Teorema do ponto fixo de Dugundji; Equilíbrio de Nash

Abstract

Ferrari, Leonardo Henrique Caldeira Pires; Sá Earp, Ricardo (Advisor). **Aspects of Topology and Fixed Point Theory**. Rio de Janeiro, 2017. 141p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The goal of the present work is to gather the classical fixed-point theorems and their corollaries, as well as other fixed-point theorems arising from degree theory, and some important applications to diverse fields — from the classical applications to ODEs and PDEs to an application to the game theory. An example is the Schauder-Tychonoff Fixed-Point Theorem, [1] concerning compact mappings in convex subsets of locally convex spaces, from which it follows as a corollary that every compact convex subset of a normed vector space is a fixed-point space. In regard to game theory in particular, we obtained Nash's theorem, [2] which ascertains conditions over which certain games have equilibria in their strategy spaces. All general topology necessary in the proofs was developed extensively and in details from a basic topology starting point, following some of the bibliographic references. Dugundji's Extension Theorem [3] — an extension of Tietze's Extension Theorem [4] for closed subsets of metric spaces into locally convex spaces—, for instance, is obtained with detais and used throughout the dissertation.

Keywords

General topology; Differential topology; Fixed point theory; Degree theory; Game theory; Dugundji extension theorem; Borsuk antipodal theorem; Borsuk fixed-point theorem; Brouwer fixed-point theorem; Schauder fixed-point theorem; Dudundji fixed-point theorem; Nash Equilibrium

1. See 3.3.13.
2. See 3.5.5.
3. See 2.3.42.
4. See 2.1.41.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

No decorrer da disertação, os seguintes símbolos serão utilizados:

1. $\#$ será usado para representar a cardinalidade de um conjunto;
2. $\complement X$ indicará o complementar de X;
3. $\mathscr{F}(X,Y)$ é o conjunto de funções de X em Y, $\mathscr{L}(X,Y)$ é o conjunto das funções lineares de X em Y e $X^{\mathbb{N}} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, X)$;
4. $\forall X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in X$, X^* será utilizado para indicar $X - \{0\}$;
5. Seja X espaço topológico e $U \subset X$. Então $\mathrm{int}(U)$ representará o seu interior, $\overline{U}$ o seu fecho, ∂U a sua fronteira topológica e U', o seu conjunto de pontos de acumulação;
6. Para $Y \subset X$ com a topologia induzida de X, utilizarei $\mathrm{int}_Y(U)$ para representar o interior de U em Y, $\overline{U}^Y$ para seu fecho e $\partial_Y U$ a sua fronteira;
7. $\mathbb{R}^n_*$ será usado para representar $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e $\mathbb{R}^+_*$, o conjunto dos números reais estritamente positivos;
8. Para A, B conjuntos quaisquer, $C^0(A,B)$ indicará o conjunto das funções $f : A \to B$ contínuas e $C^0(A)$, o conjunto de funções $f : A \to \mathbb{R}$ contínuas;
9. Em um espaço métrico (X,d), a bola aberta de centro $x \in X$ e raio $r > 0$ será indicada por $B(x,r)$ e $S(x,r) = \partial B(x,r)$;
10. A distância entre um ponto $p \in X$ e um subconjunto não-vazio $A \subset X$ é dada por $d(p,A) = inf_{a \in A} d(p,a)$;
11. A distância entre dois subconjuntos não-vazios $A, B \subset X$ é dada por $d(A,B) = inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a,b)$;
12. O diâmetro de um subconjunto não-vazio $A \subset X$ é dado por $\mathrm{diam}(A) = sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} d(x,y)$;
13. Seja V um espaço vetorial. Então $U < V$ será utilizado para indicar que o subconjunto $U \subset V$ é um subespaço vetorial de V;

14. Para V espaço vetorial e $v_1, ..., v_n \in V$, o conjunto $\text{span}(v_1, ..., v_n)$ indicará o subespaço de V gerado pelos vetores $v_1, ..., v_n$;
15. Seja V um espaço vetorial real, $S \subset V$ um subconjunto qualquer, $v \in V$ e $t \in \mathbb{R}$. Então $v + S = S + v = \{u + v \mid u \in S\}$, $S - v = \{u - v \mid u \in S\}$ e $tS = \{tu \mid u \in S\}$;
16. Seja V espaço vetorial e $a, b \in V$. Então $[a, b]$ indicará o conjunto $\{at + b(1-t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset V$ e (a, b), o conjunto $\{at + b(1-t) \mid 0 < t < 1\} \subset V$;
17. Nesse caso, para qualquer $X \subset V$, o envelope (ou envoltória) convexo(a) de X será representado por $C_0(X)$;
18. $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ e $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n$;
19. Dado um espaço vetorial normado E, sua bola fechada unitária nesse espaço será indicada por $\mathbb{D}(E)$ e a sua esfera por $\mathbb{S}(E)$;
20. $\mathscr{L}^2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ é o conjunto das sequências reais quadrado-somáveis;
21. A homotopia entre as funções $f, g : X \to Y$ será indicada por $H : f \sim g$, isto é, $H : X \times [0, 1] \to y$ com $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$.

1
Introdução

A teoria de ponto fixo é um campo que até hoje vem sendo desenvolvido por matemáticos de diversas partes do mundo. Suas inúmeras aplicações vão desde poderosos resultados de existência e unicidade de EDOs e EDPs à teoria da medida, à teoria dos jogos e a diversas outras áreas.

O objetivo principal dessa dissertação é o de reunir os principais teoremas clássicos de ponto fixo e de obter demonstrações puramente topológicas desses teoremas. Para alcançar tal fim, todos os principais teoremas de topologia geral utilizados nas demonstrações ao longo dessa dissertação foram desenvolvidos extensamente e com grande riqueza de detalhes a partir de topologia elementar no capítulo "Fundamentos da Topologia". Aqui o leitor encontrará demonstrações de importantes teoremas, como o Lema de Urysohn, o teorema de existência da partição da unidade em espaços paracompactos,[1] o Teorema de Extensão de Tietze (aqui demonstrado para espaços paracompactos, a partir da partição da unidade, embora uma demonstração mais geral para espaços normais seja indicada), o Teorema de Tychonoff e o Lema de Riesz, utilizado indiretamente no poderoso Teorema do Ponto Fixo de Dugundji, que afirma que a bola unitária fechada de um espaço vetorial normado tem a propriedade do ponto fixo se, e somente se, o espaço for de dimensão finita. Na seção "Espaços Vetorias Normados, Espaços de Banach e Convexos", o leitor encontrará teoremas que serão frequentemente utilizados nas demonstrações dos teoremas de ponto fixo, como o Teorema de Mazur, o Teorema de Minkowski e o Teorema de Extensão de Dugundji. Além disso, na subseção "Simplexos e o Teorema de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk", após uma detalhada incursão na topologia dos simplexos, será obtido o resultado de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk — que será utilizado em sequência na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Borsuk e, mais tarde, no Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Já no capítulo "Teoremas Topológicos de Ponto Fixo e Suas Aplicações",

1. Ver 2.1.40.

o leitor encontrará demonstrações detalhadas dos clássicos teoremas de ponto fixo, como o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff e o Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder, além de diversos corolários relevantes para a teoria de ponto fixo e esboços de aplicações clássicas na teoria das EDOs e EDPs. O menos conhecido Teorema do Ponto Fixo de Dugundji também será demonstrado nessa seção, embora a partir do resultado descoberto por Dugundji em [1] de que toda esfera unitária não-compacta de um espaço vetorial normado é AR. [2] Por fim, na seção "Uma Aplicação da Teoria de Ponto Fixo à Teoria dos Jogos", será trabalhada uma aplicação menos recorrente da teoria de ponto fixo à teoria dos jogos, em particular ao famoso resultado de Nash sobre a existência de equilíbrios em jogos finitos.

Finalmente, com o objetivo de estender diversos dos teoremas vistos em Teoremas Topológicos de Ponto Fixo e Suas Aplicações e de obter novos teoremas de ponto fixo, no capítulo "Aspectos da Teoria do Grau e Aplicações a Teoremas de Ponto Fixo", serão desenvolvidos, para esse fim, uma base da teoria do grau de dimensão finita e algumas aplicações desse campo à teoria do ponto fixo, obtendo, em particular, generalizações do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e do Teorema Antipodal de Borsuk. [3] Algumas demonstrações que utilizarem amplamente resultados da topologia diferencial, contudo, serão omitidas, visto que o principal foco desse capítulo é obter novos teoremas do ponto fixo puramente topológicos. Por exemplo, o resultado topológico de que, dadas duas funções contínuas f e g quaisquer em uma esfera de dimensão par, pelo menos uma das funções f, g, $f \circ g$ tem ponto fixo. [4]

No apêndice "Demonstrações de Proposições Variadas", podem ser encontradas diversas demonstrações e detalhes de proposições que fogem ao escopo da dissertação de uma forma geral, mas que são relevantes para algum teorema demonstrado no corpo da dissertação, como os comentários sobre funções semicontínuas inferiormente (usadas na aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff ao Teorema de Nash) e detalhes dos exemplos sobre alguns espaços vetoriais normados que serão posteriormente utilizados em demonstrações. Esse apêndice está dividido nos campos da Matemática aos quais cada proposição pertence, e também se encontra devidamente referenciado e indexado quando necessário.

Conhecimentos elementares de topologia geral, análise real e álgebra linear foram supostos de conhecimento do leitor.

2. Ver 3.3.15.
3. Ver 2.4.46.
4. Ver 4.1.10.

2
Fundamentos da Topologia

2.1
Axiomas da Separação e Coberturas

2.1.1
Axiomas de Separação

Definição 2.1.1. Um espaço topológico X é dito de Hausdorff ou T_2 se, $\forall p, q \in X, p \neq q \Rightarrow \exists\, U, V$ vizinhanças de x e y, respectivamente, com $U \cap V = \emptyset$.

Proposição 2.1.2. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é de Hausdorff;
2. Seja $p \in X$. $\forall q \neq p$, $\exists\, V$ vizinhança de p tal que $q \notin \overline{V}$;
3. $\forall p \in X$, $\bigcap_{\substack{V \text{aberto} \\ p \in V}} \overline{V} = \{p\}$.

Demonstração.

$1 \Rightarrow 2$ Seja $p \in X$ e $q \neq p$. Então $\exists\, V, U$ vizinhanças respectivamente de p e q tais que $U \cap V = \emptyset \Rightarrow q \notin \overline{V}$.

$2 \Rightarrow 3$ $q \neq p \Rightarrow \exists\, V$ vizinhança de p tal que $q \notin \overline{V} \Rightarrow q \notin \bigcap_{\substack{V \text{ aberto} \\ p \in V}} \overline{V}$.

$3 \Rightarrow 1$ $q \neq p \Rightarrow q \notin \{p\} = \bigcap_{\substack{V \text{ aberto} \\ p \in V}} \overline{V} \Rightarrow \exists\, V$ vizinhança de p tal que $q \notin \overline{V}$. Tome $U = \complement\overline{V} \ni q$ conjunto aberto. $U \cap V \subset U \cap \overline{V} = \emptyset$.

$\square$

Corolário 2.1.2.1. Seja X espaço de Hausdorff e $\mathscr{B}$ uma base de abertos de X. Então, $\forall p, q \in X$ com $p \neq q$, $\exists\, A \in \mathscr{B}$ tal que $p \in A$ e $q \notin A$.

Demonstração. Como X é de Hausdorff e $q \neq p$, $\exists\, V$ vizinhança de p tal que $q \notin \overline{V}$, isto é, tal que $q \in \complement\overline{V}$. Mas $\mathscr{B}$ é base de X, logo $\exists\, A \in \mathscr{B}$ tal que $p \in A \subset V \subset \overline{V}$. Segue que $\complement\overline{V} \subset \complement A$. Então $\exists\, A \in \mathscr{B}$ tal que $p \in A$ e $q \in \complement A$. $\square$

Corolário 2.1.2.2. Seja X de Hausdorff, $p \in X$ e $\{V_\alpha\}$ uma família de vizinhanças de p tais que $\forall\, U \ni p$ aberto, $\exists\, \alpha \mid p \in V_\alpha \subset U$. Então $\bigcap_\alpha \overline{V_\alpha} = \{p\}$.

Demonstração. $\forall\, U \ni p$ aberto, $\exists\, \alpha$ tal que $p \in V_\alpha \subset U \Rightarrow \overline{V_\alpha} \subset \overline{U} \Rightarrow \bigcap_\alpha \overline{V_\alpha} \subset \overline{V_\alpha} \subset \overline{U}$. Assim, $\forall\, U \ni p$ aberto, $\bigcap_\alpha \overline{V_\alpha} \subset \overline{U}$, ou seja, $\bigcap_\alpha \overline{V_\alpha} \subset \bigcap_{\substack{U \text{aberto} \\ p \in U}} \overline{U}$. Mas, por 2.1.2, $\bigcap_{\substack{U \text{aberto} \\ p \in U}} \overline{U} = \{p\}$. Então $\bigcap_\alpha \overline{V_\alpha} \subset \bigcap_{\substack{U \text{aberto} \\ p \in U}} \overline{U} = \{p\}$. Agora, $\forall \alpha$, $p \in V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \Rightarrow p \in \bigcap_\alpha \overline{V_\alpha} \Leftrightarrow \{p\} \subset \bigcap_\alpha \overline{V_\alpha}$. Assim, temos que $\bigcap_\alpha \overline{V_\alpha} = \{p\}$. □

Corolário 2.1.2.3. Todo ponto de um espaço de Hausdorff é um conjunto fechado.

Demonstração. Todo ponto de um espaço de Hausdorff é uma intersecção de conjuntos fechados, logo fechado. □

Corolário 2.1.2.4. Todo conjunto finito de um espaço de Hausdorff é um conjunto fechado.

Demonstração. Todo conjunto finito é uma união finita de pontos, que são conjuntos fechados (conforme 2.1.2.3), sendo assim fechado também. □

Corolário 2.1.2.5. Seja X de Hausdorff e $A \subset X$. Então $x \in A'$ se, e somente se, $\forall\, U \ni x$ aberto, $U \cap A$ é infinito.

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Suponha que $\exists U \ni x$ aberto tal que $U \cap (A - \{x\}) = \{x_1, ..., x_n\}$. Como X é de Hausdorff, por 2.1.2.4, temos que $\{x_1, ..., x_n\}$ é fechado, logo $V = U \cap \complement\{x_1, ..., x_n\}$ é aberto e $x \in V$. Mas $V \cap (A - \{x\}) = U \cap \complement\{x_1, ..., x_n\} \cap (A - \{x\}) = \{x_1, ..., x_n\} \cap \complement\{x_1, ..., x_n\} = \emptyset$. Então $x \notin A'$.
- $\Leftarrow$ Suponha que $\forall\, U \ni x$ aberto, $U \cap A$ é infinito. Então $U \cap (A - \{x\}) = (U \cap A) - \{x\}$ ainda é infinito, logo não-vazio.

□

Proposição 2.1.3.

1. A imagem de um espaço de Hausdorff por uma bijeção aberta é também de Hausdorff.
2. Todo subespaço de um espaço de Hausdorff é também de Hausdorff.

Demonstração.

1. Uma bijeção leva conjuntos disjuntos em conjuntos disjuntos. Portanto, uma bijeção aberta leva vizinhanças disjuntas em vizinhanças disjuntas.

2. Seja X espaço de Hausdorff e $Y \subset X$ com a topologia induzida por X. $\forall p, q \in Y \subset X$, $\exists\, U, V$ vizinhanças respectivas de p e q em X tais que $U \cap V = \emptyset$. Então $\exists\, \tilde{U} = U \cap Y$, $\tilde{V} = V \cap Y$ abertos em Y tais que $p \in \tilde{U}$, $q \in \tilde{V}$ e $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$.

$\square$

A partir deste momento, todos os espaços deste capítulo, a menos que se especifique o contrário, devem ser considerados de Hausdorff.

Definição 2.1.4. Um espaço de Hausdorff X é dito regular ou T_3 se, $\forall p \in X$, $\forall\, F \subset X$ fechado tal que $p \notin F$, $\exists\, V$ vizinhança de p e $\exists\, U \supset F$ aberto com $U \cap V = \emptyset$.

Proposição 2.1.5. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é regular;
2. $\forall p \in X$ e $\forall\, V$ vizinhança de p, $\exists\, U$ vizinhança de p tal que $p \in U \subset \overline{U} \subset V$;
3. $\forall p \in X$ e $\forall\, F$ fechado tal que $p \notin F$, $\exists\, V$ vizinhança de p tal que $\overline{V} \cap F = \emptyset$.

Demonstração.

$1 \Rightarrow 2$ Seja $p \in X$ e V vizinhança de p. Então $p \notin \complement V$ conjunto fechado $\Rightarrow \exists\, U$ vizinhança de p e $\exists\, W \supset \complement V$ aberto com $U \cap W = \emptyset \Leftrightarrow U \subset \complement W$. Mas $\complement W$ é fechado $\Rightarrow \overline{U} \subset \complement W \subset V$.

$2 \Rightarrow 3$ $p \notin F$ conjunto fechado $\Leftrightarrow p \in \complement F$ conjunto aberto $\Rightarrow \exists\, V$ vizinhança de p tal que $\overline{V} \subset \complement F \Leftrightarrow \overline{V} \cap F = \emptyset$.

$3 \Rightarrow 1$ $p \notin F \Rightarrow \exists\, V$ vizinhança de p tal que $\overline{V} \cap F = \emptyset$. Tome $U = \complement \overline{V}$.

$\square$

Proposição 2.1.6. Todo subespaço de um espaço regular é também regular.

Demonstração. Seja X regular e $Y \subset X$. Tome $p \in Y$ e F fechado em Y tal que $p \notin F$. Então $F = \tilde{F} \cap Y$, com $\tilde{F}$ fechado, e $p \notin \tilde{F}$, pois, do contrário, $p \in F$. Pela regularidade de X, $\exists\, U, V$ abertos tais que $x \in V$, $\tilde{F} \subset U$ e $V \cap U = \emptyset$. Assim, $x \in V \cap Y$, $F = \tilde{F} \cap Y \subset U \cap Y$, $U \cap Y$ e $V \cap Y$ são abertos em Y por definição e $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$. Então Y é regular. $\square$

Proposição 2.1.7. Seja X um espaço regular. Então cada par de pontos distintos tem vizinhanças cujos fechos não se interceptam.

Demonstração. Seja $p \in X$ e $q \neq p \Leftrightarrow p \notin \{q\}$ conjunto fechado. Então, por 2.1.5, $\exists\, V$ vizinhança de p tal que $\overline{V} \cap \{q\} = \emptyset \Leftrightarrow q \notin \overline{V}$. Mas $\overline{V}$ é fechado, assim, pela regularidade de X, $\exists\, U$ vizinhança de q tal que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. □

Definição 2.1.8. Um espaço de Hausdorff X é dito <u>normal</u> ou T_4 se cada dois conjuntos fechados disjuntos tiverem vizinhanças disjuntas.

Observação 2.1.9. Naturalmente, todo conjunto normal é também regular, de acordo com 2.1.2.3.

Proposição 2.1.10. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é normal.
2. $\forall F$ fechado e $\forall\, U \supset F$ aberto, $\exists\, V$ aberto tal que $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
3. $\forall A, B$ fechados disjuntos, $\exists\, U$ aberto com $A \subset U$ e $\overline{U} \cap B = \emptyset$.
4. Cada par de conjuntos fechados disjuntos tem vizinhanças cujos fechos não se interceptam.

Demonstração.

$1 \Rightarrow 2$ Seja F fechado e $U \supset F$ aberto. Então F e $\complement U$ são dois fechados disjuntos $\Rightarrow \exists\, V, W$ abertos com $F \subset V$, $\complement U \subset W$ e $V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \subset \complement W$. Mas $\complement W$ é fechado $\Rightarrow \overline{V} \subset \complement W \subset U$.

$2 \Rightarrow 3$ Sejam A, B fechados disjuntos $\Leftrightarrow A \subset \complement B$. $\complement B$ é aberto $\Rightarrow \exists\, U$ aberto tal que $A \subset U \subset \overline{U} \subset \complement B$. Mas $\overline{U} \subset \complement B \Leftrightarrow \overline{U} \cap B = \emptyset$.

$3 \Rightarrow 4$ Sejam A, B fechados disjuntos. Logo, $\exists\, U$ com $A \subset U$ e $B \cap \overline{U} = \emptyset$. Então B e $\overline{U}$ são fechados disjuntos $\Rightarrow \exists\, V$ aberto tal que $B \subset V$ e $\overline{V} \cap \overline{U} = \emptyset$.

$4 \Rightarrow 1$ Sejam A, B fechados e U, V suas respectivas vizinhanças tais que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Então $U \cap V \subset \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset \Rightarrow U \cap V = \emptyset$.

□

Proposição 2.1.11. Todo subespaço fechado de um espaço normal é também normal.

Demonstração. Seja X um espaço normal, $Y \subset X$ um subespaço fechado com a topologia induzida por X e A, B fechados em Y. Y é fechado em $X \Rightarrow A, B$ são fechados em $X \Rightarrow \exists\, U, V$ abertos em X com $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. Tome $\tilde{U} = U \cap Y \supset A$ e $\tilde{V} = V \cap Y \supset B$. Então $\tilde{U}, \tilde{V}$ são abertos disjuntos de Y com $A \subset \tilde{U}$ e $B \subset \tilde{V}$. □

Teorema 2.1.12 (Lema de Urysohn)**.** *Seja X de Hausdorff. Então X é normal se, e somente se, $\forall\, A, B \subset Y$ fechados disjuntos, $\exists\, f : X \to \mathbb{R}$, dita <u>função de Urysohn</u>, tal que:*

1. $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in X$;
2. $f(x) = 0$, $\forall x \in A$;
3. $f(x) = 1$, $\forall x \in B$.

Demonstração.

$\Rightarrow$ Seja $R = \left\{\frac{k}{2^n} \in [0,1] \mid n, k \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{Q}$. Podemos construir uma família de abertos $\mathscr{U} = \{U_r \mid r \in R\}$ tais que:

(a) $A \subset U_r \subset \complement B$, $\forall r \in R$;

(b) $r < r' \Rightarrow \overline{U_r} \subset U_{r'}$.

Basta definir $U_1 = \complement B$, $\mathscr{U}_0 = \{U_1\}$ e U_0 um aberto satisfazendo $A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset \complement B$ (que sempre existe, dada a normalidade de X, por 2.1.10), e dado $\mathscr{U}_m = \left\{U_{\frac{k}{2^m}} \mid k = 0, ..., 2^m\right\}$ satisfazendo as propriedades acima, definir $\mathscr{U}_{m+1} \supset \mathscr{U}_m$ tomando, para cada k ímpar, um $U_{\frac{k}{2^{m+1}}}$ tal que $\overline{U_{\frac{k-1}{2^m}}} \subset U_{\frac{k}{2^{m+1}}} \subset \overline{U_{\frac{k}{2^{m+1}}}} \subset U_{\frac{k+1}{2^m}}$ (que sempre existe, pois X é normal e, para k ímpar, $\left\{U_{\frac{k-1}{2^m}}, U_{\frac{k+1}{2^m}}\right\} \subset \mathscr{U}_m$ e $k-1 < k+1 \Rightarrow \overline{U_{\frac{k-1}{2^m}}} \subset U_{\frac{k+1}{2^m}}$). Pondo $\mathscr{U} = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathscr{U}_m$, definimos então $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in R \mid x \in U_r\} & \text{se } x \notin B, \\ 1 & \text{se } x \in B, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Temos que $f(X) \subset [0,1]$, $f(B) = \{1\}$ e $f(A) = \{0\}$ (pois $A \subset U_0$). Falta, portanto, provar a continuidade. Note, primeiramente, que $y \in U_r \Rightarrow f(y) \leq r$ e $y \notin U_r \Rightarrow f(y) \geq r$ (pois $r' < r \Rightarrow U_{r'} \subset U_r$, logo $y \notin U_r \Rightarrow y \notin U_{r'}, \forall r' < r$). Seja $f(y_0) = r_0$ e tome qualquer $W = (r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon)$ vizinhança de r_0. Temos três casos possíveis:

(a) Caso $r_0 = 0$: Tome $r \in (0, \epsilon)$. Então $f(U_r) \subset [0, r] \subset (-\epsilon, \epsilon) = W$.

(b) Caso $r_0 = 1$: Tome $r \in (1-\epsilon, 1)$. Então $f(\complement\overline{U_r}) \subset [r, 1] \subset (1-\epsilon, 1+\epsilon) = W$.

(c) Caso $r_0 \in (0,1)$: Tome r, r' tais que $r_0 - \epsilon < r < r_0 < r' < r_0 + \epsilon$. Então $f(U_{r'} - U_r) \subset [r, r'] \subset (r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon) = W$.

$\Leftarrow$ Sejam A, B fechados e $f : X \to \mathbb{R}$ sua função de Urysohn associada. $\mathbb{R}$ é espaço de Hausdorff $\Rightarrow \exists \tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}$ vizinhanças disjuntas de 0 e 1, respectivamente. Tome $U = f^{-1}(\tilde{U})$ e $V = f^{-1}(\tilde{V})$. $f(A) = \{0\} \Rightarrow A \subset f^{-1}\big(f(A)\big) \subset f^{-1}(0) \subset f^{-1}(\tilde{U})$. Analogamente, $B \subset f^{-1}(\tilde{V})$. Mas f é contínua e $\tilde{U}, \tilde{V}$ são abertos $\Rightarrow U, V$ são abertos. Como $\tilde{U}, \tilde{V}$ são disjuntos, U, V também o são, logo são vizinhanças disjuntas de A e B.

□

Observação. É possível reformular o Lema de Urysohn da seguinte forma: X é normal se, e somente se, $\forall\, F$ fechado e $U \supset F$ aberto, $\exists\, f : X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in X$;
2. $f(x) = 1$, $\forall x \in F$;
3. $f(x) = 0$, $\forall x \notin U$.

Apesar de essencialmente idêntica, essa formulação é mais útil em certas ocasiões.

Definição 2.1.13. Um espaço de Hausdorff X é dito completamente regular ou de Tychonoff se, $\forall p \in X$ e $\forall\, F$ fechado tal que $p \notin F$, $\exists\, \phi : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ contínua com $\phi(p) = 1$ e $\phi(x) = 0$, $\forall x \in F$.

Teorema 2.1.14. *Todo espaço completamente regular X é também regular.*

Demonstração. Seja X completamente regular, $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $p \notin F$. Defina $\phi : X \to [0,1]$ função de Urysohn associada (conforme o Lema de Urysohn) e tome $U = \phi^{-1}\Big((1-\epsilon, 1]\Big)$ para algum $\epsilon \in (0,1)$. Segue que

$$\overline{U} = \overline{\phi^{-1}\Big((1-\epsilon, 1]\Big)} = \phi^{-1}\Big(\overline{(1-\epsilon, 1]}\Big) = \phi^{-1}\Big([1-\epsilon, 1]\Big)$$

ou seja, $\overline{U} \cap F = \emptyset$, pois $F \subset \phi^{-1}(0)$. Além disso, $p \in U$, pois $\phi(p) = 1$. Finalmente, $(1-\epsilon, 1]$ é um aberto de $[0,1]$, logo, pela continuidade de ϕ, temos que U é aberto. Então U é aberto tal que $p \in U$ e $\overline{U} \cap F = \emptyset$. Segue, por 2.1.5, que X é regular. $\square$

Teorema 2.1.15. *Todo espaço normal é também completamente regular.*

Demonstração. Seja X um espaço normal, $p \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $p \notin F$. X é de Hausdorff $\Rightarrow \{p\}$ é fechado $\Rightarrow \exists\, f : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ função de Urysohn associada (conforme o Lema de Urysohn) $\Rightarrow f(x) = 0$, $\forall x \in F$ e $f(x) = 1, \forall x \in \{p\} \Leftrightarrow f(p) = 1$. $\square$

Proposição 2.1.16. Todo subespaço de um espaço completamente regular é também completamente regular.

Demonstração. Seja X completamente regular e $Y \subset X$ um subespaço qualquer. Sejam $p \in Y$ e F fechado em Y tal que $p \notin F$. Então $F = \tilde{F} \cap Y$, onde $\tilde{F}$ é um fechado de X tal que $p \notin \tilde{F}$ (do contrário, $p \in F$). Logo, $\exists\, \tilde{\phi} : X \to [0,1]$ com $\tilde{\phi}(p) = 1$ e $\tilde{\phi}(x) = 0$, $\forall x \in \tilde{F}$. Defina $\phi = \tilde{\phi}|_Y : Y \to [0,1]$. Temos que $\tilde{\phi}$ é contínua $\Rightarrow \phi$ é contínua, $\phi(p) = \tilde{\phi}(p) = 1$ e $\phi(F) = \tilde{\phi}(F) \subset \tilde{\phi}(\tilde{F}) = \{0\}$. $\square$

Definição 2.1.17. Um espaço de Hausdorff X é separável se contiver um conjunto enumerável denso.

Proposição 2.1.18.

1. A imagem por uma função contínua e sobrejetiva de um espaço separável é também separável.
2. Todo subespaço aberto de um espaço separável é também separável.

Demonstração.

1. Seja $f : X \to Y$ contínua e sobrejetiva e seja $D \subset X$ enumerável denso. Então $Y = f(X) = f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$. Além disso, a imagem de um conjunto enumerável é também enumerável.
2. Seja $A \subset X$ aberto e $D \subset X$ enumerável denso. $D \cap A \subset A$ é enumerável. Tome, então, U aberto em A. A é aberto $\Rightarrow U$ é aberto. Mas D é denso em $X \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset \Rightarrow U \cap (A \cap D) = U \cap D \neq \emptyset$ (pois $U \subset A$). Logo, $D \cap A$ é denso em A.

$\square$

2.1.2
Coberturas

Definição 2.1.19. Seja X um conjunto qualquer. Uma família de subconjuntos $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ é chamada de <u>cobertura</u> de X quando $\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha = X$. Uma cobertura é dita <u>aberta</u> quando cada um de seus elemtnso é um aberto e <u>fechada</u> quando são fechados.

Definição 2.1.20. Uma cobertura $\mathscr{C}$ de X é chamada de <u>irredutível</u> quando, $\forall \mathscr{C}' \subsetneq \mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ não é cobertura de X.

Proposição 2.1.21. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ uma cobertura irredutível de X. Então, $\forall \alpha \in \mathscr{A}$, $\exists x_\alpha \in U_\alpha$ tal que $\alpha' \neq \alpha \Rightarrow x_\alpha \notin U_{\alpha'}$ (isto é, cada elemento da cobertura contém um ponto que não pertece a nenhum dos outros).

Demonstração. Suponha que $\exists \alpha_0 \in \mathscr{A}$ tal que $\forall x \in U_{\alpha_0}$, $\exists \alpha \neq \alpha_0$ tal que $x \in U_\alpha$. Então $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A} - \{\alpha_0\}} \subsetneq \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ ainda é uma cobertura de X, isto é, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ não é irredutível. $\square$

Definição 2.1.22. Uma cobertura $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ é chamada de <u>partição</u> quando $\alpha \neq \beta \Rightarrow A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$.

Proposição 2.1.23. As componentes conexas de um espaço topológico constituem uma partição desse espaço.

Demonstração. As componentes conexas definem uma relação de equivalência, onde $xEy \Leftrightarrow x \in C_y$ (sendo C_y a componente conexa de X que contem y). Então temos que $\{C_x \mid x \in X\}$ é uma partição de X. $\square$

Definição 2.1.24. Uma família $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ de conjuntos em um espaço topológico X é dita <u>pontualmente finita</u> se, $\forall x \in X$, o conjunto $\{\alpha \in \mathscr{A} \mid x \in A_\alpha\}$ é finito, isto é, cada ponto do conjunto pertence a apenas um número finito de elementos da cobertura.

Definição 2.1.25. Uma família $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ de conjuntos em um espaço topológico X é dita <u>localmente finita</u> se, $\forall x \in X$, $\exists\, V$ vizinhança de x tal que o conjunto $\{\alpha \in \mathscr{A} \mid V \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$ é finito.

Proposição 2.1.26. Seja $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ uma família localmente finita em X. Então:

1. $\{\overline{A_\alpha} \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ é também localmente finita;
2. $\forall \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, $\overline{\bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} A_\beta} = \bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} \overline{A_\beta}$.

Demonstração.

1. $\forall x \in X$, $\exists V_x$ vizinhança de x tal que $\{\alpha \in \mathscr{A} \mid V_x \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$ é finito. Mas $A_\alpha \cap V_x = \emptyset \Leftrightarrow A_\alpha \subset \complement V_x \Rightarrow \overline{A_\alpha} \subset \complement V_x \Leftrightarrow \overline{A_\alpha} \cap V_x = \emptyset$, logo $\{\alpha \in \mathscr{A} \mid V_x \cap \overline{A_\alpha} \neq \emptyset\} \subset \{\alpha \in \mathscr{A} \mid V_x \cap A_\alpha \neq \emptyset\}$ é finito.
2. Seja $B = \bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} \overline{A_\alpha}$. $\{\overline{A_\alpha} \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ é localmente finito $\Rightarrow \forall x \notin B$, $\exists\, V_x$ vizinhança de x tal que $\{\beta \in \mathscr{B} \mid V_x \cap \overline{A_\beta} \neq \emptyset\} = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$. Mas $x \notin B \Rightarrow x \notin \overline{A_{\beta_i}}$, para $i = 1, ..., n \Rightarrow x \in U = V_x \cap \bigcap_{i=1}^{n} \complement \overline{A_{\beta_i}}$. Como $V_x \cap B = \bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} \left(\overline{A_\beta} \cap V_x\right) = \bigcup_{i=0}^{n} \left(\overline{A_{\beta_i}} \cap V_x\right)$, temos que $U \cap B = \emptyset \Rightarrow U$ é uma vizinhança de x tal que $U \subset \complement B$. Então, $\forall x \notin B$, $\exists\, U$ vizinhança de $x \mid U \subset \complement B \Rightarrow \complement B$ é aberto $\Leftrightarrow B$ é fechado. Mas $\bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} A_\beta \subset B \subset \overline{\bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} A_\beta} \Rightarrow B = \overline{\bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} A_\beta}$.

□

Definição 2.1.27. Sejam $\mathscr{C}_1 = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ e $\mathscr{C}_2 = \{B_\beta \mid \beta \in \mathscr{B}\}$ duas coberturas de X. $\mathscr{C}_1$ é chamada de <u>refinamento</u> de $\mathscr{C}_2$ quando, $\forall\, A_\alpha \in \mathscr{C}_1$, $\exists\, B_\beta \in \mathscr{C}_2$ com $A_\alpha \subset B_\beta$. Escreve-se, nesse caso, que $\mathscr{C}_1 \prec \mathscr{C}_2$.
Um refinamento $\{B_\beta\}_{\beta \in \mathscr{B}}$ de $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ é chamado de <u>preciso</u> se $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ e $B_\alpha \in A_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathscr{A}$.

Observação 2.1.28. Se uma cobertura $\{A_\alpha\}$ de X admitir um refinamento $\{B_\beta\}$, então ela admite também um refinamento preciso $\{C_\alpha\}$. Além disso, se $\{B_\beta\}$ for aberto ou localmente finito, então $\{C_\alpha\}$ pode ser escolhido de modo a possuir também tais propriedades.

Demonstração. Defina o função $\phi : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ escolhendo, para cada $\beta \in \mathscr{B}$, algum $\alpha \in \mathscr{A}$ tal que $B_\beta \in A_\alpha$. Agora, $\forall \alpha \in \mathscr{A}$, defina $C_\alpha = \bigcup_{\beta \in \phi^{-1}(\alpha)} B_\beta$ (alguns C_α podendo ser vazios). Evidentemente, os C_α são abertos quando todos os B_β o são. Além disso, como $\phi(\beta) = \alpha \Rightarrow B_\beta \in A_\alpha$, temos que $C_\alpha \in A_\alpha$. Ainda mais, $\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} C_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} \bigcup_{\beta \in \phi^{-1}(\alpha)} B_\beta = \bigcup_{\beta \in \mathscr{B}} B_\beta = X$, ou seja, $\{C_\alpha\}$ é cobertura de X. Finalmente, como $C_\alpha \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists \beta \in \phi^{-1}(\alpha)$ tal que $B_\beta \neq \emptyset$, temos que

$$\#\{\alpha \in \mathscr{A} \mid C_\alpha \cap V \neq \emptyset\} < \#\{\beta \in \mathscr{B} \mid B_\beta \cap V \neq \emptyset\}$$

Assim, se $\{B_\beta\}$ for localmente finito, $\forall x \in X$, $\exists\, V$ vizinhança de x tal que $\{\beta \in \mathscr{B} \mid B_\beta \cap V \neq \emptyset\}$ é finito $\Rightarrow \{\alpha \in \mathscr{A} \mid C_\alpha \cap V \neq \emptyset\}$ é finito. Segue que $\{C_\alpha\}$ é também localmente finito. □

Proposição 2.1.29 (Lema do Encolhimento)**.** Seja X espaço normal X e $\{U_i\}_{i=1}^n$ uma cobertura aberta finita de X. Então $\exists\, \{V_i\}_{i=1}^n$ refinamento aberto preciso de $\{U_i\}$ tal que, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\overline{V_i} \subset U_i$ e $U_i \neq \emptyset \Rightarrow V_i \neq \emptyset$. Esse refinamento é chamado de <u>encolhimento</u> aberto de $\{U_i\}$.

Demonstração. Seja X normal e $\{U_i\}_{i=1}^n$ uma cobertura aberta de X. Então $\complement \bigcup_{i=2}^n U_i$ é fechado e $\complement \bigcup_{i=2}^n U_i \subset U_1$, pois $U_1 \cup \bigcup_{i=2}^n U_i = X$. Tome, conforme 2.1.10, V_1 aberto tal que $\complement \bigcup_{i=2}^n U_i \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$. Ainda mais, se $U_1 \neq \emptyset$, escolha $V_1 \neq \emptyset$ (sempre existe um tal V_1, pois mesmo se $\complement \bigcup_{i=2}^n U_i = \emptyset$, podemos tomar $p \in U_1$ e, consequentemente, V_1 aberto tal que $p \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1 \Rightarrow V_1 \neq \emptyset$). Então $V_1 \cup \bigcup_{i=2}^n U_i = X$, ou seja, $\{V_1, U_2, ..., U_n\}$ cobre X.
Suponha, agora, que $\{V_1, ..., V_{k-1}, U_k, ..., U_n\}$ cobre X. Então $F = \complement\Big(\bigcup_{i=1}^{k-1} V_i \cup \bigcup_{i=k+1}^n U_i\Big)$ é fechado e $F \subset U_k$. Logo, $\exists\, V_k$ aberto tal que $F \subset V_k \subset \overline{V_k} \subset U_k$. Analogamente, se $U_k \neq \emptyset$, podemos tomar $V_k \neq \emptyset$. Então $V_k \cup \complement F = X$, isto é, $\{V_1, ..., V_k, U_{k+1}, ..., U_n\}$ cobre X. Assim, por indução, temos que $\exists \{V_1, ..., V_n\}$ é cobertura de X. □

Corolário 2.1.29.1. *Toda cobertura aberta finita de um espaço normal admite um encolhimento fechado.*

Demonstração. Seja X normal e $\{U_i\}_{i=1}^n$ cobertura aberta finita. Então $\exists\, \{V_i\}_{i=1}^n$ refinamento tal que $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\overline{V_i} \subset U_i$ e $U_i \neq \emptyset \Rightarrow V_i \neq \emptyset$. Considere, assim, a família $\left\{\overline{V_i}\right\}_{i=1}^n$. Temos que $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \supset \bigcup_{i=1}^n V_i \supset X$ e $U_i \neq \emptyset \Rightarrow \overline{V_i} \supset V_i \neq \emptyset \Rightarrow \overline{V_i} \neq \emptyset$. Logo, $\left\{\overline{V_i}\right\}_{i=1}^n$ é encolhimento fechado de $\{U_i\}$. □

Observação 2.1.30. Usando o axioma da escolha, o Lema do Encolhimento pode ser generalizado em espaços normais para qualquer cobertura pontualmente finita. [1]

1. Vide [2, VII-6, p.152-3].

Definição 2.1.31. Um espaço de Hausdorff X é metacompacto se cada cobertura aberta de X admitir um refinamento aberto pontualmente finito.

Definição 2.1.32. Um espaço de Hausdorff X é paracompacto se cada cobertura aberta de X admitir um refinamento aberto localmente finito.

Observação 2.1.33. Evidentemente, todo paracompacto é também metacompacto.

Proposição 2.1.34. Seja X paracompacto. Então toda cobertura aberta de X admite refinamento aberto localmente finito preciso.

Demonstração. Toda cobertura aberta de X admite um refinamento aberto localmente finito. Assim, por 2.1.28, toda cobertura aberta admite também um refinamento aberto localmente finito preciso. $\square$

Teorema 2.1.35. *Todo espaço paracompacto é normal.*

Demonstração. Seja X um espaço paracompacto. Veremos primeiro que X é regular. Tome $F \subset X$ fechado e $p \notin F$. Como X é de Hausdorff, por 2.1.2, $\forall x \in F$, $\exists\, V_x$ vizinhança de x tal que $p \notin \overline{V_x}$. Mas $\{V_x \mid x \in F\}$ é uma cobertura aberta de $F \Rightarrow \{V_x \mid x \in F\} \cup \{\complement F\}$ é uma cobertura aberta de X paracompacto. Então podemos obter, conforme 2.1.34, um refinamento aberto localmente finito preciso $\mathscr{C} = \{U_x \mid x \in F\} \cup \{A\}$. Mas $A \subset \complement F$ e $\mathscr{C}$ cobre $X \Rightarrow \{U_x \mid x \in F\}$ cobre F. Ponha então $W = \bigcup_{x\in F} U_x \Rightarrow W$ é aberto e $F \subset W$. Como $\mathscr{C}$ é localmente finito temos que $\overline{W} = \bigcup_{x\in F} \overline{U_x}$ (conforme 2.1.26). Mas $p \notin \overline{V_x} \supset \overline{U_x} \Rightarrow p \notin \overline{U_x}$, $\forall x \in F \Rightarrow p \notin \overline{W}$. Assim, $\forall\, F \subset X$ fechado e $\forall p \notin F$, $\exists\, W$ aberto tal que $F \subset W$ e $p \notin \overline{W}$. Então, por 2.1.5, X é um espaço regular.
Tome, agora, $A, B \subset X$ fechados disjuntos. X é regular $\Rightarrow \forall x \in A$, $\exists V_x$ vizinhança de x tal que $\overline{V_x} \cap B = \emptyset$. Analogamente, $\{V_x \mid x \in A\} \cup \{\complement B\}$ é uma cobertura de X paracompacto, então obtemos um refinamento localmente finito preciso $\{U_x \mid x \in A\} \cup \{D\}$. Pondo $W = \bigcup_{x\in A} U_x$, temos que W é aberto, $A \subset W$ e $\overline{W} = \bigcup_{x\in A} \overline{U_x}$. Mas $\overline{U_x} \subset \overline{V_x}$ e $\overline{V_x} \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{U_x} \cap B = \emptyset$, $\forall x \in A$. Então $\overline{W} \cap B = \emptyset$. Logo, $\forall\, A, B \subset X$, $\exists\, W$ aberto tal que $A \subset W$ e $B \cap \overline{W} = \emptyset \Rightarrow X$ é normal (conforme 2.1.10). $\square$

Proposição 2.1.36. Todo subespaço fechado de um espaço paracompacto é paracompacto também.

Demonstração. Seja X paracompacto, $F \subset X$ fechado e $\mathscr{C}$ uma cobertura aberta de F. Então $F \subset \bigcup_{A \in \mathscr{C}} A \Rightarrow \mathscr{C} \cup \{\complement F\}$ é cobertura de X. Logo, por 2.1.34, admite refinamento localmente finito preciso $\mathscr{C}' \cup \{U\}$, onde $U \subset \complement F$. Mas $U \cup \bigcup_{A \in \mathscr{C}'} = X \Rightarrow F \subset \complement U \subset \bigcup_{A \in \mathscr{C}'}$, ou seja, $\mathscr{C}'$ é uma cobertura localmente finita de F com $\mathscr{C}' \prec \mathscr{C}$. Então F é paracompacto. $\square$

Definição 2.1.37. Seja X um espaço topológico e $f : X \to \mathbb{R}$. O suporte de f é o conjunto $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$. Note que $x \notin \operatorname{supp}(f) \Leftrightarrow \exists V$ vizinhança de x tal que $f|_V \equiv 0$.

Definição 2.1.38. Seja X um espaço de Hausdorff. Uma família de funções contínuas $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}\}$ é chamada de partição da unidade se:

1. $\{\operatorname{supp}(f_\alpha)\}_\alpha$ é uma cobertura fechada localmente finita de X;
2. $\sum_\alpha f_\alpha \equiv 1$ (essa soma faz sentido porque cada $x \in X$ pertence apenas a um número finito de suportes de f_α).

Definição 2.1.39. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta do espaço X e $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade de X. Diz-se que $\{f_\alpha\}$ está subordinada a $\{U_\alpha\}$ se, $\forall \alpha \in \mathscr{A}$, $\operatorname{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha$.

Teorema 2.1.40. *Seja X paracompacto. Então cada cobertura aberta de X admite uma partição da unidade subordinada.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X. Por 2.1.34, podemos obter um refinamento aberto localmente finito preciso $\{\tilde{U}_\alpha\}$. Como, por 2.1.35, temos que X é normal, podemos obter deste refinamento um outro refinamento aberto localmente finito $\{V_\alpha\}$ tal que $\overline{V_\alpha} \subset \tilde{U}_\alpha$ (conforme 2.1.30), que por sua vez admite um refinamento aberto localmente finito $\{W_\alpha\}$ com $\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$. Temos, então, coberturas abertas localmente finitas $\{V_\alpha\}$, $\{W_\alpha\}$ tais que $W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$.
Agora, pelo Lema de Urysohn, para todo α, podemos obter uma função de Urysohn $g_\alpha : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ com $g_\alpha|_{\overline{W_\alpha}} \equiv 1$ e $g_\alpha|_{\complement V_\alpha} \equiv 0$ (pomos $g_\alpha \equiv 0$ se $V_\alpha = \emptyset$). Então $g_\alpha(x) \neq 0 \Rightarrow x \in V_\alpha \Rightarrow \operatorname{supp}(g_\alpha) = \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha \Rightarrow \left\{\operatorname{supp}(g_\alpha)\right\}$ é localmente finito. Como $\left\{\overline{W_\alpha}\right\}$ é cobertura de X, $\forall x \in X, \exists\, \alpha$ tal que $x \in \overline{W_\alpha} \Leftrightarrow \forall x \in X, \exists\, \alpha$ tal que $g_\alpha(x) \neq 0$. Além disso, $\{V_\alpha\}$ é localmente finita $\Rightarrow \forall x \in X, \exists\, V$ vizinhança de x tal que $\{\alpha \mid V \cap V_\alpha \neq \emptyset\}$ é finito, ou seja, existem finitos g_α que não se anulam em V. Então $\sum_\alpha g_\alpha$ está bem definida e nunca se anula em X. Além disso, $\forall x \in X$, $\exists\, V$ vizinhança de X tal que $\sum_\alpha g_\alpha = \sum_{i=1}^n g_i$ em V. Como cada g_α é conínua e $\sum_\alpha g_\alpha$ é, localmente, a soma de finitas g_α, segue que $\sum_\alpha g_\alpha$ é contínua em X.
Defina, então, $f_\alpha = \frac{g_\alpha}{\sum_\alpha g_\alpha}$. Como g_α e $\sum_\alpha g_\alpha$ são contínuas e $\sum_\alpha g_\alpha$ nunca se

anula, temos que f_α é contínua em X. Além disso, $\operatorname{supp}(f_\alpha) = \operatorname{supp}(g_\alpha) \Rightarrow \Big\{\operatorname{supp}(f_\alpha)\Big\}$ é localmente finito. Finalmente, $\sum_\alpha f_\alpha = \frac{\sum_\alpha g_\alpha}{\sum_\alpha g_\alpha} \equiv 1$. Então $\{f_\alpha\}$ é uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$, uma vez que $\operatorname{supp}(f_\alpha) = \operatorname{supp}(g_\alpha) = \overline{W_\alpha} \subset U_\alpha$. $\square$

Teorema 2.1.41 (Teorema de Extensão de Tietze)**.** *Seja X paracompacto. Então $\forall\, A \subset X$ fechado, $\forall\, U$ aberto com $A \subset U$ e $\forall\, f : A \to \mathbb{R}$ contínua, $\exists\, F : U \to \mathbb{R}$ função contínua tal que $F|_A = f$ (F é chamada de extensão contínua de f).*

Demonstração. f é contínua em A não-aberto $\Leftrightarrow \forall a \in A$, $\exists\, V_a \subset U$ vizinhança de a e $\exists\, g_a : V_a \to \mathbb{R}$ contínua tal que $g_a|_{V_a \cap A} = f_{V_a \cap A}$. Mas $\{V_a\}_{x\in A}$ é cobertura de $A \Rightarrow \{V_a\} \cup \{\complement A\}$ é cobertura de X paracompacto. Então, por 2.1.40, existe $\{\theta_a\} \cup \{\phi\}$ partição da unidade associada á cobertura, com $\operatorname{supp}(\theta_a) \subset V_a$ possivelmente vazio, $\operatorname{supp}(\phi) \subset \complement A$ e $\{\operatorname{supp}(\theta_a)\} \cup \{\operatorname{supp}(\phi)\}$ localmente finito. Como $x \in A \Leftrightarrow x \notin \complement A \supset \operatorname{supp}(\phi)$, para todo $x \in A$, temos que $\phi(x) = 0$ e $1 = \sum_{a\in A} \theta_a(x) + \phi(x) = \sum_{a\in A} \theta_a(x)$, ou seja, $\Big(\sum_{a\in A} \theta_a\Big)|_A \equiv 1$. Além disso, $\forall a \in A$, $\theta_a g_a : U \to \mathbb{R}$ está definida e é contínua, pois $x \notin V_a \Rightarrow \theta_a(x) = 0 \Rightarrow \Big(\theta_a g_a\Big)(x) = 0$. Finalmente, se $x \in U - \bigcup_{a\in A} V_a$, temos que $\forall a \in A$, $x \notin V_a \Rightarrow \forall a \in A$, $\theta_a(x) = 0$.
Defina, assim, $F = \sum_{a\in A} \theta_a g_a : U \to \mathbb{R}$. Então F é contínua em $\bigcup_{a\in A} V_a$, pois é localmente soma finita de funções contínuas, e $x \in A \Rightarrow \sum_{a\in A} \theta_a(x) f_a(x) = \sum_{a\in A} \theta_a(x) f(x) = f(x) \sum_{a\in A} \theta_a(x) = f(x)$, ou seja, $F|_A = f$. Como $x \in U - \bigcup_{a\in A} V_a \Rightarrow \theta_a(x) = 0$, $\forall a \in A$, segue que F é contínua em U. $\square$

Definição 2.1.42. Um espaço de Hausdorff X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade se tiver uma base enumerável de vizinhanças em cada ponto, ou, mais formalmente, se $\forall x \in X$, $\exists\, \{V_n(x)\}$ família enumerável de vizinhanças tal que, $\forall\, U \ni x$ aberto, $\exists n \mid V_n(x) \subset U$.

Observação 2.1.43. Evidentemente, todo subconjunto de um conjunto que satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade também o satisfaz, visto que essa é uma propriedade pontual.

Proposição 2.1.44. Seja X satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade e $x \in X$. Então $\exists\, \{U_n\}$ base enumerável de vizinhanças de x tal que $U_n \supset U_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $\{V_n\}$ uma base enumerável de vizinhanças de x. Defina, assim, $U_n = \bigcap_{k=1}^n V_k$. Temos que $x \in V_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\forall U \ni x$ aberto, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_n \subset U \Rightarrow x \in U_n \subset V_n \subset U$. Então $\{U_n\}$ é base enumerável de vizinhanças de x com $U_{n+1} \subset U_n$. $\square$

Definição 2.1.45. Um espaço de Hausdorff X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade se tiver uma base enumerável de abertos.

Proposição 2.1.46. Todo conjunto que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade satisfaz também o primeiro axioma da enumerabilidade.

Demonstração. Seja $\mathscr{B}$ uma base enumerável de abertos de X, e defina $\mathscr{B}_x = \{U \in \mathscr{B} \mid U \ni x\} \subset \mathscr{B}$. Evidentemente, $\mathscr{B}_x$ é enumerável. Além disso, $\forall A \ni x$ aberto em X, $\exists\, U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U \subset A \Rightarrow U \in \mathscr{B}_x$, ou seja, $\exists\, U \in \mathscr{B}_x$ tal que $x \in U \subset A$. Então $\mathscr{B}_x$ é base enumerável de vizinhanças de x. $\square$

Proposição 2.1.47. Seja X satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade. Então $\exists\, \{U_n\}$ cobertura aberta enumerável de X tal que $U_n \subset U_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $\{V_n\}$ uma base enumerável de abertos de X. Defina, assim, $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$. Temos que $\forall x \in X$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_n \Rightarrow \forall x \in X$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n$. Então $\{U_n\}$ é uma cobertura aberta enumerável de X tal que $U_n \subset U_{n+1}$. $\square$

Proposição 2.1.48. Todo subespaço de um espaço que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade é também o satisfaz.

Demonstração. Seja X um espaço satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade, $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ uma base enumerável de X e $Y \subset X$. $\forall\, A \subset Y$ aberto em Y, $\exists\, U \subset X$ aberto tal que $A = U \cap Y$. Mas $\Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_{n_i} \cap Y)$. Então $\{U_n \cap Y \mid n \in \mathbb{N}\}$ é uma base enumerável de abertos de $Y \Rightarrow Y$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. $\square$

Teorema 2.1.49. *Todo espaço que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade é separável.*

Demonstração. Seja $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ uma base enumerável de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $x_n \in U_n$. Temos que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável. Além disso, para cada aberto não-vazio $U \subset X$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subset U$. Segue que $\forall U$ aberto não-vazio de X, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, isto é, $U \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$. Então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em X. $\square$

Definição 2.1.50. Seja $\mathscr{C}$ uma cobertura de um espaço topológico X. Uma subcobertura de $\mathscr{C}$ é um subconjunto de $\mathscr{C}$ que ainda é uma cobertura de X.

Observação. Toda subcobertura de uma cobertura é também um refinamento dessa cobertura. Basta observar que, dado uma cobertura $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$, toda subcobertura é da forma $\{U_\beta \mid \beta \in \mathscr{B}\}$ com $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Então, $\forall \beta \in \mathscr{B}$, $\exists \alpha = \beta \in \mathscr{A}$ tal que $U_\beta \subset U_\alpha$.

Proposição 2.1.51. Toda base de abertos de um espaço topológico (portanto cobertura) admite uma subcobertura que é refinamento de uma cobertura aberta qualquer.

Demonstração. Seja $\mathscr{B}$ um base de abertos do espaço X e tome $\mathscr{U}$ cobertura aberta de X. Defina $\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{B} \mid A \subset U$ para algum $U \in \mathscr{U}\}$. $\forall x \in X$, $\exists\, U \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U$. Mas $\mathscr{B}$ é base $\Rightarrow \exists\, A \in \mathscr{B}$ tal que $x \in A \subset U$. Então $A \in \mathscr{A}$. Logo, $\forall x \in X$, $\exists\, A \in \mathscr{A}$ tal que $x \in A$, ou seja, $\mathscr{A}$ cobre X. Como $\mathscr{B}$ é também cobertura, $\mathscr{A}$ é subcobertura de $\mathscr{B}$. E $\mathscr{A}$ é refinamento de $\mathscr{U}$ por construção. □

Proposição 2.1.52. Toda cobertura pontualmente finita de um espaço topológico tem uma subcobertura irredutível. [2]

Definição 2.1.53. Um espaço de Hausdorff X é dito de Lindelöf se toda cobertura aberta de X tiver uma subcobertura enumerável.

Proposição 2.1.54. Todo subespaço fechado de um espaço de Lindelöf é também de Lindelöf.

Demonstração. Seja X de Lindelöf, $F \subset X$ fechado e $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de F. Suponha que $\{U_\alpha\}$ não cobre X (se cobrir, o resultado decorre trivialmente). Então $\{U_\alpha\} \cup \{\complement F\}$ é uma cobertura de X, logo admite subcobertura enumerável $\mathscr{C} \subset \{U_\alpha\} \cup \{\complement F\}$. Suponha que $\{\complement F\} \notin \mathscr{C}$. Teríamos, nesse caso, que $\mathscr{C} \subset \{U_\alpha\} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathscr{C}} U \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \subsetneq X \Rightarrow \mathscr{C}$ não cobre X, um absurdo. Logo, $\{\complement F\} \in \mathscr{C}$. Então $\mathscr{C} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\complement F\}$, onde $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{U_\alpha\}$ é enumerável e cobre F, pois $\mathscr{C}$ cobre X e $\complement F \cap F = \emptyset$. Logo, toda cobertura aberta de F admite subcobertura enumerável. Então F é de Lindelöf. □

Teorema 2.1.55 (Lindelöf)**.** *Todo espaço que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade é de Lindelöf.*

Demonstração. Seja $\mathscr{B}$ uma base enumerável de abertos de X e $\mathscr{U}$ uma cobertura aberta de X. Tome $\mathscr{A}$ subcobertura de $\mathscr{B}$ que refine $\mathscr{U}$ (conforme 2.1.51). $\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}$ é enumerável. Para cada $A \in \mathscr{A}$, tome $U_A \in \mathscr{U}$ tal que $A \subset U_A$ e defina $\mathscr{V} = \{U_A \mid A \in \mathscr{A}\}$. $\mathscr{A}$ é enumerável $\Rightarrow \mathscr{V}$ é enumerável. Além disso, $X = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \subset \bigcup_{A \in \mathscr{A}} U_A \Rightarrow \mathscr{V}$ é cobertura de X. Então $\mathscr{V}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathscr{U}$. □

2. A demonstração desta proposição utiliza conceitos que fogem ao escopo desta dissertação, mas pode ser encontrada em [2, VIII-1.1, p.160].

Teorema 2.1.56. *Em espaços de Lindelöf os conceitos de regularidade, normalidade e paracompacidade são equivalentes.*

Demonstração. Paracompacidade implica normalidade (por 2.1.35) e normalidade implica (trivialmente) regularidade. Basta então mostrar que um espaço de Lindelöf regular é sempre paracompacto:
Seja X espaço de Lindelöf regular. Tome $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta qualquer. Para cada $x \in X$, tome α_x tal que $x \in U_{\alpha_x}$ e V_x vizinhança de x tal que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_{\alpha_x}$ (conforme 2.1.5). Como X é de Lindelöf e $\{V_x\}_{x\in X}$ é cobertura de X, temos que $\exists\, \{V_{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ subcobertura enumerável de X. Defina $W_n = U_{\alpha_{x_n}} - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{V_{x_i}}\right)$. Evidentemente, cada W_n é aberto e $W_n \subset U_{\alpha_{x_n}}$. Mas $\overline{V_{x_k}} \subset U_{\alpha_{x_k}} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n W_k = \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_{x_k}}$. Logo, $\bigcup_{k=1}^\infty W_k = \bigcup_{k=1}^\infty U_{\alpha_{x_k}} = X$, ou seja, $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é cobertura. Finalmente, $\forall x \in X$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_{x_n} \subset \overline{V_{x_n}}$. Então $m > n \Rightarrow V_{x_n} \cap W_m = \emptyset$ por definição. Ou seja, cada $x \in X$ possui uma vizinhança que só se intercepta com um número finito de W_n. Portanto, $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é localmente finito. Como $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}} \prec \{U_{\alpha_{x_n}}\}_{n\in\mathbb{N}} \prec \{U_\alpha\}$, temos que $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um refinamento localmente finito de $\{U_\alpha\}$. Então X é paracompacto. □

2.2 Compactos, Espaços Métricos e Espaços Completos

2.2.1 Compacidade

Definição 2.2.1. Seja X um espaço topológico. X é dito compacto se cada cobertura aberta de X admitir uma subcobertura finita.

Proposição 2.2.2. Todo subconjunto finito de um espaço topológico é compacto.

Demonstração. Seja X espaço topológico e $F = \{x_1, ..., x_n\} \subset X$ um subconjunto finito qualquer. Tome uma cobertura aberta $\mathscr{C} = \{A_\alpha\}$ de F. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, tome um α_i tal que $x_i \in A_{\alpha_i}$ (sempre existe um, pois $\mathscr{C}$ cobre F). Então $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ é subcobertura finita de $\mathscr{C}$. □

Observação 2.2.3. Evidentemente, todo compacto é de Lindelöf, uma vez que uma subcobertura finita é também enumerável.

Teorema 2.2.4. *Todo espaço compacto é também paracompacto.*

Demonstração. Toda subcobertura é um refinamento de sua cobertura. Além disso, toda família finita é, evidentemente, localmente finita. Então toda cobertura aberta de um compacto admite uma subcobertura finita que é também um refinamento localmente finito desta cobertura. □

Corolário 2.2.4.1. *Em particular, todo compacto é também metacompacto, normal, completamente regular e regular.*

Demonstração. Segue diretamente de 2.2.4, 2.1.33, 2.1.35, 2.1.15 e 2.1.9. □

Proposição 2.2.5 (Propriedade da Intersecção Finita)**.** Seja X espaço de Hausdorff. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é compacto.
2. $\forall\{F_\alpha\}$ família de fechados em X satisfazendo $\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset$, $\exists\,\{F_{\alpha_i}\}_{i=1}^n \subset \{F_\alpha\}$ subfamília finita tal que $\bigcap_{i=1}^k F_{\alpha_i} = \emptyset$.
3. Seja $\{F_\alpha\}$ família de fechados em X cujas intersecções finitas são não-vazias. Então $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$.

Demonstração. Evidentemente, 2 $\Leftrightarrow$ 3. Além disso a intersecção de uma família de fechados $\{F_\alpha\}$ é vazia se, e somente se, $\bigcup_\alpha(\complement F_\alpha) = \complement\Big(\bigcap_\alpha F_\alpha\Big) = X$. Então $\{\complement F_\alpha\}$ é uma família de abertos que cobre X, logo tem subcobertura finita, isto é, tal que os complementares tem interseção vazia. Portanto, $1 \Leftrightarrow 2$. □

Proposição 2.2.6.

1. A imagem contínua de um compacto é também um compacto;
2. Compactos e pontos possuem vizinhanças disjuntas em espaços de Hausdorff;
3. Todo subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é fechado neste espaço;
4. Todo subespaço fechado de um espaço compacto é compacto;
5. A união finita de subconjuntos compactos de um espaço de Hausdorff é também um conjunto compacto;
6. Dois subconjuntos compactos disjuntos de um espaço de Hausdorff têm vizinhanças disjuntas;
7. $K \subset X$ é um subconjunto compacto de um espaço regular $\Rightarrow \forall\, A \supset K$ aberto, $\exists\, U$ aberto com $K \subset U \subset \overline{U} \subset A$.

Demonstração.

1. Seja K compacto e $f : K \to Y$ contínua. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta qualquer de $f(K)$ em Y. $f(K) \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \Rightarrow K \subset f^{-1}\Big(f(K)\Big) \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$. Como f é contínua, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ é uma cobertura aberta de K, logo admite uma sucobertura finita $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^n$. Mas $K \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_\alpha) \Rightarrow f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n f\Big(f^{-1}(U_i)\Big) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Então $\{U_i\}_{i=1}^n$ é uma subcobertura finita de $\{U_\alpha\}$.

2. Seja X de Hausdorff e $K \subset X$ compacto. Fixe $p \notin K$. X é de Hausdorff $\Rightarrow \forall x \in K$, $\exists\, V_x$ vizinhança de p e U_x vizinhança de x tais que $U_x \cap V_x = \emptyset$ (conforme 2.1.2). Então $\{U_x\}$ é cobertura de K, logo admite subcobertura finita $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$. Seja, portanto, $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \ni p$ e $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \supset K$. U, V são abertos e $V_{x_i} \cap U_{x_i} = \emptyset \Rightarrow V \cap U_{x_i} = \emptyset \Rightarrow V \cap U = \emptyset$. Então K e p têm vizinhanças disjuntas.
3. Seja X de Hausdorff e $K \subset X$ compacto. $\forall p \notin K$, $\exists\, U$, V abertos tais que $p \in U$, $K \subset V$ e $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \subset \complement V \subset \complement K$. Então $\complement K$ é aberto.
4. Seja K compacto e $F \subset K$ fechado, e tome $\{A_\alpha\}$ cobertura aberta de F que não cubra K (se cobrir, é trivial obter uma subcobertura finita). Então $\{A_\alpha\} \cup \{\complement F\}$ é uma cobertura de K, logo admite subcobertura finita da forma $\mathscr{C} = \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^n \cup \{\complement F\}$, onde $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ é subcobertura finita de $\{A_\alpha\}$. Então F é compacto.
5. Seja $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ união de compactos K_i e $\{A_\alpha\}$ cobertura de K. $K_i \subset K \Rightarrow \{A_\alpha\}$ é cobertura de $K_i \Rightarrow \exists\,\{A_{\alpha_{i,j}}\}_{j=1}^{n_i}$ subcobertura finita de $K_i, \forall i = 1, ..., n \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n \{A_{\alpha_{i,j}}\}_{j=1}^{n_i}$ é subcobertura, pois união de subcoberturas da mesma cobertura, e é finita. Assim, K é compacto.
6. Seja X de Hausdorff e $A, B \subset X$ compactos. $\forall x \in B$, $\exists\, U_x$, V_x abertos com $A \subset U_x$, $x \in V_x$ e $U_x \cap V_x = \emptyset$. Seja $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$ uma subcobertura para B de $\{V_x\}$ e ponha $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \supset B$ e $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i} \supset A$. Temos que U, V são abertos e $U_x \cap V_x = \emptyset \Rightarrow U \cap V = \emptyset$. Então U e V são vizinhanças disjuntas de A e B.
7. Seja X regular e $K \subset X$ compacto. Tome $A \supset K$ aberto. Pela regularidade de X, $\forall x \in K$, $\exists\, V_x$ vizinhança de x tal que $\overline{V_x} \subset A$. $\{V_x\}_{x \in K}$ cobre K, logo admite subcobertura finita $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. Segue que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^n \overline{V_{x_i}} \subset A$.

□

Corolário 2.2.6.1. *Toda restrição compacta de uma função contínua é fechada.*

Demonstração. Sejam X, Y espaços de Hausdorff, $f : X \to Y$ contínua, $K \subset X$ compacto e $F \subset K$ fechado em K. Por 2.2.6, temos que F é compacto, logo $f_K(F) = f(F)$ é compacto de Y, logo fechado (conforme 2.2.6). □

Lema 2.2.7 (Teorema da Sub-Base de Alexander)**.** *Seja X um espaço topológico e suponha que $\exists\,\mathscr{S}$ sub-base de X tal que $\forall \mathscr{C} \subset \mathscr{S}$ cobertura de X, $\mathscr{C}$ tem uma subcobertura finita. Então X é compacto.*

Demonstração. A demonstração desta proposição utiliza conceitos que fogem ao escopo desta dissertação, mas pode ser encontrada em [3, 5.6, p.139]. □

Lema 2.2.8. *Sejam* $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ *espaços compactos para todo* $\alpha \in \mathscr{A}$ *e* $X = \prod_{\alpha\in\mathscr{A}} X_\alpha$ *com a topologia-produto induzida. Então toda cobertura aberta* $\mathscr{C}$ *de* X *contida em* $\{\pi_\alpha^{-1}(A) \mid \alpha \in \mathscr{A},\, A \in \mathscr{T}_\alpha\}$ *admite uma subcobertura finita.*

Demonstração. Seja $\mathscr{C}$ conforme o enunciado e defina $\mathscr{C}_\alpha = \{A \in \mathscr{T}_\alpha \mid \pi_\alpha^{-1}(A) \in \mathscr{C}\}$. Suponha que $\forall \alpha \in \mathscr{A}$, $\mathscr{C}_\alpha$ não cobre X_α. Assim, $\forall \alpha \in \mathscr{A}$, $\exists\, x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \notin \bigcup_{V\in\mathscr{C}_\alpha} V = \bigcup_{\substack{A\in\mathscr{T}_\alpha \\ \pi_\alpha^{-1}(A)\in\mathscr{C}}} A$. Defina então $f \in X$ por $f(\alpha) = x_\alpha$. Como $\pi_\alpha(f) = f(\alpha) = x_\alpha$, temos que $f \notin \bigcup_{U\in\mathscr{C}} U$, do contrário $f \in U \in \mathscr{C} \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathscr{A}$ e $A \in \mathscr{T}_\alpha$ tais que $\pi_\alpha^{-1}(A) = U \ni f \Rightarrow x_\alpha = \pi_\alpha(f) \in \pi_\alpha\big(\pi_\alpha^{-1}(A)\big) = A$ (pois π_α é sobrejetiva), um absurdo, pois $\pi_\alpha^{-1}(A) = U \in \mathscr{C} \Rightarrow A \in \mathscr{C}_\alpha$.
Então f não pertence a nenhum elemento de $\mathscr{C}$, um absurdo, uma vez que $\mathscr{C}$ é cobertura de X. Logo, $\exists\, \alpha \in \mathscr{A}$ tal que $\mathscr{C}_\alpha$ cobre X_α. Como X_α é compacto, $\exists\, \{V_1, ...V_n\} \subset \mathscr{C}_\alpha$ tal que $X_\alpha = \bigcup_{i=1}^n V_i$. Segue que $X = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) = \bigcup_{i=1}^n \pi_\alpha^{-1}(V_i)$, ou seja, $\{\pi_\alpha^{-1}(V_1), ..., \pi_\alpha^{-1}(V_n)\} \subset \mathscr{C}$ é cobertura finita de X. □

Teorema 2.2.9 (Tychonoff)**.** *O produto cartesiano de uma família de espaços compactos é também compacto na topologia-produto induzida.*

Demonstração. $\{\pi_\alpha^{-1}(A) \mid \alpha \in \mathscr{A},\, A \in \mathscr{T}_\alpha\}$ é sub-base da topologia-produto induzida. Por 2.2.8, toda cobertura de X contida nessa sub-base admite uma subcobertura finita. Então, por 2.2.7, X é compacto. □

Teorema 2.2.10. *Seja* X *um espaço compacto e* Y *um espaço de Hausdorff. Seja* $f : X \to Y$ *contínua. Então* f *é uma função fechada.*

Demonstração. Seja $F \subset X$ fechado. Então F é compacto $\Rightarrow f(F)$ é compacto. Como $X \supset f(F)$ é de Hausdorff, temos que $f(F)$ é fechado. □

Definição 2.2.11. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ contínua. f é dita <u>própria</u> se $\forall K \subset Y$ compacto, $f^{-1}(K)$ for compacto.

Exemplo 2.2.12. Evidentemente, toda função contínua $f : X \to Y$ definida de X compacto para Y de Hausdorff é própria, pois, $\forall K \subset Y$ compacto, temos por 2.2.6 que K é fechado, logo, pela continuidade da f, $f^{-1}(K)$ é fechado do compacto X, portanto compacto.

Proposição 2.2.13. Seja X espaço de Hausdorff, Y espaço topológico, $f : X \to Y$ própria e $F \subset X$ fechado. Então $f|_F$ é própria.

Demonstração. Tome $K \subset Y$ compacta. Como f é própria, temos que $f^{-1}(K)$ é compacto, logo fechado (conforme 2.2.6). Então $(f|_F)^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap F$ é fechado. Mas $(f|_F)^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap F$, isto é, $(f|_F)^{-1}(K)$ é um fechado de $f^{-1}(K)$. Assim, por 2.2.6, $(f|_F)^{-1}(K)$ é compacto. □

Definição 2.2.14. Seja X um espaço de Hausdorff. $F \subset X$ é dito <u>compactamente fechado</u> se, $\forall K \subset X$ compacto, $K \cap F$ é compacto.

Proposição 2.2.15. Seja X satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade. Então todo subconjunto compactamente fechado $F \subset X$ é fechado.

Demonstração. Seja $F \subset X$ compactamente fechado e $x_0 \in \overline{F}$. Como X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, por 2.1.44, $\exists \{V_n\}$ base de vizinhanças de x_0 tal que $V_{n+1} \subset V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por 2.1.2.2, segue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} = \{x_0\}$. Agora, como $x_0 \in \overline{F}$ e cada V_n é uma vizinhança de x_0, temos que $V_n \cap F \neq \emptyset$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $x_n \in V_n \cap F$ e defina $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$.

Seja, então, $\{A_\alpha\}$ uma cobertura aberta de $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$. Segue que $\exists\, \alpha_0$ tal que $x_0 \in A_{\alpha_0}$. Mas $\{V_n\}$ é uma base de vizinhanças de x_0, logo $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $V_N \subset A_{\alpha_0}$. Portanto, $n > N \Rightarrow x_n \in V_n \subset V_N \subset A_{\alpha_0}$, ou seja, $n > N \Rightarrow x_n \in A_{\alpha_0}$. E como $\{A_\alpha\}$ é cobertura de X, temos que $\{A_\alpha\}_{\alpha \neq \alpha_0}$ é cobertura de $\{x_n\}_{n=1}^{N}$, um compacto (conforme 2.2.2), logo admite subcobertura finita $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^{k}$. Segue que $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^{k} \cup \{A_{\alpha_0}\}$ é subcobertura finita de $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$, ou seja, K é compacto.

Assim, como F é compactamente fechado, temos que $F \cap K$ é compacto. Mas, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F \cap K$. Então $x_n \in \big(F \cap K\big) \cap \overline{V_n}$, pois $x_n \in V_n \subset \overline{V_n}$. Além disso, $\big(F \cap K\big) \cap \overline{V_n}$ é um fechado no compacto $F \cap K$ e, $\forall \{n_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{N}$, pondo $n_0 = \max_{i=1}^{k} n_i$, vale que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \Big(F \cap K \cap \overline{V_{n_i}}\Big) = \Big(F \cap K\Big) \cap \bigcap_{i=1}^{k} \overline{V_{n_i}} = \Big(F \cap K\big) \cap \overline{V_{n_0}} \ni x_{n_0}$$

ou seja, $\Big\{V \cap F \cap \overline{V_n}\Big\}_{n=1}^{\infty}$ é uma família de fechados do compacto $F \cap K$ cujas intersecções finitas são não vazias. Portanto, pela Propriedade da Intersecção Finita, temos que

$$\Big(F \cap K\Big) \cap \{x_0\} = \Big(F \cap K\Big) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(F \cap K \cap \overline{V_n}\Big) \neq \emptyset$$

isto é, $x_0 \in F \cap K$. Então $x_0 \in F$. Assim, obtemos que $\overline{F} \subset F$. Segue que $\overline{F} = F$. □

Lema 2.2.16. *$F \subset X$ é compactamente fechado se, e somente se, a inclusão $i : F \to X$ é própria.*

Demonstração. Seja $i : F \to X$ inclusão. F é compactamente fechado $\Leftrightarrow$ $\forall K \subset X$ compacto, $K \cap F = i^{-1}(K)$ é compacto $\Leftrightarrow$ i é própria. □

Teorema 2.2.17. *Sejam X, Y espaços de Hausdorff. Vale que toda função própria $f : X \to Y$ é fechada se, e somente se, todo subconjunto compactamente fechado de Y é fechado.*

Demonstração.

$\Rightarrow$ Seja $F \subset Y$ compactamente fechado e $i : F \to Y$ a inclusão. Por 2.2.16, temos que i é própria, logo fechada por hipótese. Então $F = i(F)$ é fechado em Y.

$\Leftarrow$ Seja $f : X \to Y$ própria e $F \subset X$ fechado. Tome $K \subset Y$ compacto. Como f é própria, $f^{-1}(K)$ é compacto. Mas F é fechado, assim $F \cap f^{-1}(K)$ é um fechado de um compacto, logo compacto por 2.2.6. Pela continuidade de f, segue que $f\Big(f^{-1}(K) \cap F\Big)$ é compacto. Mas, por A.1.1, $f\Big(f^{-1}(K) \cap F\Big) = K \cap f(F)$. Desta forma, $f(F) \cap K$ é compacto, $\forall K \subset Y$ compacto, ou seja, $f(F)$ é compactamente fechado em Y, logo fechado por hipótese. Então f é fechada.

□

Corolário 2.2.17.1. Seja X espaço de Hausdorff e Y um espaço satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade. Então toda função própria $f : X \to Y$ é fechada.

Demonstração. Por 2.2.15, todo subconjunto compactamente fechado de Y é fechado. Assim, por 2.2.17, toda função própria $f : X \to Y$ é fechada. □

Definição 2.2.18. Um espaço de Hausdorff é enumeravelmente compacto se toda cobertura aberta enumerável tiver uma subcobertura finita.

Observação 2.2.19. Evidentemente, todo compacto é enumeravelmente compacto.

Proposição 2.2.20 (Propriedade da Intersecção Finita)**.** Seja X espaço de Hausdorff. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é enumeravelmente compacto.
2. $\forall \{F_n\}$ família enumerável de fechados em X satisfazendo $\bigcap_n F_n = \emptyset$, $\exists \{F_{n_i}\}_{i=1}^k \subset \{F_n\}$ subfamília finita tal que $\bigcap_{i=1}^k F_{n_i} = \emptyset$.
3. Seja $\{F_\alpha\}$ família enumerável de fechados em X cujas intersecções finitas são não-vazias. Então $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

Demonstração. Evidentemente, $2 \Leftrightarrow 3$. Além disso a intersecção de uma família de fechados $\{F_n\}$ é vazia se, e somente se, $\bigcup_n (\complement F_n) = \complement\Big(\bigcap_n F_n\Big) = X$. Então $\{\complement F_n\}$ é uma família enumerável de abertos que cobre X, logo tem subcobertura finita, isto é, tal que os complementares tem interseção vazia. Portanto, $1 \Leftrightarrow 2$. □

Proposição 2.2.21. X é enumeravelmente compacto se, e somente se, todo subconjunto infinito enumerável de X tem pelo menos um ponto de acumulação em X.

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Suponha que existe $Y \subset X$ enumerável com $Y' = \emptyset$. Então $\overline{Y} = Y$ (isto é, Y seria fechado) e para cada $y \in Y$, existiria V_y vizinhança de y tal que $V_y \cap Y = \{y\}$. Então $\{\complement Y\} \cup \{V_y\}_{y \in Y}$ seria uma cobertura enumerável de X, visto que $Y \subset \bigcup_{y \in Y}\{y\} \subset \bigcup_{y \in Y} V_y$ e $\{V_y\} \cup \{\complement Y\}$ é união de dois conjuntos enumeráveis. Mas esta cobertura não admite nenhuma subcobertura (pois $x \notin Y \Rightarrow x \in \complement Y$ e $x \in Y \Rightarrow \exists!\, V \in \{V_y\}$ tal que $x \in V$), um absurdo.
- $\Leftarrow$ Suponha que exista $\{U_n\}$ uma cobertura aberta enumerável de X que não admite subcobertura finita e defina $W_n = \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Temos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n = X$, $n < m \Rightarrow W_n \subset W_m$ e $W_n \subsetneq X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (contrário $\{U_n\}$ admitiria subcobertura finita $\{U_i\}_{i=1}^{n}$. Escolha, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin W_n$ e ponha $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Como $\{W_n\}$ é uma cobertura de X, $\forall x \in X$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ com $x \in W_N$, onde $W_N \cap S \subset \{x_1, ..., x_{N-1}\}$, pois $n > N \Rightarrow x_n \notin W_n \supset W_N$. Por 2.1.2.5, segue que $x \notin S'$, $\forall x \in X$, isto é, S é um conjunto enumerável sem ponto de acumulação em X.

□

Corolário 2.2.21.1. *Todo conjunto enumeravelmente compacto discreto é finito.*

Demonstração. Seja X enumeravelmente compacto discreto e suponha que X seja infinito. Então X é enumerável, logo deve conter algum ponto de acumulação, um absurdo. □

Proposição 2.2.22.

1. A imagem contínua de um conjunto enumeralvemente compacto é também enumeravelmente compacta;
2. Um subespaço fechado de um espaço enumeravelmente compacto é também enumeravelmente compacto;

Demonstração.

1. A demonstração é análoga à da proposição 2.2.6.
2. A demonstração é análoga à da proposição 2.2.6, bastando considerar que a união de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável.

□

Teorema 2.2.23. *Todo subconjunto enumeravelmente compacto de um conjunto que satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade é fechado neste conjunto.*

Demonstração. Seja X satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade e $Y \subset X$ enumeravelmente compacto. Tome $x \notin Y$ e $\{U_n\}$ base enumerável de vizinhanças de x por abertos tais que $U_n \supset U_{n+1}$ (conforme 2.1.44). Por 2.1.2.2, temos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = \{x\}$. Portanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \complement\overline{U_n} = \complement \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = X - \{p\} \supset Y$, isto é, $\{\complement\overline{U_n}\}$ é cobertura aberta enumerável de Y, logo admite subcobertura finita $\{\complement\overline{U_{n_i}}\}_{i=1}^{k}$. Mas $U_n \supset U_{n+1} \Rightarrow \overline{U_n} \supset \overline{U_{n+1}} \Rightarrow \complement\overline{U_n} \subset \complement\overline{U_{n+1}}$. Segue que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{k} \complement\overline{U_{n_i}} = \complement\overline{U_{n_k}}$, portanto $U_{n_k} \subset \overline{U_{n_k}} \subset \complement Y$. Logo, $\forall x \in \complement Y$, $\exists\, U \ni x$ aberto tal que $U \subset \complement Y$, isto é, $\complement Y$ é aberto. □

Proposição 2.2.24. Todo espaço enumeravelmente compacto que satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade é regular.

Demonstração. Seja X enumeravelmente compacto satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade. Tome $x \in X$, $U \ni x$ aberto, e seja $\{V_n\}$ uma base enumerável de vizinhanças de x tais que $V_n \supset V_{n+1}$ (conforme 2.1.44). Como na demonstração de 2.2.23, temos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \complement\overline{V_n} = X - \{x\}$ $\Rightarrow \{\complement\overline{V_n}\} \cup \{U\}$ é cobertura enumerável de Y, logo admite subcobertura finita $\{\complement\overline{V_{n_i}}\}_{i=1}^{k} \cup \{U\}$.Como $\complement\overline{V_n} \subset \complement\overline{V_{n+1}}$ e $X = U \cup \bigcup_{i=1}^{k} \complement\overline{V_{n_i}} = U \cup \complement\overline{V_{n_k}}$, segue que $\overline{V_{n_k}} \subset U$. Então $\exists\, V_{n_k} \ni x$ aberto tal que $\overline{V_{n_k}} \subset U$. Por 2.1.5, temos que X é regular. □

Teorema 2.2.25. *Um espaço é compacto se, e somente se, é metacompacto e enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Todo compacto é metacompacto (conforme 2.2.4.1). Além disso, por 2.2.19, todo compacto é enumeravelmente compacto. Basta mostrar, desta forma, que um metacompacto enumeravelmente compacto é compacto.

Seja X metacompacto enumeravelmente compacto e tome $\{U_\alpha\}$ cobertura aberta de X. Pela metacompacidade de X, $\exists\,\{V_\beta\}$ refinamento aberto pontualmente finito. Obtenha uma subcobertura irredutível $\{V_\gamma\}$ de $\{V_\beta\}$ (sempre existe uma, por 2.1.52). Suponha que $\{V_\gamma\}$ é infinita. Enão, por 2.1.21, $\forall\gamma$, $\exists\, x_\gamma \in X$ que pertence apenas a V_γ. Assim, o conjunto $S = \{x_\gamma\}$ seria infinito sem nenhum ponto de acumulação, pois $\forall x_\gamma \in S$, $\exists\, V_\gamma \ni x_\gamma$ aberto tal que $V_\gamma \cap S = \{x_\gamma\}$. Mas, por 2.2.21, todo subconjunto infinito de X deveria ter um ponto de acumulação, uma contradição. Segue que $\{V_\gamma\}$ é uma cobertura finita.

Agora, $\{V_\gamma\} \prec \{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\}$. Então $\{V_\gamma\}$ é refinamento de $\{U_\alpha\}$, ou seja, $\forall\gamma$, $\exists\alpha(\gamma)$ tal que $V_\gamma \subset U_{\alpha(\gamma)}$. Como $\{V_\gamma\}$ cobre X, temos que $\{U_{\alpha(\gamma)}\}_\gamma$ é um subconjunto de $\{U_\alpha\}$ que ainda cobre X, ou seja, uma subcobertura. Além disso, $\#\{U_{\alpha(\gamma)}\}_\gamma \leq \#\{V_\gamma\} < \infty$, isto é, $\{U_{\alpha(\gamma)}\}_\gamma$ é finito. Segue que $\{U_{\alpha(\gamma)}\}_\gamma$ é uma subcobertura finita de $\{U_\alpha\}$. Então toda cobertura aberta de X tem subcobertura finita, isto é, X é compacto. $\square$

Definição 2.2.26. Um espaço de Hausdorff X é dito pseudocompacto se toda função $f : X \to \mathbb{R}$ for limitada.

Observação. Evidentemente, todo compacto é pseudocompacto, pois X é compacto $\Rightarrow f(X) \subset \mathbb{R}$ é compacto, logo limitado.

Proposição 2.2.27. Seja X um espaço completamente regular. As seguintes afirma ções são equivalentes:

1. X é pseudocompacto.
2. $\forall\{U_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ sequência desdencente de abertos não-vazios, $\bigcap_1^\infty \overline{U_n} \neq \emptyset$.
3. Toda cobertura aberta enumerável de X tem uma subfamília finita cujos fechos cobrem X.

Demonstração.

$1 \Rightarrow 2$ Suponha que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família decrescente de conjuntos abertos não-vazios com $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{U_n} = \emptyset$. Então $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deve ser localmente finita. [3] Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $x_n \in U_n$. Pela regularidade completa de X, $\exists f_n : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ tal que $f_n(x_n) = 1$ e $f_n|_{\complement V_n} \equiv 0$. Seja $g_n : X \to \mathbb{R}$ dada por $g_n(x) = nf_n(x), \forall x \in X \Rightarrow g_n(x_n) = n$ e $g_n|_{\complement V_n} \equiv 0$. Logo, $\text{supp}(g_n) \subset U_n$. Como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é localmente finito, temos que $g = \sum_{n=1}^\infty g_n$ está bem definida e é contínua, pois é localmente uma soma finita de funções contínuas. Mas g não é limitada, pois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in X$ tal que $g(x_n) \geq g_n(x_n) = n$. Assim, X não é pseudocompacto.

$2 \Rightarrow 3$ Seja $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma cobertura enumerável aberta de X. Defina então $V_n = \complement\Big(\bigcup_{k=1}^n \overline{U_k}\Big) \Rightarrow V_{n+1} \subset V_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Mas $U_k \subset \overline{U_k} \Rightarrow \complement\overline{U_k} \subset \complement U_k$. Logo, $V_n = \bigcap_{k=1}^n (\complement\overline{U_n}) \subset \bigcap_{k=1}^n (\complement U_n) \Rightarrow \overline{V_n} \subset \bigcap_{k=1}^n (\complement U_n)$, pois cada $\complement U_n$ é fechado. Assim, $\bigcap_{k=1}^n \overline{V_k} = \overline{V_n} \subset \bigcap_{k=1}^n (\complement U_n)$, uma vez que $\{\overline{V_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é também uma sequência decrescente de conjuntos. Suponha, agora, que nenhum V_n é vazio. Teríamos que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de abertos não-vazios, logo $\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^\infty \overline{V_k} \subset \bigcap_{k=1}^\infty \complement U_k = \complement\Big(\bigcup_{k=1}^\infty U_n\Big) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^\infty U_n \subsetneq X$, absurdo, pois $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é cobertura de X. Então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n_0} \overline{U_n} = \complement \bigcap_{k=1}^{n_0} \overline{V_k} = \complement\emptyset = X$.

3. Ver A.3.2.

$3 \Rightarrow 1$ Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e $U_n = \{x \in X \mid |f(x)| < n\}$. $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de de X, logo admite subfamília finita $\{U_{n_i}\}_{i=1}^k$ tal que $\bigcup_{i=1}^k \overline{U_{n_i}} = X$. Então, $|f(x)| \leq \max\{n_1, ..., n_k\}$, $\forall x \in X \Rightarrow f$ é limitada.

□

Definição 2.2.28. Seja X um espaço e $A \in X$. A é dito relativamente compacto se $\overline{A}$ for compacto.

Definição 2.2.29. Um espaço de Hausdorff X é localmente compacto se todo ponto $p \in X$ tiver uma vizinhança relativamente compacta.

Proposição 2.2.30. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é localmente compacto.
2. $\forall x \in X$, $\forall V$ vizinhança de x, $\exists U$ aberto relativamente compacto tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.
3. $\forall K \subset X$ compacto, $\forall A \supset K$ aberto, $\exists U$ aberto relativamente compacto tal que $K \subset U \subset \overline{U} \subset A$.
4. X tem uma base de abertos relativamente compactos.

Demonstração.

$1 \Rightarrow 2$ Seja $x \in X$ e V vizinhança de X. X é localmente compacto $\Rightarrow \exists W$ vizinhança de x com $\overline{W}$ compacto. Segue por 2.2.4.1 que $\overline{W}$ é regular , logo $W \subset \overline{W}$ também o é (conforme 2.1.6). Como $V \cap W$ é vizinhança de x em W, por 2.1.5, $\exists U \subset W$ aberto tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V \cap W$. Então $\overline{U} \subset W \subset \overline{W}$. Pela compacidade de $\overline{W}$, temos que $\overline{U}$ é também compacto (conforme 2.2.6), ou seja, U é relativamente compacto. Além disso, $\overline{U} \subset V \cap W \subset V$. Assim, dados $x \in X$ e V vizinhança de X, $\exists U$ aberto relativamente compacto tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.

$2 \Rightarrow 3$ Tome $K \subset X$ compacto e $A \supset K$ aberto. $\forall x \in K, \exists U_x$ aberto relativamente compacto tal que $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset A$. Extraia de $\{U_x\}_{x\in K}$ uma subcobertura finita $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$ de K e defina $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Então $\overline{U} = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_{x_i}} \subset A$. Além disso, por 2.2.6, $\overline{U_{x_i}}$ são compactos $\Rightarrow \overline{U}$ é compacto.

$3 \Rightarrow 2$ Todo ponto é compacto (conforme 2.2.2), logo o resultado segue trivialmente.

$2 \Rightarrow 4$ Seja $\mathscr{B}$ a família de todos abertos relativamente compactos de X. Então $\forall x \in X$, $\forall V$ vizinhança de x, $\exists U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U \subset V$, ou seja, $\mathscr{B}$ é base de abertos de X.

$4 \Rightarrow 1$ Seja $\mathscr{B}$ uma base de X de abertos relativamente compactos. Então, $\forall x \in X$, $\exists\, U \in \mathscr{B} \mid x \in U$ e $\overline{U}$ é compacto.

□

Proposição 2.2.31. Todo espaço localmente compacto que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade tem uma base enumerável de abertos relativamente compactos.

Demonstração. Seja X localmente compacto satisfazend o segundo axioma da enumerabilidade e $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base enumerável de abertos de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in U_n$, tome um $V_{n,x}$ aberto relativamente compacto tal que $x \in V_{n,x} \subset \overline{V_{n,x}} \subset U_n$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{V_{n,x}\}_{x\in U_n}$ é uma cobertura aberta de U_n. Mas, por 2.1.48, $U_n \subset X \Rightarrow U_n$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, portanto é de Lindelöf (conforme 2.1.55). Podemos extrair então uma subcobertura $\{V_{n,x_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ enumerável de U_n. Então $\{V_{n,x_m} \mid (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ é uma cobertura enumerável de X, onde cada V_{n,x_m} é relativamente compacto. □

Teorema 2.2.32. *Todo espaço localmente compacto é também completamente regular.*

Demonstração. Seja X localmente compacto. Tome $p \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$. Então $x \in \complement F$ aberto, logo $\exists\, V_2$ aberto relativamente compacto tal que $x \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset \complement F$ (conforme 2.2.30). Mas $V_2 \ni x$ é aberto, logo $\exists\, V_1$ aberto relativamente compacto tal que $x \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_2$. Agora, $\overline{V_2}$ é compacto, logo, por 2.2.4.1, é completamente regular. Então $\exists f : V_2 \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ tal que $f(p) = 1$ e $f|_{\overline{V_2}-V_1} \equiv 0$. Defina então $F : X \to [0,1]$ por $F|_{\overline{V_2}} \equiv f$ e $F|_{\complement\overline{V_2}} \equiv 0$. Temos que F é contínua em X, $F(p) = f(p) = 1$ e $F\Big(\complement V_1\Big) = F\Big(\complement\overline{V_2}\Big) \cup F\Big(\overline{V_2} - V_1\Big) = \{0\}$. Portanto, X é completamente regular. □

Proposição 2.2.33. A imagem de um espaço localmente compacto por uma função contínua aberta é também localmente compacta.

Demonstração. Seja X localmente compacto e $f : X \to Y$ contínua aberta. Tome $y \in f(X)$ e $V \subset f(X)$ vizinhança de y em $f(X)$. Pela continuidade da f, $f^{-1}(V)$ é aberto em X. Seja $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$. Como é X localmente compacto, por 2.2.30, $\exists\, W \subset X$ aberto relativamente compacto tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset f^{-1}(V)$. Então $f(x) \subset f(U) \subset f(\overline{U}) \subset f\Big(f^{-1}(V)\Big) \subset V$. Mas, pela continuidade da f, $\overline{f(U)} = f\Big(\overline{U}\Big)$ e $f\Big(\overline{U}\Big)$ é compacto (conforme 2.2.6). Além disso, f é aberta e $U \subset X$ é aberto $\Rightarrow f(U) \subset Y$ é aberto. Logo, $f(U)$ é um aberto relativamente compacto tal que $y \in f(U) \subset \overline{f(U)} \subset V$. Segue que $f(X)$ é localmente compacto. □

Definição 2.2.34. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ contínua. f é dita <u>aplicação compacta</u> se existir $K \subset Y$ compacto tal que $f(X) \subset K$.

Proposição 2.2.35. Seja X espaço topológico e Y de Hausdorff. Então f é compacta se, e somente se, $f(X)$ for relativamente compacto.

Demonstração.

1. $\Rightarrow$: Seja $K \subset Y$ compacto com $f(X) \subset K$. Y é de Hausdorff, logo, por 2.2.6, K é fechado. Então $\overline{f(X)} \subset \overline{K} = K$. Segue que $\overline{f(X)}$ é compacto, pois é subconjunto fechado de um compacto (conforme 2.2.6).
2. $\Leftarrow$: Seja $f(X)$ é relativamente compacto. Então $f(X) \subset \overline{f(X)}$, onde $\overline{f(X)}$ é compacto.

□

Definição 2.2.36. Um espaço localmente compacto é <u>σ-compacto</u> se puder ser expresso como união enumerável de espaços compactos.

Proposição 2.2.37. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é σ-compacto.
2. $X = \bigcup_1^\infty U_i$, onde cada U_i é um aberto relativamente compacto com $\overline{U_i} \subset U_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$.
3. X é localmente compacto de Lindelöf.

Demonstração.

$1 \Rightarrow 2$ Seja $X = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, com K_n compactos. X é localmente compacto $\Rightarrow \exists\, U_1 \supset K_1$ aberto relativamente compacto (conforme 2.2.30). Indutivamente, suponha U_n aberto relativamente compacto. Temos, por 2.2.6, que $\overline{U_n} \cup K_{n+1}$ é compacto. Tome $U_{n+1} \supset \overline{U_n} \cup K_{n+1}$ aberto relativamente compacto. Assim, $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ e $K_n \subset U_n \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^\infty K_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty U_n$. Então $\bigcup_{n=1}^\infty U_n = X$.

$2 \Rightarrow 3$ Seja $X = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ com U_n abertos relativamente compactos. Segue que X é localmente compacto, pois, $\forall x \in X$, $\exists\, U_n \subset X$ aberto relativamente compacto tal que $x \in U_n$. Basta, portanto, demonstrar que X é de Lindelöf.

Seja então $\{A_\alpha\}$ uma cobertura aberta qualquer de X. Temos que cada compacto $\overline{U_i} \subset X$ é coberto por $\{A_\alpha\}$, portanto admite $\{A_{\alpha_{i,j}}\}_{j=1}^{n_i}$ subcobertura finita. Segue que

$$\{A_{\alpha_{i,j}} \mid i \in \mathbb{N},\, j = 1, ..., n_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{A_{\alpha_{i,j}} \mid j = 1, ..., n_i\}$$

é uma cobertura enumerável de X e é subcobertura de $\{A_\alpha\}$, portanto subcobertura enumerável. Ou seja, X é de Lindelöf.

$3 \Rightarrow 1$ Seja X localmente compacto de Lindelöf. Para cada $x \in X$, $\exists V_x$ vizinhança de x relativamente compacta. $\{V_x\}_{x \in X}$ cobre X, logo admite subcobertura enumerável $\{V_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Então $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{x_n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V_{x_n}} \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V_{x_n}}$ com $\overline{V_{x_n}}$ compactos.

□

Teorema 2.2.38. *Todo espaço σ-compacto é normal e paracompacto.*

Demonstração. Todo espaço σ-compacto é de localmente compacto e Lindelöf (conforme 2.2.37). Além disso, por 2.2.32 e 2.1.14, temos que todo espaço localmente compacto é também regular. Mas, em espaços de Lindelöf, regularidade é equivalente à normalidade e à paracompacidade (conforme 2.1.56). Segue que todo espaço σ-compacto é normal e paracompacto. □

2.2.2
Espaços Métricos

Definição 2.2.39. Seja X um conjunto qualquer. Uma <u>métrica</u> em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall\, x, y \in X$ (simetria).
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall\, x, y, z \in X$ (desigualde triangular).

Neste caso, $d(x, y)$ é chamada de distância entre x e y e (X, d) é chamado de <u>espaço métrico</u>.

Definição 2.2.40. Seja (X, d) um espaço métrico, $B_d(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ a <u>d-bola aberta de raio r e centro a</u>, $\overline{B_d(a, r)} = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$ a <u>d-bola fechada de raio r e centro a</u> e $S_d(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}$ a <u>d-esfera de raio r e centro a</u>. A família $\{B_d(a, r) \mid x \in X,\, r > 0\}$ serve de base para uma topologia de X, induzida pela métrica d, notada por $\mathscr{T}(d)$.

Definição 2.2.41. Um espaço topológico $(X, \mathscr{T})$ é <u>metrizável</u> se $\exists\, d$ métrica de X tal que $\mathscr{T} = \mathscr{T}(d)$.

Proposição 2.2.42. Uma função $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ é contínua se $\forall x \in X$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta(x, \epsilon) > 0 \mid \forall p \in X$, $d(x, p) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x), f(p)\big) < \epsilon$.

Definição 2.2.43. Uma função $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ é dita <u>uniformemente contínua</u> se $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta(\epsilon) > 0 \mid \forall x, y \in X$, $d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon$.

Proposição 2.2.44. Toda função uniformemente contínua é também contínua.

Definição 2.2.45. Uma função $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ é dita de Lipschitz com constante $C > 0$ se, $\forall x, y \in X$, $\rho\Big(f(x), f(y)\Big) < C \cdot d(x, y)$.
Para $C < 1$, f é chamada de contração, e para $C = 1$ dizemos que f é não-expansiva.

Proposição 2.2.46. Toda função de Lipschitz é também uniformemente contínua.

Definição 2.2.47. Duas métricas d, ρ em um conjunto X são ditas equivalentes se $\mathscr{T}(d) = \mathscr{T}(\rho)$. Neste caso, nota-se $d \sim \rho$.

Definição 2.2.48. Seja (X, d) um espaço métrico.

1. A distância entre um ponto $p \in X$ e um subconjunto não-vazio $A \subset X$ é dada por $d(p, A) = inf_{a \in A} d(p, a)$.
2. A distância entre dois subconjuntos não-vazios $A, B \subset X$ é dada por $d(A, B) = inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b)$.
3. O diâmetro de um subconjunto não-vazio $A \subset X$ é dado por $\text{diam}(A) = sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} d(x, y)$.

Exemplo 2.2.49. Evidentemente, $\text{diam}\Big(B(x, r)\Big) \leq 2 \cdot r$.

Proposição 2.2.50. Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$ um subconjunto não-vazio qualquer de X.

1. $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$;
2. A função $f : X \to \mathbb{R} \mid x \mapsto d(x, A)$ é de Lipschitz.

Proposição 2.2.51. Seja (X, d) um espaço métrico e $A, B \subset X$ dois subconjuntos não-vazios quaisquer de X.

1. $\text{diam}(A) = 0 \Leftrightarrow A$ tem um único ponto;
2. $\text{diam}(\overline{A}) = \text{diam}(A)$;
3. $A \subset B \Rightarrow \text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$;
4. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \text{diam}(A \cup B) < \text{diam}(A) + \text{diam}(B)$.

Definição 2.2.52. Seja (X, d) espaço métrico. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito limitado se $\text{diam}(Y) < \infty$.

Observação. Evidentemente, toda bola é limitada, uma vez que $\text{diam}\Big(B(a,r)\Big) \leq 2r$, $\forall x \in (X,d)$, $\forall r > 0$. Além disso, é fácil perceber que um subconjunto de um conjunto limitado é sempre limitado.

Proposição 2.2.53. Um subconjunto de um espaço métrico é limitado se, e somente se, estiver contido em uma bola.

Teorema 2.2.54. *Todo compacto de um espaço métrico é limitado.*

Demonstração. Seja (X,d) espaço métrico e $K \subset X$ compacto. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \{B(x_i,\epsilon)\}_{i=1}^{n_\epsilon}$ cobertura finita de $\{B(x,\epsilon)\}_{x\in K}$. Ponha $D = \max_{i,j} d(x_i,x_j)$ e tome $x,y \in K$. $\exists i,j \in \{1,...,n\}$ tais que $x \in B(x_i,\epsilon)$ e $y \in B(x_j,\epsilon)$. Segue que $d(x,y) \leq d(x,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,y) < D + 2\epsilon$. Então $\text{diam}(A) = \underset{x\in A}{sup_{x\in A}} d(x,y) \leq D + 2\epsilon < \infty$. □

Teorema 2.2.55. *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$. Então K é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

Corolário 2.2.55.1. *Toda bola fechada e esfera de $\mathbb{R}^n$ é compacta.*

Proposição 2.2.56.

1. Metrizabilidade é um invariante topológico.
2. Todo subespaço de um espaço métrico é também um espaço métrico.

Teorema 2.2.57. *Todo espaço métrico é paracompacto.*[4]

Corolário 2.2.57.1. *Em espaços métricos, os conceitos de compacidade e compacidade enumerável são equivalentes.*

Demonstração. Todo compacto é enumeravelmente compacto (conforme 2.2.19). Além disso, como espaços métricos são paracompactos (logo metacompactos, conforme 2.1.33), então, por 2.2.25, compacidade enumerável implica em compacidade. □

Teorema 2.2.58. *Todo espaço métrico satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.*

Demonstração. Seja (X,d) espaço métrico. Como $\Big\{B(x,r) \mid x \in X,\, r > 0\Big\}$ é uma base de abertos de X, dado $x \in X$ e $A \ni x$ aberto, $\exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$. Mas $\exists r' \in \mathbb{Q}$ tal que $r' < r \Rightarrow B(x,r') \subset A$. Então $\Big\{B(x,r)\,|r \in \mathbb{Q}\Big\}$ é uma base enumerável de abertos em torno de x. Logo, X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. □

4. A demonstração desta proposição utiliza conceitos que fogem ao escopo desta dissertação, mas pode ser encontrada em [2, IX-5.3, p.186]

Teorema 2.2.59. *Em espaços métricos, os conceitos de separabilidade, Lindelöf e o segundo axioma da enumerabilidade são equivalentes.*

Demonstração. Por 2.1.55, o segundo axioma da enumerabilidade sempre implica em Lindelöf. Basta então demonstrar que, em um espaço métrico (X, d) separabilidade implica no segundo axioma da enumerabilidade e Lindelöf implica em separabilidade:

1. Separabilidade $\Rightarrow$ segundo axioma da enumerabilidade:
   Seja $D \subset X$ enumerável e denso em X. Defina $\mathscr{B} = \left\{B(x,r) \mid x \in D,\, r \in \mathbb{Q}\right\}$ enumerável. Tome $A \subset X$ aberto e $p \in A$. Então $\exists\, r > 0$ tal que $B(p,r) \subset A \Rightarrow B(p, \frac{r}{2}) \subset A$. Mas $B(p, \frac{r}{2})$ é aberto e D é denso em $X \Rightarrow \exists\, x \in B(p, \frac{r}{2}) \cap D \Rightarrow d(p,x) < \frac{r}{2} \Rightarrow \exists\, r' \in \mathbb{Q} \mid d(p,x) < r' < \frac{r}{2}$. Segue que $p \in B(x, r')$. Além disso, $y \in B(x,r') \Leftrightarrow d(y,x) < r' \Rightarrow d(y,p) \leq d(y,x) + d(x,p) < 2 \cdot r' < r \Rightarrow y \in B(p,r)$, ou seja, $B(x,r') \subset B(p,r) \subset A$. Logo, $\forall\, A \subset X$ aberto e $\forall x \in A, \exists\, (p, r') \in D \times \mathbb{Q}$ tal que $x \in B(p, r') \subset A$. Portanto, $\mathscr{B}$ é uma base enumerável de abertos de X.

2. Lindelöf $\Rightarrow$ separabilidade:
   Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left\{B(x, \frac{1}{n})\right\}_{x \in X}$ é uma cobertura de X. Como X é de Lindelöf, podemos extrair uma subcobertura enumerável $\left\{B(x_{n,m}, \frac{1}{n})\right\}_{m \in \mathbb{N}}$. Defina $D = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ m \in \mathbb{N}}} x_{n,m}$. Evidentemente, D é enumerável. Seja, portanto, $A \subset X$ um aberto qualquer e tome $x \in A$. A é aberto $\Rightarrow \exists\, r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$. Mas $\exists\, n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < r$. Como $\left\{B(x_{n,m}, \frac{1}{n})\right\}_{m \in \mathbb{N}}$ é cobertura de X, temos que $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B(x_{n,m}, \frac{1}{n}) \Rightarrow d(x, x_{n,m}) < \frac{1}{n} < r \Rightarrow x_{n,m} \in B(x,r) \subset A \Rightarrow A \cap D \neq \emptyset$. Então, para qualquer $A \subset X$ aberto, $A \cap D \neq \emptyset \Rightarrow D$ é denso em X.

□

Teorema 2.2.60 (Urysohn)**.** *Em espaços satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade, regularidade é equivalente à metrizabilidade.*

Demonstração. A demonstração desta proposição utiliza conceitos que fogem ao escopo desta dissertação, mas pode ser encontrada em [2, IX-9.2, p.194-5]. □

Teorema 2.2.61. *Um espaço enumeravelmente compacto é metrizável se, e somente se, satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.*

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Seja X enumeravelmente compacto satisfazendo o segundo axioma da enumerabilidade. Então X satisfaz também o primeiro axioma da enumerabilidade (conforme 2.1.46). Assim, por 2.2.24, temos que X é regular. Por 2.2.60, segue que X é metrizável.
- $\Leftarrow$ Seja X espaço métrico enumeravelmente compacto. Logo, por 2.2.57.1, X é compacto, portanto de Lindelöf (conforme 2.2.3). Assim, por 2.2.59, temos que X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

$\square$

Definição 2.2.62. Sejam X espaço métrico, Y espaço topológico e $f : X \to Y$ contínua. f é dita <u>completamente contínua</u> se, $\forall L \subset X$ limitado, $\exists\, K \subset Y$ compacto tal que $f(L) \subset K$.

Proposição 2.2.63. Sejam X espaço métrico, Y de Hausdorff e $f : X \to Y$ contínua. Então f é completamente contínua se, e somente se, $\forall L \subset X$ limitado, $f(L)$ for relativamente compacto.

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Seja $f : X \to Y$ completamente contínua e tome $L \subset X$ limitado. Então $\exists\, K \subset Y$ compacto tal que $f(L) \subset K$. Mas Y é de Hausdorff $\Rightarrow K$ é fechado $\Rightarrow \overline{f(L)} \subset K \Rightarrow \overline{f(L)}$ é compacto (conforme 2.2.6).
- $\Leftarrow$ Se $\forall L \subset X$ limitado, $f(L)$ for relativamente compacto, então $\forall L \subset X$ limitado, $f(L) \subset \overline{f(L)}$ com $\overline{f(L)}$ compacto.

$\square$

Definição 2.2.64. Seja (X, d) espaço métrico. Dizemos que um conjunto $Y \subset X$ é <u>totalmente limitado</u> se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ finito tal que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \epsilon)$.

Proposição 2.2.65.

1. Todo conjunto totalmente limitado é também limitado;
2. Todo subconjunto de um conjunto totalmente limitado é também totalmente limitado;
3. Um conjunto é totalmente limitado se, e somente se, seu fecho for totalmente limitado.

Demonstração.

1. Seja A totalmente limitado e tome $\epsilon > 0$. Então $\exists \{a_i\}_{i=1}^n$ finito tal que $A \subset \bigcup B(a_i, \epsilon)$. Tome, assim, $D = \max_{i,j=1}^n d(a_i, a_j)$ e ponha $R = D + 2\epsilon$. Tome agora $x, y \in A$. Temos que $x \in B(a_i, \epsilon)$ e $y \in B(a_j, \epsilon)$ para algum $i, j \in \{1, ..., n\}$. Segue que $d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, y) < D + 2\epsilon = R$. Então $\text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y) \leq R$, isto é, A é limitado.
2. Sejam B totalmente limitado e $A \subset B$. Temos que $\exists X \subset B$ finito tal que $B \subset \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Defina então $\tilde{X} = \{x \in X \mid A \cap B\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right) \neq \emptyset\}$. Como $A \subset B \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \frac{\epsilon}{2})$, segue que $\tilde{X} \neq \emptyset$. Além disso, $y \in A \Rightarrow y \in B \Rightarrow \exists x \in X \mid y \in B\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right) \Rightarrow y \in A \cap B\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right) \Rightarrow x \in \tilde{X} \Rightarrow y \in \bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} B\left(\tilde{x}, \frac{\epsilon}{2}\right)$, ou seja, $A \subset \bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} B\left(\tilde{x}, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Agora, $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$, tome $z_{\tilde{x}} \in A \cap B\left(\tilde{x}, \frac{\epsilon}{2}\right)$ e ponha $Z = \{z_{\tilde{x}} \mid \tilde{x} \in \tilde{X}\}$. Assim, $Z \subset A$ e $\#Z = \#\tilde{X} \leq \#X < \infty$, ou seja, Z é finito. Finalmente, $y \in B\left(\tilde{x}, \frac{\epsilon}{2}\right) \Rightarrow d(y, z_{\tilde{x}}) \leq d(y, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, z_{\tilde{x}}) < \epsilon$, isto é, $B\left(\tilde{x}, \frac{\epsilon}{2}\right) \subset B(z_{\tilde{x}}, \epsilon)$. Então $A \subset \bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} B\left(\tilde{x}, \frac{\epsilon}{2}\right) \subset \bigcup_{z \in Z} B(z, \epsilon)$. Segue que B é totalmente limitado.
3. Como $A \subset \overline{A}$, temos que $\overline{A}$ é totalmente limitado $\Rightarrow A$ é totalmente limitado.

   Seja, então, A totalmente limitado. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \{a_i\}_i$ finito tal que $A \subset \bigcup_i B(a_i, \frac{\epsilon}{2})$. Segue que $\overline{A} \subset \bigcup_i \overline{B(a_i, \frac{\epsilon}{2})} \subset \bigcup_i B(a_i, \epsilon)$. Então $\overline{A}$ é totalmente limitado.

$\square$

Proposição 2.2.66. Todo compacto é totalmente limitado.

Demonstração. Seja (X, d) espaço métrico e $K \subset X$ compacto. $\forall \epsilon > 0$, $\{B(x, \epsilon)\}_{x \in K}$ é cobertura de K, logo admite subcobertura finita $\{B(x_i, \epsilon)\}_{i=1}^n$. Então K é totalmente limitado. $\square$

Lema 2.2.67 (Lebesgue)**.** *Seja X um espaço métrico compacto e $\{M_i\}_{i=1}^n$ um conjunto finito de fechados não-vazios com intersecção vazia. Então $\exists\, \epsilon > 0$ tal que, $\forall A \subset X$ com $A \cap M_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, temos que diam$(A) \geq \epsilon$. Esse ϵ é chamado de número de Lebesgue.*

Demonstração. Seja $Y = \prod_{i=1}^n M_i$. Por Tychonoff, temos que Y é compacto, pois cada M_i é um fechado do compacto X, logo compacto (conforme 2.2.6). Defina então $\lambda : Y \to \mathbb{R}$ por

$$\lambda(x_1, ..., x_n) = \max\{d(x_i, x_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

Como $d : X \times X \to \mathbb{R}$ e a função máximo de um número dado finito de elementos são contínuas em $\mathbb{R}$, temos que λ é também contínua. Suponha, então, que $\exists\, x = (x_1, ..., x_n) \in M_1 \times ... \times M_n$ com $\lambda(x) = 0$. Seguiria que

$d(x_i, x_j) = 0$ para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$, ou seja, $x_1 = ... = x_n$, um absurdo, pois $x_1 = ... = x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i = \emptyset$. Logo, $\lambda(x) > 0$, $\forall x \in Y$. Assim, pela continuidade de λ, $\epsilon = \inf_{x \in Y} \lambda(x) > 0$.
Desta forma, se $A \cap M_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, então, tomando $x_i \in A \cap M_i$, temos que $\lambda(x_1, ..., x_n) \geq \epsilon$. Segue que $\text{diam}(A) \geq \epsilon$ (do contrário, sendo $\text{diam}(A) < \epsilon$, cada $d(x_i, x_j) < \epsilon$ e $\lambda(x_1, ..., x_n) = \max\{d(x_i, x_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\} < \epsilon$, um absurdo). □

Observação. Equivalentemente ao lema 2.2.67, podemos dizer que, dado X espaço métrico compacto e $\mathscr{C}$ cobertura finita de abertos de X, $\exists \epsilon > 0$ tal que, $\forall Y \subset X$, vale que $\text{diam}(Y) < \epsilon \Rightarrow Y \subset A$ para alguma $A \in \mathscr{C}$.

Teorema 2.2.68 (Lebesgue)**.** *Seja X espaço métrico compacto e $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ uma cobertura finita de fechados de X. Então $\exists \lambda > 0$ tal que, quando $A \subset X$ com diam$(A) < \lambda$ intercepta $M_{i_1}, ..., M_{i_r}$, então $\bigcap_{j=1}^{r} M_{i_j} \neq \emptyset$.*

Demonstração. O resultado segue diretamente de 2.2.67. □

2.2.3 Sequências e Espaços Completos

Definição 2.2.69. Seja X um espaço topológico. Uma sequência é uma função $x \in X^{\mathbb{N}}$, denotada por (x_n), onde $x_n = x(n)$. Dizemos que:

1. (x_n) converge para x_0 se $\forall U$ vizinhança de x_0, $\exists N \in \mathbb{N} \mid n > N \Rightarrow x_n \in U$. Neste caso, escreve-se $x_n \to x_0$.
2. (x_n) se acumula em x_0 se $\forall U$ vizinhança de x_0, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N \mid x_n \in U$. Neste caso, escreve-se $x_n \succ x_0$.

Observação. É fácil perceber, pela definição de convergência, que uma sequência converge para um ponto se, e somente se, todo aberto que contiver aquele ponto contiver também infinitos elementos da sequência.

Proposição 2.2.70. Seja X um espaço de Hausdorff e $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to a$ e $x_n \to b$. Então $a = b$.

Demonstração. Suponha que $a \neq b$. Então, como X é de Hausdorff, $\exists U, V \subset X$ abertos tais que $a \in U$, $b \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Mas $x_n \to a$, logo $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_1 \Rightarrow x_n \in U$. Equivalentemente, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_2 \Rightarrow x_n \in V$. Ponha $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Segue que $n > N_0 \Rightarrow x_n \in U \cap V = \emptyset$, um absurdo. Então $a = b$. □

Exemplo 2.2.71. Seja X um espaço de Hausdorff e (x_n) uma sequência em X tal que $x_n \to x_0 \in X$. Então o conjunto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x_0\}$ é um compacto de X.

Demonstração. Seja $\{A_\alpha\}$ uma cobertura aberta de $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$. Então $\exists\, \alpha_0 \mid x_0 \in A_{\alpha_0}$. Mas $x_n \to x_0$, assim $\exists\, N \in \mathbb{N} \mid n > N \Rightarrow x_n \in A_{\alpha_0}$. Como $\{A_\alpha\}$ é cobertura de X, temos que $\{A_\alpha\}_{\alpha \neq \alpha_0}$ é cobertura de $\{x_n\}_{n=1}^N$, um compacto (conforme 2.2.2), logo admite subcobertura finita $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^k$. Segue que $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^k \cup \{A_{\alpha_0}\}$ é subcobertura finita de $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$, ou seja, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ é compacto. □

Proposição 2.2.72. Sejam X, Y espaços topológicos, $x_0 \in X$ e $f : X \to Y$ contínua em x_0. Então $\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ sequência com $x_n \to x_0$, temos que $f(x_n) \to f(x_0)$.

Demonstração. Tome (x_n) tal que $x_n \to x_0$. Pela continuidade de f em x_0, $\forall W$ vizinhança de $f(x_0)$, $\exists\, V$ vizinhança de x_0 tal que $f(V) \subset W$. Mas $x_n \to x_0$, logo $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow x_n \in V \Rightarrow f(x_n) \in f(V) \subset W$. Assim, $\forall W$ vizinhança de $f(x_0)$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow f(x_n) \in W$, ou seja, $f(x_n) \to f(x_0)$. □

Proposição 2.2.73. Seja (X, d) espaço métrico e $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Então:

1. $x_n \to x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid n > N \Rightarrow d(x_n, x_0) < \epsilon$.
2. $x_n \succ x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall\, N \in \mathbb{N}, \exists\, n > N \mid d(x_n, x_0) < \epsilon$.

Demonstração. Basta observar que as bolas abertas $B(x, \epsilon)$ constituem uma base de abertos de X na topologia induzida pela métrica. □

Observação 2.2.74 (Teorema do Confronto)**.** Seja $\mathbb{R}$ com a métrica induzida do módulo e sejam $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tais que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq z_n \leq y_n$ e $x_n, y_n \to L$. Então $z_n \to L$.

Demonstração. Como $x_n, y_n \to L$, temos que, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > N_1 \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon$ e $n > N_2 \Rightarrow |y_n - L| < \epsilon$. Então $\exists\, N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow -\epsilon < x_n - L \leq z_n - L \leq y_n - L < \epsilon$. Logo, $n > N \Rightarrow |z_n - L| < \epsilon$. Segue que $z_n \to L$. □

Proposição 2.2.75. Seja X satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade e $Y \subset X$. Então $y_0 \in \overline{Y}$ se, e somente se, $\exists\, (y_n)$ sequência em Y tal que $y_n \to y_0$.

Demonstração.

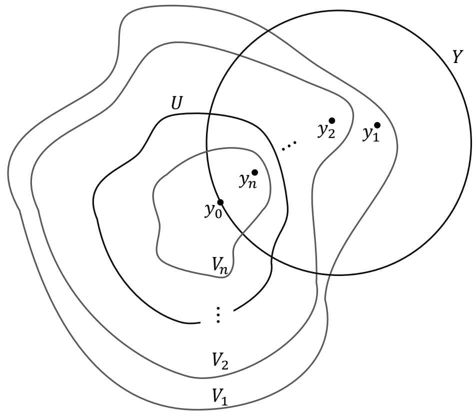

Figura 2.1 – Fecho topológico em espaços satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade

- $\Rightarrow$ Seja $y_0 \in \overline{Y} \subset X$ e seja $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base enumerável de vizinhanças de y_0 por abertos tais que $V_n \supset V_{n+1}$ (conforme 2.1.44). Como $y_0 \in \overline{Y}$, temos que $V_n \cap Y \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $y_n \in V_n \cap Y$ e considere a sequência (y_n). Temos que $\forall U \ni y_0$ aberto, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $V_N \subset U$. Segue que $\{y_n\} \subset Y$ e, $\forall n > N$, $y_n \in V_n \subset V_N \subset U$, ou seja, $y_n \to y_0$.
- $\Leftarrow$ Seja (y_n) sequência em Y tal que $y_n \to y_0 \in X$. Então $y_n \to y_0 \Rightarrow \forall U \ni y_0$ aberto, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in U$ para todo $n > N$. Assim, $\forall U \ni y_0$ aberto, $U \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow y_0 \in \overline{Y}$.

□

Definição 2.2.76. Seja X espaço topológico e (x_n) uma sequência em X. Uma subsequência de $x : \mathbb{N} \to X$ é uma função $x \circ \phi : \mathbb{N} \to X$, onde $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função crescente. Denotamos $x \circ \phi$ por $(x_{n_k}) \subset (x_n)$, onde $\forall k, l \in \mathbb{N}$, $n_k \in \mathbb{N}$ e $k < l \Rightarrow n_k < n_l$.

Proposição 2.2.77. Seja X espaço topológico e (x_n) uma sequência em X. Então $x_n \to x_0$ se, e somente se, $\forall (x_{n_k}) \subset (x_n)$, $x_{n_k} \to x_0$.

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Tome $(x_{n_k}) \subset (x_n)$. $\forall U$ vizinhança de x_0, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow x_n \in U$. Mas $\exists\, K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$. Assim, $k > K \Rightarrow n_k > n_K > N \Rightarrow x_{n_k} \in U$. Então $x_{n_k} \to x_0$.
- $\Leftarrow$ (x_n) é, em particular, uma subsequência de si mesma. Então $x_n \to x_0$.

□

Proposição 2.2.78. Seja X satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade e (x_n) uma sequência em X. Então $x_n \succ x_0$ se, e somente se, $\exists\,(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que $x_{n_k} \to x_0$.

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Suponha que $x_n \succ x_0$ e tome $\{V_n\}$ base enumerável de vizinhanças de x_0 composta de abertos encaixados, conforme 2.1.44. $x_n \succ x_0 \Leftrightarrow \forall\, U \ni x_0$ aberto, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists\, n > N$ tal que $x_n \in U$. Tome então $n_1 \in \mathbb{N}$ com $x_{n_1} \in V_1$ e $n_k > n_{k-1}$ com $x_{n_k} \in V_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Temos que (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n). Como $\forall\, U \ni x_0$, $\exists\, K \in \mathbb{N}$ com $x_0 \in V_K \subset U$, segue que $k > K \Rightarrow x_{n_k} \in V_k \subset V_K \subset U$, ou seja, $x_{n_k} \to x_0$.
- $\Leftarrow$ Suponha que $x_{n_k} \to x_0$ e tome U vizinhança de x_0. Então $\exists\, K \in \mathbb{N}$ tal que $k > K \Rightarrow x_{n_k} \in U$. Logo, $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > N$. Assim, $\exists k' = \max\{k, K\}$ tal que $n_{k'} > n_k > N$ e $n_{k'} \in U$ (pois $k' > K$), ou seja, $\forall\, U$ vizinhança de x_0, $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\exists\, n > N \mid x_n \in U$.

$\square$

Proposição 2.2.79. Seja X um espaço topológico. Então X é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda sequência em X tem um ponto de acumulação em X.

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Seja X enumeravelmente compacto e tome (x_n) uma sequência em X. Temos dois casos possíveis:
  - (a) Se $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for finito, então $\exists\, x_0 \in S$ com $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = x_0\}$ infinito.[5] Então $\forall\, N \in \mathbb{N}, \exists\, n > N \mid x_n = x_0$. Assim, $\forall\, U$ vizinhança de x_0, $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\exists\, n > N$ tal que $x_n = x_0 \in U$, ou seja, $x_n \succ x_0$. Além disso, $x_0 \in S \subset X$.
  - (b) Se $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for infinito, então, por 2.2.21, S tem um ponto de acumulação $x_0 \in X$. Logo, por 2.1.2.5, $\forall\, U \ni x_0$ aberto, $U \cap S$ é infinito. Então $x_n \succ x_0$, do contrário $\exists\, U \ni x_0$ aberto e $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow x_n \notin U$, ou seja, $U \cap S \subset \{x_1, ..., x_N\}$, um absurdo.
- $\Leftarrow$ Suponha que $\exists\{U_n\}$ cobertura enumerável de X que não admite subcobertura finita e defina $W_n = \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Temos que $W_n \subset W_{n+1}$ e $W_n \subsetneq X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (do contrário, $\{U_n\}$ teria subcobertura finita). Agora, $\forall n \in \mathbb{N}$, tome $x_n \notin W_n$ e considere a sequência (x_n). $\forall x \in X$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_N$. Mas $U_N \subset W_k$, $\forall k > N \Rightarrow x_k \notin U_N$, $\forall k > N$. Então $x_n \not\succ x$, $\forall x \in X$, ou seja, (x_n) não tem ponto de acumulação em X.

5. Ver A.3.3.

$\square$

Corolário 2.2.79.1. *Seja X satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade. Então $K \subset X$ é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda sequência em K tiver uma subsequência convergente em K.*
Em particular, para X espaço métrico, temos que $K \subset K$ é compacto se, e somente se, toda sequência em K tiver uma subsequência convergente em K.

Demonstração. O resultado segue de 2.2.79 e 2.2.78. Para compactos de espaços métricos, basta considerar também 2.2.58 e 2.2.57.1. $\square$

Definição 2.2.80. Seja X um espaço topológico.

1. Um subconjunto $A \subset X$ é dito sequencialmente aberto se, e somente se, toda sequência convergente para um elemento de A eventualmente está em A. Ou, mais formalmente, se $\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0 \in A$, $\exists N \in \mathbb{N}$ com $n > N \Rightarrow x_n \in A$.
2. Um subconjunto $F \subset X$ é dito sequencialmente fechado se, e somente se, toda sequência convergente em A converge para um elemento de A. Ou, mais formalmente, se $\forall (x_n) \in F^{\mathbb{N}}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow x_0 \in F$.

Proposição 2.2.81. Seja X espaço topológico. Então $A \subset X$ é sequencialmente aberto se, e somente se, $\complement A$ é sequencialmente fechado.

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Seja $A \subset X$ sequencialmente aberto e tome (x_n) sequência em $\complement A$ tal que $x_n \to x_0$. Suponha que $x_0 \notin \complement A$, isto é, $x_0 \in A$. Então $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow x_n \in A$, Ou seja, $n > N \Rightarrow x_n \notin \complement A$, um absurdo, pois (x_n) é uma sequência em $\complement A$. Segue que $x_0 \in \complement A$, isto é, $\complement A$ é sequencialmente fechado.
- $\Leftarrow$ Seja $F \subset X$ sequencialmente fechado e tome $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0 \in \complement F$. Suponha que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$ com $x_n \notin \complement F$. Defina $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ por $n_1 = x_1$ e $n_k > n_{k-1}$ com $x_{n_k} \in F$. Segue, por 2.2.77, que $x_{n_k} \to x_0$. Mas F é sequencialmente fechado, logo $x_0 \in F$, um absurdo. Assim, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow x_n \in \complement F$. Portanto, $\complement F$ é sequencialmente aberto.

$\square$

Corolário 2.2.81.1. Seja X um espaço topológico. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Todo subconjunto sequencialmente aberto de X é aberto.

2. Todo subconjunto sequencialmente fechado de X é fechado.

Neste caso, diz-se que X é sequencial.

Demonstração. Por 2.2.81, todo subconjunto sequencialmente aberto $A \subset X$ é aberto $\Leftrightarrow$ todo subconjunto sequencialmente fechado $\complement A \subset X$ é fechado. $\square$

Proposição 2.2.82. Sejam X espaço sequencial e Y espaço topológico. Então f é contínua se, e somente se, $\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0$, temos que $f(x_n) \to f(x_0)$.

Demonstração.

$\Rightarrow$ Seja f contínua e tome $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0$. Por 2.2.72, temos que $\big(f(x_n)\big)$ é convergente e $f(x_n) \to f(x_0)$.

$\Leftarrow$ Seja f levando sequências convergentes em sequências convergentes e tome $W \subset Y$ aberto. Defina $V = f^{-1}(W) \subset X$ e tome $(x_n) \in X$ tal que $x_n \to x_0 \in V$. Temos, então, que $\big(f(x_n)\big)$ é convergente em Y e $f(x_n) \to f(x_0)$. Como W é aberto, pela definição de convergência, $\exists N \in \mathbb{N}$ com $n > N \Rightarrow f(x_n) \in W$. Então $\exists N \in \mathbb{N}$ com $n > N \Rightarrow x_n \in f^{-1}(W) = V$. Portanto, V é sequencialmente aberto em um espaço sequencial, logo aberto. Então $f^{-1} : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ leva abertos em abertos, isto é, f é contínua.

$\square$

Teorema 2.2.83. *Todo espaço que satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade é sequencial.*

Demonstração. Seja X satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade e $F \subset X$ sequencialmente fechado. Tome $x_0 \in \overline{F}$. Por 2.2.75, $\exists (x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0$. Mas F é sequencialmente fechado, portanto segue que $x_0 \in F$. Desta forma, temos que $\overline{F} \subset F$, ou seja, F é fechado. Então todo subconjunto sequencialmente fechado de X é fechado, isto é, X é sequencial. $\square$

Definição 2.2.84. Seja X um espaço topológico. Diz-se que uma sequência $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ escapa de todo compacto se, $\forall K \subset X$ compacto, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow x_n \notin K$.

Proposição 2.2.85. Toda função própria entre espaços de Hausdorff leva sequências que escapam de todo compacto em sequências que escapam de todo compacto.

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ própria e $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ escapando de todo compacto. Tome $K \subset Y$ compacto. Como f é própria, segue que, $f^{-1}(K)$ é compacto. Assim, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow x_n \notin f^{-1}(K) \Leftrightarrow f(x_n) \notin K$. Portanto, $\big(f(x_n)\big)$ escapa de todo compacto. $\square$

Corolário 2.2.85.1. Uma função contínua entre espaços métricos é própria se, e somente se, leva sequências que escapam de compactos em sequências que escapam de compactos.

Demonstração. Por 2.2.85, temos que toda função própria leva sequências que escapam de todo compacto em sequências que escapam de todo compacto.
Seja, portanto, $f : X \to Y$ uma função contínua que leva sequências que escapam de todo compacto em sequências que escapam de todo compacto e $K \subset Y$ compacto. Tome (x_n) sequência em $f^{-1}(K)$. Então (x_n) não escapa de qualquer compacto, do contrário $\big(f(x_n)\big)$ seria uma sequência em K que escaparia de todo compacto, um absurdo.
Desta forma, $\exists\, \tilde{K} \subset X$ compacto tal que $x_n \in \tilde{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, por 2.2.79.1, $\exists\, (x_{n_k})$ subsequência convergente de (x_n) com $x_{n_k} \to x_0 \in \tilde{K}$. Agora, temos que K é fechado (conforme 2.2.6). Logo, pela continuidade de f, $f^{-1}(K)$ também o é. Então, por 2.2.58 e 2.2.75, $x_0 \in f^{-1}(K)$, uma vez que (x_{n_k}) é uma sequência em $f^{-1}(K)$. Ou seja, toda sequência em $f^{-1}(K)$ possui uma subsequência convergente em $f^{-1}(K)$. Portanto, $f^{-1}(K)$ é compacto (conforme 2.2.79.1). □

Definição 2.2.86. Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) em X é chamada <u>d-Cauchy</u> se $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m > N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Proposição 2.2.87. Seja (X, d) espaço métrico.

1. Toda sequência convergente em X é d-Cauchy;
2. Toda subsequência de uma sequência d-Cauchy é também d-Cauchy.

Demonstração.

1. Seja (x_n) com $x_n \to x_0$. Como $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid n > N \Rightarrow d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$, segue que $m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_n) < \epsilon$.
2. Seja (x_n) sequência d-Cauchy e $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ uma subsequência qualquer. $\forall \epsilon > 0$, tome $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$ e tome $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K \geq N$. Então $k, l > K \Rightarrow n_k, n_l \geq n_K \geq N \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \epsilon$, ou seja, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, K(\epsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall k, l \geq K$, $d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \epsilon$. Logo, (x_{n_k}) é d-Cauchy.

□

Proposição 2.2.88. Se uma sequência d-Cauchy tem um ponto de acumulação, então ela converge àquele ponto. Em particular, uma sequência d-Cauchy converge ou não tem subsequências convergentes.

Demonstração. Seja (x_n) sequência d-Cauchy tal que $x_n \succ x_0$ e seja $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ uma subsequência tal que $x_{n_k} \to x_0$. Então $\forall \frac{\epsilon}{2} > 0$, $\exists\, K \in \mathbb{N} \mid k > K \Rightarrow d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Mas (x_n) é d-Cauchy $\Rightarrow \forall \frac{\epsilon}{2} > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Tome, portanto, $k > K \mid n_k > N$. Temos que $n > N \Rightarrow d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \epsilon$.
Segue que toda sequência d-Cauchy com uma subsequência convergente converge. □

Definição 2.2.89. Seja X um espaço metrizável. Uma métrica d de X é dita completa se toda sequência d-Cauchy converge em X. Neste caso, dizemos que X é completo, ou d-completo para indicar a métrica sob a qual o espaço é completo.

Proposição 2.2.90. Todo espaço métrico compacto é completo.

Demonstração. Seja (X, d) espaço métrico compacto e $(x_n) \subset X$ uma sequência d-Cauchy qualquer. Por 2.2.79.1, temos que $\exists\, (x_{n_k}) \subset (x_n)$ convergente. Então (x_n) converge (conforme 2.2.88). Logo, X é completo. □

Proposição 2.2.91.

1. Completude topológica é uma invariante topológica.
2. Todo subespaço fechado de um espaço completo é completo com a métrica induzida.
3. Todo subespaço completo na métrica induzida de um espaço métrico é fechado nesse espaço.

Demonstração.

1. Seja (X, d) espaço completo e $\phi : X \to Y$ bijeção. Defina $d' : Y \times Y \to \mathbb{R}$ por $d'(x, y) = d\Big(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)\Big)$. Então $d'(x, y) \geq 0$, $d'(y, x) = d'(x, y)$, $d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow \phi^{-1}(x) = \phi^{-1}(y) \Leftrightarrow x = y$ (pela bijetividade de ϕ^{-1}) e $d'(x, z) = d\Big(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(z)\Big) \leq d\Big(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)\Big) + d\Big(\phi^{-1}(y), \phi^{-1}(z)\Big) = d'(x, y) + d'(y, z)$, $\forall x, y, z \in Y$, ou seja, d' é uma métrica em Y. Além disso, $\forall (y_n)$ sequência d'-Cauchy em Y, temos que $\Big(\phi^{-1}(y_n)\Big)$ é sequência d-Cauchy em X pela definição da métrica d', portanto converge. Como ϕ é contínua, segue por 2.2.82 que (y_n) converge em Y.
2. Seja (X, d) espaço métrico completo e $Y \subset X$ fechado com métrica $d_Y = d|_{Y \times Y}$. Tome (y_n) sequência d_Y-Cauchy em Y. Segue que $\{y_n\}$ é sequência d-Cauchy em X, pois $d_Y(x, y) = d(x, y)$, $\forall x, y \in Y$. Mas X é completo $\Rightarrow (y_n)$ converge em X. Seja $y_0 \in X$ tal que $y_n \to y_0$. Como X é espaço métrico, logo primeiro-enumerável, e Y é fechado, temos por 2.2.75 que $y_0 \in Y$. Então (y_n) converge em Y.

3. Seja (X, d) espaço métrico e $Y \subset X$ d_Y-completo. Tome $y_0 \in \overline{Y}$. Por 2.2.58 e 2.2.75, $\exists (y_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ tal que $y_n \to y_0$. Agora, como (y_n) é uma sequência convergente em (Y, d_Y), por 2.2.87, (y_n) é d_Y-Cauchy. Assim, segue da completude de (Y, d_Y) que $y_n \to a \in Y$. Segue, por 2.2.70, que $y_0 = a \in Y$. Então $\overline{Y} \subset Y$, isto é, Y é fechado.

□

Teorema 2.2.92. *Um espaço métrico é compacto se, e somente se, for completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Todo espaço métrico compacto é totalmente limitado (por 2.2.66) e completo (por 2.2.90). Basta, então, mostrar que todo espaço métrico completo totalmente limitado é compacto.

Seja (X, d) espaço métrico completo totalmente limitado e tome (x_n) sequência em X. Como X é totalmente limitado, é possível cobrir X com um número finito de bolas de raio 1. Seja B_1 uma das bolas dessa cobertura que contenha um número infinito de elementos de (x_n) (sempre existe uma, do contrário a união das bolas conteria apenas um número finito de x_n, um absurdo, pois as bolas cobrem X) e seja $S_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_1\}$. Por construção, S_1 é infinito. Indutivamente, defina também B_k como a bola de uma cobertura finita de raio $\frac{1}{k}$ que contém infinitos x_n tais que $n \in S_{k-1}$ (novamente, como S_{k-1} é infinito, existe um tal B_k) e $S_k = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_k\}$. Segue por indução que cada S_k é infinito e $S_k \subset S_{k-1}$.

Tome então $n_1 \in S_1$ e, $\forall k \in \mathbb{N}$, tome $n_k \in S_k$ tal que $n_k > n_{k-1}$ (sempre existe um tal n_k, uma vez que S_k é infinito). Segue que (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n). Além disso, como S_k são conjuntos decrescentes, $i < j \Rightarrow n_j \in S_j \subset S_i$. Assim, $\forall \epsilon > 0$, seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}$. Temos que $i, j > k \Rightarrow n_i, n_j \in S_k$ $\Rightarrow x_{n_i}, x_{n_j} \in B_k \Rightarrow d(x_{n_i}, x_{n_j}) < \operatorname{diam}(B_k) = \frac{2}{k} < \epsilon$. Portanto, (x_{n_k}) é sequência de Cauchy, logo convergente pela completude de X. Então, (x_n) tem ponto subsequência convergente. Assim, por 2.2.79.1, X é enumeravelmente compacto, portanto compacto (conforme 2.2.57.1). □

Corolário 2.2.92.1. *Todo subconjunto de um espaço completo é relativamente compacto se, e somente se, for totalmente limitado.*

Demonstração. Seja (X, d) completo e $A \subset X$. Temos que $\overline{A}$ é compacto se, e somente se for completo e totalmente limitado. Como $\overline{A}$ é fechado, segue que $\overline{A}$ é completo (conforme 2.2.91). Mas, por 2.2.65, temos que $\overline{A}$ é totalmente limitado se, e somente se, A for totalmente limitado. Portanto, $\forall A \subset X$,

$$\begin{aligned} A \text{ é relativamente compacto} &\Leftrightarrow \overline{A} \text{ é compacto} \Leftrightarrow \overline{A} \text{ é totalmente limitado} \\ &\Leftrightarrow A \text{ é totalmente limitado} \end{aligned}$$

. □

2.3 Espaços Vetorias Normados, Espaços de Banach e Convexos

2.3.1 Espaços Vetoriais Normados e Espaços de Banach

Definição 2.3.1. Um espaço topológico real[6] E é chamado de espaço vetorial topológico quando ele for um espaço vetorial e, além disso, as operaçéos $+ : E \times E \to E$, com $+(u, v) = u + v$, e $\cdot : E \times \mathbb{R} \to E$, com $\cdot(v, c) = cv$, forem funções contínuas.

Definição 2.3.2. Um espaço vetorial E é chamado de normado quando existe uma função $|| \cdot || : E \to [0, +\infty) \in \mathbb{R}$, chamada de norma, tal que:

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, $\forall x, y \in E$.

Quando substituímos $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ por $||0|| = 0$, obtemos que $|| \cdot ||$ é uma semi-norma.

Observação 2.3.3. Naturalmente, todo espaço vetorial normado é um espaço métrico. Basta definir $d(x, y) = ||x - y||$. Segue por 2.2.58 que todo espaço vetorial normado satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, portanto é também sequencial (conforme 2.2.83).
Além disso, todo espaço vetorial de dimensão finita é isomorfo a um espaço euclidiano. Segue, por A.5.5, que os compactos desse espaço são justamente os conjuntos limitados e fechados. Consequentemente, suas bolas fechadas são compactas, pois são limitadas (conforme 2.2.2) e fechadas. Assim, todo espaço vetorial normado de dimensão finita é localmente compacto.
É possível ainda, dada uma norma $|| \cdot ||$ de um espaço vetorial V, definir uma topologia cuja base são as bolas abertas $B(a, r) = \{x \in V \mid ||x - a|| < r\}$ para $a \in V$ e $r > 0$. Contudo, isso não faz com que o espaço seja um espaço vetorial topológico, pois é preciso que as operações de soma e multiplicação por escalar sejam contínuas nessa topologia.

Exemplo 2.3.4. Dado V espaço vetorial de dimensão finita e uma base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V, é possível definir, para $p > 1$, a norma $|| \cdot ||_p : V \to [0, +\infty)$ por $||v||_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, onde $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$. As propriedades 1 e 2 em 2.3.2

6. A menos que seja especificado o contrário, todos os espaços vetoriais considerados nessa dissertação serão espaços vetoriais reais.

decorrem diretamente da definição, enquanto a propriedade 3 é chamada, neste caso, de desigualdade de Minskowski.
No caso em que $p = 1$, a norma $||\cdot||_1$ é definida por $||v||_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$, enquanto para $p = \infty$ a norma $||\cdot||_\infty$ é definida por $||v||_\infty = \max_{i=1}^{n} |v_i|$. [7]

Exemplo 2.3.5. Considerando que $t(x_n) = (tx_n)$ e $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$, o conjunto $\mathscr{L}^2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ é um espaço vetorial. Além disso, definindo $||\cdot|| : \mathscr{L}^2 \to \mathbb{R}$ por $||(x_n)|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$, obtemos que $||\cdot||$ é norma. Então $\mathscr{L}^2$ é um espaço vetorial normado. [8]

Exemplo 2.3.6. Sejam X, Y espaços vetoriais normados. O espaço $\mathscr{L}(X, Y)$ das aplicações lineares de X para Y é um espaço vetorial normado com a norma $||T|| = \inf\{c \leq 0 \mid ||Tx||_Y \leq c||x||_X, \forall x \in X\} = \sup\{||Tx||_Y \mid ||x||_X \leq 1\}$.
Diz-se que a aplicação $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ é limitado se $||T|| < \infty$. Neste caso, $\forall x \in X$, vale que $||T(x)||_Y \leq ||T|| \cdot ||x||_X$. Além disso, temos que as seguintes proposições são equivalentes:

1. $||T|| < \infty$.
2. T é contínua.
3. T é contínua em $x_0 \in X$. [9]

Exemplo 2.3.7. Seja X um conjunto qualquer, $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra de X e μ uma medida em $\mathscr{A}$. Defina

$$L(X, \mathscr{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ é } \mu\text{-mensurável}\}$$

e, para cada $f, g \in L(X, \mathscr{A}, \mu)$, ponha $f \sim g$ se, e somente se, $f = g$ em μ-quase todos pontos (isto é, exceto em um conjunto de medida μ nula). Seja $[f]$ a classe de equivalência de f sob essa relação de equivalência e defina, $\forall p \in (1, +\infty)$,

$$L^p = L^p(X, \mathscr{A}, \mu) = \left\{[f] \,\middle|\, f \in L(X, \mathscr{A}, \mu) \text{ e } \int |f|^p d\mu < \infty\right\}$$

Então L^p é um espaço vetorial normado com norma $||\cdot||_p : L^p \to [0, +\infty)$ dada por $||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.
Além disso, o espaço $L^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \text{ limitada}\}$ é também um espaço vetorial com norma $||f||_\infty = \sup_I f$. [10]

7. Os detalhes desse exemplo nos casos $p = 1$ e $p = \infty$ podem ser vistos em A.5.1.
8. Os detalhes desse exemplo podem ser vistos em A.5.2.
9. Os detalhes desse exemplo podem ser vistos em A.5.3.
10. Os detalhes desse exemplo fogem ao escopo dessa dissertação, mas podem ser encontrados em [4, §6, p.52-65].

Proposição 2.3.8. Seja E espaço vetorial normado e $L \subset E$. Então L é limitado se, e somente se, $\exists\, r > 0$ tal que $L \subset \overline{B(0,r)}$.

Demonstração.

- $\Rightarrow$ Seja $\operatorname{diam}(L) < \infty$, tome $x_0 \in L$ e ponha $r = ||x_0|| + \operatorname{diam}(L)$. Então, $\forall x \in L$, $||x|| \leq ||x - x_0|| + ||x_0|| \leq ||x_0|| + \operatorname{diam}(L) = r$, ou seja, $x \in \overline{B(0,r)}$. Então $L \subset \overline{B(0,r)}$.
- $\Leftarrow$ Seja $r > 0$ tal que $L \subset \overline{B(0,r)}$. Então, por 2.2.2, $\operatorname{diam}(L) \leq \operatorname{diam}\Big(\overline{B(0,r)}\Big) < \infty$, ou seja, L é limitado.

□

Definição 2.3.9. Seja E um espaço vetorial normado e $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Dizemos que (x_n) converge para o infinito quando $||x_n|| \to \infty$. Nesse caso, escrevemos que $x_n \to \infty$.

Proposição 2.3.10. Seja E um espaço vetorial normado e $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergindo para o infinito. Então (x_n) escapa de qualquer compacto.

Demonstração. Seja $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to \infty$ e tome $K \subset E$ compacto. Por 2.2.54 e 2.3.8, temos que $\exists r > 0$ tal que $K \subset \overline{B(0,r)}$. Mas $||x_n|| \to \infty$, logo $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |x_n| > r \Leftrightarrow x_n \notin \overline{B(0,r)} \supset K$. Segue que (x_n) escapa de todo compacto. □

Corolário 2.3.10.1. Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita e $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Segue que (x_n) escapa de todo compacto se, e somente se, (x_n) converge para o infinito.

Demonstração. Por 2.3.10, temos que toda sequência que converge para o infinito escapa de qualquer compacto.
Seja, então, $(x_n) \in R^{\mathbb{N}}$ que escapa de qualquer compacto, e considere, então, $\overline{B(0,r)}$. $\forall r > 0$, temos que $\overline{B(0,r)}$ é limitado (conforme 2.2.2) e fechado, logo, por 2.3.3, compacto. Assim, $\forall r > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow x_n \notin \overline{B(0,r)} \Leftrightarrow ||x_n|| > r$. Temos, assim, que $||x_n|| \to \infty$, ou seja, (x_n) converge para o infinito. □

Teorema 2.3.11. *Seja E, F espaços vetoriais normados de dimensão finita e $f : E \to F$ contínua. Então f é própria se, e somente se, leva sequências que convergem para o infinito em sequências que convergem para o infinito.*

Demonstração. Como todo espaço vetorial normado é também espaço métrico (conforme 2.3.3), por 2.2.85.1, temos que f é própria se, e somente se, f leva sequências que escapam de todo compacto em sequências que escapam de todo compacto. Agora, por 2.3.10.1, uma sequência de um espaço vetorial normado de dimensão finita escapa de todo compacto se, e somente se, converge para o infinito. Logo, f é própria se, e somente se, leva sequências que convergem para o infinito em sequências que convergem para o infinito. □

Definição 2.3.12. Seja V espaço vetorial normado. Duas normas $||\cdot||_a$, $||\cdot||_b$ em V são ditas equivalentes se $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tais que $\forall x \in V$, $\alpha||x||_a \leq ||x||_b \leq \beta||x||_a$. Nesse caso, escrevemos $||\cdot||_a \sim ||\cdot||_b$.

Observação 2.3.13. As topologias definidas pelas bolas abertas de duas normas equivalentes são também equivalentes. Dado V espaço vetorial com normas $||\cdot||_a$ e $||\cdot||_b$, tomando $x_0 \in V$ e $r > 0$, pondo $B_a(x_0, r) = \{x \in V \mid ||x - x_0||_a < r\}$ e tendo que $C_1||x||_a \leq ||x||_b \leq C_2||x||_a$ para todo $x \in V$, segue que $B_b(x_0, rC_1) \subset B_a(x_0, r)$, pois

$$\begin{aligned} x \in B_b(x_0, rC_1) &\Leftrightarrow ||x - x_0||_b < rC_1 \Rightarrow C_1||x - x_0||_a \leq ||x - x_0||_b < rC_1 \\ &\Leftrightarrow ||x - x_0||_a < r \Leftrightarrow x \in B_a(x_0, r) \end{aligned}$$

e, analogamente, temos que $B_a\Big(x_0, \frac{r}{C_2}\Big) \subset B_b(x_0, r)$.

Proposição 2.3.14. A equivalência das normas é uma relação de equivalência.

Demonstração.

1. Seja V espaço vetorial com norma $||\cdot||$. Então $||x|| \leq ||x|| \leq ||x||$, $\forall x \in V$, isto é, $||\cdot|| \sim ||\cdot||$.
2. Seja V espaço vetorial e $||\cdot||_a$, $||\cdot||_b$ normas em V com $||\cdot||_a \sim ||\cdot||_b$. Então $\exists\, m, M > 0$ tais que $m||x||_a \leq ||x||_b \leq M||x||_a$, $\forall x \in V$. Logo, temos que $\exists\, \frac{1}{m}, \frac{1}{M} > 0$, $\frac{1}{M}||x||_b \leq ||x||_a \leq \frac{1}{m}||z||_a$, $\forall x \in V$. Segue que $||\cdot||_b \sim ||\cdot||_a$.
3. Seja V espaço vetorial e $||\cdot||_a$, $||\cdot||_b$ e $||\cdot||_c$ normas em V com $||\cdot||_a \sim ||\cdot||_b$ e $||\cdot||_b \sim$. Então $\exists\, m_1, m_2, M_1, M_2 > 0$ tais que $m_1||x||_a \leq ||x||_b \leq M_1||x||_a$ e $m_2||x||_b \leq ||x||_c \leq M_2||x||_b$, $\forall x \in V$. Então $m_1 \cdot m_2||x||_a \leq ||x||_c \leq M_1 \cdot M_2||x||_a$ com $m_1 \cdot m_2, M_1 \cdot M_2 > 0$, $\forall x \in V$. Segue que $||\cdot||_a \sim ||\cdot||_c$.

Temos, dessa forma, que $\sim$ é uma relação de equivalência. □

Teorema 2.3.15 (Equivalência das Normas)**.** *Todas as normas são equivalentes entre si em espaços vetoriais normados de dimensão finita.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, $\{e_i\}$ uma base de V, $||\cdot||_1$ a norma conforme 2.3.4 e $||\cdot||$ uma norma qualquer de V. Pela propriedade 3, podemos obter que $\forall x, y \in V$, $\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x-y||$. Agora, pondo $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, temos que

$$||x-y|| = \left|\left| \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i \right|\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \cdot ||e_i|| \leq ||x-y||_1 \cdot \max_{i=1}^n ||e_i||$$

isto é, a função g definida por $g : x \mapsto ||x||$ é de Lipschitz em $(V, ||\cdot||_1)$, portanto contínua. Assim, como a $||\cdot||_1$-esfera $\mathbb{S} = \{x \in V \mid ||x||_1\}$ é compacta em $(V, ||\cdot||_1)$, segue que $g(\mathbb{S})$ é compacta em $\mathbb{R}$, logo $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq ||x|| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{S}$. Além disso, como, $\forall x \in V$, $||x|| \geq 0$ e $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, temos que $m, M > 0$.
Tome, portanto, $x \in V$. Então $\frac{x}{||x||_1} \in \mathbb{S}$. Segue que $m \leq \left|\left| \frac{x}{||x||_1} \right|\right| = \frac{||x||}{||x||_1} \leq M$, ou seja, $m||x||_1 \leq ||x|| \leq M||x||_1$. Logo, $||\cdot|| \sim ||\cdot||_1$. Assim, toda norma em V é equivalente à norma $||\cdot|||_1$.
Finalmente, sejam $||\cdot||_a$, $||\cdot||_b$ duas normas em V. Temos que $||\cdot||_a \sim ||\cdot||_1$ e $||\cdot||_b \sim ||\cdot||_1$. Portanto, $||\cdot||_a \sim ||\cdot||_b$ (conforme 2.3.14). □

Teorema 2.3.16. *Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial normado de dimensão n com norma $||\cdot||$ e seja $\{v_i\}_{i=1}^n$ uma base de V. Tome $(u_i) \in V^{\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy qualquer e ponha $u_i = \sum_{j=1}^n u_{i,j} v_j$, com $u_{i,j} \in \mathbb{R}$.
Agora, sendo $||\cdot||_1$ a norma da soma na base $\{v_i\}_{i=1}^n$ (definida conforme 2.3.4), temos, por 2.3.15, que $\exists\, A, B > 0$ tais que, $\forall x \in V$, $A \cdot ||x||_1 \leq ||x|| \leq B \cdot ||x||_1$. Além disso, como (u_i) é Cauchy, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $k, l > N \Rightarrow ||u_k - u_l|| < \epsilon$. Então

$$\epsilon > ||u_k - u_l|| \geq A||u_k - u_l||_1 = A \sum_{j=1}^n |u_{k,j} - u_{l,j}| \geq A|u_{k,j} - u_{l,j}|$$

$\forall j \in \{1, ..., n\}$. Segue que $(u_{i,j})_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$, logo converge em $\mathbb{R}$. Ponha $u_{i,j} \to_i w_j \in \mathbb{R}$ e defina $w = \sum_{j=1}^n w_j v_j$. Assim, temos que

$$||u_k - w|| \leq B||u_i - w||_1 = B \sum_{j=1}^n |u_{i,j} - w_j|$$

Mas $|u_{i,j} - w_j| \to_i 0$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$, então $||u_i - w|| \to 0$, isto é, $u_i \to w$.
Segue que toda sequência de Cauchy em V é convergente em V, ou seja, V é completo. □

Corolário 2.3.16.1. *Todo subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial normado é fechado nesse espaço.*

Demonstração. Seja $(L, ||\cdot||)$ um espaço vetorial normado e $V \subset L$ subespaço de dimensão finita. Como $(V, ||\cdot||)$ é um espaço vetorial normado de dimensão finita, por 2.3.16, temos que V é completo. Segue que V é fechado em L (conforme 2.3.3 e 2.2.91, pois V é um subconjunto completo de um espaço métrico). □

Proposição 2.3.17. Seja E espaço de vetorial normado e $V \subset E$ subespaço de dimensão finita. Então, $\forall x_0 \in E$, $\exists\, x \in V$ tal que $d(x_0, x) = d(x_0, V)$, isto é, a distância de um ponto a V é sempre alcançada.

Demonstração. Tome $x_0 \in E$ e ponha $\delta = d(x_0, V) \geq 0$. Observe, primeiramente, que $\forall r > \delta$, $V \cap \overline{B(x_0, r)} \neq \emptyset$.[11] Defina, portanto,

$$K = V \cap \bigcap_{r>\delta} \overline{B(x_0, r)} = \bigcap_{r>\delta} \left(V \cap \overline{B(x_0, r)}\right)$$

Temos que K é limitado, pois, $\forall r > \delta$, $K \subset \overline{B(x_0, r)}$, um conjunto limitado (conforme 2.2.2). Além disso, K é fechado em V, uma vez que $\bigcap_{r>\delta} \overline{B(x_0, r)}$ é um fechado de E. Assim, temos que K é limitado e fechado de V, portanto compacto de V (conforme 2.3.3). Agora, como, para todo $\mathscr{R} \subset (\delta, \infty)$ finito, temos que $r_0 = \min\{r \in \mathscr{R}\} > d(x_0, V)$, segue que[12]

$$\bigcap_{r\in\mathscr{R}} \left(V \cap \overline{B(x_0, r)}\right) = V \cap \overline{B(x_0, r_0)} \neq \emptyset$$

Então, pela Propriedade da Intersecção Finita, $K \neq \emptyset$. Tome, assim, $x \in K$. Temos que, $\forall r > d(x_0, V)$, $x \in \overline{B(x_0, r)}$, isto é, $d(x, x_0) \leq r$. Segue que $d(x, x_0) \leq d(x_0, V)$. Mas $K \subset V$, portanto $x \in V$ e $d(x_0, x) \geq \inf_{x\in V} d(x_0, x) = d(x_0, V)$. Assim, $d(x_0, x) = d(x_0, V)$ com $x \in V$, ou seja, $\exists\, x \in V$ tal que $d(x_0, x) = d(x_0, V)$.

11. Ver A.3.4.
12. Ver A.3.5.

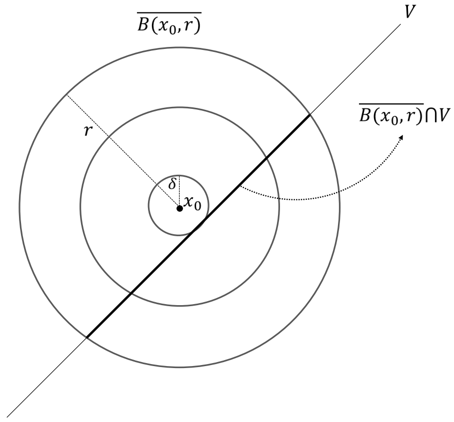

Figura 2.2 – Distância em espaços vetoriais normados

Observe que, no caso em que $x_0 \in V$, basta tomar $x = x_0$, pois $d(x, x_0) = 0 = d(x_0, V)$ (uma vez que V é um fechado, conforme 2.3.16.1). $\square$

Teorema 2.3.18 (Lema de Riesz)**.** *Seja X um espaço vetorial normado e $Y \subsetneq X$ um subespaço fechado de X. Então, $\forall \epsilon \in (0,1)$, $\exists x \in \mathbb{S}(X)$ tal que $||x - y|| > \epsilon$ para todo $y \in Y$.*

Demonstração. Tome $x_0 \in X - Y$ e defina $a = d(x_0, Y)$. Como Y é fechado, por 2.2.50, temos que $a > 0$. Tome, assim, $\epsilon \in (0,1)$. Então $\frac{a}{\epsilon} > a$. Segue, assim, que $\exists\, y_0 \in Y$ tal que $a \leq ||x_0 - y_0|| < \frac{a}{\epsilon}$ (do contrário, $d(x_0, y) \geq \frac{a}{\epsilon}$ para todo $y \in Y$ e $d(x_0, Y) \geq \frac{a}{\epsilon} > a$, um absurdo). Defina $x = \frac{x_0 - y_0}{||x_0 - y_0||}$. Temos que $x \in \mathbb{S}(X)$. Além disso, como $(y_0 + ||x_0 - y_0|| \cdot y) \in Y$ para todo $y \in Y$, temos que

$$||x - y|| = \frac{1}{||x_0 - y_0||} \Big|\Big| x_0 - y_0 - ||x_0 - y_0|| \cdot y \Big|\Big| > \frac{d(x_0, Y)}{\frac{a}{\epsilon}} = \epsilon$$

$\forall y \in Y$. $\square$

Corolário 2.3.18.1. *Seja L espaço vetorial normado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$dim(L) < \infty$.*
2. *$\mathbb{D}(L)$ é compacto.*
3. *$\mathbb{S}(L)$ é compacto.*

Demonstração.

$1 \Rightarrow 2$ Caso $\dim(L) < \infty$, temos que $\mathbb{D}(L)$ é um fechado limitado de um espaço vetorial de dimensão finita, logo um compacto (conforme 2.3.3)

$2 \Rightarrow 3$ Se $\mathbb{D}(L)$ é compacto, como $\mathbb{S}(L) \subset \mathbb{D}(L)$ é um fechado de L, por 2.2.6, segue que $\mathbb{S}(L)$ é compacto.

$3 \Rightarrow 1$ Suponha, então, que $\dim(L) = \infty$ e tome $x_1 \in \mathbb{S}(L)$. Indutivamente, dados $\{x_1, ..., x_n\} \in \mathbb{S}(L)$, temos que $V_n = \text{span}(x_1, ..., x_n) \subsetneq L$, pois $\dim(V_n) \leq n < \infty = \dim(L)$. Como, por 2.3.16.1, temos que V_n é fechado, segue do Lema de Riesz que $\exists\, x_{n+1} \in \mathbb{S}(L)$ tal que $d(x_{n+1}, Y_n) > \frac{1}{2}$. Considere, portanto, a sequência $(x_n) \in \mathbb{S}(L)^{\mathbb{N}}$. $\forall n, m \in \mathbb{N}$, para $n > m$, temos que

$$d(x_n, x_m) \geq d(x_n, Y_m) \geq d(x_n, Y_{n-1}) > \frac{1}{2}$$

pois $Y_m \subset Y_{n-1}$. Então (x_n) não possui nenhuma subsequência convergente (pois, caso (x_{n_i}) fosse uma tal subsequência, para $\epsilon < \frac{1}{2}$, teríamos que $d(x_n, x_m) > \frac{1}{2} > \epsilon$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$, um absurdo). Assim, por 2.2.79.1, temos que $\mathbb{S}(L)$ não é compacto.

□

Definição 2.3.19. Um espaço vetorial normado $\left(E, ||\cdot||\right)$ é chamado de espaço de Banach quando sua norma for completa.

Proposição 2.3.20. Seja E espaço de Banach e $K \subset E$. Então K é compacto se, e somente se, K é fechado, limitado e $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, V_\epsilon \subset E$ subespaço de dimensão finita tal que $d(x, V_\epsilon) \leq \epsilon$, $\forall x \in K$.

Demonstração.

$\Rightarrow$ K é compacto, logo é também limitado (por 2.2.54) e fechado (por 2.2.6). Tome $\epsilon > 0$. Como $\{B(x, \epsilon)\}_{x \in K}$ é cobertura de K temos que $\exists\, \{B(x_i, \epsilon)\}_{i=1}^n$ subcobertura finita. Defina então $V = \text{span}(x_1, ..., x_n)$. Evidentemente, $\dim(V) \leq n < \infty$. Além disso, $\forall x \in K$, $\exists\, i \in \{1, ..n\}$ tal que $x \in B(x_i, \epsilon)$, ou seja, tal que $d(x, x_i) < \epsilon$. Segue que $d(x, V) = \inf_{y \in V} d(x, y) \leq d(x, x_i) < \epsilon$.

$\Leftarrow$ Seja K fechado e limitado tal que $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, V_\epsilon \subset E$ subespaço de dimensão finita tal que $d(x, V_\epsilon) \leq \epsilon$, $\forall x \in K$. Tome então $\epsilon > 0$ e $V = V_\epsilon \subset E$ um tal subespaço. Defina agora $L = \{x \in V \mid d(x, K) \leq \epsilon\}$. Evidentemente, L é fechado, uma vez que $x \mapsto d(x, K)$ é contínua (conforme 2.2.50). Além disso, por 2.3.17, $\forall x, y \in L$, $\exists\, x', y' \in K$ tais que $d(x, x') = d(x, K) \leq \epsilon$ e $d(y, y') = d(y, K) \leq \epsilon$. Então $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) \leq 2\epsilon + \text{diam}(K)$. Segue pela limitação de K que L também é limitado. Assim, por 2.3.3, temos que $L \subset V_\epsilon$ é compacto, logo totalmente limitado (conforme 2.2.66). Portanto, $\exists\, y_1, ..., y_n \in L$ tais que $L \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \epsilon)$.

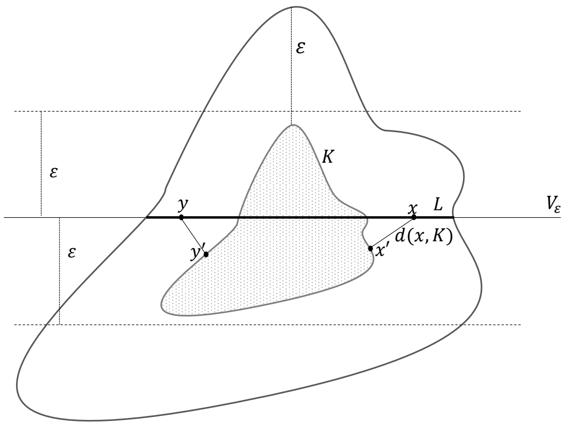

Figura 2.3 – Caracterização de compactos em espaços de Banach

Agora, por 2.3.17, $\forall x \in K$, $\exists\, y \in V$ tal que $d(x,y) = d(x,V) \leq \epsilon$. Mas $d(y,K) = \inf_{z\in K} d(y,z) \leq d(y,x) \leq \epsilon \Rightarrow y \in L$. Assim, $\forall x \in K$, $\exists\, y \in L$ tal que $d(x,y) \leq \epsilon$. Porém, como $y \in L$, $\exists\, i \in \{1,...,n\}$ tal que $d(y,y_i) < \epsilon$. Então $\forall x \in K$, $\exists\, i \in \{1,...,n\}$ tal que $d(x,y_i) \leq d(x,y) + d(y,y_i) < 2\epsilon$, ou seja, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, 2\epsilon)$. Tome, portanto, $\forall i \in \{1,...,n\}$, $x_i \in K$ tal que $d(x_i,y_i) < 2\epsilon$. Temos que $\forall x \in K, \exists\, i \in \{1,...,n\}$ tal que $d(x,y_i) < 2\epsilon$ $\Rightarrow d(x,x_i) \leq d(x,y_i) + d(y_i,x_i) < 4\epsilon$. Então $\exists\, \{x_1,...,x_n\} \subset K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 4\epsilon)$. Como a escolha do ϵ foi arbitrária, segue que K é totalmente limitado. Então, por 2.2.92.1, K é relativamente compacto. Mas K é fechado, ou seja, $\overline{K} = K$. Logo, K é compacto.

□

2.3.2 Convexos

Definição 2.3.21. Um subconjunto $C \subset E$ de um espaço vetorial é dito convexo quando, $\forall u, v \in C$, $[u,v] = \Big\{(1-t)u + tv \mid t \in [0,1]\Big\} \subset C$.

Exemplo 2.3.22. Subespaços vetoriais e bolas são sempre convexos.

Proposição 2.3.23. Seja $\{C_\alpha\}$ uma família de convexos em E. Então $\bigcap_\alpha C_\alpha$ é convexo.

Demonstração. Tome $u, v \in \bigcap_\alpha C_\alpha$. Temos que $u, v \in C_\alpha$, $\forall \alpha$. Mas C_α é convexo $\Rightarrow [u,v] \subset C_\alpha$, $\forall \alpha \Rightarrow [u,v] \subset \bigcap_\alpha C_\alpha$. □

Definição 2.3.24. Seja $X \subset E$. O envelope convexo (ou envoltória convexa) de X é dada por:

$$C_0(X) = \bigcap_{\substack{C \supset X \\ C \text{ convexo}}} C$$

Em outras palavras, $C_0(X)$ é o menor convexo que contém X.

Observação. É fácil perceber, pela definição acima, que $Y \subset X \Rightarrow C_0(Y) \subset C_0(X)$.

Proposição 2.3.25. Seja $C \subset E$ As seguintes afirmações são equivalentes:

1. C é convexo.
2. $C_0(C) = C$.
3. $\forall \{v_1, ..., v_n\} \subset C$ finito, $\forall \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset [0,1]$ tal que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, temos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in C$ (esta soma é chamada de combinação convexa).

Demonstração.

$1 \Leftrightarrow 2$ $C_0(C) = C \Leftrightarrow C \in \{C' \supset C \mid C'$é convexo$\} \Leftrightarrow C$ é convexo.

$2 \Rightarrow 3$ Suponha que toda combinação convexa de n elementos de C está em C e tome $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\} \subset C$ e $\{\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}\} \subset [0,1]$ tal que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Então $\left\{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{n+1}}, ..., \frac{\alpha_n}{1-\alpha_{n+1}}\right\} \subset [0,1]$ e $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} = 1$. Assim, $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} v_i \in C$. Mas C é convexo, portanto

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i = (1-\alpha_{n+1})\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} v_i\right) + \alpha_{n+1} v_{n+1} \in C$$

Logo, por indução, toda combinação convexa de elementos de C está em C.

$3 \Rightarrow 1$ $\forall u, v \in C$, $\forall \{t, 1-t\} \subset [0,1]$, temos que $(1-t)u + tv \in C$. Assim, $[u, v] \subset C$.

$\square$

Observação 2.3.26. Todo elemento de $C_0(X)$ pode ser escrito como a combinação conexa $\sum_{x \in X} \alpha_x x$, onde $\{x \in X \mid \alpha_x \neq 0\}$ é finito (logo, as somas fazem sentido).

Proposição 2.3.27. Seja E espaço vetorial normado. Então $\forall X \subset E$ limitado, $\operatorname{diam}\big(C_0(X)\big) = \operatorname{diam}(X)$.

Demonstração. Como $X \subset C_0(X)$, temos que $\operatorname{diam}(X) \leq \operatorname{diam}\big(C_0(X)\big)$. Assim, basta demonstrar que $\operatorname{diam}\big(C_0(X)\big) \leq \operatorname{diam}(X)$.
Ponha $r = \operatorname{diam}(X)$ e tome $x_0 \in X$. Então $X \subset \overline{B(x_0, r)}$, pois $y \in X \Rightarrow d(x_0, y) \leq \operatorname{diam}(X) = r \Leftrightarrow y \in \overline{B(x_0, r)}$. Como $\overline{B(x_0, r)}$ é convexo, segue que $C_0(X) \subset \overline{B(x_0, r)}$. Desta forma, $\forall x \in X$, $C_0(X) \subset \overline{B(x, r)}$. Logo, $\forall x \in X$, $\forall y \in C_0(X)$, $d(x, y) \leq r$. Tome, agora, $y_0 \in C_0(X)$. Então $X \subset \overline{B(y_0, r)}$, pois $x \in X \Rightarrow d(x, y_0) \leq r \Leftrightarrow x \in \overline{B(y_0, r)}$. Novamente, pela convexidade de $\overline{B(y_0, r)}$, segue que $C_0(X) \subset \overline{B(y_0, r)}$. Assim, $\forall y \in C_0(X)$, $C_0(X) \subset \overline{B(y, r)}$. Portanto, $\forall x, y \in C_0(X)$, $d(x, y) \leq r = \operatorname{diam}(X) \Rightarrow \operatorname{diam}\big(C_0(X)\big) \leq \operatorname{diam}(X)$. $\square$

Proposição 2.3.28. Seja E espaço vetorial normado e $S \subset E$ finito. Então $C_0(S)$ é compacto em E.[13]

Demonstração. Seja $S = \{p_1, ..., p_n\}$ e considere

$$\Delta = \left\{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\right\} \subset \mathbb{R}^n$$

Como Δ é limitado e fechado, por 2.2.55, é compacto. Defina, então, $\phi : \mathbb{R}^n \to E$ por $\phi(t_1, ..., t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i p_i$. Temos que ϕ é contínua. Logo, segue que $C_0(S) = \phi(\Delta)$ é compacto (conforme 2.2.6). $\square$

Proposição 2.3.29. O fecho de todo convexo é também convexo.

Demonstração. Seja $C \subset E$ convexo e sejam $x, y \in \overline{C}$, $t \in [0,1]$. Tome $(x_n), (y_n)$ sequências em C tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$ e defina $z_n = tx_n + (1-t)y_n$. Pela convexidade de C, temos que $z_n \in C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, $z_n \to tx + (1-t)y$. Segue que $tx + (1-t)y \in \overline{C}$, $\forall x, y \in \overline{C}$ e $t \in [0,1]$. Então $\overline{C}$ é convexo. $\square$

Corolário 2.3.29.1. Seja E espaço vetorial normado e $X \subset E$. Então $\overline{C_0\left(\overline{X}\right)} = \overline{C_0(X)}$.

Demonstração. $\forall\, X \subset E$, $X \subset C_0(X) \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{C_0(X)}$. Mas $C_0(X)$ é convexo, portanto $\overline{C_0(X)}$ também o é (conforme 2.3.29). Segue que $C_0\left(\overline{X}\right) \subset \overline{C_0(X)}$. Agora, $\overline{C_0(X)}$ é fechado, logo $\overline{C_0\left(\overline{X}\right)} \subset \overline{C_0(X)}$. Mas $X \subset \overline{X} \Rightarrow C_0(X) \subset C_0\left(\overline{X}\right) \Rightarrow \overline{C_0(X)} \subset \overline{C_0(\overline{X})}$. Segue que $\overline{C_0\left(\overline{X}\right)} = \overline{C_0(X)}$. $\square$

Proposição 2.3.30. Seja $(E, ||\cdot||)$ espaço vetorial normado e $C \subset E$ convexo com interior não-vazio. Então, $\forall x_0 \in \text{int}(C)$ e $\forall x_1 \in \overline{C}$, $(x_0, x_1) = \Big\{(1-t)u + tv \mid t \in (0,1)\Big\} \subset \text{int}(C)$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0 \mid B_\epsilon(x_0) \subset C$. Tome $t \in (0,1)$ e defina os homeomorfismos $T_y : E \to E$ dados por $T_y(z) = (1-t)y + tz$. Note que, $\forall y \in C$, $T_y(C) \subset C$, pois $z \in C \Rightarrow T_y(z) \in [y, z] \subset C$. Considere então a sequência (w_n), com $w_n \in C$ e $w_n \longrightarrow x_1$ (sempre existe uma, por 2.3.3 e 2.2.75). Queremos mostrar que $B_{t\epsilon}\Big(T_{w_n}(x_0)\Big) = T_{w_n}\Big(B_\epsilon(x_0)\Big)$:

1. $x \in B_\epsilon(x_0)$ e $T_{w_n}(x) = (1-t)w_n + tx \Rightarrow ||T_{w_n}(x) - T_{w_n}(x_0)|| = ||tx - tx_0|| = t||x - x_0|| < t\epsilon \Rightarrow T_{w_n}(x) \in B_{t\epsilon}\Big(T_{w_n}(x_0)\Big)$.
2. $y \in B_{t\epsilon}\Big(T_{w_n}(x_0)\Big) \subset E \Rightarrow \exists\, z \in E \mid y = T_{w_n}(z) = (1-t)w_n + tz$ (pois T_{w_n} é homeomorfismo) $\Rightarrow ||y - T_{w_n}(x_0)|| = ||T_{w_n}(z) - T_{w_n}(x_0)|| = t||z - x_0||$. Mas $y \in B_{t\epsilon}\Big(T_{w_n}(x_0)\Big) \Rightarrow ||y - T_{w_n}(x_0)|| < t\epsilon \Rightarrow ||z - x_0|| < \epsilon \Rightarrow z \in B_\epsilon(x_0) \Rightarrow y \in T_{w_n}\Big(B_\epsilon(x_0)\Big)$.

13. Como será visto em 2.4.23, esse $C_0(S)$ é chamado de n-simplexo, onde $n = \#S - 1$.

Então $B_\epsilon(x_0) \subset C \Rightarrow B_{t\epsilon}\Big(T_{w_n}(x_0)\Big) = T_{w_n}\Big(B_\epsilon(x_0)\Big) \subset T_{w_n}(C) \subset C \Rightarrow B_{t\epsilon}\Big(T_{w_n}(x_0)\Big) \subset \text{int}(C)$. Mas $w_n \longrightarrow x_1 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow w_n \in B_\epsilon(x_1)$. Agora, $||T_{w_n}(x_0) - T_{x_1}(x_0)|| = (1-t)||w_n - x_1|| < t\epsilon$ para cada n suficientemente grande $\Rightarrow (1-t)x_1 + tx_0 = T_{x_1}(x_0) \in B_{t\epsilon}\Big(T_{w_n}(x_0)\Big) \subset \text{int}(C)$. Então $(x_0, x_1) \subset \text{int}(C)$. □

Lema 2.3.31. *A envoltória convexa de um compacto de um espaço de Banach é relativamente compacta.*

Demonstração. Seja E espaço de Banach e $K \subset E$ compacto. Então, por 2.3.20, K é limitado, fechado e $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, V \subset E$ subespaço de dimensão finita tal que $x \in K \Rightarrow d(x, V) \leq \epsilon$.

Tome, assim, $\epsilon > 0$, um tal $V \subset E$ e $x \in C_0(K)$. Segue $\exists \{x_i\}_{i=1}^n \subset K$ e $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset [0,1]$ tais que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = x$. Como V é de dimensão finita, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\exists y_i \in V$ tal que $d(x_i, V) = d(x_i, y_i)$ (conforme 2.3.17). Ponha $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$. Como V é convexo, $y \in V$. Além disso,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left\| \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - y_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i d(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i d(x_i, V) \leq \epsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i = \epsilon \end{aligned}$$

pois $x_i \in K \Rightarrow d(x_i, V) \leq \epsilon$. Mas $d(x,y) \leq \epsilon \Rightarrow d(x, V) \leq \epsilon$, pois $y \in V$. Assim, $\forall x \in C_0(K)$, $d(x, V) \leq \epsilon$.

Considere, agora, $x_0 \in \overline{C_0(K)}$. Como E é espaço métrico, satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade (conforme 2.2.58), então, por 2.2.75, $\exists\,(x_n) \subset C_0(K)$ sequência tal que $x_n \to x_0$. Temos que $d(x_n, V) \leq \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $x \mapsto d(x, V)$ é de Lipschitz, logo contínua, obtemos que $d(x_n, V) \to d(x_0, V)$ (conforme 2.2.82 e, visto, por 2.3.3, que E é sequencial). Então $d(x_0, V) \leq \epsilon$. Logo, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, V \subset E$ subespaço de dimensão finita tal que $x \in \overline{C_0(K)} \Rightarrow d(x, V) \leq \epsilon$.

Além disso, por 2.2.51 e 2.3.27, $\text{diam}\Big(\overline{C_0(K)}\Big) = \text{diam}\Big(C_0(K)\Big) = \text{diam}(K)$. Então $\overline{C_0(K)}$ é limitado, fechado e $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, V \subset E$ subespaço de dimensão finita tal que $x \in \overline{C_0(K)} \Rightarrow d(x, V) \leq \epsilon$. Segue por 2.3.20 que $\overline{C_0(K)}$ é compacto. □

Teorema 2.3.32 (Mazur)**.** *A envoltória convexa de um conjunto relativamente compacto de um espaço de Banach é também relativamente compacta.*

Demonstração. Seja E espaço de Banach e $A \subset E$ relativamente compacto, ou seja, tal que $\overline{A}$ é compacto. Então, por 2.3.31, $\overline{C_0\Big(\overline{A}\Big)}$ é compacto. Como $\overline{C_0\Big(\overline{A}\Big)} = \overline{C_0(A)}$ (conforme 2.3.29.1), segue que $\overline{C_0(A)}$ é compacto. □

Definição 2.3.33. Seja E espaço vetorial. $S \subset E$ é dito simétrico se $x \in S \Leftrightarrow -x \in S$. Dois tais pontos $\{x, -x\}$ são chamados de pontos antipodais, antípodas ou pontos simétricos.

Exemplo 2.3.34. Evidentemente, todo subespaço vetorial é simétrico. Além disso, bolas e esferas de espaços vetoriais normados centradas na origem são também simétricas, uma vez que $||x|| < r \Leftrightarrow ||-x|| < r$ e $||x|| = r \Leftrightarrow ||-x|| = r$.

Definição 2.3.35. Seja E espaço vetorial normado e $K \subset E$ convexo simétrico tal que $0 \in K$. O funcional de Minkowski de K é a função $p_K : E \to [0, +\infty)$ definida por

$$p_K(x) = \inf\{r > 0 \mid x \in rK\} = \inf\left\{r > 0 \,\middle|\, \frac{x}{r} \in K\right\} \tag{2.3.1}$$

Proposição 2.3.36. Nestas condições, o funcional de Minkowski é uma seminorma, isto é, possui as seguintes propriedades:

1. $p_K(0) = 0$;
2. $\forall x \in E$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $p_K(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot p_K(x)$;
3. $\forall x, y \in E$, $p_K(x + y) \leq p_K(x) + p_K(y)$.

Demonstração.

1. $\forall r > 0$, $\frac{0}{r} = 0 \in K$. Assim, $\{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\} = (0, +\infty)$ e $p_K(0) = \inf(0, +\infty) = 0$;
2. Seja $x \in E$ e $\lambda > 0$. Então

$$\begin{aligned} p_K(\lambda x) &= \inf\left\{r > 0 \,\middle|\, \frac{\lambda x}{r} \in K\right\} = \inf\left\{\lambda \cdot \frac{r}{\lambda} > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\frac{r}{\lambda}} \in K\right\} \\ &= \lambda \cdot \inf\left\{\tilde{r} > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\tilde{r}} \in K\right\} = \lambda \cdot p_K(x) \end{aligned}$$

   Agora, como K é simétrico, $\frac{\lambda x}{r} \in K \Leftrightarrow -\frac{\lambda x}{r} \in K$. Assim, $\forall x \in E$ e $\lambda > 0$, $\{r > 0 \mid -\frac{\lambda x}{r} \in K\} = \{r > 0 \mid \frac{\lambda x}{r} \in K\}$. Segue que $p_K(-\lambda x) = p_K(\lambda x) = \lambda \cdot p_K(x)$, ou seja, $\forall x \in E$ e $\lambda \neq 0$, $p_K(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot p_K(x)$. Finalmente, para $\lambda = 0$, temos que $p_K(\lambda \cdot x) = p_k(0) = 0 = |\lambda| \cdot p_K(x)$, $\forall x \in E$.
3. Sejam $x, y \in E$. Se $\frac{x}{r}, \frac{y}{s} \in K$ para $r, s > 0$, então $\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s} \cdot \frac{x}{r} + \frac{s}{r+s} \cdot \frac{y}{s} \in K$ para $r + s > 0$. Assim,

$$\{r > 0 \mid x \in rK\} + \{s > 0 \mid y \in sK\} \subset \{r + s > 0 \mid (x + y) \in (r + s)K\}$$

   Segue que $p_K(x + y) \leq p_K(x) + p_K(y)$, $\forall x, y \in E$.

□

Lema 2.3.37. *Seja E espaço vetorial normado e $K \subset E$ convexo simétrico com $0 \in K$. Então, $\forall x \in E$,*

$$\Big(p_K(x), +\infty\Big) \subset \left\{r > 0 \,\middle|\, \frac{x}{r} \in K\right\} \subset \Big[p_K(x), +\infty\Big)$$

Desta forma, $p_K(x) < r \Rightarrow \frac{x}{r} \in K$.

Demonstração. Seja $x \in E$ e $\alpha \in \{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\}$. Então $\frac{x}{\alpha} \in K$. Como $0 \in K$ e K é convexo, $\forall M \geq 1$, temos que $\frac{1}{M} \in (0,1]$ e $\frac{x}{M\alpha} = \frac{1}{M} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{1-M}{M} 0 \in K$, ou seja, $M\alpha \in \{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\}$. Segue, por A.2.1, que $\{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\}$ é um intervalo ilimitado superiormente. Mas $\{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\} \subset [0, +\infty)$, portanto é limitado inferiormente.
Agora, como $p_K(x) = \inf\{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\}$, temos que esse conjunto é da forma $\Big[p_K(x), +\infty\Big)$ ou $\Big(p_K(x), +\infty\Big)$. Em qualquer dos casos, vale que $\forall x \in E$, $\Big(p_K(x), +\infty\Big) \subset \{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\} \subset \Big[p_K(x), +\infty\Big)$. Então $p_K(x) < \tilde{r} \Rightarrow \tilde{r} \in \Big(p_K(x), +\infty\Big) \subset \{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\}$, ou seja, $\frac{x}{\tilde{r}} \in K$. □

Proposição 2.3.38. Seja E espaço vetorial normado e $K \subset E$ convexo simétrico tal que $0 \in K$. Segue que

$$\mathrm{int}(K) \subset \{x \in E \mid p_K(x) < 1\} \subset K \subset \{x \in E \mid p_K(x) \leq 1\} \subset \overline{K}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathrm{int}(K) \Rightarrow \exists \epsilon > 0$ tal que $B(x, 2\epsilon) \subset K$. Então $\frac{x}{\frac{1}{1+\epsilon}} = x(1+\epsilon) \in B(x, 2\epsilon) \subset K$, ou seja, $\frac{1}{1+\epsilon} \in \{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\}$. Desta forma, $p_K(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$;
2. $p_K(x) < 1 \Rightarrow 1 \in \Big(p_K(x), +\infty\Big) \subset \{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\}$ (conforme 2.3.37). Então $x = \frac{x}{1} \in K$;
3. $\frac{x}{1} = x \in K \Rightarrow 1 \in \{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\} \Rightarrow p_K(x) \leq 1$;
4. Seja $x \in E$ tal que $p_K(x) \leq 1$. Então, $\forall \epsilon \in (0,1)$, $\frac{\epsilon}{1-\epsilon} > 0$ e $p_K(x) < 1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} = \frac{1}{1-\epsilon}$. Segue que $(1-\epsilon)x = \frac{x}{\frac{1}{1-\epsilon}} \in K$ (conforme 2.3.37). Como $||x - (1-\epsilon)x|| = \epsilon$, temos que $(1-\epsilon)x \in B(x, 2\epsilon)$. Assim, $x(1-\epsilon) \in K \cap B(x, 2\epsilon) \neq \emptyset$. Então, $\forall \epsilon > 0$, $K \cap B(x, 2\epsilon) \neq \emptyset$, ou seja, $x \in \overline{K}$.

Seguem, portanto, as inclusões desejadas. □

Teorema 2.3.39 (Minkowski)**.** *Seja E espaço vetorial normado e $K \subset E$ um aberto limitado convexo e simétrico tal que $0 \in K$. Então $\exists |\cdot|_K$ norma em E com $\{x \in E \mid |x|_K < 1\} = K$ e $\{x \in E \mid |x|_K \leq 1\} = \overline{K}$, chamada de* *norma de Minkowski.*

Demonstração. Seja p_K o funcional de Minkowski definido por K. Como K é limitado, $\exists\, M > 0$ tal que $\forall x \in K$, $||x|| < M$. Assim, $\forall x \in K^*$, $\frac{x}{r} \in K \Rightarrow \frac{||x||}{r} < M \Rightarrow r > \frac{M}{||x||}$. Então

$$p_K(x) = \inf\left\{r > 0 \,\middle|\, \frac{x}{r} \in K\right\} \geq \frac{M}{||x||} > 0$$

Logo, $x \neq 0 \Rightarrow p_K(x) \neq 0$. Segue de 2.3.36 que p_K é uma norma.
Agora, como K é aberto, temos que $\text{int}(K) = K$. Assim, por 2.3.38, $K = \{x \in E \mid p_K(x) < 1\}$. Seja, então, $x \in \overline{K}$. Como K é convexo e $0 \in \text{int}(K) = K$, por 2.3.30, temos que, $\forall r \in [0, 1)$, $rx = rx + (1-r) \cdot 0 \in \text{int}(K) = K$. Assim, $\forall r < 1$, $rx \in K$. Equivalentemente, $\forall \tilde{r} = \frac{1}{r} > 1$, $\frac{x}{\tilde{r}} \in K$, isto é, $\{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\} \supset (1, +\infty)$. Dessa forma, $p_K(x) = \inf\{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\} \leq \inf(1, +\infty) = 1$. Temos, assim, que $\overline{K} \subset \{x \in E \mid p_K(x) \leq 1\}$. Novamente, por 2.3.38, segue que $\overline{K} = \{x \in E \mid p_K(x) \leq 1\}$.
Finalmente, definindo $||\cdot||_K : E \to [0, +\infty)$ por $||x||_K = p_K(x)$, obtemos o resultado desejado. □

Definição 2.3.40. Seja E espaço vetorial topológico. E é dito localmente convexo se, $\forall x \in E$, $\forall U \ni x$ aberto, $\exists\, C$ aberto convexo com $x \in C \subset U$. Em outras palavras, E é localmente convexo se tiver uma base de abertos convexos.

Exemplo 2.3.41. Todo espaço vetorial normado E é localmente convexo. Basta considerar que as bolas abertas $B_d(x_0, r) = \{x \in E \mid ||x - x_0|| < r\}$ formam uma base de abertos na topologia induzida pela norma em E e que, além disso, são convexas, pois $x, y \in B_d(x_0, r) \Rightarrow ||\big((1-t)x + ty\big) - x_0|| = \Big|\Big|\big((1-t)x+ty\big) - \big((1-t)x_0 + tx_0\big)\Big|\Big| \leq ||(1-t)(x-x_0)|| + ||t(y-x_0)|| = (1-t)||x - x_0|| + t||y-x_0|| < (1-t)r + tr = r$, ou seja, $x, y \in B_d(x_0, r) \Rightarrow [x, y] \subset B_d(x_0, r)$.

Teorema 2.3.42 (Teorema de Extensão de Dugundji)**.** *Seja X espaço métrico $F \subset X$ fechado, L um espaço localmente convexo e $f : F \to L$ contínua. Então f admite extensão contínua $g : X \to L$ satisfazendo $g(X) \subset C_0\big(f(F)\big)$.*

Demonstração. F é fechado, então $x \notin F \Rightarrow d(x, F) > 0$. Defina, assim, $\forall x \in X - F$, $r_x = \frac{d(x,F)}{2} > 0$ e $B_x = B(x, r_x)$. Segue que $B_x \subset X - F$, do contrário existiria $y \in B_x \cap F$, ou seja, $y \in F$ tal que $d(x, y) < r_x = \frac{d(x,F)}{2}$, absurdo.

Agora, temos que $y \in B_x \Rightarrow d(x,y) < \frac{1}{2}d(x,F) \Rightarrow \operatorname{diam}(B_x) < d(x,F)$. Considere, portanto, a cobertura $\{B_x\}_{x\in X-F}$ de $X - F$. Como $X - F \subset X$ é espaço métrico, logo paracompacto (conforme 2.2.57), segue da definição de paracompacidade que existe refinamento aberto localmente finito $\mathscr{U}$ dessa cobertura.

Seja, agora, $B(F,\eta) = \{x \mid d(x,F) < \eta\}$ e tome $x_0 \notin B(F,2\eta)$. Então $d(x_0,F) \geq 2\eta$. Assim,

$$\begin{aligned} y \in B_{x_0} \Rightarrow d(x_0,y) < \frac{1}{2}d(x_0,F) &\Rightarrow d(y,F) \geq d(x_0,F) - d(x_0,y) \\ &> \frac{1}{2}d(x_0,F) \geq \eta \Rightarrow y \notin B(F,\eta) \end{aligned}$$

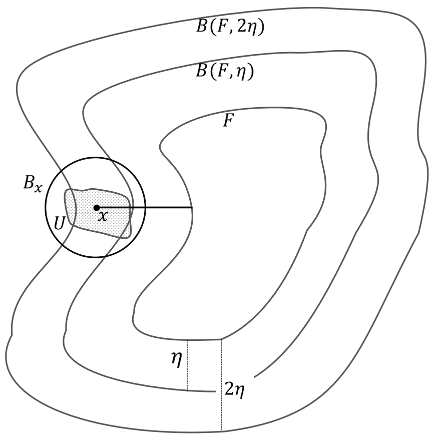

Figura 2.4 – Teorema de extensão de Dugundji — figura 1

ou seja, $x \notin B(F,2\eta) \Rightarrow B_x \cap B(F,\eta) = \emptyset$. Equivalentemente,

$$B_x \cap B(F,\eta) \neq \emptyset \Rightarrow x \in B(F,2\eta) \Rightarrow d(x,F) < 2\eta \Rightarrow \operatorname{diam}(B_x) \leq 2\eta$$

Temos, então, que $y \in B_x \Rightarrow d(y,F) \leq d(x,y) + d(x,F) \leq 2\eta$. Assim, $B_x \subset B(F,2\eta)$. Logo, como $\forall U \in \mathscr{U}$, $\exists\, x \in X$ tal que $U \subset B_x$, então

$$\begin{aligned} U \cap B(F,\eta) \neq \emptyset \Rightarrow B_x \cap B(F,\eta) \neq \emptyset &\Rightarrow \operatorname{diam}(B_x) < 2\eta \\ &\Rightarrow \operatorname{diam}(U) < \operatorname{diam}(B_x) < 2\eta \end{aligned}$$

Assim,

$$\forall U \in \mathscr{U},\, U \cap B(F,\eta) \neq \emptyset \Rightarrow \operatorname{diam}(U) < 2\eta \tag{2.3.2}$$

Agora, para cada $U \in \mathscr{U}$, tome $x_U \in U$. Então $\exists\, p_U \in F$ tal que $d(x_U,p_U) < 2d(x_U,F)$ (do contrário, teríamos que $d(x_U,p) \geq 2d(x_U,F)$ para todo $p \in F$, logo $d(x_U,F) = \inf_{p\in F} d(x_U,p) \geq 2d(x_U,F)$ e $d(x_U,F) = 0$, isto é, $x_u \in F$, pois F é fechado. Mas isso é absurdo, pois $x_U \in U \subset B_x \subset X - F$). Considere, portanto, a família $\{(U,x_U,p_U)\}$. $\forall p \in F$, $B\left(p,\frac{\epsilon}{9}\right) \subset B\left(F,\frac{\epsilon}{9}\right)$. Logo, $\forall\, U \in \mathscr{U}$,

$U \cap B\left(p, \frac{\epsilon}{9}\right) \neq \emptyset \Rightarrow U \cap B\left(F, \frac{\epsilon}{9}\right) \neq \emptyset \Rightarrow \operatorname{diam}(U) \leq \frac{2\epsilon}{9}$. Tome então $x \in U \cap B\left(p, \frac{\epsilon}{9}\right)$. Temos, neste caso, que $y \in U \Rightarrow d(y,p) \leq d(x,y) + d(x,p) \leq \operatorname{diam}(U) + d(x,p) < \frac{\epsilon}{3}$, ou seja, $U \subset B\left(p, \frac{\epsilon}{3}\right)$. Assim, $d(x_U, F) \leq d(x_U, p) < \frac{\epsilon}{3}$ e, além disso, $d(p_U, p) \leq d(p_U, x_U) + d(x_U, p) < 2d(x_u, F) + d(x_U, F) < \epsilon$, ou seja, $p_U \in B(p, \epsilon)$. Ponha $W_p = B(p, \epsilon)$ e $V_p = d\left(p, \frac{\epsilon}{9}\right)$. Portanto, $\forall p \in F$, $\forall W_p$ vizinhança de p em X, $\exists\, V_p \subset W_p$ vizinhança de p em X com a seguinte propriedade:

$$\forall\, U \in \mathscr{U},\, U \cap V_p \neq \emptyset \Rightarrow U \subset W_p \text{ e } p_U \in F \cap W_p \tag{2.3.3}$$

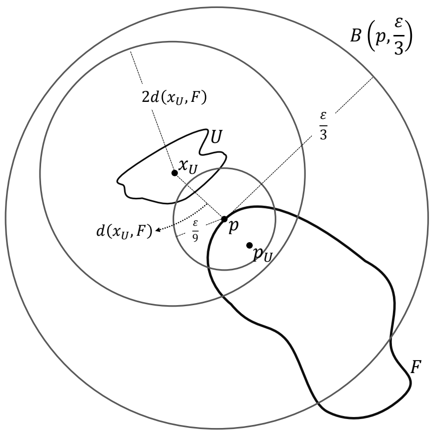

Figura 2.5 – Teorema de extensão de Dugundji — figura 2

Agora, $X - F$ é paracompacto e $\mathscr{U}$ é cobertura aberta de $X - F \Rightarrow \exists\, \{k_U\}$ partição da unidade contínua subordinada a $\mathscr{U}$. Defina, então,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F, \\ \sum_{U \in \mathscr{U}} k_U(x) \cdot f(p_U) & \text{se } x \notin F, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Como $\{\operatorname{supp}(k_U)\}_{U \in \mathscr{U}}$ é localmente finito, temos que a soma $\sum_{U \in \mathscr{U}} k_U(x) \cdot f(p_U)$ está bem definida e é contínua, pois é localmente uma soma finita de funções contínuas, ou seja, $g|_{X-F}$ é contínua. Desta forma, basta mostrar que $g|_F$ é contínua.

Tome então $p \in F$, $B \subset L$ uma vizinhança de $F(p) = f(p)$ e $C \subset L$ um aberto convexo tal que $p \in C \subset B$ (sempre existe um tal C, pois L é localmente convexo). f é contínua, logo $\exists\, W_p$ vizinhança de p em X tal que $f(F \cap W_p) \subset C$. Seja $V_p \subset W_p$ satisfazendo a propriedade 2.3.3. $V_p \subset W_p \Rightarrow f(F \cap V_p) \subset f(F \cap W_p) \subset C$. Agora, tome $x_0 \in V_p - F$. Como $\mathscr{U}$ é localmente finita, e portanto pontualmente finita, temos que $\mathscr{U}_0 = \{U \in \mathscr{U} \mid x_0 \in U\}$ é finito. Assim, $U \in \mathscr{U} - \mathscr{U}_0 \Rightarrow k_U(x_0) = 0$. Mas $x_0 \in V_p - F \Rightarrow x_0 \in V_p$. Logo, $\forall\, U_0 \in \mathscr{U}_0$, $V_p \cap U_0 \neq \emptyset$, pois $x_0 \in U_0$. Então, pela propriedade 2.3.3, segue que $U_0 \subset W_p$ e $p_{U_0} \in F \cap W_p$, ou seja, $f(p_{U_0}) \in f(F \cap W_p) \subset C$, $\forall\, U_0 \in \mathscr{U}_0$. Como

$V_p - F \subset X - F$, $g(x_0) = \sum_{U_0 \in \mathscr{U}_0} k_{U_0}(x_0) \cdot f(p_{U_0})$, isto é, $g(x_0)$ é uma combinação convexa dos $f(p_{U_0}) \in C$, pois $\mathscr{U}_0$ é finito e $\sum_{U_0 \in \mathscr{U}_0} k_{U_0}(x) = 1$. Então $g(x_0) \in C$, pois C é convexo. Mas isso é válido para qualquer $x_0 \in V_p - F$, portanto $g(V_p - F) \subset C$. Assim, $g(V_p) = g(V_p \cap F) \cup g(V_p - F) = f(V_p \cap F) \cup g(V_p - F) \subset C \subset B$. Então $\exists\, V_p$ vizinhança de $p \mid g(V_p) \subset B$, isto é, g é contínua em p, $\forall p \in F$. Logo, g é contínua em X e $g|_F = f$. Além disso, $\forall x \in X - F$, $\sum_{U \in \mathscr{U}} k_U(x) = 1$ é uma soma finita, ou seja, $g(x) = \sum_{U \in \mathscr{U}} k_U(x) \cdot f(p_U)$ é uma combinação convexa de elementos $f(p_u) \in f(F)$. Então $g(x) \in C_0\big(f(F)\big)$, $\forall x \in X - F \Rightarrow g(X - F) \subset C_0\big(f(F)\big)$. Mas $g(F) = f(F) \subset C_0\big(f(F)\big)$. Assim, $g(X) = g(F) \cup g(X - F) \subset C_0\big(f(F)\big)$. □

Corolário 2.3.42.1. *Seja X espaço métrico, $F \subset X$ fechado, L localmente convexo, $C \subset L$ convexo e $f : F \to C$ contínua. Então f admite extensão contínua $g : X \to C$ satisfazendo $g(X) \subset C_0\big(f(F)\big)$.*

Demonstração. $f : F \to C \subset L$ é contínua $\Rightarrow \exists\, g : F \to L$ extensão contínua de f com $g(X) \subset C_0\big(f(F)\big)$. Mas $f(F) \subset C$ e C é convexo $\Rightarrow C_0\big(f(F)\big) \subset C$. Então $g(X) \subset C$. □

2.4 Homotopias, Simplexos e o Teorema de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk

2.4.1 Homotopias

Definição 2.4.1. Sejam X, Y espaços topológicos. Duas $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas são ditas homotópicas se existir uma função contínua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$. Neste caso, H é chamado de homotopia e representado por $H : f \sim g$.

Proposição 2.4.2. Seja X espaço topológico e sejam $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ contínuas. Então:

1. $f(x) \neq -g(x)$, $\forall x \in X \Rightarrow f \sim g$. Em particular, temos que $f(x) \neq -x$, $\forall x \in X \Rightarrow f \sim Id_{\mathbb{S}^n}$.
2. $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in X \Rightarrow f \sim -g$. Em particular, temos que f não tem ponto fixo $\Rightarrow f \sim -Id_{\mathbb{S}^n}$.

Demonstração.

1. $f(x) \neq -g(x)$, $\forall x \in X \Rightarrow (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x) \neq 0$, $\forall (x,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,1]$. Então $H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n$ definida por $H(x,t) = \frac{(1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)}{||(1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)||}$ é contínua, $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, ou seja, $H : f \sim g$.

2. $f(x) \neq g(x), \forall x \in X \Rightarrow f(x) \neq -(-g)(x), \forall x \in X \Rightarrow f \sim -g.$

□

Definição 2.4.3. Seja E espaço vetorial e $S \subset E$ simétrico. A função $-Id_S$, definida por $-Id_S : x \mapsto -x$, é chamada de aplicação antipodal em S.

Definição 2.4.4. Sejam E, V espaços vetoriais e $S \subset E$ simétrico. $f : S \to V$ é dita ímpar (ou antipodal) se $\forall x \in X$, $f(-x) = -f(x)$, ou, equivalentemente, $f \circ (-Id_S) = (-Id_S) \circ f$.

Exemplo 2.4.5. A função identidade Id_S e a aplicação antipodal $-Id_S$ são funções ímpares.

Proposição 2.4.6. A imagem por uma função ímpar de um conjunto simétrico é também simétrica.

Demonstração. Sejam E, F espaços vetoriais, $S \subset E$ simétrico e $f : S \to F$ ímpar. Tome $y = f(x) \in f(S)$. Segue que $-x \in S$ e $-y = -f(x) = f(-x) \in f(S)$. Então $f(S)$ é simétrico. □

Proposição 2.4.7. Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ satisfazendo $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$. Então $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ definida por $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||}$ é ímpar. Além disso, temos que $f \sim g$.

Demonstração. Defina $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ por $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||}$. Suponha, então, que exista $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $g(x) = -f(x)$. Seguiria que

$$f(-x) = f(x) \cdot \Big(1 + ||f(x) - f(-x)||\Big) \Rightarrow 1 = 1 + ||f(x) - f(-x)||$$

(pois $f(x), f(-x) \in \mathbb{S}^n \Rightarrow ||f(x)|| = ||f(-x)|| = 1$). Então $f(x) = f(-x)$, absurdo. Segue que $g(x) \neq -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n \Rightarrow f \sim g$ (conforme 2.4.2). Finalmente, temos que $g(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{||f(-x)-f(x)||} = -\frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||} = -g(x)$, ou seja, g é ímpar. □

Definição 2.4.8. Uma função é dita homotopicamente trivial se for homotópica a uma função constante.

Proposição 2.4.9. Seja X espaço topológico e $f : \mathbb{S}^n \to X$ contínua. Então f é homotopicamente trivial se, e somente se, f se estende continuamente à $\mathbb{D}^{n+1}$.

Demonstração. Defina $\phi : \mathbb{S}^n \times [0, 1] \to \mathbb{D}^n$ contínua por $\phi(x, t) = xt$.

$\Rightarrow$ Seja $H : c \sim f$. Defina então $F : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ por

$$F(x) = \begin{cases} H\left(\frac{x}{||x||}, 2 \cdot ||x|| - 1\right) & \text{se } \frac{1}{2} < ||x|| \leq 1, \\ c & \text{se } ||x|| \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Como H é contínua e $||x|| = \frac{1}{2} \Rightarrow H\left(\frac{x}{||x||}, 2 \cdot ||x|| - 1\right) = c$, temos que F é contínua. Além disso, $x \in \mathbb{S}^n \Rightarrow ||x|| = 1 \Rightarrow F(x) = H\left(\frac{x}{||x||}, 2 \cdot ||x|| - 1\right) = H(x, 1) = f(x)$, ou seja, $F|_{\mathbb{S}^n} = f$.

$\Leftarrow$ Suponha que $\exists F : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ contínua tal que $F|_{\mathbb{S}^n} = f$. Então $F \circ \phi : \mathbb{S}^n \times [0, 1] \to X$ é contínua. Além disso, como $\phi(x, 0) = 0$ e $\phi(x, 1) = x$, $(F \circ \phi)(x, 0) = F(0)$ e $(F \circ \phi)(x, 1) = F(x) = f(x)$. Logo, $F \circ \phi : F(0) \sim f$.

□

Definição 2.4.10. Um espaço topológico X é dito <u>contrátil</u> se a aplicação $Id_X : X \to X$ é homotopicamente trivial.

2.4.2
Simplexos e o Teorema de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk

Definição 2.4.11. Seja V um espaço vetorial. Um subconjunto $A \subset V$ é chamado de <u>variedade afim</u> quando $\forall v \in V$, $A - v < V$.

Observação 2.4.12. Evidentemente, quando $0 \in A$, temos que $A = A - 0 < V$, isto é, A é um subespaço vetorial.

Proposição 2.4.13. Seja V espaço vetorial e $A \subset V$ variedade afim. Logo, $\forall u, v \in A$, $A - u = A - v$.

Demonstração. Seja $\tilde{w} = w - v \in A - v$, com $w \in A$. Então $\tilde{w} = (w - u) - (v - u) \in A - u$, pois $(w - u), (v - u) \in A - u$ e $A - u < V$. Segue que $A - v \subset A - u$. Analogamente, podemos obter que $A - u \subset A - v$. Então $A - u = A - v$. □

Observação 2.4.14. Vale notar, por 2.4.13, que $A - v_0$ não depende da escolha do v_0 e fica completamente determinado por A. Podemos então definir $S_A < V$ como o subespaço de V tal que, $\forall v \in A$, $S_A + v = A$.

Proposição 2.4.15. Seja V um espaço vetorial e $A \subset V$. Então A é uma variedade afim se, e somente se, $\forall \{v_1, ..., v_n\} \subset A$ finito e $\forall \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, temos que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in A$ (esta combinação é chamada de <u>combinação afim</u>).

Demonstração.

$\Rightarrow$ Seja $A = v_0 + S_A$ e seja $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ uma combinação afim em A. Temos, então, que $v_i - v_0 \in S_A$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Dessa forma,

$$v - v_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right) - v_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_i - v_0) \in S_A$$

isto é, $v \in v_0 + S_A = A$.

$\Leftarrow$ Seja $A \subset V$ tal que todas as combinações afins de elementos de A estão em A. Tome $v_0 \in A$ e defina $S = A - v_0$. Então:

(a) $\forall v \in S_A$, $\exists\, \tilde{v} \in A$ tal que $v = \tilde{v} - v_0$. Assim, $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \cdot v = t\tilde{v} - tv_0 = t\tilde{v} + (1-t)v_0 - v_0$, onde $w = t\tilde{v} + (1-t)v_0 \in A$, pois é combinação afim de elementos de A. Segue que $tv = w - v_0 \in A - v_0 = S$, para todo $v \in S$ e $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\forall\, u, v \in S$, $\exists\, \tilde{u}, \tilde{v} \in A$ com $u = \tilde{u} - v_0$ e $v = \tilde{v} - v_0$. Então $u + v = \tilde{u} + \tilde{v} - 2 \cdot v_0 = 2\Big(\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2} - v_0\Big)$, onde $w = \frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2} \in A$, pois é combinação afim de elementos de A. Segue que $w - v_0 \in S$. Assim, por (a), $u + v = 2(w - v_0) \in S$, $\forall u, v \in S$.

Temos, portanto, que $A - v_0 < V$, $\forall v_0 \in A$. Então A é variedade afim.

$\square$

Definição 2.4.16. Seja V espaço vetorial e $A \subset V$ uma variedade afim. A é chamado de n-plano quando $\dim(S_A) = n$.

Proposição e definição 2.4.17. Seja V espaço vetorial e $\{v_i\}_{i=0}^{n} \subset V$. O conjunto $[v_0, ..., v_n]_H = \{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i \mid \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1\}$, chamado de envelope afim, é a menor variedade que contém cada um dos v_i, e seu subespaço é definido por $\{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i \mid \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0\}$.
Além disso, $[v_0, ..., v_n]_H$ é s-plano com $s \leq n$, e $[v_0, ..., v_n]_H$ é n-plano se, e somente se, $\forall k \in \{0, ..., n\}$ os vetores $\Big\{v_i - v_k \mid i \in \{0, ..., n\} \text{ e } i \neq k\Big\}$ forem linearmente independentes.

Demonstração. Ponha $A = [v_0, ..., v_n]_H$ e tome $w \in A$, isto é, tal que $w = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\alpha}_i v_i$ e $\sum_{i=0}^{n} \tilde{\alpha}_i = 1$. Segue que

$$A - w = \left\{ \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) v_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0 \right\}$$

Assim, para cada $v = \sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i$, $\tilde{v} = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\beta}_i v_i$ e $t \in \mathbb{R}$ com $\sum_{i=0}^{n} \beta_i = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\beta}_i = 0$, temos que $u + v = \sum_{i=0}^{n} (\beta_i + \tilde{\beta}_i) v_i$ com $\sum_{i=0}^{n} (\beta_i + \tilde{\beta}_i) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i + \sum_{i=0}^{n} \tilde{\beta}_i = 0$ e $tu = \sum_{i=0}^{n} (t\beta_i) v_i$ com $\sum_{i=0}^{n} (t\beta_i) = t \sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0$, ou seja, $A - w < V$, $\forall w \in A$. Então $A = [v_0, ..., v_n]_H$ é uma variedade afim.
Tome agora $\tilde{A}$ variedade afim tal que $\{v_0, ..., v_n\} \subset \tilde{A}$. Temos que $v \in$

$[v_0, ..., v_n]_H \Rightarrow v$ é combinação afim dos elementos de $\{v_0, ..., v_n\} \subset \tilde{A} \Rightarrow v \in \tilde{A}$ (conforme 2.4.15). Então $[v_0, ..., v_n]_H \subset \tilde{A}$.
Finalmente, considere $A = [v_0, ..., v_n]_H$ e tome $k \in \{0, ..., n\}$. Então

$$\begin{aligned} A - v_k &= \left\{ \sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0 \right\} = \left\{ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i (v_i - v_k) \right\} \\ &= [v_0 - v_k, ..., v_{k-1} - v_k, v_{k+1} - v_k, ..., v_n - v_k]_H \end{aligned}$$

pois $\beta_k = -\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i$. Temos, portanto, que $\dim(S_A) = \dim(A - v_k) \leq n$ e que $\dim(S_A) = n$ se, e somente se, $\Big\{v_i - v_k \mid i \in \{0, ..., n\} \text{ e } i \neq k\Big\}$ forem linearmente independentes. $\square$

Definição 2.4.18. Seja V um espaço vetorial e $\{v_0, ..., v_n\} \subset V$. Diz-se que os pontos $v_0, ..., v_n$ são afim-independentes se $[v_0, ..., v_n]_H$ for um n-plano. Equivalentemente, $n + 1$ pontos são afim-independentes se não estiverem contidos em nenhum $n - 1$-plano de V.

Definição 2.4.19. Sejam V, U espaços vetorias e $T : U \to V$. T é chamada de transformação afim quando existir $v \in V$ tal que $T - v : u \mapsto Tu - v$ é linear. Nesse caso, podemos escrever que $T = L + v$, onde $v = T(0)$ e $L = T - v : U \to V$ é transformação linear.

Observação 2.4.20. É fácil perceber, pela definição acima, que uma transformação afim que leva $0 \in U$ em $0 \in V$ é linear.

Proposição 2.4.21. Seja $T : U \to V$. Então T é transformação afim se, e somente se, $\forall u = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i$ combinação afim em U, $Tu = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T u_i$.

Demonstração.

$\Rightarrow$ Seja $T = L + v$ com $L : U \to V$ linear e $v \in V$, e seja ainda $u = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i$ combinação afim em U. Então

$$Tu = v + Lu = v\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L v_i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (v + Lu_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T u_i$$

$\Leftarrow$ Seja $T : U \to V$ levando combinações afins em combinações afins. Ponha $v = T(0) \in V$ e defina $L = T - v$. Temos que

(a) $\forall u \in U$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que $tu = tu + (1 - t) \cdot 0$, logo

$$T(tu) = tTu + (1 - t)T(0) = tTu + (1 - t)v$$

Assim, $L(tu) = T(tu) - v = tTu - tv = t\Big(Tu - v\Big) = tLu.$

(b) $\forall u_1, u_2 \in U$, $T\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = \frac{Tu_1}{2} + \frac{Tu_2}{2}$. Então

$$\begin{aligned} L\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) &= T\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) - v = \frac{Tu_1}{2} + \frac{Tu_2}{2} - \left(\frac{v}{2} + \frac{v}{2}\right) \\ &= \frac{Tu_1 - v}{2} + \frac{Tu_2 - v}{2} = \frac{Lu_1}{2} + \frac{Lu_2}{2} \end{aligned}$$

Logo, $L(u_1+u_2) = L\left(2\frac{u_1+u_2}{2}\right) = 2 \cdot L\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = Lu_1 + Lu_2$.

Então L é linear, ou seja, T é transformação afim.

□

Corolário 2.4.21.1. Seja $T : U \to V$ transformção afim. Então T leva combinações convexas em combinações convexas.

Demonstração. Toda combinação convexa é uma combinação afim. Logo, $\forall u = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i$ combinação convexa em U, $Tu = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Tu_i$, onde $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$. □

Proposição 2.4.22. Sejam U, V, W espaços vetoriais e $T : U \to V$, $R : V \to W$ transformações afins. Então $R \circ T : U \to W$ também é transformação afim.

Demonstração. $\forall u = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i$ combinação linear em U, temos que

$$R(Tu) = R\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i Tu_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i R(Tu_i)$$

Então $R \circ T$ leva combinações afins em combinações afins, logo é tranformação afim. □

Definição 2.4.23. Seja E um espaço vetorial normado e $V = \{p_0, ..., p_s\} \subset E$ um conjunto de $s+1$ pontos afim-independentes de E. O envelope convexo $C_0(V)$ é chamado de <u>s-simplexo</u> (ou simplexo de dimensão s) com vértices p_0,...,p_s e é denotado por $[p_0, ..., p_s]$. Quando os vértices de um simplexo não precisarem ser explicitados, o simplexo será denotado por σ ou σ^s, o índice superior indicando a dimensão.
O k-simplexo gerado por quaisquer $k+1$ dos vértices $p_0, ..., p_s$ é chamado de <u>k-face</u>, sendo as 0-faces os vértices e as 1-faces os segmentos $[p_i, p_j]$ com $p_i \neq p_j$ as <u>arestas</u>, e a única s-face sendo o próprio s-simplexo. O conjunto $\partial\sigma^s = \{\sigma^n \subset \sigma^s\}$, a união de todas as n-faces com $n \leq s$, é chamado de <u>bordo</u> de σ^s, e o <u>simplexo aberto</u> é o conjunto $\sigma - \partial\sigma$.

Proposição 2.4.24. Seja E um espaço vetorial normado e $\sigma = [p_0, ..., p_s]$ um simplexo em E. Então $-\sigma = -Id_E(\sigma) = [-p_0, ..., -p_s]$.

Demonstração. Como σ é convexo por definição, temos que $-\sigma$ também o é. Mas $-p_0, ..., -p_s \in -\sigma$. Segue que $[-p_0, ..., -p_s] \subset -\sigma$. Agora, $x \in -\sigma \Leftrightarrow -x \in \sigma \Rightarrow -x = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i p_i$ combinação afim. Então $x = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i(-p_i)$ combinação afim, isto é, $x \in [-p_0, ..., -p_s]$. Segue que $-\sigma = [-p_0, ..., -p_s]$. $\square$

Proposição 2.4.25. Seja E um espaço vetorial normado, $P = \{p_0, ..., p_n\} \subset E$ e $\sigma^s = C_0(P)$. Então $\mathrm{diam}(\sigma^s) = \max_{i,j=0}^{n} ||p_i - p_j||$.

Demonstração. Evidentemente,

$$\mathrm{diam}(P) = \sup_{u,v \in P} ||u - v|| = \max_{i,j=0}^{n} ||p_i - p_j||$$

Agora, por 2.3.27, temos que $\mathrm{diam}(\sigma^s) = \mathrm{diam}\Big(C_0(P)\Big) = \mathrm{diam}(P)$. Então $\mathrm{diam}(\sigma^s) = \max_{i,j=0}^{n} ||p_i - p_j||$. $\square$

Teorema 2.4.26. *Todo simplexo é um espaço métrico compacto.*

Demonstração. Seja E espaço vetorial normado, $P \subset E$ finito e $\sigma = C_0(P)$. Por 2.3.3, temos que E é um espaço métrico, logo $\sigma \subset E$ também o é. Além disso, como P é finito, por 2.3.28, temos que $\sigma = C_0(P)$ é compacto. Então σ é um espaço métrico compacto. $\square$

Proposição 2.4.27. $\forall x \in \sigma^s[p_0, ..., p_s]$, $\exists!(c_0, ..., c_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$ com $0 \leq c_i \leq 1$ e $\sum_{i=0}^{s} c_i = 1$ tal que $x = \sum_{i=0}^{s} c_i p_i$. Podemos então definir a $(s+1)$-upla $(\lambda_0, ..., \lambda_s) : \sigma^s \to [0,1]^{s+1}$ tal que $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i(x) = 1$ e $\sum_{i=0}^{s} \lambda_i(x) p_i = x$. O ponto $(\lambda_0, ..., \lambda_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$ é chamado de <u>coordenadas baricêntricas</u> de σ^s, e cada $\lambda_i : \sigma^s \to [0,1]$ é a <u>i-ésima função coordenada baricêntrica</u> de σ^s.

Demonstração. Seja $x \in [p_0, ..., p_s]$. Então, pela definição de envelope convexo, $x = \sum_{i=0}^{s} c_i p_i$ para algum $(c_0, ..., c_s) \in [0,1]^{s+1}$ tal que $\sum_{i=0}^{s} c_i = 1$. Suponha, assim, que $x = \sum_{i=0}^{s} \tilde{c}_i p_i$ com $(\tilde{c}_0, ..., \tilde{c}_s) \in [0,1]^{s+1}$, $\sum_{i=0}^{s} \tilde{c}_i = 1$ e $(c_0, ..., c_s) \neq (\tilde{c}_0, ..., \tilde{c}_s)$. Teríamos então que $\sum_{i=0}^{s} c_i p_i = \sum_{i=0}^{s} \tilde{c}_i p_i$, ou seja, $\sum_{i=0}^{s} (c_i - \tilde{c}_i) p_i = 0$ com $\sum_{i=0}^{s} (c_i - \tilde{c}_i) = 0$. Pondo $a_i = c_i - \tilde{c}_i$, existiria i tal que $a_i \neq 0$ (podemos supor que seja $a_0 \neq 0$). Então $a_0 = -\sum_{i=1}^{s} a_i$ e $p_0 = \sum_{i=1}^{s} \Big(-\frac{a_i}{a_0}\Big) p_i$ com $-\frac{a_i}{a_0} \in [0,1]$ e $\sum_{i=1}^{s} \Big(-\frac{a_i}{a_0}\Big) = 1$. Seguiria que $p_0 \in [p_1, ..., p_n] \subset [p_1, ..., p_n]_H$, onde $[p_1, ..., p_n]_H$ é um s-plano com $s \leq n-1$. Então $\{p_0, ..., p_n\} \subset [p_1, ..., p_n]_H$ e $[p_0, ..., p_n]_H = [p_1, ..., p_n]_H$ (conforme 2.4.17), ou seja, $[p_0, ..., p_n]$ é um s-plano com $s \leq n-1$, um absurdo, pois $\{p_0, ..., p_s\}$ são afim-independentes. Segue que as coordenadas baricêntricas de cada ponto de um simplexo são únicas. $\square$

Exemplo 2.4.28. $\Delta^s \subset \mathbb{R}^{s+1}$, definido por $\Delta^s = [e_0, ..., e_s]$ (onde $\{e_i\}_{i=0}^{s}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{s+1}$) é chamado de <u>s-simplexo padrão</u>. É fácil perceber que as coordenadas baricêntricas de Δ^s são justamentas as coordenadas euclidianas, pois, pondo $\lambda_i : x \mapsto x_i$, temos que $x = \sum_{i=0}^{s} x_i e_i = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(x) e_i$.

Teorema 2.4.29. *Quaisquer dois s-simplexos são afim-homeomorfos. Além disso, para cada simplexo σ, cada uma de suas funções coordenadas baricêntricas $\lambda_i : \sigma \to [0,1]$ são contínuas.*

Demonstração. Seja E espaço vetorial normado e $\sigma^s = [p_0, ..., p_s] \subset E$. Defina $h : \mathbb{R}^{s+1} \to E$ por $h(x_0, ..., x_s) = \sum_{i=0}^{s} x_i p_i$. Temos, então, que h é contínua. Além disso, h é linear, logo é tranformação afim. Finalmente, $\forall x = (x_0, ..., x_s) \in \Delta^s$, $h(x) = \sum_{i=0}^{s} x_i p_i \in \sigma^s$, pois $x_i \in [0,1]$ e $\sum_{i=0}^{s} x_i = 1$. Por 2.4.27, temos que h estabelece uma correspondência única entre Δ^s e σ^s, isto é, $g = h|_{\Delta^s} : \Delta^s \to \sigma^s$ é bijeção. Como, por 2.4.26, Δ^s é compacto, segue que h é fechado (conforme 2.2.6.1), logo f^{-1} é contínua, ou seja, f é homeomorfismo. Portanto, $\forall E$ espaço vetorial normado e $\sigma \subset E$ s-simplexo, $\exists\, g : \Delta^s \to \sigma$ homeomorfismo afim.
Tomando então E, F espaços vetoriais normados e $\sigma_1 \subset E$ e $\sigma_2 \subset F$ s-simplexos, temos $g_1 : \Delta^s \to \sigma_1$ e $g_2 : \Delta^s \to \sigma_2$ homeomorfismos afins. Segue que $g_2 \circ g_1^{-1} : \sigma_1 \to \sigma_2$ é homeomorfismo afim (conforme 2.4.22). Então todos os simplexos de mesma dimensão são afim-homeomorfos entre si.
Agora, dado σ s-simplexo e $g : \Delta^s \to \sigma$ homeomorfismo afim, e sendo $\pi_i : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}$ a projeção na i-ésima coordenada, temos que $\lambda_i = \pi_i \circ g^{-1}$. Então as funções coordenadas são contínuas. $\square$

Teorema 2.4.30. *Considere $||\cdot||_1$ a norma da soma em $\mathbb{R}^n$. Então $\mathbb{D}_1^n$ e $\mathbb{S}_1^{n-1}$, a bola fechada e a esfera unitárias nessa norma, são uniões de n-simplexos com vértices 0 e $\pm e_1, ..., \pm e_n$ e $(n-1)$-simplexos com vértices $\pm e_1, ..., \pm e_n$, respectivamente.*

Demonstração. Seja $I = \{\pm 1\}^n$, $s = (s_i) \in I$ e

$$\mathbb{R}_s^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s_i x_i \geq 0, \forall i = 1, ..., n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^n \mid s_i x_i \geq 0\}$$

Assim, temos que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{s \in I} \mathbb{R}_s^n$.
Tome, então, $x \in \mathbb{D}_1^n$. Logo, $\exists\, s \in I$ tal que $x \in \mathbb{R}_s^n$. Segue que $s_i x_i \geq 0$. Mas $s_i x_i = |s_i x_i| = |x_i|$ e $\sum_{i=1}^{n} s_i x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x||_1$. Desta forma,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (s_i x_i) \cdot (s_i e_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} (s_i x_i) \cdot (s_i e_i) \right) + \Big(1 - ||x||_1\Big) \cdot 0$$

ou seja, x é uma combinação convexa de $\{s_1 e_1, ..., s_n e_n\} \cup \{0\}$, pois

$$\left(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \right) + \Big(1 - ||x||_1\Big) = ||x||_1 + \Big(1 - ||x||_1\Big) = 1$$

Então, $\forall x \in \mathbb{D}_1^n$, $\exists\, s \in I$ tal que $x \in C_0\Big(0, s_1e_1, ..., s_ne_n\Big) = [0, s_1e_1, ..., s_ne_n]$. Portanto, $\mathbb{D}_1^n \subset \bigcup_{s\in I}[0, s_1e_1, ..., s_ne_n]$. Agora, como $0 \in \mathbb{D}_1^n$ e $||s_ie_i|| = ||e_i|| = 1$, ou seja, $s_ie_i \in \mathbb{D}_1^n$, $\forall i \in \{1, .., n\}$, segue que $[0, s_1e_1, ..., s_ne_n] \subset \mathbb{D}_1^n$, pois $\mathbb{D}_1^n$ é convexo (conforme 2.3.22). Assim, $\mathbb{D}_1^n = \bigcup_{s\in I}[0, s_1e_1, ..., s_ne_n]$.
No caso em que $x \in \mathbb{S}_1^{n-1}$, tomando $s \in I$ com $x \in \mathbb{R}_s^n$, temos que $x = \sum_{i=1}^n (s_ix_i)\cdot(s_ie_i)$ com cada $s_ix_i \geq 0$ e $\sum s_ix_i = \sum_{i=1}^n |x_i| = ||x||_1 = 1$, ou seja, $x \in [s_1e_1, ..., s_ne_n]$. Segue que $\mathbb{S}_1^{n-1} \subset \bigcup_{s\in I}[s_1e_1, ..., s_ne_n]$. Tome então $s \in I$ e $x \in [s_1e_1, ..., s_ne_n]$. Logo, $x = \sum_{i=1}^n t_is_ie_i$ com cada $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Assim, $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |t_is_i| = \sum_{i=1}^n t_i = 1$, ou seja, $x \in \mathbb{S}_1^{n-1}$. Então $\mathbb{S}_1^{n-1} = \bigcup_{s\in I}[s_1e_1, ..., s_ne_n]$. □

Observação 2.4.31. Seja

$$\mathscr{L}^{(1)} = \Big\{(x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\Big|\, \{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq 0\} \text{ é finito}\Big\} \tag{2.4.1}$$

um espaço vetorial normado com norma definida por $\Big|\Big|(x_i)\Big|\Big| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$ (essa soma sempre faz sentido, pois é finita para $(x_i) \in \mathscr{L}^{(1)}$. Sejam ainda $E^n = \{x \in \mathscr{L}^{(0)} \mid x_i = 0, \forall i > n\}$, $B^n = \{x \in E^n \mid ||x|| \leq 1\}$, $S^n = \{x \in E^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$, $S_+^n = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$ e $S_-^n = -S_+^n$.
Evidentemente, $S^n = (S_+^n) \cup (S_-^n)$. Além disso, como

$$S^k = \{x \in S^n \mid x_{k+2} = ... = x_{n+1} = 0\}$$

para todo $k < n$, temos que $S^{n-1} = (S_+^n) \cap (S_-^n)$.
Agora, dado um espaço vetorial normado $(L^n, ||\cdot||_L)$ de dimensão n e pondo $\mathbb{S}(L^n) = \{v \in L^n \mid ||v||_L = 1\}$, podemos tomar $\{v_i\}_{i=1}^n$ base em L^n, considerar $T : E^n \to L^n$ definido por $T : (\alpha_1, ..., \alpha_n, 0, ...) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_iv_i$ e $N : L^n \to L^n$ dado por $N : \sum_{i=1}^n \alpha_iv_i \mapsto \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_iv_i\Big)\frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|}{||\sum_{i=1}^n \alpha_iv_i||}$. Temos que N é homeomorfismo e que T é linear com inversa linear, portanto homeomorfismo também (conforme A.5.4). Além disso, ambas funções são ímpares, logo $h = N \circ T$ é homeomorfismo ímpar. Finalmente, como $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1 \Rightarrow || \sum_{i=1}^n \alpha_iv_i|| = 1$, temos que $h(S^{n-1}) = \mathbb{S}(L^n)$.
Assim, os resultados obtidos a seguir para E^n, onde a esfera unitária é uma união de simplexos (conforme 2.4.30), serão válidos para qualquer bola unitária de alguma norma em algum espaço vetorial de dimensão finita.

Definição 2.4.32. Uma família $\mathscr{S}^n = \{\sigma\}$ de simplexos em S^n é chamada de triangulação de S^n quando:

1. A interseção de dois simplexos de $\mathscr{S}^n$ é vazia ou é uma face comum de cada um;
2. Se $\sigma \in \mathscr{S}^n$, então cada face de σ percente a $\mathscr{S}^n$;

3. $S^n = \bigcup_{\sigma \in \mathscr{S}^n} \sigma$.

Exemplo 2.4.33. A triangulação Σ^n, gerada pela cobertura de S^n por n-simplexos (conforme 2.4.30) e suas respectivas faces, é chamada de <u>triangulação padrão</u> de S^n. Além disso, cada elemento σ^k de Σ^n pode ser escrito unicamente como $[\pm e_{i_1}, ..., \pm e_{i_k}]$, com $i_1 < ... < i_k \leq n+1$, essa forma sendo chamada de a <u>forma padrão</u> de σ^k. Assim, segue que

$$\Sigma^n = \left\{[\pm e_{i_1}, ..., \pm e_{i_s}] \mid i_1 < ... < i_k \leq n+1\right\}$$

Definição 2.4.34. Seja $\sigma^k \in \Sigma^n$. A forma padrão de σ^k <u>tem sinal alternante</u> se $\sigma^k = \pm[e_{i_1}, -e_{i_2}, ..., (-1)^k e_{i_k}]$.

Exemplo 2.4.35. O s-simplexo padrão com sinal alternante em S^n é dado por $\sigma_0^s = [e_1, -e_2, ..., (-1)^s e_{s+1}]$.

Definição 2.4.36. Uma triangulação $\mathscr{S}^n$ de S^n é chamada de <u>simétrica</u> quando:

1. $\forall k < n$, $S^k \subset S^n$ é a união de k-simplexos de $\mathscr{S}^n$;
2. $\forall k \leq n$ e $\forall \sigma^k \in \mathscr{S}^n$, $-\sigma^k$ também é um k-simplexo de $\mathscr{S}^n$.

Proposição 2.4.37. A triangulação padrão de S^n é simétrica.

Demonstração.

1. $S^k = S^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{k+2} = ... = x_{n+1} = 0\}$ e $[\pm e_1, ..., \pm e_{k+1}]$ são k-simplexos de Σ^n. Segue, portanto, o resultado desejado, uma vez que $S^k = \bigcup [\pm e_1, ..., \pm e_{k+1}]$.
2. Tome $\sigma \in \Sigma^n$. Então existem $k \leq n$, $i_1 < ... < i_k \leq n+1$ e $s_1, ..., s_k = \pm 1$ tais que $\sigma = [s_1 e_{i_1}, ..., s_k e_{i_k}]$. Assim, por 2.4.24, $-\sigma = [-s_1 e_{i_1}, ..., -s_k e_{i_k}]$. Pondo $\tilde{s}_j = -s_j = \pm 1$, temos que $-\sigma = [\tilde{s}_1 e_{i_1}, ..., \tilde{s}_k e_{i_k}] \in \Sigma^n$.

□

Definição 2.4.38. Seja $\mathscr{S}^k$ uma triangulação de S^k e $\mathscr{S}^n$ uma triangulação de S^n. Uma aplicação dos vértices de $\mathscr{S}^k$ para os vértices de $\mathscr{S}^n$, representado por $f : \mathscr{S}^k \to \mathscr{S}^n$, é chamado de <u>aplicação de vértices simpliciais</u> se leva vértices de cada simplexo de $\mathscr{S}^k$ em vértices de simplexos (possivelmente de menor dimensão) em $\mathscr{S}^n$.
Evidentemente, f pode ser estendido para uma aplicação entre S^k e S^n, também indicado por f, que leva simplexos de $\mathscr{S}^k$ em simplexos de $\mathscr{S}^n$.

Definição 2.4.39. Sejam $\mathscr{S}^k$ uma triangulação arbitrária de S^k e $f : \mathscr{S}^k \to \Sigma^n$ uma aplicação de vértices simpliciais. Um r-simplexo σ^r de $\mathscr{S}^k$ é dito $\underline{f\text{-positivo}}$ quando $f(\sigma^r)$ for um r-simplexo de Σ^n com sinal alternante na forma padrão e tiver o primeiro vértice com sinal positivo, e é dito $\underline{f\text{-negativo}}$ quando $f(\sigma^r)$ for um r-simplexo de Σ^n com sinal alternante e tiver o primeiro vértice com sinal negativo. Um simplexo de $\mathscr{S}^k$ é dito $\underline{f\text{-neutro}}$ quando não for positivo ou negativo.
Dado uma aplicação de vértices simplicias $f : \mathscr{S}^k \to \Sigma^n$ e um conjunto $L \subset S^k$, o número de r-simplexos f-positivos em L será indicado por $p(f, L, r)$.

Exemplo 2.4.40. Considere $S^0 = \{-1, 1\}$, $\mathscr{S}^0 = \Big\{\{-1\}, \{1\}\Big\}$ e $f : \mathscr{S}^0 \to \Sigma^n$ antipodal. Então $f(1) = \pm e_k$ para algum $k \leq n$, isto é, $\{1\}$ é f-positivo ou f-negativo, depenendo do sinal de $f(1)$. Mas, como f é simétrica, temos que $f(-1) = -f(1)$. Assim, segue que $\{1\}$ é f-positivo $\Leftrightarrow$ $\{-1\}$ é f-negativo. Então $p(f, S^0, 0) = 1$.

Lema 2.4.41. *Seja $k \leq n$, $\mathscr{S}^k$ triangulação simétrica de S^k e $f : \mathscr{S}^k \to \Sigma^n$ aplicação de vértices simpliciais ímpar. Então*

$$p(f, S^k, k) \equiv p(f, S^{k-1}, k-1) \bmod 2$$

Demonstração. Essa demonstração utiliza conceitos que fogem ao escopo desta dissertação, mas pode ser encontrada em [5, §5, 3.2, p.89-90]. □

Teorema 2.4.42. *Seja $\mathscr{S}^n$ uma triangulação simétrica de S^n e $f : \mathscr{S}^n \to \Sigma^n$ uma aplicação de vértices simpliciais ímpar. Então f leva um número ímpar de n-simplexos de S^n no n-simplexo padrão com sinal alternante σ_0^n (conforme 2.4.35) ou, equivalentemente, $\#f^{-1}\Big(\sigma_0^n\Big) \equiv 1 \bmod 2$.*

Demonstração. Por definição, $\sigma^n \in \mathscr{S}^n$ é f-positivo se, e somente se, $f\Big(\sigma^n\Big) = \sigma_0^n$, ou seja, $\#f^{-1}\Big(\sigma_0^n\Big) = p(f, S^n, n)$. Agora, por 2.4.41, indutivamente, obtemos que $p(f, S^n, n) \equiv p(f, S^0, 0) \bmod 2$. Finalmente, por 2.4.40, $p(f, S^0, 0) = 1$. Então $\#f^{-1}\Big(\sigma_0^n\Big) \equiv 1 \bmod 2$. □

Lema 2.4.43. *Sejam $M_1, ..., M_{n+1}$ conjuntos fechados em S^n não contendo nenhum par de pontos antipodais tais que $\{M_1, ..., M_{n+1}, -M_1, ..., -M_{n+1}\}$ cobre S^n. Então $\bigcap_{i=1}^{n+1} M_i \neq \emptyset$.*

Demonstração. Essa demonstração utiliza conceitos que fogem ao escopo desta dissertação, mas pode ser encontrada em [5, §5, 4.3, p.91]. □

Lema 2.4.44. *Toda cobertura de S^n por $n+1$ conjuntos fechados contém um par de pontos antipodais em algum desses conjuntos.*

Demonstração. Suponha que $\{M_1\}_{i=1}^{n+1}$ seja uma cobertura de S^n tal que nenhum M_i tenha pontos antipodais. Então $\{M_1, ..., M_{n+1}, -M_1, ..., -M_{n+1}\}$ é cobertura de S^n. Assim, por 2.4.43, $\bigcap_{i=1}^{n+1} M_i \neq \emptyset$. Tome, então, $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n+1} M_i$. Como $-x_0 \in S^n$ e $\{M_1\}_{i=1}^{n+1}$ é cobertura de S^n, $\exists\, j \in \{1, ..., n+1\}$ com $-x_0 \in M_j$. Mas $x_0 \in M_j$, isto é, M_j possui um par de pontos antipodais, um absurdo. Segue que toda cobertura de S^n por $n+1$ conjuntos fechados contém um par de pontos antipodais em algum desses conjuntos. □

Teorema 2.4.45 (Lusternik-Schnirelmann-Borsuk)**.** *Seja L^{n+1} um espaço vetorial com norma $||\cdot||$. Então toda cobertura de $\mathbb{S}(L^{n+1})$ por $n+1$ conjuntos fechados contém um par de pontos antipodais em algum desses conjuntos.*
Em particular, toda cobertura de $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por $n+1$ conjuntos fechados contém um par de pontos antipodais em algum desses conjuntos.

Demonstração. Tome $\{M_i\}_{i=1}^{n+1}$ cobertura fechada de S^n e seja $h : S^n \to \mathbb{S}(L^{n+1})$ homeomorfismo ímpar (sempre existe um, por 2.4.31) e ponha $F_i = h^{-1}(M_i)$. Como h é homeomorfismo, temos que F_i são fechados. Além disso, $\bigcup_{i=1}^{n+1} F_i = h^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} M_i\Big) = h^{-1}\Big(\mathbb{S}(L^{n+1})\Big) = S^n$, isto é, $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ é uma cobertura fechada de S^n, logo, por 2.4.44, $\exists\, j \in \{1, ..., n\}$ tal que F_j tem um par pontos antípodas, digamos $\pm x_0 \in F_j$. Agora, como h é ímpar, temos que $h(-x_0) = -h(x_0) \in h(F_j) = M_j$. Mas $h(x_0) \in h(F_j) = M_j$. Então $\pm h(x_0)$ é um par de pontos antipodais em M_j. □

Teorema 2.4.46. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\nexists f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ contínua tal que $f|_{\mathbb{S}^n}$ é ímpar.*
2. *(Teorema Antipodal de Borsuk) Nenhuma função $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ contínua ímpar é homotopicamente trivial.*
3. *$\nexists f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ contínua ímpar.*
4. *(Borsuk-Ulam) $\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua, $\exists\, x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(-x) = f(x)$.*
5. *$\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua ímpar, $\exists\, x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = 0$.*
6. *(Lusternik-Schnirelmann-Borsuk) $\forall \{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ cobertura fechada de $\mathbb{S}^n$, $\exists\, i$ tal que $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$ (isto é, F_i tem um par de pontos antípodas).*
7. *$\forall \{U_i\}_{i=1}^{n+1}$ cobertura aberta de $\mathbb{S}^n$, $\exists\, i$ tal que $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.*

Demonstração.

$1 \Leftrightarrow 2$ Por 2.4.9, a equivalência segue diretamente.

$2 \Rightarrow 3$ Seja $\mathbb{S}^n_+ = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$ e $\pi : \mathbb{S}^n_+ \to \mathbb{D}^n$ tal que $\pi(x_1, ...x_n, x_{n+1}) = (x_1, .., x_n)$. Então π é homeomorfismo (pois é bijeção contínua com inversa contínua $\pi^{-1}(x_1, ..., x_n) =$

$\Big(x_1, ..., x_n, \sqrt{1 - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)}\Big)\big)$ e $\pi|_{\mathbb{S}^{n-1}} = Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$, uma vez que $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n \Rightarrow (x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0) \Rightarrow \pi(x_1, ..., x_n) = \pi(x_1, ..., x_n, 0) = (x_1, ..., x_n)$. Suponha, então, que $\exists f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ contínua ímpar. Como $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{S}^n_+ \subset \mathbb{S}^n_+$, temos por 2.4.9 que $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ pode ser estendida continuamente à $f : \mathbb{S}^n_+ \to \mathbb{S}^{n-1}$. Mas π é homeomorfismo $\pi|_{\mathbb{S}^{n-1}} = Id_{\mathbb{S}^{n-1}} \Rightarrow \pi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} = Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Então $f \circ \pi^{-1} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ é tal que $(f \circ \pi^{-1})|_{\mathbb{S}^{n-1}} = f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Por 2.4.9, segue que $f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é homotopicamente trivial. Além disso, f é ímpar $\Rightarrow f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é ímpar. Assim, $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ é homotopicamente trivial e ímpar.

$3 \Rightarrow 4$ Suponha que $\exists f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$. Defina então $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ dada por $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$. Segue, por 2.4.7, que g é contínua e ímpar.

$4 \Rightarrow 5$ Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua ímpar. f é ímpar $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{S}^n$, $f(-x) = -f(x)$. Mas f é contínua, logo $\exists\, x_0 \in \mathbb{S}^n \mid f(-x_0) = f(x_0) \Rightarrow -f(x_0) = f(-x_0) = f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 0$.

$5 \Rightarrow 3$ Suponha que $\exists f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ contínua ímpar. Então $0 \notin \mathbb{S}^n \supset f(\mathbb{S}^{n+1})$, ou seja, $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma função contínua ímpar sem raízes.

$3 \Rightarrow 1$ Considere $\mathbb{S}^{n+1}_+$, $\mathbb{S}^{n+1}_-$ e $\pi : \mathbb{S}^{n+1}_+ \to \mathbb{D}^{n+1}$ como em $2 \Rightarrow 3$. Segue que π é homeomorfismo e $\pi|_{\mathbb{S}^n} = Id_{\mathbb{S}^n}$. Suponha, assim, que $\exists f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ contínua tal que $f|_{\mathbb{S}^n}$ é ímpar e defina $g : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ por:

$$g(x) = \begin{cases} (f \circ \pi)(x) & \text{se } x \in \mathbb{S}^{n+1}_+, \\ -(f \circ \pi)(-x) & \text{se } x \in \mathbb{S}^{n+1}_-, \end{cases}$$

Evidentemente, $x \in \mathbb{S}^{n+1}_- \Leftrightarrow -x \in \mathbb{S}^{n+1}_+$. Além disso, temos que $x \in \mathbb{S}^n \Rightarrow \pi(x) = x$, $-x \in \mathbb{S}^n$ e $f(-x) = -f(x)$, logo $-(f \circ \pi)(-x) = -f(-x) = f(x) = (f \circ \pi)(x)$, portanto g está bem definida e é contínua, uma vez que $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{n+1}_+ \cap \mathbb{S}^{n+1}_-$. Finalmente, $\forall x \in \mathbb{S}^{n+1}_+$, $-x \in \mathbb{S}^{n+1}_-$ e $g(-x) = -(f \circ \pi)\big(-(-x)\big) = -(f \circ \pi)(x) = -g(x)$ (análogo para $x \in \mathbb{S}^{n+1}_-$). Segue que $g : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ é contínua e ímpar.

$4 \Rightarrow 6$ Tome $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ cobertura fechada de $\mathbb{S}^n$ e defina $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = \big(d(x, F_1), ..., d(x, F_n)\big)$. Segue, por 2.2.50, que F é contínua, logo $\exists\, x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$. Seja $f(x_0) = f(-x_0) = (y_1, ...y_n) \in \mathbb{R}^n$, onde $y_i = d(x_0, F_i) = d(-x_0, F_i)$. Temos que $y_i = 0 \Leftrightarrow x_0 \in F_i \Leftrightarrow -x_0 \in F_i$, ou seja, $\pm x_0 \in F_i$. Caso $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $y_i \neq 0$, então $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\{x_0, -x_0\} \cap F_i = \emptyset \Rightarrow \pm x_0 \in F_{n+1}$ (pois $\{F_i\}$ é cobertura de $\mathbb{S}^n$).

$6 \Rightarrow 3$ Suponha que $\exists\, f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ contínua ímpar e tome $\{\{F_i\}_{i=1}^{n+2}$ cobertura fechada de $\mathbb{S}^n$ (por exemplo, a projeção das $n+2$ n-faces de um $(n+1)$-

simplexo em $\mathbb{S}^n$). Então, pela continuidade de f, $\{f^{-1}(F_i)\}_{i=1}^{n+2}$ é uma cobertura fechada de $\mathbb{S}^{n+1}$. Agora, $f^{-1}(F_i)$ tem um par de antípodas $\Leftrightarrow$ $\pm x_0 \in f^{-1}(F_i) \Rightarrow \pm f(x_0) = f(\pm x_0) \in f\Big(f^{-1}(F_i)\Big) \subset F_i$ (pois f é ímpar), ou seja, F_i tem um par de antípodas. Como nenhum F_i possui um par de antípodas por construção, temos que $\{f^{-1}(F_i)\}_{i=1}^{n+2}$ é uma cobertura fechada de $\mathbb{S}^{n+1}$ tal que nenhum elemento contém um par de antípodas, um absurdo.

$6 \Rightarrow 7$ Seja $\{U_i\}_{i=1}^{n+1}$ cobertura aberta de $\mathbb{S}^n$. Como $\mathbb{S}^n$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ (um espaço normal), $\mathbb{S}^n$ é também normal. Além disso, $\{U_i\}$ é cobertura finita, logo localmente finita. Por 2.1.29.1, $\exists \{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ encolhimento fechado de $\mathbb{S}^n$. Segue que $\exists\, x_0 \in \mathbb{S}^n$ e $\exists i \in \{1, ..., n+1\}$ tais que $\pm x_0 \in F_i \subset U_i$.

$7 \Rightarrow 3$ Demonstra-se como $6 \Rightarrow 3$.

□

Corolário 2.4.46.1. A esfera $\mathbb{S}^n$ não é contrátil.

Demonstração. Por 2.4.46, temos que 2.4.45 equivale a que nenhuma função $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ contínua ímpar é homotopicamente trivial. Mas a identidade em $\mathbb{S}^n$ é uma função contínua ímpar. Segue, assim, que a identidade em $\mathbb{S}^n$ não é homotopicamente trivial, isto é, a esfera $\mathbb{S}^n$ não é contrátil. □

A importância em se obter uma demonstração topológica de 2.4.45 está no fato, que será visto com mais detalhes em 3.2.8, de que 2.4.46.1 é equivalente ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Assim, podemos obter uma demonstração desse teorema que não utiliza teoremas de variedades ou de topologia algébrica, como é feito em [6] ou [7].

O Teorema Antipodal de Borsuk enunciado em 2.4.46 é, na verdade, a versão fraca do mais geral teorema antipodal de Borsuk, que afirma que toda função ímpar em $\mathbb{S}^n$ tem grau ímpar. A definição topológica de grau sem fazer uso da topologia diferencial e suas implicações, entretanto, é algo que foge ao escopo desse dissertação, mas detalhes sobre o tema podem ser encontrados em [2, XVI.1, p.335-40].

As proposições demonstradas em 2.4.46 para $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{D}^{n+1}$, a esfera e a bola unitárias em $\mathbb{R}^n$, podem ser estendidas para os espaços E^{n+1} e suas bolas fechadas e esferas unitárias B^{n+1} e S^n (conforme 2.4.31). Basta considerar que as demonstrações continuam sendo válidas substituindo $\mathbb{S}^n$ por S^n, $\mathbb{D}^{n+1}$ por B^{n+1} e $\mathbb{R}^{n+1}$ por E^{n+1}, uma vez que toda bola em uma norma é um conjunto simétrico (conforme 2.3.34), que as proposições 2.4.9 e 2.4.7 são válidas para qualquer esfera unitária de um espaço vetorial normado, e que todo espaço vetorial normado é normal (conforme 2.3.3, 2.2.57 e 2.1.35).

Para finalizar essa seção, usando as construções aqui estabelecidas, será demonstrado o seguinte resultado obtido por Borsuk (que será posteriormente generalizado no capítulo Aspectos da Teoria do Grau e Aplicações a Teoremas de Ponto Fixo):[14]

Teorema 2.4.47 (Teorema do Ponto Fixo de Borsuk)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, convexo e simétrico tal que $0 \in U$ e seja $F : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $F|_{\partial U}$ é ímpar. Então F tem um ponto fixo.*

Demonstração. Por 2.3.39, $\exists\, ||\cdot||_U$ norma de Minkowski de $\mathbb{R}^n$ tal que $||x||_U < 1 \Leftrightarrow x \in U$. Defina $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$p(x) = \begin{cases} x\frac{||x||}{||x||_U} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Temos que p é homeomorfismo ímpar com inversa ímpar $p^{-1} : x \mapsto x\frac{||x||_U}{||x||}$, $\forall x \neq 0$ e $p^{-1}(0) = 0$. Além disso, $||x|| \leq 1 \Leftrightarrow ||p(x)||_U \leq 1$ e $||x|| = 1 \Leftrightarrow ||p(x)||_U = 1$, isto é, $p(\mathbb{D}^n) = \overline{U}$ e $p(\mathbb{S}^{n-1}) = \partial U$. Defina então $\tilde{F} = p^{-1} \circ F \circ p : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$. Assim, $\forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\tilde{F}(-x) = -\tilde{F}(x)$, pois p é ímpar, $x \in \mathbb{S}^{n-1} \Leftrightarrow p(x) \in \partial U$ e $F|_{\partial U}$ é ímpar. Segue que $\tilde{F}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é ímpar.
Suponha, agora, que $\tilde{F}$ não tenha ponto fixo em $\mathbb{D}^n$ e defina $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ contínua por $G(x) = \frac{\tilde{F}(x)-x}{||\tilde{F}(x)-x||}$. Como $\tilde{F}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é ímpar, segue que $G|_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ também o é. Logo, por 2.4.46, temos que $G|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ não é homotopicamente trivial, um absurdo (conforme 2.4.9), uma vez que $G|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ se estende continuamente a G. Desta forma, $\tilde{F}$ tem ponto fixo $x_0 \in \mathbb{D}^n$. Mas $p \circ \tilde{F} = F \circ p$. Assim, $\tilde{F}(x_0) = x_0 \Rightarrow p(x_0) = (p \circ \tilde{F})(x_0) = (F \circ p)(x_0) = F\big(p(x_0)\big)$, isto é, $p(x_0) \in \overline{U}$ é um ponto fixo de F. □

14. Ver 4.3.9.

3
Teoremas Topológicos de Ponto Fixo e Suas Aplicações

Definição 3.0.1. Seja $f : X \to X$. $x \in X$ é chamado de ponto fixo de f se $f(x) = x$.

Observação 3.0.2. Evidentemente, encontrar um ponto fixo para $f : X \to X$ é equivalente a encontrar uma raiz para $h : X \to X$ definida por $h(x) = f(x) - x$ ou a encontrar um ponto fixo para $g : X \to X$ definida por $g(x) = \frac{x+f(x)}{2}$. Apesar de que essas reformulações sejam essencialmente simples, muitas vezes é mais fácil obter um tal ponto para essas funções do que para a função original.

Proposição 3.0.3. Sejam X, Y espaços topológicos e $\alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to X$ contínuas. Então $\alpha \circ \beta$ tem ponto fixo se, e somente, $\beta \circ \alpha$ tem ponto fixo.

Demonstração. Suponha que $\exists\, x \in X \mid, \beta\Big(\alpha(x)\Big) = x$. Então $\alpha\Big(\beta\Big(\alpha(x)\Big)\Big) = \alpha(x)$, isto é, $\alpha(x) \in Y$ é ponto fixo de $\alpha \circ \beta : Y \to Y$. A volta é analoga. $\square$

3.1
Teorema do Ponto Fixo de Banach

Teorema 3.1.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ contração com constante L. Então f tem um único ponto fixo em X, dado por $p = lim_n f^n(x)$, independentemente da escolha de $x \in X$. Além disso, $d\Big(f^n(x), p\Big) \leq \frac{L^n}{1-L} d\Big(x, f(x)\Big)$.*

Demonstração.
Existência: Tome $x \in X$ e considere a sequência $\Big(f^n(x)\Big)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d\Big(f^n(x), f^{n+1}(x)\Big) \leq L^n d\Big(x, f(x)\Big)$. Assim, $\forall k > 0$,

$$\begin{aligned} d\Big(f^n(x), f^{n+k}(x)\Big) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d\Big(f^{n+i}(x), f^{n+i+1}(x)\Big) \leq d\Big(x, f(x)\Big) \sum_{i=0}^{k-1} L^{n+i} \\ &\leq d\Big(x, f(x)\Big) \sum_{i=0}^{\infty} L^{n+i} = \frac{L^n}{1-L} d\Big(x, f(x)\Big) \end{aligned}$$

Então $\big(f^n(x)\big)$ é sequência de Cauchy, logo converge, pois X é completo. Seja $p = \lim_n f^n(x)$. Pela continuidade da f, temos que $p = \lim_n f^{n+1}(x) = \lim_n f\big(f^n(x)\big) = f(p)$, ou seja, p é ponto fixo de f. Finalmente, fazendo $k \to \infty$ em $d\big(f^n(x), f^{n+k}(x)\big) \leq \frac{L^n}{1-L} d\big(x, f(x)\big)$, obtemos $d\big(f^n(x), p\big) \leq \frac{L^n}{1-L} d\big(x, f(x)\big)$.
<u>Unicidade</u>: suponha agora que $\exists x, y \in X$ tais que $f(x) = x$ e $f(y) = y$. Então $d(x, y) = d\big(f(x), f(y)\big) \leq Ld(x, y)$. Como $0 < L < 1$, segue que $d(x, y) = 0$, pois do contrário $d(x, y) < d(x, y)$, absurdo. Então $x = y$. □

Aplicação 3.1.2 (Teorema de Existência e Unicidade de EDOs)**.** Seja $I = [0, r] \subset \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua em $I \times \mathbb{R}^n$ e uniformemente Lipschitz [1] em $\mathbb{R}^n$. Então o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

tem uma única solução.

Demonstração. Esse resultado pode ser obtido mostrando que o operador $T : C(I) \to C(I)$ definido por $T[y](t) = y_0 + \int_0^t f\big(s, y(s)\big) ds$ é uma contração no espaço de Banach $C(I)$ das funções contínuas $y : I \to \mathbb{R}^n$ dotadas da norma do supremo (uma vez que o PVI possui solução se, e somente se, o operador T possui ponto fixo).
Seja, então, Seja $C(I)$ o espaço de Banach das funções contínuas $y : I \to \mathbb{R}^n$ com a norma $||y||_0 = \sup_{t\in I}|y(t)|$ e defina $T : C(I) \to C(I)$ por $T[y](t) = y_0 + \int_0^t f\big(s, y(s)\big) ds$. Queremos mostrar que T possui um ponto fixo em $C(I)$. Considere, portanto, a norma $|| \cdot ||_\alpha : C(I) \to C(I)$ dada por $||y||_\alpha = \sup_{t\in I}|e^{-\alpha t} y(t)|$. Segue que $e^{-\alpha r}||y||_0 \leq ||y||_\alpha \leq ||y||_0$, ou seja, $|| \cdot ||_\alpha \sim || \cdot ||_0$. Desta forma, o espaço $C(I)_\alpha$ das funções contínuas com norma $|| \cdot ||_\alpha$ é um espaço de Banach. Agora, $\forall y, z \in C(I)$,

$$\begin{aligned} \Big|T[f](t) - T[g](t)\Big| &= \left| \int_0^t \Big(f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, z(s)\big) \Big) ds \right| \\ &\leq \int_0^t \Big| f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, z(s)\big) \Big| ds \leq \int_0^t L \Big| y(s) - z(s) \Big| ds \\ &= \int_0^t Le^{Ls} e^{-Ls} \Big| y(s) - z(s) \Big| ds \leq \int_0^t Le^{Ls} ||y - z||_L ds \\ &= ||y - z||_L \int_0^t Le^{Ls} ds = ||y - z||_L (e^{Lt} - 1) \end{aligned}$$

Então $e^{-Lt}\Big|T[f](t) - T[g](t)\Big| \leq (1 - e^{-Lt})||y - z||_L \leq (1 - e^{-Lr})||y - z||_L$, portanto $||Ty - Tz||_L \leq (1 - e^{-Lr})||y - z||_L$, onde $1 - e^{-Lr} < 1$, ou seja, T

1. Ver A.6.1.

é uma contração em $C(I)$. Assim, por Teorema do Ponto Fixo de Banach, T tem um ponto fixo em $C(I)$. $\square$

Teorema 3.1.3. *Seja (X, d) espaço métrico compacto. Então $\forall f : X \to X$ satisfazendo $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$ para todos $x \neq y$, $\exists!\, x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Demonstração.
<u>Existência</u>: Defina $g : X \to \mathbb{R}$ por $g(x) = d\big(x, f(x)\big)$. Temos que g é contínua e X é compacto, logo $g(X)$ é compacto, portanto limitado (conforme 2.2.6 e 2.2.54). Assim, pelo Teorema dos Extremos, atinge seu mínimo. Seja $x_0 \in X$ um tal mínimo. $g(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \neq f(x_0) \Rightarrow g\big(f(x_0)\big) = d\Big(f\big(f(x_0)\big), f(x_0)\Big) < d\big(f(x_0), x_0\big) = g(x_0)$, isto é, x_0 não é ponto mínimo de g, um absurdo. Então $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.
<u>Unicidade</u>: Suponha que $\exists x, y \in X$ pontos fixos distintos de f. Então $d(x, y) = d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$, absurdo. $\square$

Proposição 3.1.4. Seja E um espaço de Banach, $r > 0$ e $f : \overline{B(0, r)} \to E$ uma contração tal que $f\big(S(0, r)\big) \subset \overline{B(0, r)}$. Então f tem um único ponto fixo.

Demonstração. Seja $x \in \overline{B(0, r)}$ não-nulo e defina $y = r\frac{x}{||x||} \in S(0, r)$ (pois $||y|| = r$). Como f é contração, $\exists\, L \in (0, 1)$ tal que $||f(x) - f(y)|| \leq L|x - y|$. Mas $x - y = \frac{x}{||x||}\big(||x|| - r\big)$, ou seja, $||x - y|| = r - ||x||$. Segue que $||f(x) - f(y)|| \leq L\big(r - ||x||\big)$. Como $y \in S(0, r)$, temos que $f(y) \in \overline{B(0, r)}$. Logo, $\forall x \in \overline{B(0, r)} - \{0\}$,

$$||f(x)|| \leq ||f(y)|| + ||f(x) - f(y)|| \leq r + L\big(r - ||x||\big) \leq 2r - ||x||$$

Defina então $g : \overline{B(0, r)} \to E$ por $g(x) = \frac{x + f(x)}{2}$. Temos que $x \in \overline{B(0, r)} - \{0\}$ $\Rightarrow ||g(x)|| \leq \frac{||x|| + ||f(x)||}{2} \leq r$, ou seja, $g(x) \in \overline{B(0, r)}$. Por continuidade, segue que $||g(0)|| \leq r$, portanto $g\big(\overline{B(0, r)}\big) \subset \overline{B(0, r)}$. Além disso, $g(x) - g(y) = \frac{x - y + f(x) - f(y)}{2}$, logo

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq \frac{||x - y|| + ||f(x) - f(y)||}{2} \leq \frac{||x - y|| + L||x - y||}{2} \\ &= \frac{1 + L}{2}||x - y|| \end{aligned}$$

isto é, g é contração com constante $\frac{1+L}{2} < 1$. Por 3.1.1, temos que g tem um único ponto fixo em $\overline{B(0, r)}$. Assim, segue por 3.0.2 que f tem um único ponto fixo em $\overline{B(0, r)}$. $\square$

Corolário 3.1.4.1. Seja E espaço de Banach, $r > 0$ e $f : \overline{B(0,r)} \to E$ contração tal que, $\forall x \in S(0,r)$, $|f(x)| \leq |x|$. Então f tem ponto fixo.

Demonstração. $||f(x)|| \leq ||x|| \Rightarrow f(x) \in \overline{B(0,r)}$, $\forall x \in S(0,r)$. Então $f\Big(S(0,r)\Big) \subset \overline{B(0,r)}$. Segue que f tem um único ponto fixo. □

Corolário 3.1.4.2. Seja E espaço de Banach, $r > 0$ e $f : \overline{B(0,r)} \to E$ contração tal que $f|_{S(0,r)}$ é ímpar. Então f tem ponto fixo.

Demonstração. Seja $x \in S(0,r) \subset \overline{B(0,r)}$. Temos que $f(-x) = -f(x)$. Mas f é contração, logo $2||f(x)|| = ||f(x) - f(-x)|| \leq ||x - (-x)|| = 2||x||$, ou seja, $||f(x)|| \leq |x|$, $\forall x \in S(0,r)$. Então f tem um único ponto fixo em $\overline{B(0,r)}$. □

Essas três proposições podem ser sintetizadas no seguinte teorema:

Teorema 3.1.5. *Seja E espaço de Banach, $r > 0$ e $f : \overline{B(0,r)} \to E$ contração respeitando ao menos uma das seguintes condições sobre $x \in S(0,r)$:*

1. $f(x) \in \overline{B(0,r)}$;
2. $||f(x)|| \leq ||x||$;
3. $f(-x) = -f(x)$.

Então f tem um único ponto fixo em $\overline{B(0,r)}$.

Proposição 3.1.6. Seja (X,d) espaço métrico completo, $U \subset X$ aberto, $f,g : \overline{U} \to X$ contrações tais que g tem ponto fixo em U e $H : f \sim g \mid (x,t) \mapsto H(x,t) = H_t(x)$ homotopia uniformemente Lipschitz em t e uniformemente contração[2] em x tal que H_t não tem ponto fixo em ∂U, $\forall t \in [0,1]$. Então f tem um ponto fixo em U.

Demonstração. Defina $\mathscr{T} = \{t \in [0,1] \mid H_t \text{ tem ponto fixo em } U\}$. Evidentemente, $g = H_1$ tem ponto fixo $\Rightarrow 1 \in \mathscr{T}$, ou seja, $\mathscr{T} \neq \emptyset$.
Seja $(t_n) \subset \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ tal que $t_n \to t$. Como $[0,1]$ é fechado, temos que $t \in [0,1]$. Tome, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in U$ tal que $x_n = H_{t_n}(x_n) = H(x_n,t_n)$. Segue que, $\forall n,m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &= d\Big(H(x_n,t_n), H(x_m,t_m)\Big) \\ &\leq d\Big(H(x_n,t_n), H(x_n,t_m)\Big) + d\Big(H(x_n,t_m), H(x_m,t_m)\Big) \\ &\leq M|t_n - t_m| + L \cdot d(x_n,x_m) \end{aligned}$$

sendo M, L as constantes de Lipschitz de H nas variáveis t e x, respectivamente. Segue que $d(x_n,x_m) \leq M|t_n - t_m| + L \cdot d(x_n,x_m)$, logo $d(x_n,x_m) \leq \frac{M}{1-L}|t_n - t_m|$.

2. Ver A.6.2

Mas (t_n) é convergente $\Rightarrow$ (t_n) é de Cauchy $\Rightarrow$ (x_n) é de Cauchy $\Rightarrow$ (x_n) é convergente, pois X é completo. Seja então $x_n \to x \in \overline{U}$. Temos que

$$d\Big(x_n, H(x,t)\Big) = d\Big(H(x_n,t_n), H(x,t)\Big) \leq M|t_n - t| + L \cdot d(x_n, x)$$

Como $|t_n - t| \to 0$ e $d(x_n, x) \to 0$, segue que $d\Big(x_n, H(x,t)\Big) \to 0$, ou seja, $d\Big(x, H(x,t)\Big) = 0 \Leftrightarrow x = H(x,t)$. Assim, $x \notin \partial U$, do contrário $x \neq H(x,t)$. Então $x \in U$ e $t \in \mathscr{T}$, isto é, $\mathscr{T}$ é fechado, pois $\forall \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{T}$, $t_n \to t \in \mathscr{T}$.
Seja agora $t_0 \in \mathscr{T}$. Temos que $\exists\, x_0 \in U$ tal que $H(x_0, t_0) = t_0$. Tome, então, $r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$, $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \leq \frac{1-L}{M} r$ e $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Assim, $\forall x \in \overline{B(x_0, r)}$,

$$\begin{aligned} d\Big(x_0, H(x,t)\Big) &= d\Big(H(x_0,t_0), H(x,t)\Big) \\ &\leq d\Big(H(x_0,t_0), H(x,t_0)\Big) + d\Big(H(x,t_0), H(x,t)\Big) \\ &\leq L \cdot d(x_0, x) + M|t_0 - t| \\ &\leq Lr + \epsilon M \leq L_{t_0} r + (1 - L_{t_0}) r = r \end{aligned}$$

isto é, $H(x,t) \in \overline{B(x_0, r)}$. Então $H_t\Big(\overline{B(x_0,r)}\Big) \subset \overline{B(x_0,r)}$, $\forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Assim, uma vez que $H_t : X \to X$ é contração para todo $t \in [0,1]$, por 3.1.1, segue que H_t tem ponto fixo, $\forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, ou seja, $t \in \mathscr{T}$, $\forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Então $\mathscr{T}$ é aberto, pois $\forall t_0 \in \mathscr{T}$, $\exists\, \epsilon > 0$ tal que $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset \mathscr{T}$.
Portanto, $\mathscr{T} \subset [0,1]$ é aberto e fechado não-vazio. Como $[0,1]$ é conexo, temos que $\mathscr{T} = [0,1]$. Então $0 \in \mathscr{T}$, ou seja, $F = H_0$ tem ponto fixo. □

Teorema 3.1.7 (Alternativa Não-Linear para Contrações)**.** *Seja E espaço de Banach, $U \ni 0$ aberto de E e $f : \overline{U} \to E$ aplicação limitada e contração. Então pelo menos uma das seguintes proprosições vale:*

1. *f tem um ponto fixo em $\overline{U}$;*
2. *$\exists\, (x, \lambda) \in \partial U \times (0,1)$ tal que $x = \lambda f(x)$.*

Demonstração. Seja $f : \overline{U} \to E$ contração com constante $L \in [0,1)$ e $||f(x)|| < C$ em $\overline{U}$. Suponha que a segunda proposição não valha para f. Suponha ainda que f não tem ponto fixo em ∂U (do contrário, a primeira proposição seguiria imediatamente). Então $\forall (x, \lambda) \in \partial U \times [0,1]$, temos que $x \neq \lambda f(x)$ (pois $x \neq f(x)$ em ∂U e $0 \in U \Rightarrow 0 \notin \partial U$).
Defina, assim, $H : \overline{U} \times [0,1] \to E$ por $H(x,t) = t \cdot f(x)$. Temos que $H : \mathbf{0} \sim f$, onde $\mathbf{0}$ é uma função constante, logo contração. Além disso, $\mathbf{0}$ tem ponto fixo $0 \in U$. Ainda mais, $\Big|\Big|H(x,t) - H(x',t)\Big|\Big| = |t| \cdot |f(x), f(x')| \leq L|t| \cdot |x - x'| \leq L \cdot |x - x'|$, ou seja, H é contração em x; e $\Big|\Big|H(x,t) - H(x,t')\Big|\Big| = ||f(x)|| \cdot |t - t'| \leq$

$M|t-t'|$, isto é, H é uniformemente de Lipschitz em t. Finalmente, como $x \neq \lambda f(x)$, $\forall(x,\lambda) \in \partial U \times [0,1]$, temos que $H(x,t) = t \cdot f(x) \neq x$, $\forall(x,\lambda) \in \partial U \times [0,1]$. Assim, por 3.1.6, temos que f tem um ponto fixo em U. Então vale a segunda proposição ou f tem um ponto fixo em $\overline{U} = U \cup \partial U$. $\square$

Corolário 3.1.7.1. *Seja E espaço de Banach, $U \ni 0$ aberto de E e $f : \overline{U} \to E$ aplicação limitada e contração com ao menos uma das seguintes propriedades sobre $x \in \partial U$:*

1. $||f(x)|| \leq ||x||$;
2. *∂U é simétrico e $f|_{\partial U}$ é ímpar.*

Então f tem um ponto fixo em $\overline{U}$.

Demonstração. $f(-x) = -f(x)$ em ∂U e f é contração $\Rightarrow ||f(x)|| < ||x||$ em ∂U (conforme a demonstração de 3.1.4.2). Consideremos, portanto, apenas o caso de $f : \overline{U} \to E$ aplicação limitada e contração com $||f(x)|| \leq ||x||$ em ∂U. Suponha, então, que $\exists\,(x_0,\lambda) \in \partial U \times (0,1)$ tal que $x_0 = \lambda f(x_0)$. Segue que $\frac{||x_0||}{||f(x_0)||} = \lambda < 1$, absurdo. Assim, por 3.1.7, f tem um ponto fixo em $\overline{U}$. $\square$

3.2
Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Definição 3.2.1. Diz-se que um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo (ppf) se, $\forall f : X \to X$ contínua, $\exists\,x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Exemplo 3.2.2. O intervalo real $[1,+\infty) \subset \mathbb{R}$ não possui ppf. Basta observar que a função $f : [1,+\infty) \to [1,+\infty)$ definida por $f(x) = x+1$ é contínua mas não possui ponto fixo.

Exemplo 3.2.3. A esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ não possui ppf. Basta considerar a aplicação antipodal $-Id_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, uma função contínua sem ponto fixo.

Proposição 3.2.4. A propriedade do ponto fixo é um invariante topológico.

Demonstração. Seja X um espaço com ppf e $h : X \sim Y$. Tome $f : Y \to Y$ contínua. Então $h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ é contínua, logo $\exists\,x \in X$ tal que $h^{-1}\Big(f\big(h(x)\big)\Big) = x \Leftrightarrow f\big(h(x)\big) = h(x)$, ou seja, $h(x) \in Y$ é ponto fixo de f. $\square$

Definição 3.2.5. Seja X um espaço topológico. $A \subset X$ é chamado de retrato de X se existir $r : X \to A$ contínua tal que $r|_A = id_A$.
Neste caso, a função r é chamada de retração.

Proposição 3.2.6. Todo retrato de um espaço com ppf tem também ppf.

Demonstração. Seja X um espaço ppf, $A \subset X$ e $r : X \to A$ retrato. Tome $f : A \to A$ contínua e considere a função contínua $i : A \to X$ tal que $i(x) = x, \forall x \in A$ (i é chamada de <u>inclusão</u>). Temos que $i \circ f \circ r : X \to X$ é contínua, logo $\exists\, x \in X$ tal que $i(\Big(f\Big(r(x)\Big)\Big) = x$. Em particular, $x \in A$. Assim, $r(x) = x$ e $f(x) = f(r(x)) =\in A$. Segue que $x = i\Bigg(f\Big(r(x)\Big)\Bigg) = i\Big(f(x)\Big) = f(x)$. □

Proposição 3.2.7. Seja L um espaço vetorial normado e $C \subset L$ um fechado convexo. Então C é retrato de L.

Demonstração. Por 2.3.41 e 2.3.3, temos que L é espaço métrico e espaço vetorial localmente convexo. Considere, portanto, Id_C, a identidade em C. Como $Id_C : C \to C \subset L$ é uma função contínua, pelo Teorema de Extensão de Dugundji, $\exists\, F : L \to L$ contínua tal que $F|_C = Id_C$ e $F(L) \subset C_0\Big(Id_C(C)\Big)$. Mas, por 2.3.25, $C_0\Big(Id_C(C)\Big) = C_0(C) = C$. Segue que $F : L \to C$ é contínua e $F|_C = Id_C$, isto é, F é uma retração. Então C é um retrato de L. □

Teorema 3.2.8. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathbb{S}^n$ *não é contrátil.*
2. *(Bohl) Toda aplicação contínua* $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *tem ao menos uma das seguintes propriedades:*
   (a) F *tem ponto fixo;*
   (b) $\exists x \in \mathbb{S}^n = \partial\mathbb{D}^n$ *e* $\lambda \in (0,1)$ *tal que* $x = \lambda F(x)$.
3. *(Brouwer)* $\mathbb{D}^n$ *tem ppf.*
4. *(Borsuk)* $\nexists\, r : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ *retração.*

Demonstração.

$1 \Rightarrow 2$ Suponha que exista $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(x) \neq x$, $\forall x \in \mathbb{D}^{n+1}$ e $x \neq \lambda F(x)$, $\forall (x, \lambda) \in \mathbb{S}^n \times (0,1)$. Defina então $H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} \frac{x - 2tF(x)}{|x-2tF(x)|} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{(2-2t)x - F\big((2-2t)x\big)}{\left|(2-2t)x - F\big((2-2t)x\big)\right|} & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$\forall\Big(x, (2-2t)\Big) \in \mathbb{S}^n \times (0,1)$, temos que $x \in \mathbb{D}^{n+1}$ e $(2-2t)x \in \mathbb{D}^{n+1}$, logo $x - 2tF(x) \neq 0$ e $(2-2t)x - F\Big((2-2t)x\Big) \neq 0$. Além disso, $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x - 2tF(x) = (2-2t)x - F\Big((2-2t)x\Big)$, ou seja, H é contínua. Mas $H(x, 0) = \frac{x}{|x|} = x$ e $H(x,1) = -\frac{F(0)}{|F(0)|}$. Segue que $H : Id_{\mathbb{S}^n} \sim -\frac{F(0)}{|F(0)|}$, isto é, $Id_{\mathbb{S}^n}$ é homotópica a uma constante.

$2 \Rightarrow 3$ Seja $F : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{D}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contínua. Suponha que $\exists\,(x,\lambda) \in \mathbb{S}^n \times (0,1)$ tal que $x = \lambda F(x)$. Então $1 = |x| = \lambda|F(x)| = \lambda$, absurdo. Assim, F tem ponto fixo.

$3 \Rightarrow 4$ Suponha que $\exists\, r : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ retração. Então, por 3.2.6, $\mathbb{D}^{n+1}$ tem ppf $\Rightarrow \mathbb{S}^n$ tem ppf, um absurdo, pois a aplicação antipodal $-Id_{\mathbb{S}^n}$ é contínua e não possui ponto fixo.

$4 \Rightarrow 1$ Suponha que $Id_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ seja homotopicamente trivial. Então, por 2.4.9, existe $f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ extensão contínua de $Id_{\mathbb{S}^n}$, ou seja, tal que $f|_{\mathbb{S}^n} = Id_{\mathbb{S}^n}$. Logo, f é retração.

□

Teorema 3.2.9 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Toda bola fechada de $\mathbb{R}^n$ tem ppf.*

Demonstração. Como $Id_{\mathbb{S}^n}$ é uma função ímpar, por 2.4.46.1, temos que $\mathbb{S}^n$ não é contrátil. Assim, por 3.2.8, segue que $\mathbb{D}^n$ tem ppf.
Agora, toda bola fechada $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{D}^n$. Basta considerar o homeomorfismo $\phi : B(x_0, r) \sim \mathbb{D}^n$ dada por $\phi(x) = \frac{x-x_0}{r}$. Segue que $B(x_0, r)$ tem ppf. □

Corolário 3.2.9.1. *Todo retrato compacto de $\mathbb{R}^n$ tem ppf.*

Demonstração. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $r : \mathbb{R}^n \to K$ retração e tome $f : K \to K$ contínua. Como K é compacto, por 2.2.54, temos que $\exists\, r > 0$ tal que $K \subset \overline{B(0,r)}$. Como $r|_{\overline{B(0,r)}} : \overline{B(0,r)} \to K$ é também retração, segue que K é retrato de $\overline{B(0,r)}$, um espaço ppf (conforme 3.2.9). Assim, por 3.2.6, K é espaço ppf. □

Corolário 3.2.9.2. *Todo compacto convexo de $\mathbb{R}^n$ tem ppf.*[3]

Demonstração. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto convexo. Por 2.2.6, temos que K é fechado. Assim, segue que K é convexo fechado, logo um retrato de $\mathbb{R}^n$ (conforme 3.2.7, uma vez que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial normado). Então K é um retrato compacto de $\mathbb{R}^n$, portanto tem ppf (conforme 3.2.9.1). □

Corolário 3.2.9.3. *Seja $f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ aplicação contínua satisfazendo $\langle x, f(x)\rangle < 1$ em $\mathbb{S}^n$. Segue que f tem um ponto fixo em $B(0,1)$.*

3. Esse teorema, válido apenas para compactos convexos de espaços euclidianos, pode ser generalizado, a partir do Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff para qualquer compacto convexo de um espaço localmente convexo. Isto, contudo, será visto com mais detalhes em 3.3.13.1.

Demonstração. Suponha que $\exists\,(x,\lambda) \in \mathbb{S}^n \times (0,1)$ tal que $x = \lambda f(x)$. Segue que $f(x) = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \langle x, f(x)\rangle = \frac{|x|^2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} > 1$, absurdo. Então, por 3.2.8, f tem um ponto fixo $x_0 \in \mathbb{D}_{n+1}$. Suponha, agora, que $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Assim, $\langle x_0, f(x_0)\rangle = \langle x_0, x_0\rangle = |x_0|^2 = 1$, absurdo. Logo, $x_0 \in B(0,1)$. □

Exemplo 3.2.10. Seja X um espaço métrico e $L \subset X$ um fechado homeomorfo ao intervalo $[1,+\infty)$. Então X não possui ppf.

Demonstração. Seja $h : L \to [1,+\infty)$ homeomorfismo. Como $\mathbb{R}$ é um espaço localmente convexo (conforme 2.3.41) e $[1,+\infty)$ é convexo, por 2.3.42.1, temos que $\exists\, g : X \to [1,+\infty)$ contínua tal que $g|_L = h$. Então $r = h^{-1} \circ g : X \to L$ é retração, pois é contínua e $r|_L = h^{-1} \circ (g|_L) = h^{-1} \circ h = Id_L$. Segue, assim, que L é retrato de X. Portanto, se X possuisse ppf, por 3.2.6 e 3.2.4, $[1,+\infty)$ também possuiria ppf, um absurdo (conforme 3.2.2). Desta forma, obtemos que X não possui ppf. □

3.3 Teorema do Ponto Fixo de Schauder

Definição 3.3.1. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to X$. Dizemos que f se fatora através de Y se $\exists\, \alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to X$ contínuas tais que $f = \beta \circ \alpha$.

Proposição 3.3.2. Toda função contínua que se fatora através de um espaço ppf tem ponto fixo.

Demonstração. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to X$ que se fatora através de Y ppf. Sejam $\alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to X$ contínuas tais que $f = \beta \circ \alpha$. Como $\alpha \circ \beta : Y \to Y$ é contínua e Y tem ppf, temos que $\alpha \circ \beta$ tem ponto fixo. Então, por 3.0.3, $f = \beta \circ \alpha$ tem ponto fixo. □

Lema 3.3.3. *Seja (K,d) espaço métrico compacto. Assuma que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, X_n$ espaço topológico com ppf e $\exists\, \alpha_n : K \to X_n$ contínua e $\beta_n : X_n \to K$ contínua satisfazendo $d\Big(x, \Big(\beta_n \circ \alpha_n\Big)(x)\Big) \leq a_n, \forall x \in K$, onde (a_n) é uma sequência real tal que $a_n \to 0$. Segue que K possui ppf.*

Demonstração. Seja $f : K \to K$ contínua. Então $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \circ f \circ \beta_n : X_n \to X_n$ é contínua, logo tem um ponto fixo $z_n \in X_n$. Defina $x_n = \beta_n(z_n) \in K$. Segue que $\Big(\alpha_n \circ f\Big)(x_n) = z_n \Rightarrow \Big(\beta_n \circ \alpha_n \circ f\Big)(x_n) = \beta_n(z_n) = x_n \in K$. Assim,

$$d\Big(f(x_n), x_n\Big) = d\Big(f(x_n), \Big(\beta_n \circ \alpha_n \circ f\Big)(x_n)\Big) = d\Bigg(f(x_n), (\beta_n \circ \alpha_n)\Big(f(x_n)\Big)\Bigg) \leq a_n$$

pois $f(x_n) \in K$. Logo, $d\Big(f(x_n), x_n\Big) \leq a_n$ com $a_n \to 0$. Agora, como K é espaço métrico compacto, por 2.2.79.1, temos que (x_n) admite subsequência convergente (x_{n_k}). Segue que $a_{n_k} \to 0$ (conforme 2.2.77). Ponha $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Por 2.2.82, $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Assim, por 2.2.74, $d\big(f(x_0), x_0\big) = 0$, isto é, $f(x_0) = x_0$. Então f tem ponto fixo. □

Definição 3.3.4. Seja X espaço topológico. X é chamado de *absolute retract* (AR) se, $\forall Y$ espaço métrico, $\forall F \subset Y$ fechado, $\forall f : F \to X$ contínua, $\exists \overline{f} : Y \to X$ contínua tal que $\overline{f}|_F = f$.

Proposição 3.3.5. Espaços localmente convexos, espaços vetoriais normados e subconjuntos convexos desses espaços são retratos absolutos.

Demonstração. Pelo Teorema de Extensão de Dugundji, temos que espaços localmente convexos são retratos absolutos. Mas espaços vetoriais normados tem uma base de abertos convexos, as bolas abertas, logo são também localmente convexos. Por 2.3.42.1, obtemos também que subconjuntos convexos de espaços vetorias topológicos localmente convexos (ou, portanto, espaços vetoriais normados) são retratos absolutos. □

Definição 3.3.6. O conjunto $I^\infty = \{(x_n) \in \mathscr{L}^2 \mid |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$ é chamado de cubo de Hilbert.

Observação 3.3.7. Como, por 2.3.5 e $I^\infty \subset \mathscr{L}^2$, temos que o cubo de Hilbert é um subconjunto de um espaço vetorial normado, logo espaço métrico, portanto sequencial e satisfazendo o primeiro axioma da enumerabilidade (conforme 2.3.3, 2.2.58 e 2.2.83).

Exemplo 3.3.8. Seja $A_n = \{x \in I^\infty \mid x_n > 0\}$. Tome $x \in A_n$ e $\epsilon \in (0, x_n)$. Assim, $\forall y \in I^\infty$ tal que $||x - y|| < \epsilon$, temos que $|x_n - y_n|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|^2$ e $|x_n - y_n| \leq ||x - y|| < \epsilon$. Segue que $y_n > x_n - \epsilon > 0$, isto é, $y \in A_n$. Então $B(x, \epsilon) \cap I^\infty \subset A_n$. Dessa forma, temos que A_n é um aberto de I^∞.

Observação. No cubo de Hilbert, as projeções são definidas por $p_i : I^\infty \to [0, \frac{1}{i}]$ com $p_i(x) = x_i$ para $x = (x_1, ..., x_i, ...)$.

Proposição 3.3.9. Seja X um espaço topológico. Então $f : X \to I^\infty$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, $\forall i \in \mathbb{N}$, $f_i = p_i \circ f : X \to [0, \frac{1}{i}]$ é contínua em a.

Demonstração. Evidentemente, como as projeções p_i são contínuas, f é contínua $\Rightarrow f_i = p_i \circ f$ é contínua, $\forall i \in \mathbb{N}$. Suponha, então, que cada f_i é contínua em $a \in X$ e defina $f = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, dado $\epsilon > 0$, $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i > i_0} \frac{1}{i^2} < \frac{\epsilon^2}{2}$. Mas, $\forall i \in \mathbb{N}$, $f_i(x), f_i(a) \in [0, \frac{1}{i}] \Rightarrow \sum_{i > i_0} |f_i(x) - f_i(a)|^2 \leq \sum_{i > i_0} \frac{1}{i^2} \leq \frac{\epsilon^2}{2}$, $\forall x \in X$. Agora, $x \mapsto \big(f_1(x), ..., f_n(x)\big)$ é contínua, pois cada f_i o é, então $\exists V$ vizinhança de a em X tal que $x \in V \Rightarrow \sum_{i \leq i_0} |f_i(x) - f_i(a)|^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$. Logo, $\forall x \in V$, $||f(x) - f(a)||^2 = \sum_{i \leq i_0} |f_i(x) - f_i(a)|^2 + \sum_{i > i_0} |f_i(x) - f_i(a)|^2 < \epsilon^2$, ou seja, $||f(x) - f(a)|| < \epsilon$. Assim, $\forall \epsilon > 0$, $\exists V$ vizinhança de a tal que, $\forall x \in V$, $||f(x) - f(a)|| < \epsilon$. Segue que f é contínua em a. □

Corolário 3.3.9.1. Uma sequência (x_n) em I^∞, tal que $x_n = (x_{n,i})_i \in I^\infty$, converge para um ponto $a = (a_i) \in I^\infty$ se, e somente se, $\forall i \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_{n,i})_n$ converge para a_i.

Demonstração. Seja $Q = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Temos que $\lim_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow f : Q \to I^\infty$ definida por $f(\frac{1}{n}) = x_n$ e $f(0) = a$ é contínua, uma vez que, sendo os pontos não-nulos de Q isolados, a continuidade da f depende apenas da sua continuidade em 0, que equivale, por 2.2.82 e 3.3.7, a $x_n \to a$. Agora, esta tal f é contínua se, e somente se, $\forall i \in \mathbb{N}$, $f_i = p_i \circ f : Q \to [0, \frac{1}{i}]$ definida por

$$f_i\left(\frac{1}{n}\right) = p_i\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = p_i(x_n) = x_{n,i}$$

$$f_i(0) = P_i\big(f(0)\big) = p_i(a) = a_i$$

é contínua. Mas, $\forall i \in \mathbb{N}$, uma tal f_i é contínua em a_i se, e somente se, $\lim_{n \to \infty} x_{n,i} = a_i$. □

Teorema 3.3.10.

1. *O cubo de Hilbert é compacto;*
2. *O cubo de Hilbert é o espaço métrico compacto universal, isto é, todo espaço métrico compacto K é homeomorfo a um subconjunto $\hat{K}$ fechado em I^∞;*
3. *O cubo de Hilbert possui ppf.*

Demonstração.

1. Temos, por 2.2.79.1 que um subconjunto de um espaço métrico é compacto se, e somente se, toda sequência naquele subconjunto admitir uma subsequência convergente nele mesmo. Agora, observe que uma subsequência de uma sequência (x_n) em I^∞ é uma restrição da aplicação $x : \mathbb{N} \to I^\infty$ a um conjunto infinito $N \subset \mathbb{N}$. Nesse caso, indicaremos a subsequência por $(x_n)_{n \in N}$ e seu limite por $\lim_{n \in N} x_n$.
   Seja então (x_n) uma sequência qualquer em I^∞. Segue que $(x_{n,1})$ é uma sequência no compacto $[0, 1]$, logo existe $N_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\lim_{n \in N_1} x_{n,1} = a_1 \in [0, 1]$. Da mesma forma, $(x_{n,2})_{n \in N_1}$ é uma sequência no compacto $[0, \frac{1}{2}]$, logo existe $N_2 \subset N_1$ infinito tal que $\lim_{n \in N_2} x_{n,2} =$

$a_2 \in [0, \frac{1}{2}]$. Indutivamente, temos que $(x_{n,k})_{n \in N_{k-1}}$ é uma sequência em $[0, \frac{1}{k}]$, logo existe $N_k \subset N_{k-1}$ infinito tal que $\lim_{n \in N_k} x_{n,k} = a_k$. Como cada N_k está ordenado por ordem crescente, podemos tomar seu k-ésimo elemento p_k e definir $N^* = \{p_k \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}$. Ainda mais, como $N_1 \supset N_2 \supset ... \supset N_{k-1} \supset N_k \supset ...$, para cada $k \in \mathbb{N}$, N^*, a partir do seu k-ésimo termo, está contida em N_k. Segue que $(x_n)_{n \in N^*}$, a partir do seu k-ésimo termo, é uma subsequência de $(x_n)_{n \in N_k}$. Assim, por 2.2.77, temos que

$$\lim_{n \in N^*} x_{n,k} = \lim_{\substack{n \in N^* \\ n \geq k}} x_{n,k} = \lim_{n \in N_k} x_{n,k} = a_k$$

$\forall k \in \mathbb{N}$. Logo, por 3.3.9.1, $\lim_{n \in N^*} x_n = (a_k)$, onde $a_k \in [0, \frac{1}{k}]$, $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow a = (a_k) \in I^\infty$. Assim, $\forall (x_n)$ sequência de I^∞, $\exists N^* \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n \in N^*}$ é convergente. Segue que I^∞ é compacto.

2. Seja K um espaço métrico compacto. Segue que K é enumeravelmente compacto, logo satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (conforme 2.2.61). Tome, assim, $\mathscr{B} = \{B_n\}$ base enumerável de abertos de K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : K \to [0, \frac{1}{n}]$ uma função contínua definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{d(x, K - B_n)}{1 + d(x, K - B_n)}$$

Observe aque $f_n(x) > 0 \Leftrightarrow x \in B_n$. Agora, por 3.3.9, $f : K \to I^\infty$ definida por $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x), ...)$ é contínua. Além disso, por 2.1.2.1, $\forall x \neq y \in K$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n$ e $y \notin B_n \Rightarrow f_n(x) > 0$ e $f_n(y) = 0 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, isto é, f é injetiva. Segue que $f : K \to f(K)$ é uma bijeção contínua. Mas, como K é compacto, temos que f é fechada (conforme 2.2.6.1). Então $f : K \to f(K)$ é homeomorfismo entre K e $\hat{K} = f(K) \subset I^\infty$, onde $\hat{K}$ é um compacto de I^∞, logo fechado.

3. Seja $I^n = \{x \in I^\infty \mid x_i = 0, \forall i > n\}$. Então $I^n = \prod_{i=1}^n [0, \frac{1}{i}] \sim [0,1]^n \sim \mathbb{D}^n \Rightarrow I^n \sim \mathbb{D}^n \Rightarrow I^n$ tem ppf. Seja então $i_n : I^n \to I^\infty$ a inclusão e $p_n : I^\infty \to I^n$ a projeção. Segue que $\beta_n \circ \alpha_n : I^\infty \to I^\infty$ é contínua e leva $x = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...)$ em $(x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...)$. Assim, $d\Big(x, \big(\alpha_n \circ \beta_n\big)(x)\Big) = \sqrt{\sum_{i=n+1}^\infty x_i^2}$. Mas $\sum_{i=n+1}^\infty x_i^2 \leq \sum_{i=n+1}^\infty \frac{1}{i^2} < \int_n^\infty \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n}$. Assim, $d\Big(x, \big(\alpha_n \circ \beta_n\big)(x)\Big) < \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$. Então, por 3.3.3, I^∞ tem ppf.

□

Lema 3.3.11. *Seja (K, d) espaço métrico compacto e $f : K \to K$. Suponha que f se fatora através de um espaço AR X. Então f tem ponto fixo.*

Demonstração. Sejam $\alpha : K \to X$ e $\beta : X \to K$ contínuas com $f = \beta \circ \alpha$. Tome $\hat{K} \subset I^\infty$, $i : \hat{K} \to I^\infty$ a inclusão e $h : K \to \hat{K}$ homeomorfismo (sempre existe um tal $\hat{K}$, por 3.3.10) e considere $\alpha \circ h^{-1} : \hat{K} \to X$ contínua. X é espaço AR $\Rightarrow \exists\, \phi : I^\infty \to X$ contínua tal que $\phi|_{\hat{K}} = \alpha \circ h^{-1}$. Então $i \circ h : K \to I^\infty$ e $\beta \circ \phi : I^\infty \to K$ são contínuas e $(\beta \circ \phi) \circ (i \circ h) = f$. Segue que f se fatora através de I^∞. Como I^∞ possui ppf (conforme 3.3.10), por 3.3.2, temos que f tem ponto fixo.

$$
\begin{tikzcd}
I^\infty \arrow[ddr, bend right, "\phi"'] & & \hat{K} \arrow[ll, hook', "i"'] \arrow[ddl, bend right, "\alpha\circ h^{-1}"'] & \\
& & K \arrow[u, "h"', "\wr"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
& X \arrow[rr, "\beta"'] & & K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, "i\circ h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
I^\infty \arrow[rr, "\beta\circ\phi"'] & & K
\end{tikzcd}
$$

□

Teorema 3.3.12 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder)**.** *Seja E espaço vetorial normado e $C \subset E$ convexo não-vazio. Seja $f : C \to C$ compacta. Então f tem ponto fixo.*

Demonstração. f é compacta $\Rightarrow \overline{f(C)} \subset C$ é compacto. Considere então as funções $\tilde{f} : C \to \overline{f(C)} \mid \tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in C$ e $i : \overline{f(C)} \to C$ inclusão. Temos que $\tilde{f} \circ i : \overline{f(C)} \to \overline{f(C)}$ se fatora através de C. Mas $\overline{f(C)} \subset E$ é um subconjunto de um espaço vetorial normado, portanto métrico (conforme 2.3.3). Segue que $\overline{f(C)}$ é espaço métrico compacto. E, por 3.3.5, $C \subset E$ é AR. Assim, por 3.3.11, temos que $\tilde{f} \circ i$ tem ponto fixo. Então $f = i \circ \tilde{f}$ tem ponto fixo. □

Teorema 3.3.13 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff)**.** *Seja L espaço localmente convexo e $C \subset L$ convexo. Então toda aplicação compacta $f : C \to C$ tem ponto fixo.*

Demonstração. Demonstra-se da mesma forma que o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, mas usando que L é localmente convexo e $C \subset L$ é convexo $\Rightarrow C$ é AR (por 3.3.5). □

Corolário 3.3.13.1. *Todo compacto convexo de um espaço localmente convexo tem ppf.*

Demonstração. Seja L espaço localmente convexo e $C \subset L$ convexo compacto. Assim, $\forall f : C \to C$ contínua, como C é compacto e $f(C) \subset C$, temos que f é compacta. Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff, f tem ponto fixo. Segue que C tem ppf. □

Teorema 3.3.14. *Toda aplicação compacta de um espaço AR tem ponto fixo.*

Demonstração. Demonstra-se da mesma forma que o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. □

Teorema 3.3.15 (Dugundji)**.** *Seja L um espaço vetorial normado. Se $\mathbb{S}(L)$ não for compacto, então é AR.*[4]

Teorema 3.3.16 (Dugundji)**.** *Seja L um espaço vetorial normado. Então $\mathbb{D}(L)$ tem ppf se, e somente se, $\mathbb{D}(L)$ for compacto.*

Demonstração. Como L é localmente convexo e $\mathbb{D}(L)$ é convexo (conforme 2.3.41 e 2.3.22), se $\mathbb{D}(L)$ for compacto, por 3.3.13.1, segue que $\mathbb{D}(L)$ tem ppf. Suponha, então, que $\mathbb{D}(L)$ não é compacto. Segue de 2.3.18.1 que $\mathbb{S}(L)$ tampouco é compacto. Logo, por 3.3.15, $\mathbb{S}(L)$ é AR. Considere, então, a identidade $Id_{\mathbb{S}(L)} : \mathbb{S}(L) \to \mathbb{S}(L)$, uma aplicação contínua. Como $\mathbb{S}(L)$ é AR e é um fechado de $\mathbb{D}(L)$ (um espaço métrico, conforme 2.3.3, pois é subconjunto de um espaço vetorial normado), $\exists\, F : \mathbb{D}(L) \to \mathbb{S}(L)$ extensão contínua de $Id_{\mathbb{S}(L)}$. Defina, agora, $\phi : \mathbb{D}(L) \to \mathbb{S}(L)$ por $\phi(x) = -F(x)$. Se ϕ tiver um ponto fixo $x \in \mathbb{D}(L)$, então $x = -F(x) \in \mathbb{S}(L)$ (pois $\mathbb{S}(L)$ é simétrico, conforme 2.3.34). Mas $x \in \mathbb{S}(L) \Rightarrow F(x) = Id_{\mathbb{S}(L)}(x) = x$, um absurdo. Então $\phi : \mathbb{D}(L) \to \mathbb{S}(L) \subset \mathbb{D}(L)$ é uma aplicação contínua que não tem ponto fixo. Segue que $\mathbb{D}(L)$ não possui ppf. □

Corolário 3.3.16.1 (Teorema do Ponto Fixo de Dugundji)**.** *Seja L um espaço vetorial normado. Então $\mathbb{D}(L)$ tem ppf se, e somente se, $dim(L) < \infty$.*

Demonstração. Por 2.3.18.1 e 3.3.16, temos que

$$\mathbb{D}(L)\,\text{tem ppf} \Leftrightarrow \mathbb{D}(L)\,\text{é compacto} \Leftrightarrow \dim(L) < \infty$$

□

4. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [1, 6.2].

3.4 Alternativa Não-Linear e o Teorema Ponto Fixo de Leray-Schauder

Proposição 3.4.1 (Alternativa Não-Linear)**.** Seja E espaço de Banach, $C \subset E$ convexo e U aberto de C. Sejam ainda $\overline{U}^C$ o fecho de U em C e $\partial^C U$ a fronteira de U em C. Então, $\forall p \in U$ e $\forall F : \overline{U} \to C$ compacta, vale uma das seguintes proposições:

1. F tem um ponto fixo em $\overline{U}^C$;
2. $\exists u \in \partial^C U$ e $\lambda \in (0,1)$ tal que $u = \lambda F(u) + (1-\lambda)p$, ou, equivalentemente, $\exists u \in \partial^C U$ tal que $u \in \big(p, F(u)\big)$.

Demonstração. Suponha que F não tenha ponto fixo em $\partial^C U$ (do contrário a demonstração seria trivial) nem satisfaça a segunda proposição e defina

$$A = \{x \in \overline{U}^C \mid x = t \cdot F(x) + (1-t)p \text{ para algum } t \in [0,1]\}$$

Evidentemente, $p \in A$, logo $A \neq \emptyset$. Além disso, $A \cap \partial^C U = \emptyset$. Seja, então, (x_n) uma sequência em $A \subset \overline{U}^C$ tal que $x_n \to x_0 \in \overline{U}$. Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, t_n \in [0,1]$ tal que $x_n = t_n \cdot F(x_n) + (1-t_n)p$. Então (t_n) é uma sequência definida no compacto $[0,1]$, logo admite subsequência (t_{n_k}) tal que $t_{n_k} \to t_0 \in [0,1]$. Mas, por 2.2.77, $x_{n_k} \to x_0$. Segue, por 2.2.82, que $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ (pois $\overline{U}^C \subset E$ é espaço métrico, portanto satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, conforme 2.2.58). Logo, $x_0 = t_0 \cdot F(x_0) + (1-t_0)p$, ou seja, $x_0 \in A$. Assim, A é fechado de $\overline{U}^C$. Além disso, $\partial^C U$ é também fechado em $\overline{U}^C$. Dessa forma, como $\overline{U}^C$ é normal (por 2.2.57 e 2.1.35), conforme o Lema de Urysohn, $\exists\, \mu : \overline{U}^C \to [0,1]$ tal que $\mu^{-1}(0) = \partial^C U$ e $\mu^{-1}(1) = A$. Defina então $N : C \to C$ por

$$N(x) = \begin{cases} \mu(x)F(x) + \big(1-\mu(x)\big)p & \text{se } x \in \overline{U}^C, \\ p & \text{se } x \in C - \overline{U}^C, \end{cases}$$

Temos que $x \in \partial^C U \Rightarrow \mu(x) = 0 \Rightarrow N(x) = p$. Então N é contínua. Além disso, $\mu(x)F(x) + \big(1-\mu(x)\big)p \in [p, F(x)]$, logo $N(C) \subset C_0\Big(F(\overline{U}^C) \cup \{p\}\Big)$. Agora, F é aplicação compacta, então $F(\overline{U}^C)$ é relativamente compacto e $\overline{F(\overline{U}^C) \cup \{p\}} = \overline{F(\overline{U}^C)} \cup \{p\}$ é compacto, isto é, $F(\overline{U}^C) \cup \{p\}$ é relativamente compacto. Segue, por Mazur, que $C_0\Big(F(\overline{U}^C) \cup \{p\}\Big)$ é relativamente compacto. Como $N(C) \subset C_0\Big(F(\overline{U}^C) \cup \{p\}\Big)$, temos que N é aplicação compacta. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder, $\exists\, x_0 \in C$ tal que $N(x_0) = x_0$.

Suponha, agora, que $x_0 \in C - U$. Então $x_0 = N(x_0) = p \in U$, absurdo. Segue que $x_0 \in U$. Temos, desta forma, que $x_0 = N(x_0) = \mu(x_0)F(x_0) + \big(1-\mu(x_0)\big)p$. Mas $\mu(x_0) \in [0,1]$, logo $x_0 \in A$. Pela definição de μ, segue que $\mu(x_0) = 1$ e $N(x_0) = F(x_0)$. Então x_0 é ponto fixo de F. $\square$

Aplicação 3.4.2. Seja $p \in [1, +\infty]$ constante, q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $h \in C^0\Big([0,1]\Big)$, $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação L^q-Carathéodory, isto é, tal que

1. $g_y : t \mapsto g(t, y)$ é mensurável para todo $y \in \mathbb{R}$;
2. $g_t : \mapsto g(t, y)$ é contínua para quase todo $t \in [0,1]$;
3. $\forall r > 0$, $\exists\, \mu_r \in L^q\Big([0,1]\Big)$ tal que $|y| < r \Rightarrow |g(t,y)| \leq \mu_r(t)$ para quase todo $t \in [0,1]$.

e seja $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $k_t : s \mapsto k(t,s) \in L^p\Big([0,1]\Big)$ para cada $t \in [0,1]$ e $t \mapsto k_t$ é contínuo de $[0,1]$ para $L^p\Big([0,1]\Big)$.
Suponha ainda que, $\forall \lambda \in (0,1)$ e $\forall y : [0,1] \to \mathbb{R}$ solução de

$$y(t) = \lambda\Bigg(h(t) + \int_0^1 k(t,s)g\Big(s, y(s)\Big)ds\Bigg),\ \forall t \in [0,1]$$

vale que $||y||_\infty = \sup_{[0,1]}|y| \neq M$, onde $M > 0$ é uma constante que não depende de λ. Então a equação

$$y(t) = h(t) + \int_0^1 k(t,s)g\Big(s, y(s)\Big)ds,\ \forall t \in [0,1] \tag{3.4.1}$$

tem solução $y \in C\Big([0,1]\Big)$.

Demonstração. A ideia desta demonstração é provar que o operador $F : C\Big([0,1]\Big) \to C\Big([0,1]\Big)$ dado por

$$F[y](t) = h(t) + \int_0^1 k(t,s)g\Big(s, y(s)\Big)ds,\ \forall t \in [0,1]$$

é um operador que satisfaz os requisitos de 3.4.1 sem que valha (2), tendo, desta forma, um ponto fixo em $C\Big([0,1]\Big)$. Contudo, apesar de este ser um exemplo clássico e de grande importância de uma aplicação de 3.4.1 às EDPs, ele não será elaborado aqui, por utilizar diversos elementos que fogem ao escopo da dissertação. A demonstração integral, entretanto, pode ser encontrada em [8, §5, 5.2, p.49-51] □

Teorema 3.4.3 (Teorema do Ponto Fixo de Rothe)**.** *Seja E espaço de Banach e $U \subset E$ aberto convexo não-vazio. Seja $F : \overline{U} \to E$ compacta tal que $F(\partial U) \subset \overline{U}$. Então F tem ponto fixo em $\overline{U}$.*

Demonstração. Tome $p \in U$, $u \in \partial U$ e $\lambda \in (0,1)$. Como $F(u) \in \overline{U}$, por 2.3.30, $\lambda F(u) + (1-\lambda)p \in U$, logo $\lambda F(u) + (1-\lambda)p \neq u$, $\forall u \in \partial U$, $\forall \lambda \in (0,1)$. Mas $U \subset \overline{U}$, onde $\overline{U}$ é fechado convexo (por 2.3.29). Então, por 3.4.1, F tem um ponto fixo. □

Teorema 3.4.4. *Seja E espaço de Banach, $C \subset E$ convexo fechado, $U \ni 0$ aberto em U e $\rho : E \to [0, +\infty)$, não necessariamente contínua, satisfazendo $\rho^{-1}(0) = 0$ e $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$, $\forall (x, \lambda) \in E \times [0, +\infty)$. Assuma ainda que, para $F : \overline{U}^C \to C$ compacta, vale a condição de Rothe, isto é, $\rho\Big(F(x)\Big) \leq \rho(x)$ para $x \in \partial^C U$. Então F tem ponto fixo.*

Demonstração. Como $0 \in U$, pondo $p = 0$ em 3.4.1, temos que F tem ponto fixo ou $\exists (x, \lambda) \in \partial^C U \times (0, 1)$ tal que $x = \lambda F(x)$. Mas $x = \lambda F(x) \Rightarrow \rho(x) = \rho\Big(\lambda F(x)\Big) = \lambda\rho\Big(F(x)\Big) < \rho\Big(F(x)\Big)$, um absurdo, pois $\rho\Big(F(x)\Big) \leq \rho(x)$ em $\partial^C U$. Então F tem ponto fixo. □

Observação. Observe que, em particular, toda norma de um espaço vetorial é uma tal ρ. Assim, pondo $\rho(x) = ||x||$, $C = E$ e tomando $U \ni 0$ aberto, obtemos que toda $F : \overline{U} \to E$ compacta com tal que $||F(x)|| \leq ||x||$ tem um ponto fixo.

Proposição 3.4.5 (Alternativa de Leray-Schauder)**.** Seja E espaço de Banach, $C \subset E$ convexo fechado tal que $0 \in C$ e $F : C \to C$ completamente contínua. Então $\varepsilon(F) = \{x \in C \mid x = \lambda F(x) \text{ para algum } \lambda \in (0, 1)\}$ é ilimitado ou F tem ponto fixo.

Demonstração. Suponha que $\varepsilon(F)$ é limitado. Então $\overline{\varepsilon(F)}$ é também limitado, isto é, $\exists r > 0$ tal que $\overline{\varepsilon(F)} \subset B(0, r)$. Defina $U = B(0, r) \cap C$. Logo, U é aberto de C e $0 \in U$. Além disso, U é limitado, portanto $\overline{U}$ também o é. Como F é completamente contínua, temos que $F(\overline{U})$ é relativamente compacto, isto é, $F|_{\overline{U}} : \overline{U} \to C$ é aplicação compacta. Finalmente, temos que

$$\partial^C U = \overline{U}^C - U = \Big(\overline{B(0,r)} \cap C\Big) - \Big(B(0,r) \cap C\Big) = \Big(\overline{B(0,r)} - B(0,r)\Big) \cap C = \partial B(0,r) \cap C$$

Assim, $u \in \partial^C U \Rightarrow u \in \partial B(0, r) \Rightarrow u \notin \varepsilon(F) \subset B(0, r) \Rightarrow \nexists\, \lambda \in (0, 1)$ tal que $u = \lambda F(u)$. Pondo $p = 0$ em 3.4.1, temos que F tem ponto fixo. □

Teorema 3.4.6 (Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder)**.** *Seja $(E, ||\cdot||)$ espaço de Banach e $T : E \to E$ completamente contínua satisfazendo a condição de contorno de Leray-Schauder, isto é, tal que $\exists\, M > 0$ com $||x|| = M \Rightarrow T(x) \neq \lambda x$, $\forall \lambda > 1$. Então T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Seja T completamente contínua satisfazendo a condição acima com um tal $M > 0$ e ponha $C = \overline{B(0, M)} \subset E$. Segue que C é convexo e fechado. Além disso, como T é completamente contínua, temos que $\exists\, K \subset E$ tal que $T(C) \subset K$, pois C é limitado (conforme 2.2.2). Defina então $\rho : E \to C$ por

$$\rho(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in C \Leftrightarrow ||x|| \leq M, \\ \frac{M \cdot x}{|x|} & \text{se } ||x|| > M, \end{cases}$$

onde $||x|| > M \Rightarrow ||\rho(x)|| = M \Rightarrow x \in \partial C$ e $||x|| = M \Rightarrow \rho(x) = x = \frac{M \cdot x}{||x||}$, isto é, ρ é contínua. Segue que ρ é retração, pois $\rho|_C = Id_C$. Assim, temos que $g = \rho \circ T|_C : C \to C$ é compacta, pois $T|_C(C) = T(C) \subset K \Rightarrow g(C) = (\rho \circ T|_C)(C) = \rho\Big(T(C)\Big) \subset \rho(K)$, onde $\rho(K)$ é compacto pela continuidade de ρ. Assim, por 3.3.12, $\exists\, x_0 \in C$ tal que $g(x_0) = x_0$. Suponha que, portanto, que $||T(x_0)|| > M$. Então $x_0 = g(x_0) = \rho\Big(T(x_0)\Big) = \frac{M \cdot T(x_0)}{||T(x_0)||} \Rightarrow T(x_0) = \lambda x_0$, onde $\lambda = \frac{||T(x_0)||}{M} > 1$, absurdo. Segue que $||T(x_0)|| \leq M$, logo $x_0 = g(x_0) = \rho\Big(T(x_0)\Big) = T(x_0)$, ou seja, $x_0 \in C$ é ponto fixo de T. □

Observação 3.4.7. O Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder pode ser reformulado da seguinte forma, mais prática para aplicação na teoria das EDPs:

> Seja $(E, ||\cdot||)$ um espaço de Banach e $T : E \to E$ completamente contínua com uma constante $M > 0$ tal que, para todos $x \in E$ e $\sigma \in [0,1]$ satisfazendo $x = \sigma T(x)$, vale que $||x|| < M$. Então T tem um ponto fixo.

Um exemplo importante de aplicação dessa versão equivalente do Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder às EDPs quasilineares elípticas de 2ª ordem pode ser encontrado em [9, II, 11.2, Teorema 11.4].

3.5 Uma Aplicação da Teoria de Ponto Fixo à Teoria dos Jogos

Lema 3.5.1 (Ky Fan)**.** *Seja X um espaço localmente convexo, $K \subset X$ um compacto convexo e $\Phi : K \times K \to \mathbb{R}$ uma aplicação tal que:*

1. *$\forall y \in K$, $\Phi_y : x \mapsto \Phi(x,y)$ é semicontínua inferiormente;*[5]
2. *$\forall x \in K$, $\Phi_x : y \mapsto \Phi(x,y)$ é côncava.*

Então $\exists\, x_0 \in K$ com $sup_{y\in K}\Phi(x_0,y) \leq sup_{y \in K}\Phi(y,y)$.

Demonstração. Por A.2.5, temos que $F : K \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \sup_{y\in K}\Phi(x,y)$ é semicontínua inferiormente. Fixe, assim, $\epsilon > 0$ e tome $x \in K$. Observe, primeiramente, que $x \in F^{-1}\Big(F(x) - \epsilon, +\infty\Big)$, pois $F(x) > F(x) - \epsilon$. Suponha, agora, que, para todos $y \in K$ e $U \ni x$ aberto, $\exists\, z \in U \cap K$ tal que

$$\Phi(z,y) \leq \sup_{w\in K}\Phi(x,w) - \epsilon$$

Então $\sup_{y\in K}\Phi(z,y) \leq \sup_{w\in K}\Phi(x,w) - \epsilon$, isto é, $F(z) \leq F(x) - \epsilon$. Portanto, $\forall\, U \ni x$ aberto, $\exists\, z \in U \cap K$ tal que

$$F(z) \leq F(x) - \epsilon \Leftrightarrow F(z) \notin \Big(F(x) - \epsilon, +\infty\Big) \Leftrightarrow z \notin F^{-1}\Big(F(x) - \epsilon, +\infty\Big)$$

5. Ver A.2.2.

Dessa forma, $\forall\, U \ni x$ abertos, temos que $U \cap K \not\subset F^{-1}\Big(F(x) - \epsilon, +\infty\Big)$ (pois $\exists\, z \in U \cap K$ tal que $z \notin F^{-1}\Big(f(x) - \epsilon, +\infty\Big)$. Então $F^{-1}\Big(F(x) - \epsilon, +\infty\Big)$ não é um aberto de K, um absurdo, pois F é semicontínua inferiormente.
Logo, fixando $\epsilon > 0$, $\forall x \in K$, $\exists\, y_x \in K$ e $\exists\, U_x \ni x$ aberto tais que

$$\Phi(z, y_x) > \sup_{y \in K} \Phi(x, y) - \epsilon, \quad \forall z \in U_x \cap K$$

Como $\{U_x\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K, um compacto, ela admite subcobertura finita $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$. Agora, como K é paracompacto (conforme 2.2.4), por 2.1.40, existe $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ partição da unidade em de K subordinada á cobertura aberta $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$. Defina, então, $f : K \to X$ por $f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) y_{x_i}$. Temos que f é contínua, por ser soma finita de funções contínuas. Além disso, $\forall x \in K$, $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$, logo $f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) y_{x_i} \in C_0\Big(\{y_{x_1}, ..., y_{x_n}\}\Big)$. Assim, pondo $C = C_0\Big(\{y_{x_1}, ..., y_{x_n}\}\Big)$, temos que $f(K) \subset C$. Mas K é convexo e $\{y_{x_1}, ..., y_{x_n}\} \subset K$, portanto $C \subset K$. Segue que $f(K) \subset K$, ou seja, f é aplicação compacta, pois K é compacto. Assim, por 3.3.13, f tem um ponto fixo $\tilde{x} \in K$, isto é, $\tilde{x} = \sum_{i=1}^n \phi_i(\tilde{x}) y_{x_i}$.
Agora, como $\Phi_{\tilde{x}} : y \mapsto \Phi(\tilde{x}, y)$ é côncava e $\sum_{i=1}^n \phi_i(\tilde{x}) y_{x_i}$ é uma combinação convexa, por A.2.11.1,

$$\Phi(\tilde{x}, \tilde{x}) = \Phi\left(\tilde{x}, \sum_{i=1}^n \phi_i(\tilde{x}) y_{x_i}\right) \geq \sum_{i=1}^n \phi_i\Big(\tilde{x}\Big) \Phi(\tilde{x}, y_{x_i})$$

Além disso, pela escolha dos y_{x_i},

$$\Phi(\tilde{x}, y_{x_i}) \geq \sup_{y \in K} \Phi(x_i, y) - \epsilon = F(x_i) - \epsilon$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K} \Phi(y, y) \geq \Phi(\tilde{x}, \tilde{x}) &\geq \sum_{i=1}^n \phi_i\Big(\tilde{x}\Big) \Phi(\tilde{x}, y_{x_i}) \geq \sum_{i=1}^n \phi_i\Big(\tilde{x}\Big)\Big(F(x_i) - \epsilon\Big) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \phi_i\Big(\tilde{x}\Big) \cdot \left(\inf_{x \in K}\Big(F(x) - \epsilon\Big)\right) = \inf_{x \in K}\Big(F(x) - \epsilon\Big) \\ &= \inf_{x \in K} F(x) - \epsilon \end{aligned}$$

Agora, como K é compacto e F é semicontínua inferiormente, por A.2.8, $\exists\, x_0 \in K$ tal que $\inf_{x \in K} F(x) = F(x_0)$. Segue que

$$\sup_{y \in K} \Phi(y, y) \geq \inf_{x \in K} F(x) - \epsilon = F(x_0) - \epsilon = \sup_{y \in K} \Phi(x_0, y) - \epsilon$$

Como podemos tomar qualquer $\epsilon > 0$, obtemos que $\exists\, x_0 \in K$ tal que $\sup_{y \in K} \Phi(x_0, y) \leq \sup_{y \in K} \Phi(y, y)$. $\square$

Consideraremos, para a aplicação a seguir, jogos não-cooperativos de $n \geq 2$ jogadores, isto é, jogos em que cada jogador age independentemente. Nessas condições, um jogo pode ser definido da seguinte forma:

Definição 3.5.2. Um jogo é um par ordernado (K, F), onde $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$ e $F = (f_i)_{i=1}^{n} : K \to \mathbb{R}^n$. Um elemento $x_i \in K_i$ é chamado de uma estratégia do jogador i (K_i sendo justamente o conjunto de todas as estratégias possíveis para o jogador i), enquanto a n-upla $x = (x_i) \in K$ é chamada de perfil de estratégias do jogo.
A função F, por sua vez, é chamada de função de perda, enquanto cada coordenada f_i representa a função de perda para o jogador i é maximizar seu ganhos, ou seja, encontrar uma combinação de estratégias que minimize a sua função de perda.

Definição 3.5.3. Um jogo é dito de soma zero quando $\sum_{i=1}^{n} f_i \equiv 0$.

Definição 3.5.4. Uma estratégia é chamada de equilíbrio de Nash quando nenhum jogador se beneficia ao mudar sua estratégia enquanto os demais jogadores mantêm as suas inalteradas. Ou seja, um elemento $\tilde{x} = (\tilde{x}_i) \in K$ é um equilíbrio de Nash quando temos que

$$f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{i-1}, x_i, \tilde{x}_{i+1}, ..., \tilde{x}_n) \;\; \forall i \in \{1, ..., n\}, \, \forall x_i \in K_i \qquad (3.5.1)$$

Observação. Falando vagamente, dizer que pequenas variações de uma estratégia causam pequenas variações de ganho podem ser traduzidas matematicamente na exigência de que a função de perda seja contínua.
A concavidade das funções de ganho — ou quasi-concavidade, dependendo do resultado almejado[6] — é, por sua vez, é uma exigência necessária para a garantia de existência de certos equilíbrios de Nash, e representa a habilidade de um jogador em particular de misturar estratégias para diminuir sua perda.

Após essa breve introdução a conceitos fundamentais da teoria dos jogos, podemos então obter o seguinte resultado fundamental da Teoria dos Jogos:

Teorema 3.5.5 (Nash). *Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, seja X_i um espaço localmente convexo, $K_i \subset X_i$ um convexo compacto não-vazio e $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$. Sejam ainda $f_i : K \to \mathbb{R}$ contínuas em K e convexas na i-ésima coordenada. Então $\exists\, \tilde{x} \in K$ equilíbrio de Nash.*[7]

6. Ver [10, I,2, 20.3, p.20].
7. Esse importante teorema foi demonstrado inicialmente em [11] por Nash, que ganhou o Nobel de Economia por esse resultado.

Demonstração. Defina $\Phi : K \times K \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \Big(f_i(x) - f_i(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n) \Big)$$

para $y = (y_i)$. Então Φ é contínua, $\Phi_x : y \mapsto \Phi(x,y)$ é côncava para cada $x \in K$ e $\Phi(x,x) = 0$, $\forall x \in K$. Assim, por Ky Fan, $\exists\, \tilde{x} \in K$ com $\sup_{y \in K} \Phi(\tilde{x}, y) \leq \sup_{y \in K} \Phi(y,y) = 0$. Então, $\forall y \in K$, $\Phi(\tilde{x}, y) \leq \sup_{y \in K} \Phi(\tilde{x}, y) \leq 0$. Assim, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ e $\forall x_i \in K_i$, temos que

$$\Phi\Big(\tilde{x}, (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{i-1}, x_i, \tilde{x}_{i+1}, ..., \tilde{x}_n)\Big) \leq 0 \Leftrightarrow f_i(\tilde{x}) \leq f_i(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{i-1}, x_i, \tilde{x}_{i+1}, ..., \tilde{x}_n)$$

ou seja, $\tilde{x} \in K$ é um equilíbrio de Nash. $\square$

Observação 3.5.6. No caso de um jogo de soma zero, podemos reproduzir o resultado de 3.5.5 para funções de perda f_i côncavas na i-ésima coordenada e semicontínuas superiormente em K. Neste caso, como $\sum_{i=1}^{n} f_i \equiv 0$, temos que $\Phi : K \times K \to \mathbb{R}^n$ definido conforme na demonstração de 3.5.5 é dada por $\Phi(x,y) = -\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)$. Então Φ, além de ser côncava na segunda coordenada, é semicontínua inferiormente na primeira coordenada, pois cada f_i é semicontínua em seu domínio. Assim, podemos aplicar 3.5.1 e o resultado desejado segue como em 3.5.5.

4
Aspectos da Teoria do Grau e Aplicações a Teoremas de Ponto Fixo

Devido à necessidade de todo um fundamento de topologia diferencial que foge ao escopo desta dissertação (que visa, nesse momento, desenvolver os fundamentos da teoria do grau e trabalhar suas respectivas aplicações aos teoremas de ponto fixo), as demonstrações de alguns teoremas e proposições da teoria do grau serão omitidos aqui, mas devidamente referenciados caso o leitor deseje se aprofundar no tema. [1]

Ao longo desta seção, a seguinte notação será utilizada:

1. Sejam M, N variedades diferenciáveis [2] e $f : M \to N$ diferenciável.

   $$R_f = \{a \in N \mid \forall x \in f^{-1}(a),\, df_x : T_xM \to T_aN \text{ é sobrejetiva}\}$$

   é conjunto de valores regulares de f;
2. Sejam E, V espaços vetoriais de mesma dimensão e $L : E \to V$ isomorfismo. Dizemos que $\operatorname{sgn}(L) = +1$ (isto é, L tem sinal positivo) caso $\det(L) > 0$ e $\operatorname{sgn}(L) = -1$ caso contrário;
3. Em se tratando de variedades, o símbolo ∂ será usado para indicar o bordo;

Além disso, os seguintes resultados de topologia diferencial e análise serão empregados:

Teorema 4.0.1 (Sard-Brown)**.** *Sejam M, N variedades suaves de dimensões m e n, respectivamente, e $f : M \to N$ suave. Então R_f é denso em N.* [3]

Teorema 4.0.2. *Sejam M, N variedades suaves sem bordo e $f : M \to N$ própria. Então $\exists\, g : M \to N$ suave e própria propriamente homotópica a f.* [4]

---

1. Para uma abordagem abrangente desse tema, ver [12].
2. Para a definição de variedades diferenciáveis e outros conceitos associados, ver A.4.1.
3. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [6, §2, p.11].
4. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12].

Teorema 4.0.3 (Stone-Weierstrass)**.** *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : K \to \mathbb{R}^n$ contínua. $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, P : K \to \mathbb{R}^n$ polinomial tal que $||f - P||_\infty < \epsilon$.* [5]

Teorema 4.0.4 (Jordan-Brouwer)**.** *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma variedade suave fechada, conexa e sem bordo de dimensão m. Então M é orientável e M separa $\mathbb{R}^{m+1}$ em duas componentes abertas D_1 e D_2 cujos fechos são variedades fechadas de dimensão $m+1$ com bordo M. Além disso, se M for compacta, uma das componentes conexas é limitada (indicada por $in(M)$) e a outra é ilimitada (indicada por $ex(M)$).* [6]

Corolário 4.0.4.1. Seja M uma variedade compacta de dimensão m em $\mathbb{R}^{m+1}$. Então $\exists\, D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado tal que $\partial D = M$.

4.1 O Grau de Brouwer-Kronecker

Teorema e definição 4.1.1. *Sejam M, N variedades suaves orientadas sem bordo de dimenção m e seja $f : M \to N$ suave própria. Segue que, $\forall a \in R_f \subset N$, $\exists\, V$ vizinhança de a tal que $\forall b \in V$, $f^{-1}(b)$ é finito e $\#f^{-1}(b) = \#f^{-1}(a)$. Além disso, o inteiro*

$$d(f,b) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn(df_x) & se\ f^{-1}(b) \neq \emptyset, \\ 0 & se\ f^{-1}(b) = \emptyset \end{cases} \qquad (4.1.1)$$

depende apenas de a e é chamado de <u>grau de f em a</u>.

Demonstração. Primeiramente, por Sard-Brown, temos que R_f é denso em N. Em particular, $R_f \neq \emptyset$. Agora, $\forall a \in R_f$, $\{a\} \subset N$ é compacto, logo $f^{-1}(a) \subset M$ também o é, pois f é própria (conforme 2.2.11). Mas f é suave, portanto $f^{-1}(a)$ é discreto. Por 2.2.19 e 2.2.21.1, temos que $f^{-1}(a)$ é finito. Agora, $\forall x \in f^{-1}(a)$, $df_x : T_xM \to T_aN$ é uma aplicação linear sobrejetiva entre espaços de mesma dimensão, logo é um isomorfismo. Ou seja, f é difeomorfismo local. Portanto, $\exists\, U$ vizinhança de x e $\exists\, \tilde{V}$ vizinhança de a tais que $f|_{U_x} : U_x \to \tilde{V}$ é um difeomorfismo.
Ponha agora $f^{-1}(a) = \{x_1, ..., x_k\}$. $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $\exists\, \tilde{U}_{x_i}$ e V_0 vizinhanças de x_i e a, respectivamente, tais que $f|_{\tilde{U}_{x_i}} : \tilde{U}_{x_i} \to V_0$ é um difeomorfismo (uma vez que, tomando $\tilde{U}'_{x_i}$ e V_i vizinhanças de x_i e a, respectivamente, tais que $f|_{\tilde{U}'_{x_i}} : \tilde{U}'_{x_i} \to V_i$ são difeomorfismos, basta definir $V_0 = \bigcap_{i=1}^k V_i$ e pôr $\tilde{U}_{x_i} = \tilde{U}'_{x_i} \cap f^{-1}(V_0)$ para obter o resultado desejado). Defina $F = M - \bigcup_{i=1}^k \tilde{U}_{x_i}$. Temos que F é fechado. Mas f é própria e N satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, logo $f(F)$ é fechado de N (conforme 2.2.17.1) e $a \notin f(F)$.

5. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [13, 5.11.16].
6. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, III, 6.4, p. 129].

Como M é normal (conforme A.4.2.1 e 2.2.38) e localmente conexa, temos que $\exists V$ vizinhança conexa de a tal que $V \cap f(F) = \emptyset$ e $V \subset V_0$ (basta tomar $\tilde{V}$ vizinhança de a tal que $\tilde{V} \cap f(F) = \emptyset$, que existe, conforme 2.1.10, pela normalidade de M, e tomar V conexa tal que $a \in V \subset \tilde{V} \cap V_0$, que existe pela conexidade local de M, uma vez que $\tilde{V} \cap V_0$ é aberto). Segue que $f^{-1}(V) \cap F = \emptyset$, ou seja, $f^{-1}(V) \subset M - F = \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{U}_{x_i}$.

Defina então $U_{x_i} = \tilde{U}_{x_i} \cap f^{-1}(V)$. Temos que $f|_{U_{x_i}} : U_{x_i} \to V$ é difeomorfismo, logo U_{x_i} é conexo $\forall i \in \{1, ..., k\}$. Além disso, $\bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (\tilde{U}_{x_i} \cap f^{-1}(V)) = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{U}_{x_i}\right) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(V)$. Assim, $\forall b \in V$, $f^{-1}(b) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$. Mas, $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $f|_{U_{x_i}}$ é difeomorfismo, logo bijeção. Segue que $\#(f|_{U_{x_i}})^{-1}(b) = 1$. Como $f^{-1}(b) = \bigcup_{i=1}^{k} (f|_{U_{x_i}})^{-1}(b)$, temos que $\# f^{-1}(b) = k = \# f^{-1}(a)$. Ainda mais, $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $f|_{U_{x_i}}$ é difeomorfismo $\Rightarrow df_{x_i} : T_{x_i}M \to T_a N$ é isomorfismo, logo $\operatorname{sgn}(df_{x_i}) \in -1, 1$. Como a aplicação $y \mapsto \operatorname{sgn}(df_y)$ é contínua no conexo U_{x_i}, ela é constante. Assim, $\forall y \in U_{x_i}$, $\operatorname{sgn}(df_y) = \operatorname{sgn}(df_{x_i})$. Desta forma, $\forall b \in V$, sendo $f^{-1}(b) = \{y_1, ..., y_k\}$, onde, $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $y_i \in U_{x_i}$, temos que

$$\sum_{x \in f^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(df_x) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(df_{y_i}) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(df_{x_i}) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \operatorname{sgn}(df_x)$$

□

Teorema e definição 4.1.2. *Sejam M, N variedades suaves orientadas sem bordo de dimenção m. Seja ainda N conexa e $f : M \to N$ suave e própria. Segue que $d(f, a)$ não depende da escolha de $a \in R_f$. Neste caso, $d(f, a)$ é chamado de grau de f e é denotado por $deg(f)$.* [7]

Exemplo 4.1.3. Sejam M, N e $f : M \to N$ como acima. Então, se f for bijetiva, $\deg(f) = \pm 1$ (onde $\deg(f) = 1 \Leftrightarrow f$ preserva a orientação), e se f não for sobrejetiva, $\deg(f) = 0$.

Exemplo 4.1.4. Sejam $Id_{\mathbb{S}^n}, (-Id_{\mathbb{S}^n}) : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ e $f_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ com $f_k : x \mapsto x^k$. Temos que $\deg(Id_{\mathbb{S}^n}) = 1$, $\deg(-Id_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$ e $\deg(f_k) = k$.

Teorema e definição 4.1.5. *Sejam M, N variedades suaves orientadas sem bordo de dimensão m com N conexa e $f : M \to N$ própria. Então $\forall \tilde{f} : M \to N$ suave, própria e propriamente homotópica a f, $deg(\tilde{f})$ não depende da escolha de $\tilde{f}$. Assim, define-se o grau de Brouwer de f por $deg(f) = deg(\tilde{f})$.* [8] *Além disso, vale que:*

7. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, III, 1.4, p. 99].
8. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, III, 3.1, p. 111].

1. *$\forall f' : M \to N$ própria e propriamente homotópica a f, $deg(f) = deg(f')$.* [9]
2. *$\forall P$ variedade conexa suave orientada sem bordo de dimensão m e $g : N \to P$ própria, $deg(g \circ f) = deg(f) \cdot deg(g)$.* [10]
3. *$\forall X$ variedade suave orientada com bordo de dimensão $m+1$ e $h : X \to N$ própria, $deg(h|_{\partial X}) = 0$.* [11]

Exemplo 4.1.6. Seja $Q \in \mathscr{M}(2 \times 2)$ uma rotação. Então

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$. Defina então $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $R : v \mapsto Qv$ e $H : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ por

$$H_t(x) = \begin{bmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{bmatrix} x$$

Segue que H é contínua. Além disso, $\forall (x_n, t_n)$ sequência em $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$, temos que $||(x_n, t_n)|| \to \infty \Rightarrow ||x_n|| \to \infty \Rightarrow ||H_{t_n}(x_n)|| = ||x_n|| \to \infty$. Assim, por 2.3.11, concluimos que H é própria. Ainda mais, temos que $H_0 = Id_{\mathbb{R}^2}$ e $H_1 = R$, ou seja, H é uma homotopia própria entre R e $Id_{\mathbb{R}^2}$. Segue, por 4.1.5, que $\deg(R) = \deg\left(Id_{\mathbb{R}^2}\right) = 1$.

Teorema 4.1.7 (Hopf)**.**

1. *Seja M variedade suaves compacta orientada sem bordo de dimensão m. $\forall d \in \mathbb{Z}$, $\exists\, h_d : M \to \mathbb{S}^m$ tal que $deg(h_d) = d$.* [12]
2. *Seja M conforme acima e $f, g : M \to \mathbb{S}^m$ contínuas. Então $deg(f) = deg(g) \Rightarrow f \sim g$.* [13]

Teorema 4.1.8 (Hopf)**.** *Seja X variedade suave orientada de dimensão $m+1$ com bordo ∂X conexo e seja $f : \partial X \to \mathbb{S}^m$ própria e suave. Então $deg(f) = 0 \Rightarrow \exists \tilde{f} : X \to \mathbb{S}^m$ própria tal que $\tilde{f}|_{\partial X} = f$.* [14]

Aplicação 4.1.9. Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ contínua. Segue que:

1. $\deg(f) \neq (-1)^{n+1} \Rightarrow f$ tem um ponto fixo;
2. $\deg(f) \neq 1 \Rightarrow f$ leva um ponto no seu antípoda.

---

9. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, III, 3.4, p. 112].
10. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, III, 3.2, p. 111].
11. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, III, 3.3, p. 111-2].
12. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, V, 2.2, p. 193].
13. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, V, 2.1, p. 191-2].
14. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, V, 2.4, p. 194-5].

3. Se n é par, $\deg(f) = 1 \Rightarrow f$ tem um ponto fixo.

Demonstração.

1. f não tem ponto fixo $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{S}^n$, $f(x) \neq x$. Assim, por 2.4.2, $f \sim -Id_{\mathbb{S}^n}$. Segue que $\deg(f) = \deg(-Id_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$ (conforme 4.1.4).
2. Análogo ao item anterior.
3. Seja $n = 2k$. $\deg(f) = 1 \neq -1 = (-1)^{2k+1} \Rightarrow f$ tem ponto fixo.

□

Aplicação 4.1.10. Sejam $f, g : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ contínuas. Segue que ao menos uma das funções f, g ou $f \circ g$ tem ponto fixo.

Demonstração. Suponha que f e g não têm ponto fixo (do contrário, o resultado segue trivialmente). Então $\deg(f) = \deg(g) = (-1)^{2n+1} = -1$ (conforme 4.1.9). Assim, por 4.1.5, $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g) = (-1)^2 = 1$. Então $f \circ g$ tem ponto fixo. □

4.2
O Grau Euclidiano

Nesta seção, a menos que seja especificado contrariamente, $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ será considerado um aberto limitado. Segue, por 2.2.55, que $\overline{D}$ é compacto.

Teorema e definição 4.2.1. *Sejam $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave e $a \in R_{f|_D} - f(\partial D)$. Então $f^{-1}(a) \subset D$ é discreto em D. Assim, $f^{-1}(a)$ é finito ou vazio. O <u>grau de f em a</u> é então definido por*

$$d(f, D, a) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(a)} sgn(df_x) & se\ f^{-1}(a) \neq \emptyset, \\ 0 & se\ f^{-1}(a) = \emptyset \end{cases} \tag{4.2.1}$$ [15]

Exemplo 4.2.2. Seja $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ difeomorfismo suave e tome $a \in R_{f|_D} - f(\partial D)$. Temos que $\# f^{-1}(a) = 1$, logo $d(f, D, a) = \pm 1$.

Teorema e definição 4.2.3. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado, $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave e $a \notin f(\partial D)$. Seja ainda Ω a componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - f(\partial D)$ que contém a. Segue que $\forall b \in \Omega \cap R_{f|_D}$, $d(f, D, b)$ é constante. Tomando então um tal b, definimos <u>o grau de f em a</u> por $d(f, D, a) = d(f, D, b)$.* [16]

Lema 4.2.4. *Seja $H : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave e $a \notin H\big(\partial D \times [0,1]\big)$. Segue que $d(H_0, D, a) = d(H_1, D, a)$.* [17]

16. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, IV, 1.5, p. 143].
17. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, IV, 1.6, p. 144].

Teorema e definição 4.2.5. *Seja $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua e $a \notin f(\partial D)$. Então, $\forall\, g : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave tal que $|f - g|_\infty < dist\big(a, f(\partial D)\big)$, $d(g, D, a)$ não depende da escolha de g. Defina, assim, o grau de f em a por $d(f, D, a) = d(g, D, a)$ para algum tal g.*

Demonstração. Seja $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua e $a \notin f(\partial D)$. Como $\overline{D}$ é compacto (conforme 2.2.55, pois é limitado e fechado), por Stone-Weierstrass, $\exists\, P : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}$ polinômio tal que $||P - f||_\infty < \frac{1}{2}\text{dist}\big(a, f(\partial D)\big)$. Ponha $r = \frac{1}{2}\text{dist}\big(a, f(\partial D)\big)$. Por Sard-Brown, $R_{P|_D} \cap B(a, r) \neq \emptyset$. Tome $b \in R_{P|_D} \cap B(a, r)$, isto é, $b \in R_{P|_D}$ tal que $||a - b|| < r = \frac{1}{2}\text{dist}\big(a, f(\partial D)\big)$, e defina $g = P - b + a$. Então

$$||g - f||_\infty = ||P - f + b - a||_\infty \leq ||P - f||_\infty + ||b - a|| < 2 \cdot r = \text{dist}\big(a, f(\partial D)\big)$$

Assim, temos que $a \notin g(\partial D)$, pois, $\forall x \in \partial D$,

$$\begin{aligned} ||g(x) - a|| &\geq ||f(x) - a|| - ||f(x) - g(x)|| \geq \inf_{\partial D}||f - a|| - \sup_{\partial D}||f - g|| \\ &\geq \text{dist}\big(a, f(\overline{D})\big) - \sup_{\overline{D}}||f - g|| = \text{dist}\big(a, f(\overline{D})\big) - ||f - g||_\infty > 0 \end{aligned}$$

Além disso, $\forall (x, t) \in \partial D \times [0, 1]$, $tf(x) + (1 - t)g(x) \neq a$ (do contrário, $||f(x) - a|| < ||f(x) - g(x)||$ para algum $x \in \partial D$, um absurdo). Então, se f for suave, por 4.2.4, $d(g, D, a) = d(f, D, a)$, isto é, esta definição de grau é coerente com 4.2.1.
Tome, agora $\tilde{g} : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave tal que $||f - \tilde{g}||_\infty < \text{dist}\big(a, f(\partial D)\big)$ e defina $H : \overline{D} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ por $H_t(x) = tg(x) + (1 - t)\tilde{g}(x)$. Suponha que $\exists\, (x, t) \in \partial D \times [0, 1]$ tal que $H_t(x) = a$. Então

$$\begin{aligned} ||f(x) - a|| &= \Big|\Big|\Big(tf(x) + (1 - t)f(x)\Big) - \Big(tg(x) + (1 - t)\tilde{g}(x)\Big)\Big|\Big| \\ &\leq t||f(x) - g(x)|| + (1 - t)||f(x) - \tilde{g}(x)|| \\ &\leq t||f - g||_\infty + (1 - t)||f - \tilde{g}||_\infty < \text{dist}\big(a, f(\overline{D})\big) \end{aligned}$$

um absurdo. Segue que $H_t(x) \neq a$ para todo $(x, t) \in \partial D \times [0, 1]$. Assim, por 4.2.4, $d(g, D, a) = d(\tilde{g}, D, a)$, isto é, $d(g, D, a)$ não depende da escolha do $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave tal que $|f - g|_\infty < \text{dist}\big(a, f(\partial D)\big)$. □

Proposição 4.2.6. Seja $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua. Então $a \mapsto d(f, D, a)$ é uma função constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - f(\partial D)$. [18]

Proposição 4.2.7. Sejam $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua, $a \notin f(\partial D)$ e $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ translação. Segue que $d\big(T \circ f, D, T(a)\big) = d(f, D, a)$.

18. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, IV, 2.3, p. 146-7].

Teorema 4.2.8. *A função grau*

$$d : \{(f, D, a) \mid D \subset \mathbb{R}^{m+1} \text{ aberto limitado}, f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1} \text{ contínua}, a \notin f(\partial D)\} \to \mathbb{Z}$$

é caracterizada pelas seguintes propriedades:

1. *Seja* $H : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ *e* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ *contínuas tais que* $\gamma(t) \notin H_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$. *Segue que* $d\Big(H_t, D, \gamma(t)\Big)$ *não depende de* t*;*
2. *Seja* $i : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ *a inclusão. Então*
$$d(i, D, a) = \begin{cases} 1 & se\ a \in D, \\ 0 & se\ a \notin D \end{cases}$$
3. *Seja* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ *contínua e* $a \notin f(\partial D)$. *Então* $d(f, D, a) \neq 0 \Rightarrow f(x) = a$ *tem solução em* D*;*
4. *Sejam* $D_1, D_2 \subset D$ *abertos disjuntos,* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ *contínua e* $a \notin f\Big(\overline{D} - (D_1 \cup D_2)\Big)$. *Então* $d(f, D, a) = d(f, D_1, a) + d(f, D_2, a)$.

Demonstração.

1. Seja $H : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínuas tais que $\gamma(t) \notin H_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$. Defina $f : \partial D \times [0,1] \to \mathbb{R}$ por $f(x,t) = ||\gamma(t) - H_t(x)||$. Como $\partial D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é um fechado e $\gamma(t) \notin H_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$, temos que $f(x,t) > 0$, $\forall (x,t) \in \partial D \times [0,1]$. Além disso, como $\partial D \subset \overline{D}$ é um fechado de um compacto (conforme 2.2.55, pois $\overline{D}$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^{m+1}$), temos, por 2.2.6, que ∂D é também compacto. Assim, por Tychonoff, $\partial D \times [0,1]$ é compacto. Logo, pelo Teorema dos Extremos, f atinge um mínimo $\epsilon > 0$.
   Agora, como H é uniformemente contínua (pois é uma aplicação contínua definida em um compacto), $\exists \eta > 0$ tal que $|t - t'| < \eta$, $||x - x'|| < \eta$ $\Rightarrow ||H_t(x) - H_{t'}(x')|| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall t, t' \in [0,1]$, $\forall x, x' \in \overline{D}$. Tome, dessa forma, $t_0 \in [0,1]$. Por Stone-Weierstrass $\exists\, g : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave tal que $||g(x) - H_{t_0}(x)|| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall x \in \overline{D}$. Então
$$||g(x) - H_t(x)|| \leq ||g(x) - H_{t_0}(x)|| + ||H_{t_0}(x) - H_t(x)|| < \epsilon$$
   para todo $x \in \overline{D}$ e $|t - t_0| < \eta$. Mas
$$\begin{aligned} \epsilon &= \inf_{(x,t) \in \partial D \times [0,1]} \text{dist}\Big(\gamma(t), H_t(x)\Big) \leq \inf_{x \in \partial D} \text{dist}\Big(\gamma(t), H_t(x)\Big) \\ &= \text{dist}\Big(\gamma(t), H_t(\partial D)\Big) \end{aligned}$$

$\forall t \in [0,1]$. Assim, $||g(x) - H_t(x)|| < \text{dist}\Big(\gamma(t), H_t(\partial D)\Big)$, $\forall x \in \overline{D}$, $\forall t \in [0,1]$ com $|t - t_0| < \eta$. Portanto, $\forall t \in [0,1]$ com $|t - t_0| < \eta$,

$$||g - H_t||_\infty = \sup_{x\in\overline{D}}||g(x) - H_t(x)|| < \text{dist}\Big(\gamma(t), H_t(\partial D)\Big)$$

Logo, por 4.2.5, podemos calcular $d\Big(H_t, D, \gamma(t)\Big) = d\Big(g, D, \gamma(t)\Big)$, $\forall t \in [0,1]$ com $|t - t_0| < \eta$. Tomando $x \in \partial D$ e $t = t_0$, obtemos que $0 \leq ||g(x) - H_{t_0}(x)|| < \text{dist}\Big(\gamma(t_0), H_{t_0}(\partial D)\Big)$. Assim, $\text{dist}\Big(\gamma(t_0), H_{t_0}(\partial D)\Big) > 0$. Agora, tomando $\eta' > 0$ tal que $|t - t_0| < \eta' \Rightarrow ||\gamma(t) - \gamma(t_0)|| < \text{dist}\Big(\gamma(t_0), H_{t_0}(\partial D)\Big)$ (sempre existe um tal η', pela continuidade da γ) e pondo $\eta_0 = \min\{\eta, \eta'\}$, temos, $\forall x \in \partial D$, $\forall t \in [0,1]$ com $|t - t_0| < \eta_0$ e $\forall s \in [0,1]$, que

$$\begin{aligned} ||g(x) - (1-s)\gamma(t) + s\gamma(t_0)|| &= ||g(x) - \gamma(t)|| + s||\gamma(t) - \gamma(t_0)|| \\ &> (1+s)||\gamma(t) - \gamma(t_0)|| \geq 0 \end{aligned}$$

isto é, $(1-s)\Big(g(x) - \gamma(t)\Big) + s\Big(g(x) - \gamma(t_0)\Big) \neq 0$. Assim, como $\Big(g - \gamma(t)\Big)$, $\Big(g - \gamma(t_0)\Big)$ são suaves e suavemente homotópicas (basta considerar a homotopia $G(x,s) = g(x) - \gamma\Big((1-s)t + st_0\Big)$ em $\partial D \times [0,1]$), por 4.2.4, $d\Big(g - \gamma(t), D, 0\Big) = d\Big(g - \gamma(t_0), D, 0\Big)$, $\forall t \in [0,1]$ com $|t - t_0| < \eta_0$. Nessas condições, por 4.2.7, segue que

$$\begin{aligned} d\Big(H_t, D, \gamma(t)\Big) = d\Big(g, D, \gamma(t)\Big) = d\Big(g - \gamma(t), D, 0\Big) = d\Big(g - \gamma(t_0), D, 0\Big) \\ = d\Big(g, D, \gamma(t_0)\Big) = d\Big(H_{t_0}, D, \gamma(t_0)\Big) \end{aligned}$$

$\forall t \in [0,1]$ com $|t - t_0| < \eta_0$. Defina, então, $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dado por $h(t) = d\Big(H_t, D, \gamma(t)\Big)$. Temos que $\forall t_0 \in [0,1]$, $\exists\, \eta_0 > 0$ tal que $|t - t_0| < \eta_0 \Rightarrow h(t) = h(t_0)$, isto é, h é uma função localmente constante em um intervalo. Segue que h é constante em $[0,1]$, isto é, $d\Big(H_t, D, \gamma(t)\Big)$ não depende de t.

2. Seja $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado e $i : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ a inclusão. Temos, então, que i é suave, $i^{-1}(a) = \{a\}$ se $a \in \overline{D}$ e $i^{-1}(a) = \emptyset$ se $a \notin \overline{D}$. Como $d(i)_x = id_{\mathbb{R}^{m+1}}$ para todo $x \in D$, segue que $\text{sgn}\Big(d(i)_x\Big) = 1$. Assim, para $a \in D$, temos que $i^{-1}(a) = \{a\}$ e que, por 4.2.1, $d(i, D, a) = \sum_{x\in i^{-1}(a)} \text{sgn}(d(i)_x) = 1$, pois $x \in i^{-1}(a) \Leftrightarrow x = a$. Agora, se $a \notin \overline{D}$, $i^{-1}(a) = \emptyset$. Segue que $d(i, D, a) = 0$.

3. Seja $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua e $a \notin f(\partial D)$ tal que $f(x) = a$ não tem solução. Então $f^{-1}(a) = \emptyset \Leftrightarrow a \notin f(\overline{D})$. Tome, assim, $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave tal que $||f - g||_\infty < \text{dist}\Big(a, f(\overline{D})\Big)$ (sempre existe uma tal g, por

Stone-Weierstrass, uma vez que $\overline{D}$ é compacto). Então

$$||g(x)-a|| \geq ||f(x)-a|| - ||f(x)-g(x)|| \geq \inf_{\overline{D}}||f-a|| - \sup_{\overline{D}}||f-g|| \\ = \operatorname{dist}\Big(a, f(\overline{D})\Big) - ||f-g||_\infty > 0$$

$\forall x \in \overline{D}$, ou seja, $a \notin g(\overline{D})$.
Seja, agora, $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ a componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - g(\partial D)$ tal que $a \in \Omega$. Como $\overline{D}$ é compacto, por 2.2.6, temos que $g(\overline{D})$ é compacto, portanto fechado. Então $\mathbb{R}^{m+1} - g(\overline{D})$ é aberto, logo $\exists\, r > 0$ tal que $B(a,r) \subset \mathbb{R}^{m+1} - g(\overline{D})$. Mas $B(a,r)$ é conexo, logo $B(a,r) \subset \Omega$. Agora, por Sard-Brown, $R_{g|_D}$ é denso em $\mathbb{R}^{m+1}$, logo $\exists\, b \in B(a,r) \cap R_{g|_D}$. Segue que $b \in R_{g|_D}$, $b \notin g(\overline{D})$ e $b \in \Omega$. Então, por 4.2.1, $d(g,D,b) = 0$, pois $b \notin g(\overline{D})$.
Finalmente, como $b \in R_{g|_D} - g(\overline{D}) \subset R_{g|_D} - g(\partial D)$ e b está na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - g(\partial D)$ que a, pela definição de grau em 4.2.3, $d(g,D,a) = d(g,D,b)$. Equivalentemente, como $||f-g||_\infty < \operatorname{dist}\Big(a, f(\overline{D})\Big) \leq \operatorname{dist}\Big(a, f(\partial D)\Big)$ (pois $\partial D \subset \overline{D}$), pela definição de grau em 4.2.5, $d(f,D,a) = d(g,D,a)$. Então

$$d(f,D,a) = d(g,D,a) = d(g,D,b) = 0$$

4. Sejam $D_1, D_2 \subset D$ abertos disjuntos, $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua e $a \notin f\Big(\overline{D} - (D_1 \cup D_2)\Big)$. Defina $X = \overline{D} - (D_1 \cup D_2) \subset \overline{D}$ fechado de $\mathbb{R}^{m+1}$, logo compacto (conforme 2.2.6, pois $\overline{D}$ é compacto). Assim, por Stone-Weierstrass, tome $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave tal que $||g-f|| < \operatorname{dist}\Big(a, f(X)\Big)$. Então, conforme na demonstração de 4.2.8-3, $a \notin g(X)$ e $\exists\, r > 0$ tal que $B(a,r) \subset \mathbb{R}^{m+1} - g(X)$. Seja, dessa forma, Ω a componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - g(\partial D)$ que contém a. Como $B(a,r)$ é conexo, segue que $B(a,r) \subset \Omega$. Tome então $b \in R_{g|_D} \cap B(a,r) \subset \Omega$ (sempre existe um tal b, por Sard-Brown). Assim, por 4.2.3 e 4.2.5, temos que $d(f,D,a) = d(g,D,a) = d(g,D,b)$.
Agora, $b \notin g(X) \Leftrightarrow g^{-1}(b) = \emptyset$ ou $g^{-1}(b) \subset D_1 \cup D_2$. Mas D_1 é um aberto limitado, $g|_{\overline{D_1}}$ é suave em $\mathbb{R}^{m+1}$ e $b \in R_{g|_D} - g(X) \subset R_{g|_{D_1}} - g(\partial D_1)$ (pois $\partial D_1 \subset X$, conforme A.3.1). Então faz sentido falar em $d(g, D_1, b)$ e, equivalentemente, de $d(g, D_2, b)$. Temos, assim, as seguintes situações:
   (a) Se $g^{-1}(b) = \emptyset$, pela definição de grau em 4.2.1, $d(g,D,b) = 0$. Mas $(g|_{\overline{D_1}})^{-1}(b) = g^{-1}(b) \cap D_1 = \emptyset$, logo $d(g,D_1,b) = d(g|_{\overline{D_1}}, D_1, b) = 0$. Equivalentemente, $d(g,D_2,b) = 0$. Temos, portanto, que $d(g,D,b) = d(g,D_1,b) + d(g,D_2,b)$.

(b) Se $g^{-1}(b) \subset D_1 \cup D_2$, então $g^{-1}(b) = \Big(g^{-1}(b) \cap D_1\Big) \cup \Big(g^{-1}(b) \cap D_2\Big)$. Além disso, para $x \in D_1$, temos que $d(g|_{\overline{D_1}})_x = dg_x$ (o resultado é análogo para $x \in D_2$). Assim, pela definição de grau em 4.2.1,

$$\begin{aligned} d(g, D, b) &= \sum_{x \in f^{-1}(b)} \operatorname{sgn}(dg_x) = \sum_{x \in f^{-1}(b) \cap D_1} \operatorname{sgn}(dg_x) + \sum_{x \in f^{-1}(b) \cap D_2} \operatorname{sgn}(dg_x) \\ &= d(g, D_1, b) + d(g, D_2, b) \end{aligned}$$

Agora, temos que

$$\Big|\Big| f|_{\overline{D_1}} - g|_{\overline{D_1}} \Big|\Big|_\infty \leq ||f - g||_\infty < \operatorname{dist}\Big(a, f(X)\Big) \leq \operatorname{dist}\Big(a, f(\partial D_1)\Big)$$

pois $D_1 \subset X$. Além disso, sendo Ω_1 a componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - g(\partial D_1)$ que contém a, temos que $B(a,r) \subset \mathbb{R}^{m+1} - g(X) \subset \mathbb{R}^{m+1} - g(\partial D_1)$, pois $\partial D_1 \subset X$. Como $B(a,r)$ é conexo, segue que $B(a,r) \subset \Omega_1$. Então $b \in \Omega_1$ e $b \in R_{g|_D} \subset R_{g|_{D_1}}$. Assim, por 4.2.3 e 4.2.5, temos que $d(f, D_1, a) = d(g, D_1, a) = d(g, D_1, b)$. Equivalentemente, $d(f, D_2, a) = d(g, D_2, b)$. Então $d(f, D, a) = d(f, D_1, a) + d(f, D_2, a)$.

□

Proposição 4.2.9. Sejam $f, g : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínuas tais que $f|_{\partial D} = g|_{\partial D}$ e tome $a \notin f(\partial D)$. Então $d(f, D, a) = d(g, D, a)$.

Demonstração. Defina $H : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $H_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Temos, assim, que H é contínua, $H_0 = f$ e $H_1 = g$. Logo, $\forall (x,t) \in \partial D \times [0,1]$, $H_t(x) = (1-t)f(x) + tf(x) = f(x) \neq a$, isto é, $a \notin H_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$. Então, por 4.2.8, temos que $d(f, D, a) = d(g, D, a)$. □

Lema 4.2.10. *Seja $f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ contínua sem zeros. Então $\exists x \in \mathbb{S}^n$ e $\lambda > 0$ tais que $f(x) = \lambda x$.*

Demonstração. Suponha que, $\forall x \in \mathbb{S}^n$ e $\lambda > 0$, $f(x) \neq \lambda x$. Teríamos que $H_t(x) = (1-t) \cdot f(x) + t \cdot (-x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$ e $t \in [0,1]$, onde $H : \mathbb{D}^{n+1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ seria uma homotopia entre f e $-Id_{\mathbb{D}^{n+1}}$. Então $0 \notin H_t(\mathbb{S}^n)$, ou seja, $d\Big(f, B(0,1), 0\Big) = d\Big(-Id_{\mathbb{D}^{n+1}}, B(0,1), 0\Big) = (-1)^{n+1} \neq 0$, um absurdo, pois $0 \notin f(\mathbb{S}^n) = f(\partial \mathbb{D}^{n+1})$ mas $f(x) = 0$ não tem solução em $B(0,1)$ (como deveria ter, conforme 4.2.8). □

Aplicação 4.2.11. Seja $f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ contínua. Então f tem um ponto fixo ou $\exists x \in \mathbb{S}^n$ e $\lambda > 1$ tais que $f(x) = \lambda x$.

Demonstração. Suponha que f não tem pontos fixos e ponha $g : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ contínua definida por $g(x) = f(x) - x$. Como g não tem zeros, por 4.2.10,

$\exists x \in \mathbb{S}^n$ e $\lambda > 0$ tais que $g(x) = \lambda x \Leftrightarrow f(x) = (\lambda+1)x = \lambda' x$. Então $\exists x \in \mathbb{S}^n$ e $\lambda' > 1$ tais que $f(x) = \lambda' x$ □

Teorema 4.2.12 (Extensão do Teorema Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Considere $f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ contínua tal que $f(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{D}^{n+1}$. Então f tem ponto fixo.*

Demonstração. Suponha que f não tem ponto fixo. Por 4.2.11, existiriam $x_0 \in \mathbb{S}^n$ e $\lambda > 1$ tais que $f(x_0) = \lambda x_0$. Teríamos então que $|f(x_0)| = \lambda |x_0| = \lambda > 1$, absurdo, pois $f(x_0) \in \mathbb{D}^{n+1}$. Segue que f tem ponto fixo. □

Observação. Note que é possível que $f(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{D}^{n+1}$ para $f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ contínua sem que $f(\mathbb{D}^{n+1}) \subset \mathbb{D}^{n+1}$. Tomando $p \notin \mathbb{D}^{n+1}$ e pondo $f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ com $x \mapsto \big(1 - |x|\big)p + x$, temos que f é contínua e, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, $|x| = 1 \Rightarrow f(x) = x$, ou seja, $f(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$, enquanto $f(0) = p \notin \mathbb{D}^{n+1}$.

4.3 Índice

Teorema e definição 4.3.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado, $f : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua e $a \notin f(\partial D)$. Então $d(\tilde{f}, D, a)$ não depende da escolha de $\tilde{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ extensão contínua de f. Define-se então o índice ou winding number de f em torno de a por $\omega(f,a) = d(\tilde{f}, D, a)$.*
Além disso, o winding number possui as seguintes propriedades:

1. *$a \mapsto \omega(f,a)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - f(\partial D)$;*
2. *$\forall H : \partial D \times [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $\forall \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínuas tais que $\gamma(t) \notin H_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$, $\omega\big(H_t, \gamma(t)\big)$ não depende de t;*
3. *$\omega(f,a) \neq 0 \Rightarrow \forall \tilde{f}$ extensão contínua de f a $\overline{D}$, $\exists x \in D$ tal que $\tilde{f}(x) = a$.*

Demonstração. Seja $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado, $f : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua. Pelo Teorema de Extensão de Tietze, $\exists\, \tilde{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ extensão contínua de f (basta aplicar Teorema de Extensão de Tietze a algum aberto $U \supset \overline{D} \supset \partial D$ e restringir a extensão à $\overline{D}$). Sejam, então, $f_1, f_2 : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ extensões contínua de f. Temos que $f_1|_{\partial D} = f = f_2|_{\partial D}$. Assim, por 4.2.9, $d(f_1, D, a) = d(f_2, D, a)$, ou seja, $d(\tilde{f}, D, a)$ não depende da extensão contínua $\tilde{f}$ de f.

1. Seja $\tilde{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ uma extensão contínua de f e a, b dois pontos na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - f(\partial D)$. Temos, então, que $\tilde{f}(\partial D) = f(\partial D)$, ou seja, a, b estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - \tilde{f}(\partial D)$. Assim, por 4.2.6, segue que $d(\tilde{f}, D, a) = d(\tilde{f}, D, b)$. Dessa forma,
$$\omega(f,a) = d(\tilde{f}, D, a) = d(\tilde{f}, D, b) = \omega(f,b)$$

2. Seja $H : \partial D \times [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínuas tais que $\gamma(t) \notin H_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$. Ponha $\overline{H} : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ extensão contínua de H (sempre existe uma, por Teorema de Extensão de Tietze, como foi visto no início da demonstração). Então

$$\overline{H}_t(\partial D) = \overline{H}\Big(\partial D \times \{t\}\Big) = H\Big(\partial D \times \{t\}\Big) = H_t(\partial D)$$

isto é, $\overline{H}_t|_{\partial D} = H_t$, $\forall t \in [0,1]$. Logo, temos que $\gamma(t) \notin \overline{H}_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$. Então, por 4.2.8, $d\Big(\overline{H}_t, D, \gamma(t)\Big)$ não depende de t. Segue que $\omega\Big(H_t, \gamma(t)\Big) = d\Big(\overline{H}_t, D, \gamma(t)\Big)$ não depende de t.

3. Suponha que $\omega(f,a) \neq 0$. Assim, $\forall \tilde{f}$ extensão contínua de f a $\overline{D}$, temos que $d(\tilde{f}, D, a) = \omega(f,a) \neq 0$. Assim, por 4.2.8, $\exists\, x \in D$ tal que $\tilde{f}(x) = a$.

□

Corolário 4.3.1.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado, $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $f, g : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1} - \{a\}$ contínuas e homotópicas em $\mathbb{R}^{n+1} - \{a\}$. Então $\omega(f,a) = \omega(g,a)$.*

Demonstração. Ponha $E = \mathbb{R}^{n+1} - \{a\}$, defina $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ por $\gamma(t) = a$ e $H : f \sim_E g$ tal que $a \notin H\Big(\partial D \times [0,1]\Big)$. Assim, $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) \notin H(\partial D \times [0,1]) \supset H_t(\partial D)$. Segue, por 4.3.1, que $\omega\Big(H_t, \gamma(t)\Big)$ não depende de t. Então $\omega\Big(H_0, \gamma(0)\Big) = \omega\Big(H_1, \gamma(1)\Big)$. Mas $H_0 = f$, $H_1 = g$ e $\gamma(0) = \gamma(1) = a$. Obtemos, dessa forma, que $\omega(f,a) = \omega(g,a)$. □

Proposição 4.3.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ variedade suave compacta sem bordo de dimensão n e $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ contínua com $0 \notin f(M)$. Segue que $\omega\Big(\frac{f}{||f||}, 0\Big) = \omega(f, 0)$.

Demonstração. Por 4.0.4.1, $\exists\, D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto limitado tal que $\partial D = M$. Como $0 \notin f(\partial D)$, temos que $\frac{f}{||f||} : \partial D \to \mathbb{R}^{n+1}$ é contínua. Além disso, $\omega(f,0)$ e $\omega\Big(\frac{f}{||f||}, 0\Big)$ estão definidos. Considere, então, $H : \partial D \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $H_t(x) = (1-t)f(x) + t\frac{f(x)}{||f(x)||}$. Como $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial D$, temos que

$$H_t(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - t + t\frac{1}{||f(x)||} = 0 \Leftrightarrow ||f(x)|| = -\frac{t}{1-t} < 0$$

um absurdo para todo $t \in (0,1)$. Além disso, $H_0(x) = f(x) \neq 0$ e $H_1(x) = \frac{f(x)}{||f(x)||} \neq 0$, $\forall x \in \partial D$. Então, $\forall t \in [0,1]$, $0 \notin H_t\Big(\partial D\Big)$. Segue, por 4.3.1, que $\omega\Big(\frac{f}{|f|}, 0\Big) = \omega(f,0)$. □

Teorema 4.3.3. *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ variedade suave compacta e conexa sem bordo de dimensão n e $f : M \to \mathbb{S}^n$ contínua. Segue que $deg(f) = \omega(f,0)$.*[19]

19. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, IV, 4.6, p. 158-9].

Corolário 4.3.3.1. Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ variedade suave compacta e conexa sem bordo de dimensão n e $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ contínua com $0 \notin f(M)$. Segue que $\omega(f, 0) = \deg\left(\frac{f}{||f||}\right)$.

Demonstração. Como $0 \notin f(M)$, temos que $\frac{f}{||f||} : M \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ está definida e é contínua. Por 4.3.2, temos que $\omega\left(\frac{f}{||f||}, 0\right) = \omega(f, 0)$. Mas, por 4.3.3, $\deg\left(\frac{f}{||f||}\right) = \omega\left(\frac{f}{||f||}, 0\right)$. Então $\omega(f, 0) = \deg\left(\frac{f}{||f||}\right)$. □

Teorema 4.3.4 (Hopf). *Seja $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um compacto que desconecta $\mathbb{R}^{n+1}$ em duas componentes D_1 e D_0 (sendo D_1 limitada e D_0 ilimitada) cujos bordos topológicos são X. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}^{n+1}_*$ duas aplicações contínuas tais que $\omega(f, 0) = \omega(g, 0)$. Então $f \sim_{\mathbb{R}^{n+1}_*} g$.* [20]

Teorema 4.3.5. *Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto limitado e $f : \partial D \to \mathbb{R}^{n+1}_*$ contínua. Segue que f tem extensão contínua $\tilde{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^{n+1}_*$ se, e somente se, $\omega(f, 0) = 0$.* [21]

Lema 4.3.6. *Seja $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado e simétrico tal que $0 \notin \overline{D}$ e seja $\phi : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ suave ímpar com $0 \notin \phi(\partial D)$. Então $\omega(\phi|_{\partial D}, 0)$ é par.*

Demonstração. Seja $M = \mathscr{M}(n \times n)$, ponha $L > 0$ tal que $D \subset \mathbb{D}_L$ (conforme 2.3.8) e defina $F : D \times M \to \mathbb{R}^n$ por $F : (x, A) \mapsto \phi(x) + Ax$. Como ϕ é contínua e $\partial D \subset \overline{D}$ é um compacto (pois é um fechado do compacto $\overline{D}$, conforme 2.2.55 e 2.2.6), temos, pelo Teorema dos Extremos, que $\exists\, x_0 \in \partial D$ tal que $F(x_0) = \min_{\partial D} F$. Mas $0 \notin F(\partial D)$, logo $F(x_0) \neq 0$. Defina $\delta = ||F(x_0)|| > 0$ e ponha $\epsilon = \frac{\delta}{L} > 0$. Por A.4.9.1, $\exists\, A \in M$ com $||A|| < \epsilon$ tal que 0 é valor regular de F_A. Agora, por 2.3.6, temos que, $\forall x \in \partial D$, $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| < \epsilon L = \delta$. Então, $\forall x \in \partial D$, $||F_A(x)|| \geq ||\phi(x)|| - ||Ax|| > 0$, isto é, $0 \notin F_A(\partial D)$.
Assim, $H : \overline{D} \times [0, 1]$ dado por $H_t(x) = \phi(x) + tAx$ é tal que, $\forall (x, t) \in \partial D \times [0, 1]$,

$$||H_t(x)|| = ||\phi(x) + tAx|| \geq ||\phi(x)|| - t||Ax|| \geq ||\phi(x)|| - ||Ax|| > 0$$

Segue que $0 \notin H_t(\partial D)$, $\forall t \in [0, 1]$. Então, por 4.2.8, temos que $d(\phi, D, 0) = d(F_A, D, 0)$, pois $H_0 = \phi$ e $H_1 = F_A$.
Agora, como ϕ é simétrico, $\forall x \in \overline{D}$, $F_A(-x) = \phi(-x) + A(-x) = -\phi(x) - Ax = -F_A(x)$, isto é, F_A é simétrico. Assim, $F_A(x) = 0$ se, e somente se, $F_A(-x) = 0$, isto é, $F_A^{-1}(0)$ é simétrico. Como $0 \notin \overline{D} \supset F_A^{-1}(0)$, temos que $\forall x \in F_A^{-1}(0)$, $-x \neq x$. Então $\#F_A^{-1}(0)$ é par. Finalmente, por 4.2.1, como $0 \in R_{F_A}$, temos que $d(F_A, D, 0) = \sum_{x \in F_A^{-1}(0)} \operatorname{sgn}\Big(d(F_A)_x\Big)$. Mas cada $\operatorname{sgn}\Big(d(F_A)_x\Big) = \pm 1$, um

20. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, V, 3.1, p. 196-7].
21. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12, V, 3.3, p. 199].

número ímpar. Segue que $d(F_A, D, 0)$ é par, pois é a soma de um número par de ímpares. Assim, por 4.3.1, $\omega(\phi|_{\partial D}, 0) = d(\phi, D, 0)$ é par. $\square$

Lema 4.3.7. *Seja $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado e simétrico tal que $0 \notin \overline{D}$ e seja $f : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua e ímpar. Então $\omega(f, 0)$ é par.*

Demonstração. $\partial D \subset \overline{D}$ é fechado de um compacto, portanto é compacto. Então $\exists\, g : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ suave tal que $g \sim f$ em $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ e tal que $g(x) \neq tg(-x)$, $\forall x \in \partial D$, $\forall t \in [0, 1]$.[22] Assim, por 4.3.1.1, $\omega(f, 0) = \omega(g, 0)$. Agora, por Teorema de Extensão de Tietze, $\exists\, \tilde{g} : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $\tilde{g}|_{\partial D} = g$ (basta aplicar Teorema de Extensão de Tietze a algum aberto $U \supset \overline{D} \supset \partial D$ e restringir a extensão à $\overline{D}$). Observe, assim, que $0 \notin g(\partial D) = \tilde{g}(\partial D)$. Defina então $G : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ por $G(x) = \tilde{g}(x) - \tilde{g}(-x)$. Temos que G é suave e ímpar. Mas, $\forall x \in \partial D$, $\forall t \in [0, 1]$, $\tilde{g}(x) - t\tilde{g}(-x) = g(x) - tg(-x) \neq 0$, pois $\tilde{g}|_{\partial D} = g$. Desta forma, a homotopia $H : \overline{D} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ entre G e $\tilde{g}$ dada por $H_t(x) = \tilde{g}(x) - t\tilde{g}(-x)$ é tal que $0 \notin H\Big(\partial D \times [0, 1]\Big)$. Segue, por 4.2.8, que $d(\tilde{g}, D, 0) = d(G, D, 0)$. Agora, por 4.3.6, temos que $d(G, D, 0)$ é par. Mas $d(\tilde{g}, D, 0) = \omega(g, 0)$ (conforme 4.3.1). Assim, $\omega(f, 0) = \omega(g, 0) = d(\tilde{g}, D, 0) = d(G, D, 0)$ é par. $\square$

Teorema 4.3.8 (Borsuk)**.** *Seja $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado e simétrico tal que $0 \in D$ e $\phi : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ contínua e ímpar. Então $\omega(\phi, 0)$ é ímpar.*

Demonstração. $0 \in D$ e $\mathbb{R}^{m+1}$ é regular $\Rightarrow \exists\, \epsilon > 0$ tal que $\overline{B(0, \epsilon)} \subset D$ $\Rightarrow \overline{B(0, \epsilon)} \cap \partial D = \emptyset$. Considere então o compacto $\partial D \cup \overline{B(0, \epsilon)}$ e defina $f : \partial D \cup \overline{B(0, \epsilon)} \to \mathbb{R}^{m+1}$ por

$$f = \begin{cases} \phi & \text{em } \partial D, \\ Id_{\overline{B(0,\epsilon)}} & \text{em } \overline{B(0, \epsilon)} \end{cases}$$

Como ϕ e $Id_{\overline{B(0,\epsilon)}}$ são contínuas e $\overline{B(0, \epsilon)} \cap \partial D = \emptyset$, temos que f é também contínua. Logo, por Teorema de Extensão de Tietze, $\exists\, F : \overline{D} \to \mathbb{R}^{m+1}$ extensão contínua de f. Como $0 \notin F(\partial D) = f(\partial D) = \phi(\partial D)$, logo podemos calcular $d(F, D, 0)$.

Considere então os abertos disjuntos $D_1 = B(0, \epsilon)$ e $D_2 = D - \overline{B(0, \epsilon)}$. Temos que $\partial\Big(D - (D_1 \cup D_2)\Big) = \partial D \cup \partial B(0, \epsilon)$. Mas $0 \notin F(\partial D)$ e $0 \notin F\Big(\partial B(0, \epsilon)\Big) = Id_{\overline{B(0,\epsilon)}}\Big(\partial B(0, \epsilon)\Big) = \partial B(0, \epsilon)$. Então $0 \notin F\Big(D - (D_1 \cup D_2)\Big)$. Portanto, por 4.2.8, $d(F, D, 0) = d(F, D_1, 0) + d(F, D_2, 0)$. Como $F|_{D_1} = Id_{D_1}$, temos que $d(F, D_1, 0) = 1$. Além disso, D_2 é um aberto simétrico e limitado com $0 \notin D_2$

22. Ver A.3.6.

e $\partial D_2 = \partial D \cup \partial B(0,\epsilon)$. Assim,

$$F|_{\partial D_2} = \begin{cases} \phi & \text{em } \partial D, \\ Id_{\partial B(0,\epsilon)} & \text{em } \partial B(0,\epsilon) \end{cases}$$

Mas ϕ e Id são ímpares, logo $F|_{\partial D_2}$ também o é. Segue por 4.3.7 que $d(F, D_2, 0)$ é par. Então $d(F, D, 0) = 1 + d(F, D_2, 0)$ é ímpar.
Finalmente, como $F|_{\partial D} = \phi$, temos que F é extensão contínua de ϕ. Assim, por 4.3.1, $\omega(\phi, 0) = d(F, D, 0)$ é ímpar. □

Corolário 4.3.8.1. Nestas condições, ϕ não é homotopicamente trivial.

Demonstração. Temos que $\omega(\phi, 0)$ é ímpar, logo $\omega(\phi, 0) \neq 0$. Por 4.3.5, segue que ϕ não é homotopicamente trivial □

Corolário 4.3.8.2. Seja $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado e simétrico com $0 \in U$ e $\phi : \partial U \to \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ contínua ímpar. Então toda extensão contínua $\tilde{\phi} : \overline{U} \to \mathbb{R}^{m+1}$ de ϕ tem um zero em U.

Demonstração. Seja $\tilde{\phi} : \overline{U} \to \mathbb{R}^{m+1}$ extensão contínua de ϕ (sempre existe uma, conforme a demonstração de 4.3.1). Por 4.3.1, temos que $d(\tilde{\phi}, U, 0) = \omega(\phi, 0)$. Mas $\omega(\phi, 0)$ é ímpar (conforme 4.3.8). Segue que $d(\tilde{\phi}, U, 0) \neq 0$. Então, por 4.2.8, $\tilde{\phi}(x) = 0$ tem solução em U. □

Teorema 4.3.9 (Extensão do Teorema do Ponto Fixo de Borsuk)**.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado e simétrico com $0 \in U$ e $\phi : \partial U \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua ímpar. Então toda extensão contínua $\tilde{\phi} : \overline{U} \to \mathbb{R}^{m+1}$ de ϕ tem um ponto fixo em $\overline{U}$.*

Demonstração. Defina $g : \partial U \to \mathbb{R}^{m+1}$ por $g(x) = \phi(x) - x$. Caso $0 \in g(\partial U)$, temos que $\exists x_0 \in \partial U$ tal que $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \phi(x_0) = x_0$. Logo, $\forall \tilde{\phi} : \overline{U} \to \mathbb{R}^{m+1}$ extensão contínua de ϕ (sempre existe uma, conforme a demonstração de 4.3.1), $\tilde{\phi}(x_0) = \phi(x_0) = x_0$, ou seja, $\tilde{\phi}$ tem um ponto fixo em ∂U.
Suponha, então, que $0 \notin g(\partial U)$. Tome $\tilde{\phi} : \overline{U} \to \mathbb{R}^{m+1}$ extensão contínua de ϕ e defina $\tilde{g} : \overline{U} \to \mathbb{R}^{m+1}$ por $\tilde{g}(x) = \tilde{\phi}(x) - x$. Temos que $\tilde{g}|_{\partial U} = \tilde{\phi}|_{\partial U} - (Id_{\overline{U}})|_{\partial U} = \phi - Id_{\partial U} = g$, isto é, $\tilde{g}$ é extensão contínua de g. Assim, como g é também contínua e ímpar, por 4.3.8.2, , $\exists x_0 \in U$ tal que $\tilde{g}(x_0) = 0$, ou seja, tal que $\tilde{\phi}(x_0) = x_0$. Dessa forma, $\forall \tilde{\phi} : \overline{U} \to \mathbb{R}^{m+1}$ extensão contínua de ϕ, $\exists\, x_0 \in \overline{U} = U \cup \partial U$ tal que $\tilde{\phi}(x_0) = x_0$. □

Observação. Em particular, 4.3.9 garante que, $\forall U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado e simétrico com $0 \in U$ e $\forall F : \overline{U} \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua tal que $F|_{\partial U}$ seja ímpar, F tem um ponto fixo (uma vez que F é, evidentemente, uma extensão contínua de $F|_{\partial U}$). Então 4.3.9 é de fato uma extensão do Teorema do Ponto Fixo de Borsuk, uma vez que retira a exigência de convexidade de U.

Referências bibliográficas

[1] DUGUNDJI, J. **An Extension of Tietze's Theorem**. Pacific Journal of Mathematics 1, 353-367 (1951).

[2] DUGUNDJI, J. **Topology**. Allyn and Bacon Inc., 1966.

[3] KELLEY, J. L. **General Topology**. Springer-Verlag, 1955.

[4] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration**. John Wiley & Sons, Inc., 1966.

[5] GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. **Fixed Point Theory**. Springer, 2003.

[6] MILNOR, J. W. **Topology from the Differencial Viewpoint**. Princeton University Press, 1965.

[7] DIECK, T. **Algebraic Topology**. European Mathematical Society, 2008.

[8] AGARWAL, R. P.; MEEHAN, M.; O'REGAN, D. **Fixed Point Theory and Applications**. Cambridge University Press, 2001.

[9] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer, 1998.

[10] OSBOURNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. **A Course in Game Theory**. The MIT Press, 1994.

[11] NASH, J. **Non-Cooperative Games**. Annals of Mathematics 54, 286-295 (1951).

[12] OUTERELO, E.; RUIZ, J. M. **Mapping Degree Theory**. American Mathematical Society, 2009.

[13] CHATTERJI, S. D. **Cours d'Analyse 1 - Analyse vectorielle**. Presses Polytechniques et univesitaies romandes, 1997.

[14] LIMA, E. L. **Variedades Diferenciáveis**. IMPA, 2011.

[15] HIRSCH, M. W. **Differential Topology**. Springer-Verlag, 1994.

[16] LIMA, E. L. **Elementos da Topologia Geral**. IMPA, 1970.

[17] MUNKRES, J. **Topology**. Prentice Hall Inc., 1975.

[18] PATA, V. **Fixed Point Theorems and Applications**. Politecnico di Milano.

[19] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. McGraw-Hill Book Company, 1987.

Índice remissivo

A
Demonstrações de Proposições Variadas

A.1
Teoria dos Conjuntos

Proposição A.1.1. Sejam X, Y dois conjuntos, $f : X \to Y$ uma função e $A \subset X$, $B \subset Y$ dois subconjuntos quaisquer. Então $f\Big(f^{-1}(B) \cap A\Big) = B \cap f(A)$

Demonstração. Tome $A \subset X$ e $B \subset Y$. Temos que $f\Big(f^{-1}(B) \cap A\Big) \subset f\Big(f^{-1}(B)\Big) \cap f(A) \subset B \cap f(A)$. Tome, então, $y_0 \in B \cap f(A)$. Segue que $y_0 \in B$ e $\exists x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y_0$. Desta forma, $f(x_0) \in B$, ou seja, $x_0 \in f^{-1}(B)$. Assim, $x_0 \in A \cap f^{-1}(B)$ e $y_0 = f(x_0) \in f\Big(f^{-1}(B) \cap A\Big)$. Então $B \cap f(A) \subset f\Big(f^{-1}(B) \cap A\Big)$. Logo, $B \cap f(A) = f\Big(f^{-1}(B) \cap A\Big)$. □

Proposição A.1.2. Seja E espaço vetorial, $C \subset E$ convexo e $p, q \in (0, \infty)$. Então $pC + qC = (p+q)C$

Demonstração. Naturalmente, $z \in (p+q)C \Rightarrow \exists\, x \in C$ tal que $z = (p+q)x$ $\Rightarrow z = px + py \Rightarrow z \in pC + qC$, ou seja, $(p+q)C \subset pC + qC$. Agora, tomando $z \in pC + qC$ e $x, y \in C$ tais que $z = px + qy$, temos, pela convexidade de C, que $w = \frac{px+qy}{p+q} = \frac{p}{p+q}x + \frac{q}{p+q}y \in C$. Então $z = (p+q)w$, ou seja, $z \in (p+q)C$. Assim, $pC + qC = (p+q)C$. □

A.2
Análise Real

Proposição A.2.1. Seja $I \subset [0, +\infty)$ um conjunto não-vazio tal que, $\forall M \geq 1$ e $a \in I$, $Ma \in I$. Então I é um intervalo ilimitado superiormente.

Demonstração. Sejam $a, b \in I$ com $b \geq a$. $\forall t \in [0,1]$, temos que $t + (1-t)\frac{b}{a} \geq t + (1-t) = 1$. Então $ta + (1-t)b = a \cdot \Big(t + (1-t)\frac{b}{a}\Big) \in I$, ou seja, I é um intervalo.

Suponha agora que I não seja limitado superiormente. Então existiria $L \geq 0$

tal que $x \leq L$, $\forall x \in I$ (se $L < 0$, teríamos que $I = \emptyset$). Assim, tomando $a \in I$ e $M > \frac{L}{a} \geq 1$, temos que $Ma \in I$ e $Ma > L$, um absurdo. Segue que I é ilimitado superiormente. □

Definição A.2.2. Seja X um espaço topológico. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita semicontínua inferiormente se $f^{-1}\big((a, +\infty)\big)$ for aberto para todo $a \in [-\infty, +\infty)$.
Equivalentemente, uma função $g : X \to \mathbb{R}$ é dita semicontínua superiormente se $-g$ for semicontínua inferiormente.

Proposição A.2.3. Seja X espaço topológico, $f : X \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente e $Y \subset X$ um subconjunto qualquer. Então $f|_Y$ é semicontínua inferiormente em Y.

Demonstração. $\forall a \in [-\infty, +\infty)$, pela semicontinuidade inferior de f, temos que $f^{-1}\big((a, +\infty)\big)$ é um aberto em X. Então $(f|_Y)^{-1}\big((a, +\infty)\big) = f^{-1}\big((a, +\infty)\big) \cap Y$ é um aberto em Y, $\forall a \in [-\infty, +\infty)$. Segue que $f|_Y$ é semicontínua inferiormente. □

Proposição A.2.4. Seja X espaço topológico e $f : X \to \mathbb{R}$. Então f é semicontínua inferiormente se, e somente se, $f^{-1}\big((-\infty, a]\big)$ é fechado para todo $a \in [-\infty, +\infty)$.

Demonstração. Para $a = -\infty$, temos que

$$f^{-1}\big((-\infty, -\infty]\big) = f^{-1}(\emptyset) = f^{-1}(\complement\mathbb{R}) = \complement f^{-1}(\mathbb{R}) = \complement f^{-1}\big((-\infty, +\infty)\big)$$

ou seja, é um fechado em X se, e somente se, $f^{-1}\big((-\infty, +\infty)\big)$ é aberto em X. Analogamente, para $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}\big((-\infty, a]\big) = f^{-1}\big(\complement(a, +\infty)\big) = \complement f^{-1}\big((a, +\infty)\big)$$

isto é, é um fechado se, e somente se, $f^{-1}\big((a, +\infty)\big)$ é aberto em X. A proposição, portanto, decorre diretamente da definição de semicontinuidade inferior. □

Teorema A.2.5. *Seja X um espaço topológico e $\{f_i\}_{i \in I}$ uma família de funções $f_i : X \to \mathbb{R}$ semicontínuas inferiormente. Então o supremo pontual dessa família de funções, isto é, a função $F : X \to \mathbb{R}$ definida por $F : x \mapsto sup_{i \in I} f_i(x)$, é semicontínua inferiormente.*

Demonstração. Fixe $a \in [-\infty, +\infty)$. Visto que

$$x \in f^{-1}\Big((a, +\infty)\Big) \Leftrightarrow f(x) \in (a, +\infty) \Leftrightarrow f(x) > a$$

para todo $f : X \to \mathbb{R}$ e $x \in X$, e dado que

$$\{x \in X \mid F(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) > a\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid f_i(x) > a\},$$

segue que $F^{-1}\Big((a, +\infty)\Big) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}\Big((a, +\infty)\Big)$. Agora, como cada f_i é semicontínua inferiormente, temos que cada $f_i^{-1}\Big((a, +\infty)\Big)$ é aberta, e assim $F^{-1}\Big((a, +\infty)\Big)$ também o é. Então, como isso vale para qualquer $a \in [-\infty, +\infty)$, temos que F é semicontínua inferiormente. □

Proposição A.2.6. Seja X espaço de Hausdorff, $f : X \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente e $K \subset X$ enumeravelmente compacto. Então $f(K)$ é limitado inferiormente.

Demonstração. O conjunto $\Big\{(n, +\infty)\Big\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base enumerável de abertos para $\mathbb{R}$, pois, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $x > n \Leftrightarrow x \in (n, +\infty)$. Então $\Big\{f^{-1}\Big((n, +\infty)\Big)\Big\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base enumerável de abertos em X, pois cada $f^{-1}\Big((n, +\infty)\Big)$ é aberto pela semicontinuidade inferior de f, e

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-1}\Big((n, +\infty)\Big) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, +\infty)\right) = f^{-1}(\mathbb{R}) = X$$

Portanto, $\Big\{f^{-1}\Big((n, +\infty)\Big)\Big\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é também cobertura aberta enumerável de $K \subset X$. Então, pela compacidade enumerável de K, $\exists I \subset \mathbb{Z}$ finito tal que $\Big\{f^{-1}\Big((n, +\infty)\Big)\Big\}_{n \in I}$ é cobertura de K. Então, pondo $n_0 = \min\{n \in I\}$, temos que $\bigcup_{n \in I} (n, +\infty) = (n_0, +\infty)$. Dessa forma,

$$K \subset \bigcup_{n \in I} f^{-1}\Big((n, +\infty)\Big) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in I} (n, +\infty)\right) = f^{-1}\Big((n_0, +\infty)\Big)$$

Segue que $f(K) \subset f\Big(f^{-1}\Big((n_0, +\infty)\Big)\Big) \subset (n_0, +\infty)$. Então $f(K)$ é limitado inferiormente. □

Lema A.2.7. *Seja K espaço enumeravelmente compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente. Então $\exists\, x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = inf_{x \in K} f(x)$.*

Demonstração. Por A.2.6, temos que $f(K)$ é limitado inferiormente. Ponha, então, $M = \inf_{x \in K} f(x)$, e defina $F_n = f^{-1}\Big(\Big(-\infty, M + \frac{1}{n}\Big]\Big)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por A.2.4, segue que cada F_n é um fechado em K. Além disso, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \neq \emptyset$

(do contrário, $\forall x \in K$, $f(x) > M+\frac{1}{n}$, e teríamos que $M = \inf_{x\in K} f(x) \geq M+\frac{1}{n}$, um absurdo). Ainda mais, $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

$$n_1 \leq n_2 \Leftrightarrow \Big(-\infty, M + \frac{1}{n_2}\Big] \subset \Big(-\infty, M + \frac{1}{n_1}\Big] \Rightarrow F_{n_2} \subset F_{n_1}$$

Assim, $\forall I \subset \mathbb{N}$ finito, pondo $n_0 = \max\{n \in I\} \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcap_{n\in I} F_n = F_{n_0} \neq \emptyset$. Logo, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família enumerável de fechados em K cujas intersecções finitas são não-vazias. Pela Propriedade da Intersecção Finita, segue que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Tome $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Temos que $f(x_0) \leq M + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $f(x_0) = M = \inf_{x\in K} f(x)$. □

Teorema A.2.8. *Seja X espaço de Hausdorff, $f : X \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente e $K \subset X$ enumeravelmente compacto. Então $\exists\, x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = inf_{x\in K} f(x)$.*

Demonstração. Defina $g : K \to \mathbb{R}$ por $g = f|_K$. Então g é semicontínua inferiormente (conforme A.2.3). Logo, por A.2.7, $\exists\, x_0 \in K$ tal que $g(x_0) = \inf_{x\in K} g(x)$. Mas $g(x) = f(x)$ para todo $x \in K$. Assim, temos que $\exists\, x_0 \in K$ tal que

$$f(x_0) = g(x_0) = \inf_{x\in K} g(x) = \inf_{x\in K} f(x)$$

□

Corolário A.2.8.1. Seja X espaço de Hausdorff, $f : X \to \mathbb{R}$ semicontínua superiormente e $K \subset X$ enumeravelmente compacto. Então $\exists\, x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = \sup_{x\in K} f(x)$.

Demonstração. Como f é semicontínua superiormente, temos que $-f$ 'e semicontínua inferiormente. Logo, por A.2.8, $\exists\, x_0 \in K$ tal que $-f(x_0) = \inf_{x\in K}\Big(-f(x)\Big)$. Então $\exists\, x_0 \in K$ tal que

$$f(x_0) = -\inf_{x\in K}\Big(-f(x)\Big) = \sup_{x\in K} f(x)$$

□

Observação. Para todas as proposições demonstradas para funções semicontínuas inferiores, existem proposições análogas para funções semicontínuas superiores. Entretanto, como a nessecidade dessa dissertação recai apenas na utilização de funções semicontínuas inferiores, e como semicontinuidade na reta é um tópico que foge em geral do escopo dessa dissertação, tais proposições, com exceção da A.2.8.1, não serão demonstradas aqui.

Observação A.2.9 (Teorema dos Extremos)**.** Como toda função contínua, claramente, é também semicontínua superior e inferiormente, por A.2.8 e A.2.8.1, temos que, dado X espaço de Hausdorff, $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e $K \subset X$ enumeravelmente compacto, $\exists\, x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) = \inf_{x \in K} f(x)$ e $f(x_2) = \sup_{x \in K} f(x)$.

Definição A.2.10. Seja X um espaço localmente convexo e $C \subset X$ convexo. Uma função $f : C \to \mathbb{R}$ é dita <u>convexa</u> se, $\forall x, y \in C$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Uma função $g : C \to \mathbb{R}$ é dita <u>côncava</u> se $-g$ é convexa.

Proposição A.2.11. Seja X um espaço localmente convexo, $C \subset X$ um convexo. Então $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para toda $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ combinação convexa em C, $f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Demonstração. Evidentemente, se $f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ para toda combinação convexa, então f é convexa, uma vez que $\lambda x + (1-\lambda)y$ é uma combinação convexa para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Indutivamente, suponha que a propriedade vale para a imagem toda combinação convexa de n elementos por uma função convexa, e tome $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ uma combinação convexa em C e $f : C \to \mathbb{R}$ convexa. Pondo $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, temos que $\lambda + \lambda_{n+1} = 1$ e $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i\Big) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$, onde $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ é uma combinação convexa em C (pois $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$). Então temos que

$$\begin{aligned} f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) &\leq \lambda f\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i\Big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leq \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} f(x_i)\Big) + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

□

Corolário A.2.11.1. Seja X um espaço localmente convexo, $C \subset X$ um convexo. Então $g : C \to \mathbb{R}$ é côncava se, e somente se, para toda $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ combinação convexa em C, $g\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i)$.

Demonstração. Seja $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ combinação convexa em C. Temos que

$$\begin{aligned} g \text{ é côncava} \Leftrightarrow -g \text{ é convexa} \Leftrightarrow (-g)\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (-g)\big(x_i\big) \\ \Leftrightarrow g\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i) \end{aligned}$$

□

A.3
Topologia Geral

Proposição A.3.1. Seja D aberto, $D_1, D_2 \subset D$ abertos disjuntos e $X = \overline{D} - (D_1 \cup D_2)$. Então $\partial D_1 \subset X$.

Demonstração. $D_1 \subset D \Rightarrow \overline{D_1} \subset \overline{D}$. Mas $D_1 \cap D_2 = \emptyset \Leftrightarrow D_1 \subset \complement D_2 \Leftrightarrow \overline{D_1} \subset \complement D_2$, pois $\complement D_2$ é um fechado. Então $\overline{D_1} \subset \overline{D} \cap \complement D_2 = \overline{D} - D_2$. Segue que

$$\partial D_1 = \overline{D_1} - D_1 \subset (\overline{D} - D_2) - D_1 = X$$

□

Proposição A.3.2. Seja X pseudocompacto e $\{U_n\}$ uma família decrescente de conjuntos abertos não-vazios com $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = \emptyset$. Então $\{U_n\}$ é localmente finita.

Demonstração. Suponha que $\{U_n\}$ não seja localmente finita. Então $\exists\, x \in X$ tal que, para toda vizinhança V de x, $\{n \in \mathbb{N} \mid V \cap U_n \neq \emptyset\}$ é infinito. Agora, $x \in V$ conjunto aberto com $V \cap U_n \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{U_n}$. Desta forma, $\{n \in \mathbb{N} \mid V \cap U_n \neq \emptyset\} \subset \{n \in \mathbb{N} \mid x \in \overline{U_n}\}$. Temos, portanto, que $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in \overline{U_n}\}$ é também infinito. Como $U_{n+1} \subset U_n \Rightarrow \overline{U_{n+1}} \subset \overline{U_n}$, temos que $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in \overline{U_n}\} = \mathbb{N}$, do contrário existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \overline{U_{n_0}}$, um absurdo, pois $\exists\, n > n_0$ tal que $x \in \overline{U_n} \supset \overline{U_{n_0}}$ (ou $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in \overline{U_n}\}$ não seria infinito). Então $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = \emptyset$, um absurdo. Logo, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é localmente finita. □

Proposição A.3.3. Seja X um espaço topológico e $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ com $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ finito. Então $\exists\, x_0 \in S$ tal que $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = x_0\}$ é infinito.

Demonstração. Suponha que, $\forall x \in S$, $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = x\}$ seja finito. Desta forma, teríamos que $\mathbb{N} = \bigcup_{x \in S} \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = x\}$ seria uma união finita de conjuntos finitos, logo finito, um absurdo. □

Proposição A.3.4. Seja (X, d) espaço métrico, $V \subset X$ e $x_0 \in X$. Então, $\forall r > d(x_0, V)$, temos que $V \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$. Em particular, $V \cap \overline{B(x_0, r)} \neq \emptyset$.

Demonstração. Tome $r > d(x_0, V)$. Mas $d(x_0, V) = \inf_{x \in V} d(x_0, x) < r \Rightarrow \exists\, x \in V \mid d(x_0, V) \leq d(x_0, x) < r$. Temos então que $x \in B(x_0, r)$, logo $x \in V \cap B(x_0, r)$, ou seja, $V \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$. Desta forma, segue que $r > d(x_0, V) \Rightarrow V \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$. Em particular, como $V \cap \overline{B(x_0, r)} \supset V \cap B(x_0, r)$, temos também que $V \cap \overline{B(x_0, r)} \neq \emptyset$. □

Proposição A.3.5. Seja (X,d) espaço métrico, $x_0 \in X$ e $\mathscr{R} \subset (0,\infty)$ finito com $r_0 = \min\{r \in \mathscr{R}\}$. Então $\bigcap_{r\in\mathscr{R}} B(x_0,r) = B(x_0,r_0)$ e $\bigcap_{r\in\mathscr{R}} \overline{B(x_0,r)} = \overline{B(x_0,r_0)}$

Demonstração. Evidentemente, como $r_0 \in \mathscr{R}$, temos que $B(x_0,r_0) \subset \bigcap_{r\in\mathscr{R}} B(x_0,r)$. Agora, tome $x \in \bigcap_{r\in\mathscr{R}} B(x_0,r)$. Então, $\forall r \in \mathscr{R}$, $x \in B(x_0,r) \Leftrightarrow d(x,x_0) < r$. Segue que $d(x,x_0) < \min\{r \in \mathscr{R}\} = r_0$, ou seja, $x \in B(x_0,r_0)$. Assim, vale que $\bigcap_{r\in\mathscr{R}} B(x_0,r) \subset B(x_0,r_0)$. Portanto, $\bigcap_{r\in\mathscr{R}} B(x_0,r) = B(x_0,r_0)$. A demonstração é análoga para bolas fechadas. $\square$

Proposição A.3.6. Seja $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ aberto limitado e simétrico tal que $0 \notin \overline{D}$ e seja $f : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1}$ contínua e ímpar. Então, $\exists\, g : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ suave tal que $g \sim f$ em $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ e tal que $g(x) \neq tg(-x)$, $\forall x \in \partial D$, $\forall t \in [0,1]$.

Demonstração. Como $\partial D \subset \overline{D}$ é compacto (pois é um fechado do compacto $\overline{D}$, conforme 2.2.55 e 2.2.6) e $0 \notin \overline{D} \supset \partial D$, temos que $r = \inf_{x\in\partial D}||f(x)|| > 0$. Tome então $\epsilon \in (0,r)$. Por 4.0.3, $\exists\, g : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1}$ polinomial tal que $||f-g||_\infty < \epsilon$. Então g é suave e $||g(x)|| \geq ||f(x)|| - \epsilon > \inf_{x\in\partial D}||f(x)|| - r \geq 0$, $\forall x \in \partial D$, ou seja, $0 \notin g(\partial D)$. Podemos, assim, observar que $g : \partial D \to \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ é suave. Além disso, se houvesse $(x,t) \in \partial D \times [0,1]$ tal que $g(x) = tg(-x)$, teríamos que

$$\begin{aligned}
||f(x)|| &= \left|\left|\frac{f(x)}{2} - \frac{g(x)}{2} + \frac{g(x)}{2} + \frac{f(x)}{2}\right|\right| \\
&= \left|\left|\frac{f(x)}{2} - \frac{g(x)}{2} + \frac{tg(-x)}{2} - \frac{tf(-x)}{2} + \frac{tf(-x)}{2} + \frac{f(-x)}{2}\right|\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\Big|\Big|f(x) - g(x)\Big|\Big| + \frac{t}{2}\Big|\Big|g(-x) - f(-x)\Big|\Big| + \frac{1+t}{2}||f(x)|| \\
&< \frac{1+t}{2}\epsilon + \frac{1+t}{2}||f(x)|| \leq \Big(\epsilon + ||f(x)||\Big) \leq \epsilon + ||f(x)||
\end{aligned}$$

um absurdo. Então $g(x) \neq tg(-x)$, $\forall (x,t) \in \partial D \times [0,1]$. Finalmente, definindo $H : \partial D \times [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ por $H_t(x) = tf(x) + (1-t)g(x)$, temos que

$$\begin{aligned}
||H_t(x)|| &\geq t||f(x)|| + (1-t)||g(x)|| \geq t||f(x)|| + (1-t)\Big(||f(x)|| - \epsilon\Big) \\
&= ||f(x)|| - (1-t)\epsilon > ||f(x)|| - r \geq 0
\end{aligned}$$

ou seja, $H_t(x) \neq 0$, $\forall (x,t) \in \partial D \times [0,1]$. Segue que : $H : \partial D \times [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ é uma homotopia suave entre f e g em $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$. $\square$

A.4
Variedades Diferenciáveis

Definição A.4.1. Seja M um espaço topológico. M é chamada de variedade topológica se:

1. M for de Hausdorff;
2. M satisfizer o segundo axioma da enumerabilidade;
3. M for localmente euclidiano, isto é, $\forall x \in M$, $\exists\, U \ni x$ aberto e $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $\phi : U \to \phi(U)$ é homeomorfismo.

Proposição A.4.2. Toda variedade topológica é localmente compacta.

Demonstração. Seja M uma variedade topológica e $x \in M$. Tome $U \ni x$ aberto e $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $\phi : U \to \phi(U)$ é homeomorfismo. Segue que $\exists\, W \ni \phi(x)$ aberto tal que $\overline{W} \subset \phi(U)$ (pois $\phi(U)$ é aberto e $\mathbb{R}^n$ é localmente compacto). Então $V = \phi^{-1}(W) \ni x$ é aberto e $\overline{V} = \phi^{-1}\left(\overline{W}\right) \subset U$ é compacto (conforme 2.2.6). Assim, segue que V é vizinhança relativamente compacta de x. Logo, M é localmente compacto. □

Corolário A.4.2.1. Toda variedade topológica é σ-compacta.

Demonstração. Toda variedade topológica satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, logo é de Lindëlof (conforme 2.1.55). Além disso, por A.4.2, toda varidedade topológica é também localmente compacta. Assim, por 2.2.37, segue que toda variedade topológica é também σ-compacta. □

Definição A.4.3. Seja M uma variedade topológica e $\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tal que $\{U_\alpha\}$ cobre M e $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ é contínua e homeomorfismo sobre a sua imagem (essa coleção é chamada de atlas, e cada elemento de carta). $(M, \mathscr{U})$ é chamada de variedade diferenciável se, $\forall (U, \phi), (V, \psi) \in \mathscr{U}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ for difeomorfismo (a função $\psi \circ \phi^{-1}$ é chamada de mudança de cartas). $(M, \mathscr{U})$ é chamada de variadede suave se cada mudança de cartas for suave.

Definição A.4.4. Sejam M^m, N^n variedades diferenciáveis com atlas $\mathscr{U}, \mathscr{V}$, respectivamente. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita diferenciável em $x_0 \in M$ se existirem $(U, \phi) \in \mathscr{U}$, $(V, \psi) \in \mathscr{V}$ tais que $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$ e $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(U)} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ for diferenciável em $\phi(x_0) \in \mathbb{R}^m$. Nesse caso, a aplicação $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})|_{\phi(U)}$ é chamada de expressão de f nas coordenadas locais. $f : M \to N$ é dita diferenciável se for diferenciável para todo $x \in M$.
Analogamente, dadas duas variedades suaves M, N, dizemos que $f : M \to N$ é suave se suas expressões nas coordenadas locais em torno de cada ponto de m forem suaves.

Definição A.4.5. Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Sejam ainda $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos contendo 0 e $\lambda : I \to M$, $\mu : J \to N$ caminhos contínuos tais que $\lambda(0) = \mu(0) = p$. Dizemos que esses caminhos são equivalentes se, $\forall (U, \phi) \in \mathscr{U}$ tal que $p \in U$, $(\phi \circ \lambda)'(0) = (\phi \circ \mu)'(0)$, e denotamos a classe de equivalência dessa relação por $[\lambda]$.
Assim, o espaço tangente de M em p é o espaço vetorial[1] T_pM dado por $T_pM = \Big\{[\lambda] \,\Big|\, I \subset \mathbb{R} \text{ é intervalo com } 0 \in I,\ \lambda : I \to M \text{ é contínua e } \lambda(0) = p\Big\}$.

Definição A.4.6. Sejam M, N variedades diferenciáveis e $f : M \to N$. O diferencial de f em $p \in M$ é a transformação linear[2] $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ tal que $df_p\big([\lambda]\big) = [f \circ \lambda]$.

Definição A.4.7. Sejam M, N variedades suaves. Diz-se que $f : M \to N$ suave é transversal a $S \subset N$ quando, $\forall p \in f^{-1}(S)$, $df_p(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$.

Teorema A.4.8 (Teorema Paramétrico da Transversalidade)**.** *Seja $F : M \times \Lambda \to N$ uma aplicação suave para M, N variedades suaves sem bordo e seja $S \subset N$ subvariedade suave sem bordo tal que F é transversal a S. Então $F_\lambda : x \mapsto F(x, \lambda)$ é transversal a S para quase todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [15, §3, 2.7, p.79-80] □

Proposição A.4.9. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}^k$ abertos e $F : U \times I \to \mathbb{R}^m$ suave tal que $0 \in R_F$. Então $\{a \in I \mid 0 \in R_{F_a}\}$ é denso em I.

Demonstração. Considere a subvariedade $\{0\}$. Como $0 \in R_F$, $\forall x \in F^{-1}(0)$, $dF_x(T_xU \times I) = T_0\mathbb{R}^m$. Em particular, temos que F é transversal a $\{0\}$. Logo, pelo Teorema Paramétrico da Transversalidade, $F_a : x \mapsto F(x, a)$ é transversal a $\{0\}$ para quase todo $a \in I$. Mas F_a é transversal a $\{0\}$ se, e somente se, $\forall x \in F_a^{-1}(0)$, $d(F_a)_x(T_xU) + T_0\{0\} = T_0\mathbb{R}^m \Leftrightarrow d(F_a)_x(T_xU) = T_0\mathbb{R}^m \Leftrightarrow 0 \in R_{F_a}$. Então, $0 \in R_{F_a}$ para quase todo $a \in I$. Segue que $\{a \in I \mid 0 \in R_{F_a}\}$ é denso em I. □

Corolário A.4.9.1. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com $0 \notin \overline{U}$ e seja $\phi : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ contínua com $\phi|_U$ suave. Seja ainda $M = \mathscr{M}(n \times n)$ e $F : U \times M \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x, A) = \phi(x) + Ax$. Então, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, A \in M$ com $||A|| < \epsilon$ tal que 0 é valor regular de $F_A : x \mapsto F(x, A)$

1. A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [14, V, 2, p.135-7].
2. A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [14, V, 3, p.137-8].

Demonstração. Como $A \in M$ é de dimensão finita, temos que $A : x \mapsto Ax$ é suave, logo $F : U \times M \to \mathbb{R}^n$ também o é. Tome, então, $\epsilon > 0$ e defina $I = \{A \in M \mid ||A|| < \epsilon\}$. Temos que I é um aberto em M, portanto $G = F|_{U\times I} : U \times I \to \mathbb{R}^n$ é suave.
Agora, $0 \in R_G$ se, e somente se, $\forall(x, A) \in G^{-1}(0)$, $dG_{(x,A)} : T_xU \times T_AM \to T_0\mathbb{R}^n$ dada por $dG_{(x,A)} : (h, B) \mapsto d\phi_x h + Ah + Bx$ é sobrejetiva. Como $T_xU = \mathbb{R}^n = T_0\mathbb{R}^n$, $\forall x \in U$, e $T_AM = M$, dado $b \in \mathbb{R}^n$ e pondo $h = 0$, temos que sempre existe $B \in M$ tal que $Bx = b$ (podemos, por exemplo, definir as entradas na diagonal de B por $\frac{b_i}{x_i}$ e anular as demais entradas). Então, $dG_{(x,A)}$ é sobrejetivo, $\forall(x, A) \in G^{-1}(0)$. Logo, por A.4.9, $\{A \in I \mid 0 \in R_{F_A}\}$ é denso em I. Assim, $\forall\epsilon > 0$, $\exists\, A \in M$ com $||A|| < \epsilon$ tal que 0 é valor regular de $F_A : x \mapsto \phi(x) + Ax$. □

A.5
Análise Funcional

Proposição A.5.1. Seja V espaço vetorial de dimensão finita e $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base qualquer de V. Então os funcionais $||\cdot||_1 : V \to [0, +\infty)$ e $||\cdot||_\infty : V \to [0, +\infty)$, definidos por $||v||_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$ e $||v||_\infty = \max_{i=1}^n |v_i|$ (para $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$) são normas em V.

Demonstração. Evidentemente, $\forall v = \sum_i v_i e_i$, $||v||_1 \geq 0$ e $||v||_\infty \geq 0$, portanto os funcionais estão bem definidos. Assim, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, temos que:

$$||v||_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_i |v_i| = 0 \Leftrightarrow |v_i| = 0, \forall i \Leftrightarrow v_i = 0, \forall i \Leftrightarrow v = 0$$

$$||v||_\infty = \max_i |v_i| = 0 \Leftrightarrow |v_i| = 0, \forall i \Leftrightarrow v_i = 0, \forall i \Leftrightarrow v = 0$$

pois $|v_i| \geq 0$, $\forall i$. Além disso, como $\lambda v = \sum_i (\lambda v_i) e_i$, segue que

$$||\lambda v||_1 = \sum_i |\lambda v_i| = \sum_i |\lambda| \cdot |v_i| = |\lambda| \sum_i |v_i| = |\lambda| \cdot ||v||_1$$

$$||\lambda v||_\infty = \max_i |\lambda v_i| = \max_i \Big(|\lambda| \cdot |v_i|\Big) = |\lambda| \cdot \max_i |v_i| = |\lambda| \cdot ||v||_\infty$$

Finalmente, para $u = \sum_i u_i e_i$, temos que $u + v = \sum_i (u_i + v_i) e_i$. Então

$$||u + v||_1 = \sum_i |u_i + v_i| \leq \sum_i \Big(|u_i| + |v_i|\Big) = \sum_i |v_i| + \sum_i |u_i| = ||v||_1 + ||u||_1$$

$$|u_i + v_i| \leq |u_i| + |v_i| \leq ||u||_\infty + ||v||_\infty, \forall i \Rightarrow ||u + v||_\infty = \max_i |u_i + v_i| \leq ||u||_\infty + ||v||_\infty$$

Segue que $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_\infty$ são normas em V. □

Proposição A.5.2. $\mathscr{L}^2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ é um espaço vetorial normado com a norma $||(x_n)|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$.

Demonstração. Seja $\mathscr{L}^2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$. Temos que $\forall (x_n), (y_n) \in \mathscr{L}^2$ e $t \in \mathbb{R}$, $t(x_n) = (tx_n)$ e $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$. Além disso, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |tx_n|^2 = |t|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^2 &\leq \sum_{n=1}^{N} \Big(|x_n| + |y_n|\Big)^2 \leq 2\sum_{n=1}^{N} \Big(|x_n|^2 + |y_n|^2\Big) \\ &= 2\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty\end{aligned}$$

ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2 < \infty$ e $t(x_n) = (tx_n), (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \in \mathscr{L}^2$. Então $\mathscr{L}^2$ é um espaço vetorial.
Defina agora $|| \cdot || : \mathscr{L}^2 \to \mathbb{R}$ por $||(x_n)|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$. Evidentemente, $\forall (x_n) \in \mathscr{L}^2$, $||(x_n)|| \geq 0$ e $||0|| = 0$. Além disso, $(x_n) \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq |x_{n_0}|^2 > 0 \Rightarrow ||(x_n)|| > 0$, ou seja, $||(x_n)|| = 0 \Leftrightarrow (x_n) = 0$. Ainda mais, é fácil perceber que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda(x_n)|| = ||(\lambda x_n)|| = |\lambda| \cdot ||(x_n)||$. Finalmente, $\forall (x_n), (y_n) \in \mathscr{L}^2$, pela desigualdade triangular da norma $||x||_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ em $\mathbb{R}^N$, temos, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^2} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2} \\ &= \Big|\Big|(x_n)\Big|\Big| + \Big|\Big|(y_n)\Big|\Big|\end{aligned}$$

uma vez que $\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ (o mesmo valendo para (y_n)). Segue que $\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^2} \leq ||(x_n)|| + ||(y_n)||$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned}\Big|\Big|(x_n) + (y_n)\Big|\Big| = \Big|\Big|(x_n + y_n)\Big|\Big| &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (x_n + y_n)^2} \leq \Big|\Big|(x_n)\Big|\Big| + \Big|\Big|(y_n)\Big|\Big|\end{aligned}$$

Temos, portanto, que $|| \cdot ||$ é norma e $\mathscr{L}^2$ é um espaço vetorial normado. □

Proposição A.5.3. $\mathscr{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial normado com a norma $||T|| = \inf\{c \leq 0 \mid ||Tx||_Y \leq c||x||_X, \forall x \in X\}$. Vale que

$$||T|| = \sup\Big\{||Tx||_Y \,\Big|\, ||x||_X \leq 1\Big\}$$

Além disso, para $||T|| < \infty$, temos que, $\forall x \in X$, $||Tx||_Y \leq ||T|| \cdot ||x||_X$. Finalmente, $\forall T \in \mathscr{L}(X,Y)$, as seguintes proposições são equivalentes:

1. $||T|| < \infty$.
2. T é contínua.
3. T é contínua em $x_0 \in X$.

Demonstração. É fácil perceber que $\mathscr{L}(X,Y)$ é um espaço vetorial. Considere, portanto, a função $||\cdot|| : \mathscr{L}(X,Y) \to [0,+\infty]$ definida por $||T|| = \inf\{c \geq 0 \mid ||Tx||_Y \leq c||x||_X, \forall x \in X\}$. Observe, por A.2.1, que o conjunto $T_c = \{c \geq 0 \mid ||Tx||_Y \leq c||x||_X, \forall x \in X\}$ é um intervalo ilimitado superiormente, pois, $\forall a \in T_c$ e $\forall M \geq 1$, $||Tx||_Y \leq Ma||x||_X \leq a||x||_X$, ou seja, $Ma \in T_c$.
Agora, como $||T|| = \inf(T_c)$, quando $T_c \neq \emptyset$, temos que T_c é da forma $\Big(||T||,+\infty\Big)$ ou $\Big[||T||,+\infty\Big)$. Logo, $\forall \epsilon > 0$, $||T|| + \epsilon \in T_c$, ou seja, $||Tx||_Y \leq (||T||+\epsilon)||x||_X$, $\forall x \in X$. Então $||Tx||_Y \leq ||T|| \cdot ||x||_X$, isto é, $||T|| \in T_c$. Segue, para $T_c \neq \emptyset$ (para $T_c = \emptyset$, pomos $||T|| = \infty$), que

$$T_c = \{c \geq 0 \mid ||Tx||_Y \leq c||x||_X\} = \Big[||T||,+\infty\Big)$$

Portanto, vale que:

(a) $\{c \geq 0 \mid 0 \leq c||x||_X, \forall x \in X\} = [0,+\infty)$, logo $||0|| = 0$. Além disso, $||T|| = 0 \Rightarrow T_c \supset (0,+\infty)$, ou seja, $\forall \epsilon > 0$, $\epsilon \in T_c$, isto é, $||Tx||_Y \leq \epsilon||x||_X$, $\forall x \in X$. Suponha, então, que exista $x_0 \in X$ com $||Tx_0||_Y \neq 0$. Seguiria, assim, que $||x_0||_X \neq 0$ e, tomando $\epsilon > 0$ com $\epsilon < \frac{||Tx_0||}{||x_0||}$, teríamos que $||Tx_0||_Y > \epsilon||x_0||_X$, um absurdo, pois $\epsilon \in T_c$. Logo, $||Tx||_Y = 0$, $\forall x \in X$, isto é, $Tx = 0$, $\forall x \in X$, ou $T = 0$. Então $||T|| = 0 \Leftrightarrow T = 0$.

(b) Seja $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que $||\lambda Tx||_Y = |\lambda| \cdot ||Tx||_Y$, $\forall x \in X$, e

$$\begin{aligned}(\lambda T)_c &= \{c \leq 0 \mid ||\lambda Tx||_Y \leq c||x||_X, \forall x \in X\}\\ &= \left\{|\lambda|\frac{c}{|\lambda|} \leq 0 \,\middle|\, ||Tx||_Y \leq \frac{c}{|\lambda|}||x||_X, \forall x \in X\right\}\\ &= |\lambda|\{\tilde{c} \leq 0 \mid ||Tx||_Y \leq \tilde{c}||x||_X, \forall x \in X\}\end{aligned}$$

Segue que $||\lambda T|| = \inf(\lambda T)_c = |\lambda| \cdot \inf(T_c) = |\lambda| \cdot ||T||$.

(c) Sejam $T, Q \in \mathscr{L}(X,Y)$ e tome $a \in T_c + Q_c$. Então $\exists\,(p,q) \in T_c \times Q_c$ com $a = p + q$. Segue que $\forall x \in X$, $||Tx||_Y \leq p||x||_X$ e $||Qx||_Y \leq q||x||_X$. Então, $\forall x \in X$,

$$||Tx + Qx||_Y \leq ||Tx||_Y + ||Qx||_Y \leq p||x||_X + q||x||_X = a||x||_X$$

isto é, $a \in (T+Q)_c$. Segue que $T_c + Q_c \subset (T+Q)_c$ e

$$||T+Q|| = \inf(T+Q)_c \leq \inf(T_c+Q_c) = \inf(T_c) + \inf(Q_c) = ||T|| + ||Q||$$

Então $||\cdot||$ é uma norma em $\mathscr{L}(X,Y)$. Além disso, vale, para $||T|| < \infty$, que $||Tx||_Y \leq ||T|| \cdot ||x||_X$, $\forall x \in X$.
Agora, pondo $||T||_\infty = \sup\{||Tx||_Y \mid ||x||_X \leq 1\}$, como $||Tx||_Y \leq ||T|| \cdot ||x||_X$, $\forall x \in X$, segue que $||x||_X \leq 1 \Rightarrow ||Tx||_Y \leq ||T||$, ou seja, $||T||_\infty \leq ||T||$. Suponha que $||T||_\infty < ||T||$. Neste caso, $||T||_\infty \notin T_c$, logo $\exists\, x_0 \in X$ tal que $||Tx_0||_Y > ||T||_\infty ||x_0||_X$. Assim, $||T(\frac{x_0}{||x_0||_X})||_Y = \frac{||Tx_0||_Y}{||x_0||_X} > ||T||_\infty$ para algum $\frac{x_0}{||x_0||_X}$ com $||\frac{x_0}{||x_0||_X}||_X = 1$, um absurdo, pois $||T||_\infty = \sup\{||Tx||_Y \mid ||x||_X \leq 1\}$. Temos, assim, que $||T||_\infty = ||T||$.
Tome, então, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Vale que:

$1 \Rightarrow 2$ Se $||T|| < \infty$, $||Tx - Ty||_Y = ||T(x-y)||_Y \leq ||T|| \cdot |x-y|_X$, ou seja, T é de Lipschitz, portanto contínua.

$2 \Rightarrow 3$ Se T é contínua em X, em particular, é contínua em $x_0 \in X$.

$3 \Rightarrow 1$ Seja T contínua em $x_0 \in X$, tome $\epsilon > 0$ e seja $\delta > 0$ tal que $||x||_X < \delta \Rightarrow ||T(x_0+x) - Tx_0||_Y < \epsilon$. Pela linearidade de T, temos assim que $||x||_X < \delta \Rightarrow ||Tx||_Y < \epsilon$, ou seja, $||T(\frac{2x}{\delta})||_Y = \frac{2||Tx||_Y}{\delta} < \frac{2\epsilon}{\delta}$ para todo $||\frac{2x}{\delta}||_X < 2$. Como $||T|| = ||T||_\infty = \sup\{||Tx||_Y \mid ||x||_X \leq 1\}$, temos que $||T|| \leq \frac{2\epsilon}{\delta}$, isto é, $||T|| < \infty$.

As três proposições, portanto, são equivalentes. □

Lema A.5.4. *Sejam $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ espaços vetoriais normados com X de dimensão finita e $T : X \to Y$ linear. Então T é contínua.*

Demonstração. Seja $(e_i) \in X^n$ uma base de X e, para cada $x \in X$, defina $(x_i) \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Ponha ainda $M = \sup_i^n ||f(e_i)||$ e seja $||\cdot||_1$ a norma definida conforme 2.3.4, isto é, tal que $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Por 2.3.15, temos que $||\cdot|| \sim ||\cdot||_1$. Então $\exists\, C > 0$ tal que $||x||_1 \leq C||x||$. Assim, tomando $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ e observando que $x - y = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i$, temos que

$$\begin{aligned} ||T(x) - T(y)||_Y &= \left|\left| \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) T(e_i) \right|\right|_Y \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \cdot ||T(e_i)||_Y \\ &\leq M \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = M||x-y||_1 \leq CM||x-y||_X \end{aligned}$$

Segue que T é de Lipschitz, portanto contínua. □

Lema A.5.5. *Seja V um espaço vetorial normado de dimensão finita, $T : V \to \mathbb{R}^n$ isomorfismo e $K \subset V$ limitado e fechado. Então K é compacto.*

Demonstração. T é linear, logo, por A.5.4, contínua. Segue que T^{-1} também é contínua, isto é, T é um homeomorfismo. Então K é fechado $\Rightarrow T(K)$ é fechado. Além disso, como T é contínua, por A.5.3 temos que $||T|| < \infty$. Mas K é limitado, logo $\exists\, M > 0$ tal que $x \in K \Rightarrow ||x|| \leq M$. Então, por A.5.3, $||T(x)|| \leq M||T||$, $\forall T(x) \in T(K)$, isto é, $T(K)$ é limitado.
Desta forma, temos que $T(K) \subset \mathbb{R}^n$ é limitado e fechado, logo compacto (conforme 2.2.55). Como T é homeomorfismo, segue que $K = T^{-1}\Big(T(K)\Big)$ é compacto. $\square$

A.6
EDOs e EDPs

Definição A.6.1. Seja (X, d) espaço métrico, $U \subset X$ aberto e $H : \overline{U} \times [0,1] \to X \mid (x,t) \mapsto H(x,t)$. H é <u>uniformemente Lipschitz em t</u> se $\exists M > 0$ tal que $d\Big(H(x,t), H(x,s)\Big) < M|t-s|$, $\forall x \in \overline{U}$, $\forall s, t \in [0,1]$.

Definição A.6.2. Seja (X, d) espaço métrico, $U \subset X$ aberto e $H : \overline{U} \times [0,1] \to X \mid (x,t) \mapsto H(x,t)$. H é <u>uniformemente contração em x</u> se, $\exists L \in [0,1)$ tal que $\forall t \in [0,1]$, H_t é contração com constante L, isto é, tal que $d\Big(H_t(x), H_t(y)\Big) < L \cdot d(x,y)$, $\forall x, y \in \overline{U}$.