Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Gabriel Asvolinsque Godinho

Estrutura esbelta unidimensional sob grandes deslocamentos e condições de plastificação - Solução analítica

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio.

Orientador: Carlos Alberto de Almeida

Rio de Janeiro
Dezembro de 2016

Agradecimentos

A Deus e à minha família por me darem a oportunidade de estudar.

Ao meu prezado orientador, professor Almeida; aos amigos Tomás e Mariana, pelo auxílio mútuo durante a graduação; ao Baja PUC-Rio; ao dr. Alexandre e ao IEPUC; aos amigos Leandro, Gabriel, Vinicius, Ana, Ricardo, Victor, Lucas, Matheus, Pedro e Thiago; e a todos os meus colegas da faculdade e do colégio.

Resumo

Estrutura esbelta unidimensional sob grandes deslocamentos e condições de plastificação - Solução analítica

Vigas são elementos estruturais amplamente utilizados na sustentação de pórticos. Um dos modelos mais utilizados no seu dimensionamento mecânico resulta das equações derivadas por Euler-Bernoulli, adequado para a representação de vigas elásticas no regime de pequenos deslocamentos. Com este trabalho, objetiva-se representar as equações que descrevem o comportamento no regime elasto-plástico de vigas esbeltas em balanço submetidas a grandes deslocamentos em flexão pura.

Palavras–chave

Viga em balanço; grandes deslocamentos; plastificação; encruamento; modelo bilinear; momento concentrado; análise analítica.

Abstract

Slender one-dimensional structure under great displacements and plastification conditions - Analytical solution

Beams are largely used as structural elements in gantries. One of the most used models in the mechanical design of beams results from the equations derived by Euler-Bernoulli, suitable to set the dimensions of elastic beams under small displacements. In this work, equations for the elastic-plastic behavior of slender cantilever beams under large displacements in pure bending are derived.

Keywords

Cantilever beam; great displacements; plastification; work hardening; bilinear model; concentrated moment; analytical analysis.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

1
Introdução

1.1
Lista de Símbolos

Tabela 1.1: Símbolos e variáveis utilizados

Símbolo	Descrição	Unidade de medida
x	Coordenada na direção horizontal da viga	m
y	Coordenada na direção vertical da viga	m
z	Coordenada na direção da largura da viga	m
u	Deslocamento da viga na direção x	m
v	Deslocamento da viga na direção u	m
y_e	Distância da linha neutra em que a plastificação começa	m
d	Altura da viga	m
h	Largura da viga	m
L	Comprimento da viga	m
I	Momento de inércia de área da seção transversal da viga	m^4
E	Módulo de elasticidade do material	Pa
E_p	Módulo de plasticidade do material	Pa
q	Carregamento	N/m
M	Momento fletor	Nm

Continua na página seguinte

Tabela 1.1 – continuação da página anterior

Símbolo	Descrição	Unidade de medida
κ	Curvatura da viga	m^{-1}
ρ	Raio de curvatura da viga	m
ρ_0	Raio do arco circunferência descrito pela linha neutra da viga	m
ϕ	Ângulo do arco de círculo descrito pela viga	rad
ϕ_y	Ângulo do arco de círculo descrito pela viga no qual o escoamento começa	rad
ϕ'	Ângulo residual do arco de círculo descrito pela viga	m
ϵ	Deformação da viga	m/m
ϵ_y	Deformação máxima que a viga suporta antes de escoar	m/m
ϵ_{res}	Deformação residual da viga	m/m
σ	Tensão normal que atua na viga	Pa
σ_y	Tensão de escoamento da viga	Pa
σ_{res}	Tensão normal residual na viga	Pa
τ	Tensão de cisalhamento que atua na viga	Pa

1.2 Vigas

Uma viga é um elemento estrutural em que uma das dimensões é muito maior do que as demais e pode ser submetido a esforços axiais e transversais ao seu comprimento. Tais esforços resultam em tensões no material e deformam a viga dando-lhe uma curvatura [1].

As figuras 1.1 e 1.2 ilustram o comportamento descrito anteriormente, quando uma carga transversal uniformemente distribuída atua em uma viga em balanço.

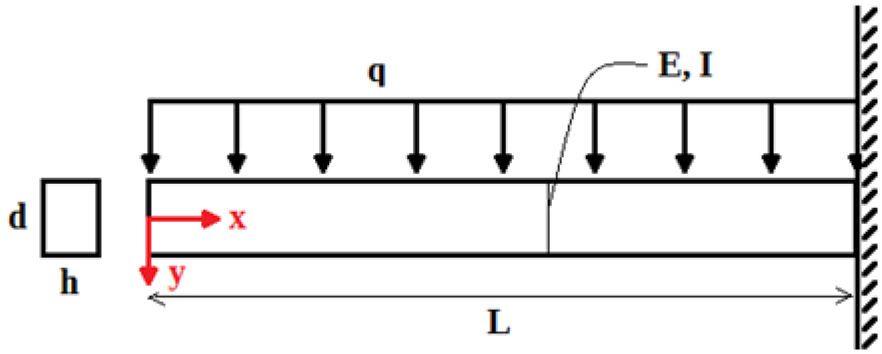

Figura 1.1: Esquema ilustrativo de uma viga retangular sob carregamento uniforme.

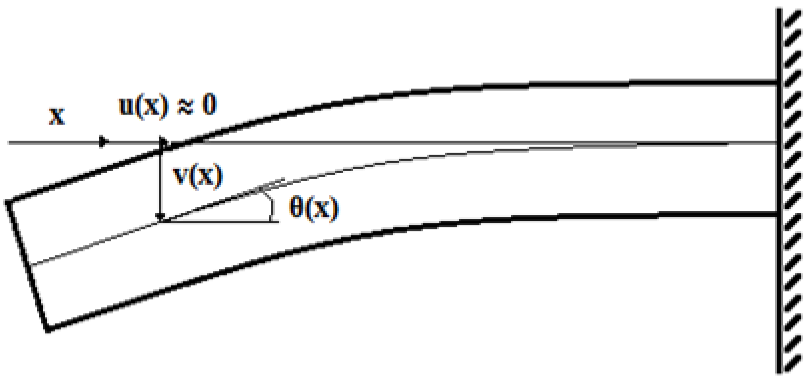

Figura 1.2: Variáveis que descrevem a viga deformada sob os efeitos do carregamento uniforme.

1.3 O Modelo Euler-Bernoulli

O modelo mais comumente utilizado para descrever o comportamento de vigas em flexão é o modelo de Euler-Bernoulli. Este modelo, que é uma simplificação das equações gerais da Teoria da Elasticidade[2], relaciona a deflexão obtida com o carregamento por uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem.

Nesse estudo, as seguintes hipóteses simplificadoras são utilizadas:

• A viga é prismática e seu comprimento é muito maior que as demais dimensões. ($\frac{L}{d} > 10$)

• A viga é constituída de um material homogênio isotrópico e no regime linearmente elástico.

• Seções transversais inicialmente perpendiculares à linha longitudinal da viga permanecem planas e perpendiculares depois da deformação.

• O ângulo de rotação da seção reta na posição deformada é pequeno. ($\sin(\phi) \approx \phi$ e $\cos(\phi) \approx 1$)

• A tensão de cisalhamento é desprezível quando comparada com as tensões normais longitudinais. ($\tau_{xy} \approx 0$)

Das condições de equilíbrio, compatibilidade geométrica e constitutiva, obtem-se a seguinte equação relativa ao deslocamento transversal $v(x)$ correspondente à curva de deflexão.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{1-1}$$

Considerando-se o carregamento externo uniforme atuante, o balanço de momentos em qualquer ponto da viga resulta em

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q \tag{1-2}$$

Combinando-se as equações (1-1) e (1-2), e considerando que a viga possui seção reta retangular e prismática ($EI = constante$), o problema é regido pela equação

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q}{EI} \tag{1-3}$$

Para o caso de viga engastada na base ($x = L$) e livre na outra extremidade ($x = 0$), devem ser impostas as seguintes condições de contorno:

$$v(L) = 0 \tag{1-4}$$

$$\frac{dv}{dx}(L) = 0 \tag{1-5}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}(L) = \frac{qL^2}{2} \tag{1-6}$$

$$\frac{d^3v}{dx^3}(L) = -qL \tag{1-7}$$

Da solução da equação diferencial (1-3) com as devidas condições de contorno, obtem-se para a deflexão da viga ao longo de seu comprimento,

$$v(x) = \frac{q\,(L-x)^2\,(3L^2 + 2Lx - x^2)}{24EI} \tag{1-8}$$

Também, o momento de inércia de área da seção transversal retangular é

$$I = \frac{hd^3}{12} \tag{1-9}$$

que levado à equação (1-8), chega-se à expressão final para deflexão de vigas retangulares sob carregamento externo uniforme q segundo as hipóteses de Euler-Bernoulli,

$$v(x) = \frac{q\,(L-x)^2\,(3L^2+2Lx-x^2)}{2hd^3E} \tag{1-10}$$

Da teoria de Euler-Bernoulli tem-se também que a relação entre a tensão axial que atua em um ponto da viga com o momento fletor na seção considerada é

$$\sigma(y) = \frac{My}{I} \tag{1-11}$$

Do balanço de momentos atuantes resulta a expressão do momento fletor, em função da coordenada da seção reta,

$$M(x) = \frac{-qx^2}{2} \tag{1-12}$$

Portanto, a tensão axial, na equação (1-11), é das coordenadas x e y e combinando-se as equações (1-9), (1-11) e (1-12), obtém-se

$$\sigma(x,y) = -\frac{6qx^2y}{hd^3} \tag{1-13}$$

1.4 O Modelo Bilinear de Plasticidade

Para a representação da curva tensão-deformação de um material elastoplastico com encruamento (figura 1.3), utiliza-se o modelo simplificado bilinear. Neste modelo, a região linear elástica do material é representada por uma reta de coeficiente angular, igual ao módulo de elasticidade do material (E), em que as tensões são limitadas à tensão de escoamento (σ_y) do material. A região plástica, representativa do comportamento não-linear do material, é também aproximada por uma reta cujo coeficiente angular é o módulo de plasticidade (E_p). Nesta região, a tensão menor é a de escoamento do material.

Neste estudo, considera-se o valor de E_p dado por:

$$E_p = \frac{E}{10} \tag{1-14}$$

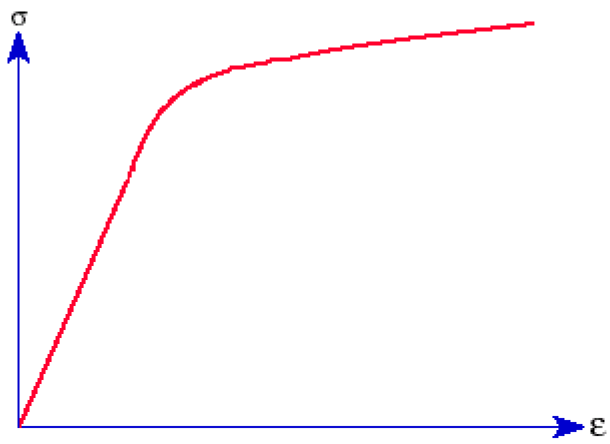

Figura 1.3: Curva de tensão x deformação real de um material elastoplastico que encrua.

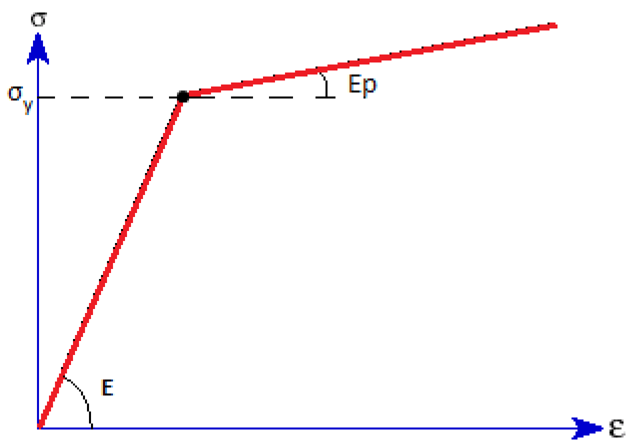

Figura 1.4: Curva tensão x deformação para o modelo bilinear de plasticidade.

2
Equacionamento

2.1
Descrição do problema

Neste trabalho, considera-se a análise de uma viga esbelta de seção retângular, em balanço e com um momento concentrado atuando na sua extremidade livre, conforme mostrado na figura 2.1.

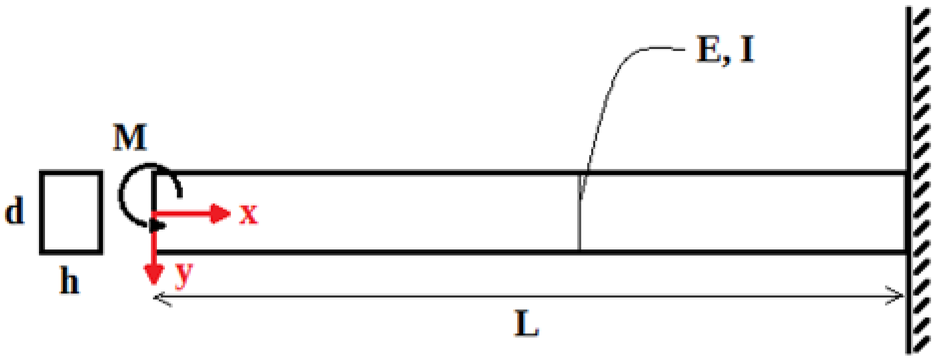

Figura 2.1: Parâmetros de definição do problema considerado.

Também considera-se que o carregamento aplicado é suficiente para provocar grandes deslocamentos na viga, permitindo o material ter um comportamento elasto-plástico.

Devido às não-linearidades geométricas e físicas do problema, o modelo de Euler-Bernoulli não é adequado para representar o comportamento dessa viga. Assim, para este estudo há a necessidade de se encontrar um novo conjunto de equações.

Neste caso, a solução analítica do problema deve ser obtida sob as seguintes considerações:

- O deslocamento da linha neutra em relação à linha média é desprezível.
- A existência de tensões cisalhantes foi desconsiderada ($\tau_{xy} \approx 0$).
- O material da viga é homogênio, isotrópico e bilinear.
- Por estar sob flexão pura, a viga, na configuração deformada, toma a forma de um arco de circunferência de raio constante.

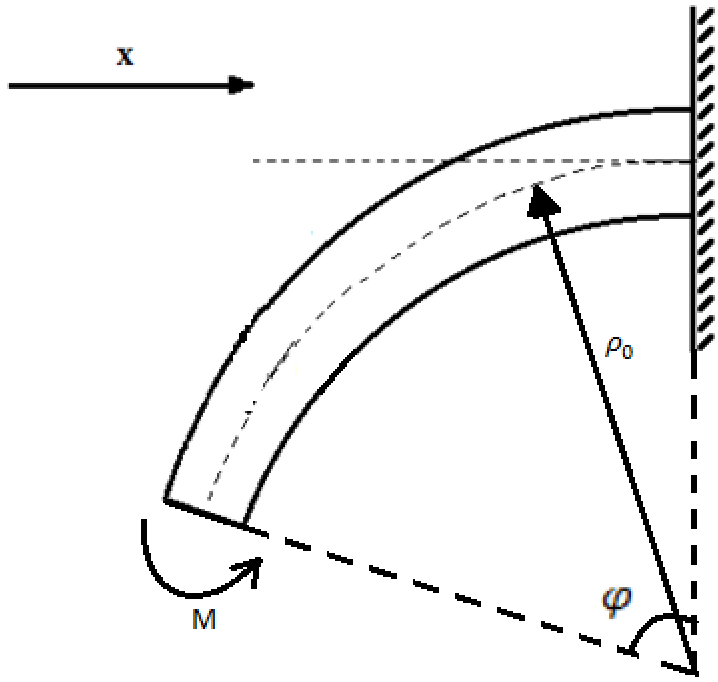

Figura 2.2: Viga do problema deformada.

2.2 Tensão e Deformação

Da mesma forma que o modelo linear, a deformação ao longo do perfil da viga pode ser escrita como

$$\epsilon(y) = \kappa y \tag{2-1}$$

em que curvatura de cada fibra horizontal da viga (κ) relaciona-se com o raio da linha longitudinal média (fibra neutra) ρ_0 pelas seguintes relações:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \tag{2-2}$$

$$\rho(y) = \rho_0 + y \tag{2-3}$$

Substituindo-se essas relações em (2-1), tem-se

$$\epsilon(y) = \frac{y}{\rho_0 + y} \tag{2-4}$$

Considerando-se a relação entre o ângulo central de um arco e seu raio de curvatura, tem-se

$$\phi = \frac{L}{\rho_0} \tag{2-5}$$

Que substituída em (2-4) resulta em

$$\epsilon(y) = \frac{y}{\frac{L}{\phi} + y} \tag{2-6}$$

Assim, a tensão na região elástica da viga pode ser obtida usando-se a lei de Hooke:

$$\sigma = E\epsilon \tag{2-7}$$

E, entâo,

$$\sigma(y) = \frac{Ey}{\frac{L}{\phi} + y} \tag{2-8}$$

Essa relação é válida no regime linear, i.e, $\sigma(y) \leq \sigma_y$.

Para o regime não-linear, considera-se a seguinte expressão $(\sigma(y) > \sigma_y)$,

$$\sigma(\epsilon) = \sigma_y + E_p\left(\epsilon - \epsilon_y\right) \tag{2-9}$$

que reescrita em função da coordenada y e usando a relação (2-10) abaixo, chega-se à equação final (2-11), para a tensão na região plástica.

$$\sigma_y = E\epsilon_y \tag{2-10}$$

$$\sigma(y) = \sigma_y + E_p\left(\frac{y}{\frac{L}{\phi} + y} - \frac{\sigma_y}{E}\right) \tag{2-11}$$

O ponto no perfil da viga, de coordenada y_e, em que o escoamento do material se inicia, resulta da equação (2-8),

$$y = \frac{\sigma(y)L}{\phi\left(E - \sigma(y)\right)} \tag{2-12}$$

e usando a relação $\sigma(y_e){=}\sigma_y$, a equação (2-12) pode ser reescrita como

$$y_e = \frac{\sigma_y L}{\phi\left(E - \sigma_y\right)} \tag{2-13}$$

Também da equação (2-13) obtem-se o ângulo central mínimo correspondente ao início do escoamento da viga.

$$\phi_y = \frac{\sigma_y L}{y_e\left(E - \sigma_y\right)} \tag{2-14}$$

O menor valor para ϕ_y é obtido de (2-14) quando y_e for máximo, i.e.,

$$\phi_y = \frac{2\sigma_y L}{d\left(E - \sigma_y\right)} \tag{2-15}$$

2.3 Momento e ângulo de deformação

O momento M necessário para fletir a viga sem que haja o escoamento do material $(\phi < \phi_y)$ é obtido da equação

$$\sigma = \frac{My}{I} \tag{2-16}$$

ou ainda

$$M = \frac{\sigma I}{y} \tag{2-17}$$

Considerando as equações (2-8) e (2-17) e considerando-se que a tensão máxima ocorre em $y = \frac{d}{2}$, tem-se:

$$M(\phi) = \frac{EI}{\frac{L}{\phi} + \frac{d}{2}} \tag{2-18}$$

Assim, a relação entre o momento aplicado na extremidade e o ângulo no qual a viga se deforma para os casos em que ocorre escoamento ($\phi > \phi_y$) é obtida integrando o perfil de tensões (equação de equilíbrio):

$$M = 2h \int_0^{\frac{d}{2}} \sigma(y) y dy \tag{2-19}$$

Logo, a equação (2-19) resulta em

$$\frac{M}{2h} = \int_0^{y_e} \left(\frac{Ey}{\frac{L}{\phi} + y} \right) y dy + \int_{y_e}^{\frac{d}{2}} \left(\sigma_y + E_p \left(\frac{y}{\frac{L}{\phi} + y} - \frac{\sigma_y}{E} \right) \right) y dy \tag{2-20}$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{2h} = E \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(y + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{y^2}{2} - \frac{yL}{\phi} \right]_0^{y_e} + \int_{y_e}^{\frac{d}{2}} y \sigma_y dy \\ + \int_{y_e}^{\frac{d}{2}} y E_p \left(\frac{y}{\frac{L}{\phi} + y} \right) dy - \int_{y_e}^{\frac{d}{2}} y E_p \left(\frac{\sigma_y}{E} \right) dy \end{aligned} \tag{2-21}$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{2h} = E \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(y + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{y^2}{2} - \frac{yL}{\phi} \right]_0^{y_e} + \left[\frac{\sigma_y y^2}{2} \right]_{y_e}^{\frac{d}{2}} \\ + E_p \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(y + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{y^2}{2} - \frac{yL}{\phi} \right]_{y_e}^{\frac{d}{2}} - \frac{E_p}{E} \left[\frac{\sigma_y y^2}{2} \right]_{y_e}^{\frac{d}{2}} \end{aligned} \tag{2-22}$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{2h} = E \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(y_e + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{y_e^2}{2} - \frac{L y_e}{\phi} \right] - E \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(\frac{L}{\phi} \right) \right] + \left[\frac{\sigma_y d^2}{8} \right] \\ - \left[\frac{\sigma_y y_e^2}{2} \right] + E_p \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(\frac{d}{2} + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{d^2}{8} - \frac{Ld}{2\phi} \right] \\ - E_p \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(y_e + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{y_e^2}{2} - \frac{L y_e}{\phi} \right] - \frac{E_p}{E} \frac{\sigma_y}{2} \left(\frac{d^2}{4} - y_e^2 \right) \end{aligned} \tag{2-23}$$

que rearrumado torna-se

$$\begin{aligned} \frac{M}{2h} = (E - E_p) \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(y_e + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{y_e^2}{2} - \frac{L y_e}{\phi} \right] - E \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(\frac{L}{\phi} \right) \right] \\ + \frac{\sigma_y}{2} \left(1 - \frac{E_p}{E} \right) \left(\frac{d^2}{4} - y_e^2 \right) + E_p \left[\frac{L^2}{\phi^2} \ln \left(\frac{d}{2} + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{d^2}{8} - \frac{Ld}{2\phi} \right] \end{aligned} \tag{2-24}$$

2.4 Descarregamento da Viga

Considerando-se agora o comportamento da viga ao se remover a carga aplicada, deve ser considerado que tensões residuais estarão presentes na viga descarregada, e esta não volta à sua posição original[3].

Assim, a equação (2-6) para a deformação da viga deve ser adaptada considerando-se um ângulo residual (ϕ')

$$\epsilon_{res}(y) = \frac{y}{\frac{L}{\phi'} + y} \tag{2-25}$$

Desta forma, a expressão para a tensão residual pode ser obtida usando-se a relação

$$\sigma(y) - \sigma_{res} = E\left(\epsilon(y) - \epsilon_{res}\right) \tag{2-26}$$

ou

$$\sigma_{res} = \sigma(y) - E\left(\epsilon(y) - \epsilon_{res}\right) \tag{2-27}$$

A expressão do valor da tensão residual na região ainda no regime elástico é obtida substituindo-se $\sigma(y)$ pelo valor na equação (2-7), que resulta em:

$$\sigma_{res} = E\epsilon_{res} \tag{2-28}$$

Logo,

$$\sigma_{res}(y) = \frac{Ey}{\frac{L}{\phi'} + y} \tag{2-29}$$

Já, para obter-se a tensão residual na região em que houve plastificação, substitui-se $\sigma(y)$ pelo valor mostrado na equação (2-11) resultando em

$$\sigma_{res}(y) = \sigma_y + E_p\left(\frac{y}{\frac{L}{\phi} + y} - \frac{\sigma_y}{E}\right) - E\left(\epsilon(y) - \epsilon_{res}\right) \tag{2-30}$$

e, portanto,

$$\sigma_{res}(y) = \sigma_y + \frac{E_p y}{\frac{L}{\phi} + y} - \frac{E_p \sigma_y}{E} - \frac{Ey}{\frac{L}{\phi} + y} + \frac{Ey}{\frac{L}{\phi'} + y} \tag{2-31}$$

A relação entre ϕ e ϕ' é obtida integrando-se o campo de tensões residuais considerando que o momento é nulo. Desta forma, resulta em

$$M = \int_{\frac{-d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sigma_{res}(y) h y dy \tag{2-32}$$

$$0 = 2h \int_{0}^{\frac{d}{2}} \sigma_{res}(y) y dy \tag{2-33}$$

$$0 = \int_0^{y_e} \frac{Ey^2}{\frac{L}{\phi'} + y} dy + \int_{y_e}^{\frac{d}{2}} \sigma_y y + E_p y \left(\frac{y}{\frac{L}{\phi} + y} - \frac{\sigma_y}{E} \right) - E\left(\epsilon(y) - \epsilon_{res}\right) dy \quad (2\text{-}34)$$

$$\begin{aligned} 0 = E & \left[\left(\frac{L}{\phi'} \right)^2 \ln \left(y + \frac{L}{\phi'} \right) + \frac{y^2}{2} - \frac{yL}{\phi'} \right]_0^{y_e} + \left[\frac{\sigma_y y^2}{2} \right]_{y_e}^{\frac{d}{2}} \\ +E_p & \left[\left(\frac{L}{\phi} \right)^2 \ln \left(y + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{y^2}{2} - \frac{yL}{\phi} \right]_{y_e}^{\frac{d}{2}} - \frac{E_p}{E} \left[\frac{\sigma_y y^2}{2} \right]_{y_e}^{\frac{d}{2}} \\ & -E \left[\left(\frac{L}{\phi} \right)^2 \ln \left(y + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{y^2}{2} - \frac{yL}{\phi} \right]_{y_e}^{\frac{d}{2}} \\ & +E \left[\left(\frac{L}{\phi'} \right)^2 \ln \left(y + \frac{L}{\phi'} \right) + \frac{y^2}{2} - \frac{yL}{\phi'} \right]_{y_e}^{\frac{d}{2}} \end{aligned} \quad (2\text{-}35)$$

$$\begin{aligned} & 0 = \frac{\sigma_y}{2} \left(1 - \frac{E_p}{E} \right) \left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 - y_e^2 \right) \\ +E & \left[(\frac{L}{\phi'})^2 \ln \left(\frac{d}{2} + \frac{L}{\phi'} \right) + \frac{d^2}{8} - \frac{Ld}{2\phi'} \right] - E \left[\left(\frac{L}{\phi'} \right)^2 \ln \left(\frac{L}{\phi'} \right) \right] \\ & + (E - E_p) \left[\left(\frac{L}{\phi} \right)^2 \ln \left(\frac{d}{2} + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{d^2}{8} - \frac{Ld}{2\phi} \right] \\ & - (E - E_p) \left[\left(\frac{L}{\phi} \right)^2 \ln \left(y_e + \frac{L}{\phi} \right) + \frac{y_e^2}{2} - \frac{Ly_e}{\phi} \right] \end{aligned} \quad (2\text{-}36)$$

Substituindo-se y_e da equação (2-13) em (2-36) obtem-se a expressão que relaciona o ângulo máximo que o carregamento conseguiu deformar a viga (ϕ) com o ângulo residual após o descarregamento (ϕ'). Esta equação, é válida para $\phi \geq \phi_y$.

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\sigma_y}{2}\left(1-\frac{E_p}{E}\right)\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_y L}{\phi\left(E-\sigma_y\right)}\right)^2\right) \\
+E\left[\left(\frac{L}{\phi'}\right)^2\ln\left(\frac{d}{2}+\frac{L}{\phi'}\right)+\frac{d^2}{8}-\frac{Ld}{2\phi'}\right]-E\left[\left(\frac{L}{\phi'}\right)^2\ln\left(\frac{L}{\phi'}\right)\right] \\
+\left(E-E_p\right)\left[\left(\frac{L}{\phi}\right)^2\ln\left(\frac{d}{2}+\frac{L}{\phi}\right)+\frac{d^2}{8}-\frac{Ld}{2\phi}\right] \\
-\left(E-E_p\right)\left[\left(\frac{L}{\phi}\right)^2\ln\left(\frac{\sigma_y L}{\phi\left(E-\sigma_y\right)}+\frac{L}{\phi}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_y L}{\phi\left(E-\sigma_y\right)}\right)^2-\frac{\sigma_y L^2}{\phi^2\left(E-\sigma_y\right)}\right]
\end{aligned}
\tag{2-37}
$$

3
Análise dos Resultados

3.1
Parâmetros

Para validar as equações obtidas no capítulo 2, foram realizadas análises com as mesmas através de gráficos e simulações.

Nessas análises utilizou-se uma viga de 10 metros de comprimento e com seção reta quadrada de 0,2 metros de altura e 0,5 metros de largura. O material desta viga tem o comportamento elastoplástico bilinear, com módulos de elasticidade e de plasticidade iguais, respectivamente, a 2 MPa e 0,2 MPa e cuja tensão de escoamento é 19746 Pa.

A viga foi carregada com um momento concentrado até deformar em um ângulo igual a π rad escoando durante esse processo e posteriormente descarregada ficando com um ângulo residual de, aproximadamente, $\frac{\pi}{2}$ rad, conforme mostra a figura 3.1.

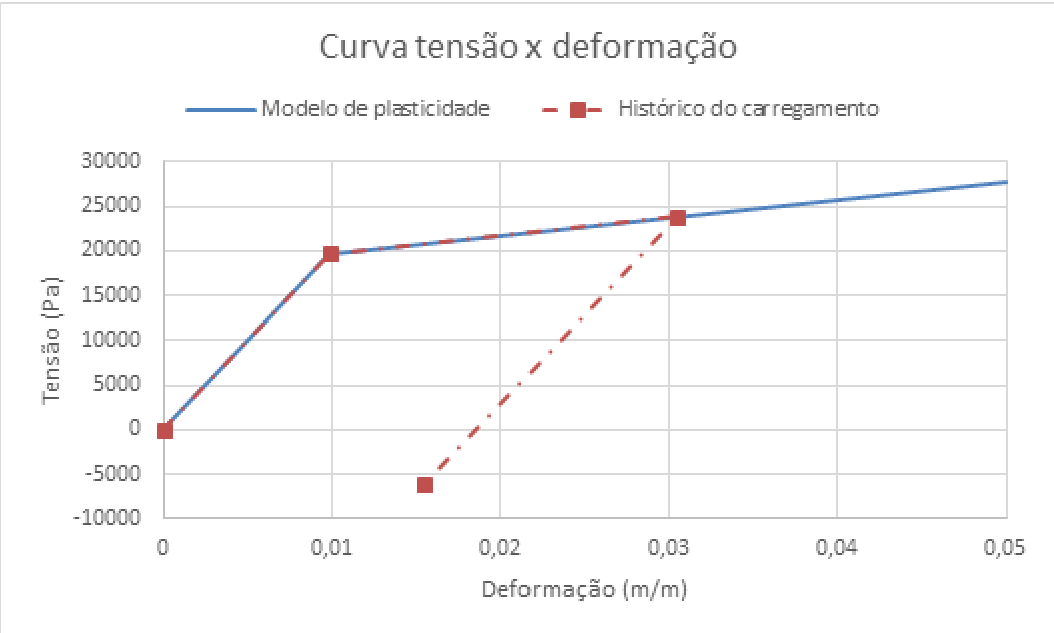

Figura 3.1: Modelo de plasticidade utilizado (em destaque, os pontos que representam as tensões e deformações na extremidade superior da viga após a aplicação dos esforços).

Com esses parâmetros, traçou-se o gráfico abaixo usando a equação 2-6:

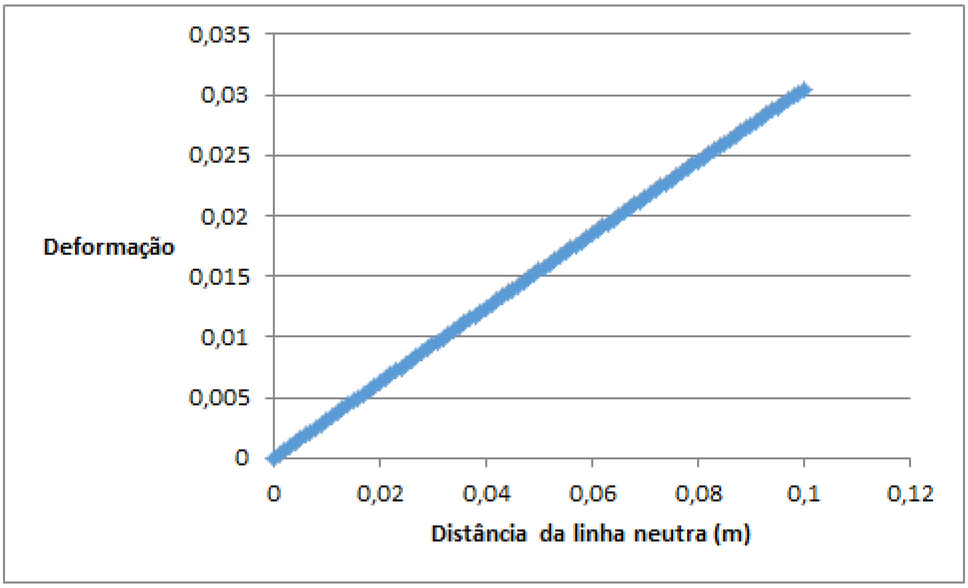

Figura 3.2: Deformação máxima da viga ao longo do perfil.

Apesar da equação da deformação (2-6) ser não linear, as dimensões esbeltas deixam a equação praticamente linear.

3.2
Resultado das simulações

Utilizando-se o programa de simulação ANSYS e o método dos elementos finitos[4] [5]. Obteve-se os seguintes resultados para um modelo de elemento tridimensional (3 graus de liberdade) com 20 elementos ao longo do comprimento, 1 ao longo da largura e 5 ao longo da autura, cada elemento contendo 20 pontos nodais :

A figura 3.3 apresenta uma comparação entre os resultados numéricos e analíticos para a posição da viga deformada no carregamento e no descarregamento. As diferenças obtidas em alguns pontos durante o descarregamento devem ser atribuídas ao refinamento utilizado com a malha.

Os resultados das equações para a tensão durante o carregamento (equações 2-8 e 2-11) são comparados com os resultados do ANSYS na figura 3.4. Como pode-se observar , as curvas analítica e numérica praticamente se sobrepõem. Também é mostrado que para ambas as soluções o valor da tensão em $y = 0$ é de zero, validando assim a hipótese de que o deslocamento da linha neutra é desprezível.

Na simulação, constatou-se que o momento necessário para deformar a viga em π rad era próximo de 106 Nm. Isso é comprovado pelas curvas resultantes das equações (2-18) e (2-24) notando-se que ela intercepta o ponto esperado, como mostra a figura 3.5.

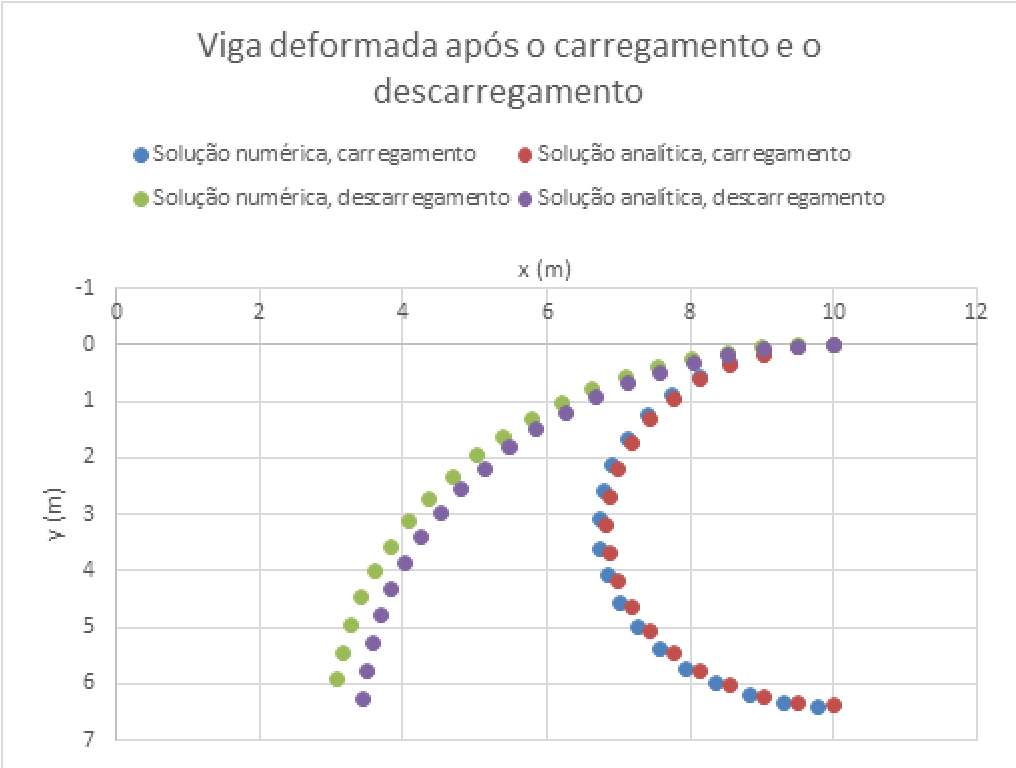

Figura 3.3: Deformação da viga após a aplicação e a remoção do momento na extremidade.

Finalmente, a figura 3.6 apresenta a relação do ângulo residual comparado com a equação (2-18) e, mais uma vez, houve concordância entre os resultados numéricos e analíticos.

Levando-se os parâmetros da viga na equação (2-15) obtem-se que o ângulo de deformação em que começa o escoamento é igual a 0,317π rad, que é o ponto de inflexão do gráfico da figura 3.6. Para valores menores, o ângulo residual é zero, já que não ocorre o escoamento do material. Para valores maiores, o gráfico é regido pela equação (2-18). Também, como esperado, a figura 3.6 mostra que apesar da equação (2-18) ser transcedental, no domínio do problema ela é linear, já que o gráfico tensão x deformação de um material elastoplástico é sempre linear durante o descarregamento.

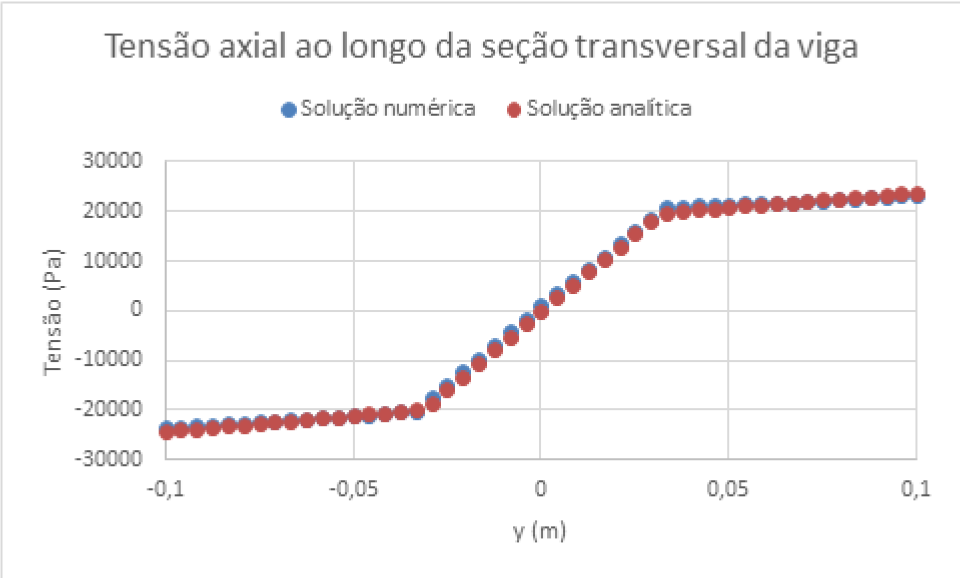

Figura 3.4: - Comparação entre os perfis de tensões ao longo da seção transversal da viga obtidos pelas soluções numérica e analítica.

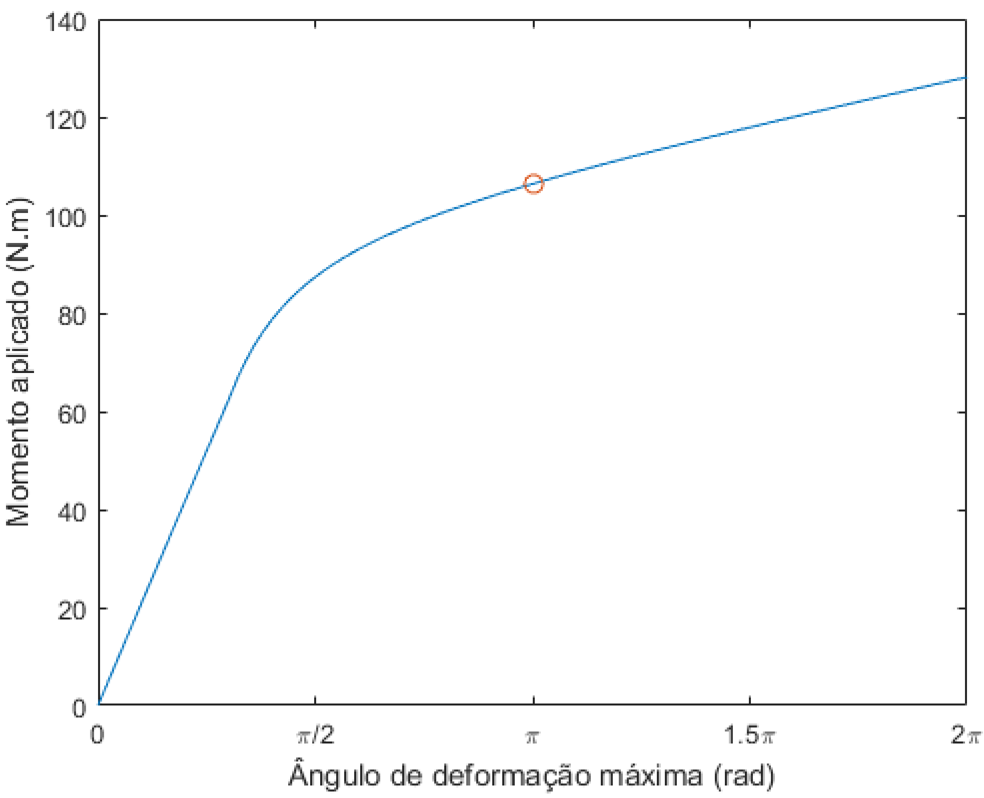

Figura 3.5: Relação entre momento e ângulo descrito pela viga deformada.

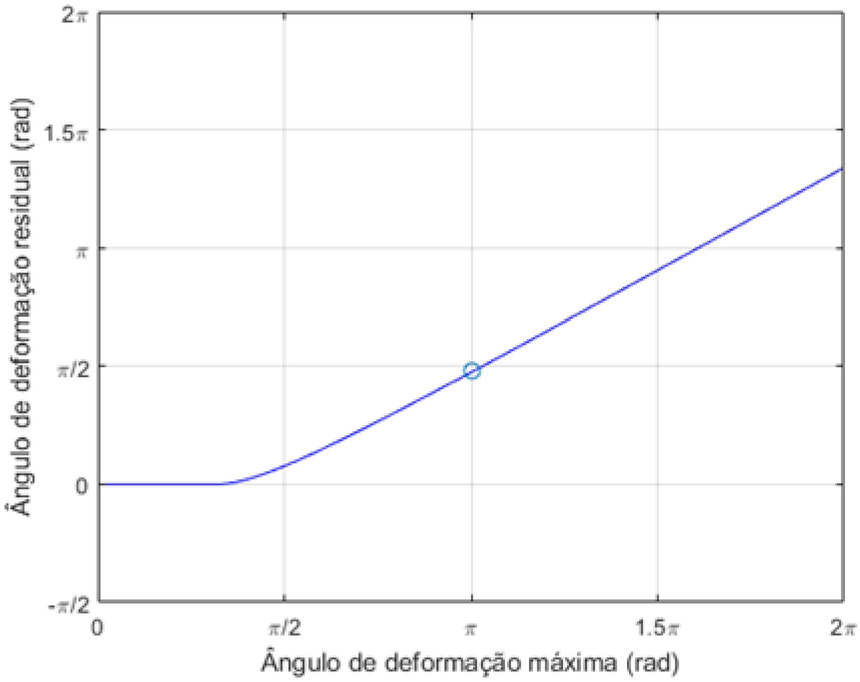

Figura 3.6: Relação entre os ângulos de deformação residual e máxima da viga.

4
Conclusão

O trabalho descreve, através de equações, as tensões e as deformações de uma viga reta em balanço, sob flexão pura. As hipóteses simplificadoras utilizadas no modelo analítico mostraram-se adequados à solução do problema.

O método dos elementos finitos e o programa ANSYS se mostraram muito eficientes e apropriados durante a avaliação dos resultados e permitiram corroborar as soluções analíticas e numéricas.

A utilização de modelos analítcos aliados às soluções com o método dos elementos finitos permitem a avaliação de um problema de engenharia possuindo não-linearidades físicas e geométricas, similares às que ocorrem frequentemente na prática da engenharia e, assim, servindo de plataforma para a solução de outros problemas com as mesmas não linearidades mas para diferentes condições de contorno.

Referências Bibliográficas

[1] GERE, J. M.; GOODNO, B. J. *Mecânica dos Materiais, tradução da 7a edição norte-americana*. Cengage Learning, 2010.

[2] TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Teoria da Elasticidade, 3a edição*. Editora Guanabara, 1980.

[3] CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M. A. *FADIGA - Volume II*. 2009.

[4] QUIRINO, T. S. Estrutura esbelta unidimensional sob grandes deslocamentos e condições de plastificação - análise numérica. 2016.

[5] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.