



Vivian de Araujo Dornelas Nunes

**Efeitos da aleatoriedade da rede de contatos
em dinâmicas de múltiplas escolhas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da PUC-Rio

Orientadora: Prof.^a Celia Beatriz Anteneodo de Porto

Rio de Janeiro
Março de 2016



Vivian de Araujo Dornelas Nunes

**Efeitos da aleatoriedade da rede de contatos
em dinâmicas de múltiplas escolhas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof.^a Celia Beatriz Anteneodo de Porto

Orientadora

Departamento de Física — PUC-Rio

Prof. Welles Antonio Martinez Morgado

Departamento de Física — PUC-Rio

Prof. Angelo Mondaini Calvão

UERJ

Prof. Marcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 22 de Março de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Vivian de Araujo Dornelas Nunes

Possui graduação - bacharelado - em Física pela Universidade Federal Fluminense (2013). Tem experiência na área de Física, com ênfase em Física Estatística e Sistemas Complexos, atuando principalmente nos seguintes temas: Física de não-equilíbrio e Processos Estocásticos.

Ficha Catalográfica

Nunes, Vivian de Araujo Dornelas

Efeitos da aleatoriedade da rede de contatos em dinâmicas de múltiplas escolhas / Vivian de Araujo Dornelas Nunes; orientador: Celia Beatriz Anteneodo de Porto. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Física, 2016.

v., 48 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Física) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Física.

Inclui referências bibliográficas.

1. Física – Dissertação. 2. Redes Complexas; Modelos de Opinião; Simulações computacionais; Pequeno-mundo. I. Porto, Celia Beatriz Anteneodo de . II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Física. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

À minha orientadora Celia Anteneodo pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho, por estar sempre presente e acessível e pela inspiração quanto ao tipo de pesquisadora que eu quero ser.

A Marlon Ramos, que colaborou com parte deste trabalho, pela paciência, os esclarecimentos e por sempre estar disposto a me ajudar.

Às pessoas que sempre estiveram dispostas a compartilhar conhecimentos me ajudando com as ferramentas necessárias à conclusão deste trabalho: Ângelo e Juan.

Ao meu amor, Renan, por me ajudar a manter a sanidade nos momentos mais desesperadores, por ser meu companheiro e por todas as discussões sobre física sempre enriquecendo minha trajetória profissional.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Às minhas irmãs e aos meus sobrinhos pelos momentos ímpares de relaxamento.

À Agência de fomento: CAPES, pela bolsa concedida, sem a qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

À Instituição pelo ambiente criativo e amigável que proporciona.

À todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha trajetória, o meu muito obrigada.

Resumo

Nunes, Vivian de Araujo Dornelas; Porto, Celia Beatriz Anteneodo de . **Efeitos da aleatoriedade da rede de contatos em dinâmicas de múltiplas escolhas**. Rio de Janeiro, 2016. 48p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Muitas vezes enfrentamos o desafio de escolher entre diferentes opções com atratividade semelhante como, por exemplo, na escolha de um candidato parlamentar, na escolha de um filme ou ao comprar um produto no supermercado. A fim de estudar a distribuição das preferências em tais situações, podemos considerar dinâmicas de opinião (com diversas opções possíveis, contemplando também os casos em que há indecisão) em redes. Neste trabalho, utilizamos duas dinâmicas distintas: uma envolvendo o contágio direto de cada sítio para a sua vizinhança (regra A) e a outra onde a opinião de cada sítio é definida pela maioria relativa local (regra B). A topologia da rede de contatos pode ter um efeito importante sobre a distribuição final de opiniões. Utilizamos as redes de Watts-Strogatz e, em particular, estamos interessados em investigar a contribuição da aleatoriedade p da rede no resultado final das dinâmicas. Dependendo das propriedades estruturais da rede e das condições iniciais, podemos ter diferentes resultados finais: equipartição de preferências, consenso e situações onde a indecisão é relevante. O papel da aleatoriedade da rede é não trivial: para um número pequeno de opiniões, as regras A e B (esta última com atualização síncrona) apresentam um valor ótimo de p , onde o domínio da opinião vencedora é máximo. Já para a regra da pluralidade com atualização assíncrona, o aumento do número de atalhos pode até mesmo promover situações de consenso. Além disso, as duas dinâmicas (e seus diferentes modos de atualização) coincidem para baixa desordem da rede, mas diferem para graus de desordem maiores. Observaremos também que a quantidade de iniciadores diminui a fração da opinião vencedora para todas as dinâmicas e atenua o máximo local que aparece na região de mundo pequeno.

Palavras-chave

Redes Complexas; Modelos de Opinião; Simulações computacionais; Pequeno-mundo .

Abstract

Nunes, Vivian de Araujo Dornelas; Porto, Celia Beatriz Anteneodo de (advisor). **Effects of contact network randomness on multiple opinion dynamics**. Rio de Janeiro, 2016. 48p. MsC Dissertation — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

People often face the challenge of choosing amongst different options with similar attractiveness, such as when choosing a parliamentary candidate, a movie or buying a product in the supermarket. In order to study the distribution of preferences in such situations, we can consider opinion dynamics (where different options are available as well as the undecided state) in network. In this work, we use two different opinion dynamics: one involving the direct contagion from each site to its neighborhood (rule A) and another where the opinion of each site is defined by the local relative majority (rule B). The contact network topology can have a important effect in the final distribution of opinions. We use the Watts-Strogatz network and, in particular, we are interested in investigating the contribution of the network randomness p in the output of the dynamics. Depending on the structural properties of the network and the initial conditions, the final distribution can be: equipartition of preferences, consensus and situations where indecision is relevant. The role of network randomness is nontrivial: for a small number of opinions, the rules A and B (the latter with synchronous update) present an optimum value of p , where the predominance of a winning opinion is maximal. Moreover, for the plurality rule with asynchronous update, the increase of the number of shortcuts can even promote consensus situations. Furthermore, both dynamics coincide for small disorder of the network, but differ for larger disorder. Also we observe that the number of initiators decreases the value of the winning fraction in all types of dynamics and attenuates the local maximum that appears in the small-world region.

Keywords

Complex Networks; Opinion Models; Computer Simulations; Small-world .

Sumário

1	Introdução	8
2	Redes complexas	12
2.1	Medidas de redes	13
2.2	Classificação das redes	17
3	Dinâmicas de opiniões	29
3.1	Regra A	30
3.2	Regra B	31
4	Resultados	33
4.1	Efeitos da aleatoriedade da rede	36
4.2	Dependência com a conectividade	39
4.3	Influência das quantidades de iniciadores em função do p	41
5	Conclusões e observações finais	43
	Referências Bibliográficas	45

1

Introdução

“I think the next century will be the century of complexity.”

Stephen Hawking (January 2000)

O cérebro é um dos sistemas mais intrincado que conhecemos. Seu papel central é desempenhado por uma rede de neurônios interligados. Esta rede é composta por uma quantidade de neurônios da ordem de 10^{11} (aproximadamente 100 bilhões), onde cada neurônio está conectado com cerca de 10^4 outros neurônios, com os quais trocam pulsos elétricos [1].

É curioso, no entanto, que cada neurônio, individualmente, possua um comportamento simples: se a soma dos pulsos recebidos ultrapassar um certo limite, ele emite outro pulso, senão, não haverá emissão. Esses pulsos elétricos são transmitidos pela rede de neurônios através de conexões conhecidas como sinapses. E cada um desses neurônios só pode estar associado a um estado: ativo ou passivo.

Ainda que o comportamento de cada um desses neurônios seja simples, o comportamento emergente desse sistema constitui a atividade cerebral e é altamente complexa [1, 2]. Sistemas como esse em que o comportamento global não pode ser previsto a partir da análise dos seus constituintes, são conhecidos como Sistemas Complexos.

Ainda que não haja uma definição consensual para sistemas complexos, há algumas propriedades que os caracterizam, podendo ser encontradas em maior ou menor grau de acordo com o sistema. Vejamos algumas:

1. São formados por um grande número de agentes que interagem de forma não-linear.
2. Apresentam comportamentos globais emergentes, que não são facilmente previsíveis do conhecimento das interações locais, e que surgem por auto-organização, sem necessidade de um controle central.
3. Podem ser muito sensíveis às condições iniciais.
4. Podem apresentar não ergodicidade: médias sobre configurações e médias temporais tipicamente não coincidem.

Em Sistemas Complexos, a estrutura da rede de interações entre os elementos do sistema é fundamental para o tipo de comportamento global que

o sistema pode exibir. Uma rede (ou grafo) é uma representação simplificada que reduz um sistema para uma estrutura abstrata capturando apenas o básico de padrões de conexão.

Nessa dissertação, vamos estudar um problema de dinâmica social ou *sociofísica* [3] – esse tópico, já há um tempo, tem se destacado na Física Estatística; e como substrato para a dinâmica, iremos utilizar *redes sociais* – redes onde vértices representam pessoas, e as ligações representam as interações sociais. Note que a distância espacial entre os elementos não é muito relevante nesse caso. Existe grande variedade entre o número de vizinhos (ou conectividade) de cada sítio. Portanto, não podemos fazer uso de redes regulares; há uma aleatoriedade que é inerente do sistema. Redes sociais são um exemplo do que chamamos de redes complexas: grafos que exibem propriedades topológicas não triviais.

Mais especificamente, vamos estudar uma *dinâmica de opinião*: os sítios da rede têm como estado uma *opinião* e através da interação com a vizinhança próxima, podemos ter transições entre esses estados (ou mudanças de opinião). As transições são governadas por uma regra apropriada ao problema de interesse; nos últimos anos diversas regras foram propostas na literatura[4–23].

Grande parte dos modelos de opinião propostos na literatura de sociofísica consideram uma variável binária, já que muitos problemas podem ser analisados através da suposição de que somente duas opções (contra ou a favor) são necessárias.

No entanto, em muitas situações cotidianas temos que escolher uma opção dentre várias disponíveis com atratividade semelhantes como, por exemplo, na escolha de um candidato parlamentar, na escolha de um filme ou ao comprar um produto no supermercado.

Dados da Mintel, agência que fornece dados de pesquisa de mercado, afirmam que, de janeiro até a primeira quinzena de dezembro de 2014, 345.626 novos produtos foram lançados no mundo [24]. Isso nos leva ao problema de múltiplas escolhas, podendo encontrar diversas opções de produtos de uma mesma categoria onde consideraremos casos em que nenhum deles oferece muita vantagem em relação aos demais. Ao nos encontrarmos em uma situação como esta, se não conhecemos nenhum dos produtos oferecidos, tendemos a escolher um que tenha sido indicado por algum amigo. Pode haver casos em que cada amigo proponha o uso de determinado produto e, então, continuamos indecisos. Entretanto, poucos trabalhos de dinâmica social abordam essa possibilidade [14, 15, 25, 26], onde um agente tem que escolher uma dentre várias opções disponíveis. Essas observações nos motivaram a estudar o problema de múltiplas escolhas.

A metodologia usada na dissertação é fundamentalmente computacional. Serão consideradas duas dinâmicas de opinião, bem distintas, que contemplem a possibilidade de *múltiplas escolhas*: a proposta por Travieso e Fontoura [27] (Regra A) e a regra da pluralidade [28] (Regra B). No primeiro caso, o contágio de preferências ocorre de um indivíduo decidido para seus vizinhos na rede contatos. No segundo, a transmissão de preferências ocorre no sentido oposto, da vizinhança para o indivíduo.

A importância dos trabalhos na área de dinâmica social se reflete em aplicar uma modelagem matemática ou estatística que explique, e permita prever, como as pessoas se comportam e se organizam. No nosso caso, queremos investigar, mediante simulações computacionais, os efeitos da aleatoriedade da rede de contatos na distribuição final de preferências da população, quando existem várias opções de atratividade semelhante. Para tal, usaremos como protótipo de rede de conexões entre indivíduos o modelo de rede proposto por Watts e Strogatz [29], pois ele consegue reproduzir as *propriedades de pequeno mundo* que as redes sociais reais apresentam. Nesse modelo, podemos ajustar o nível de aleatoriedade da rede, através de um parâmetro p , refazendo ligações a partir de uma rede regular.

Com mais detalhe: para caracterizar a distribuição de alternativas final na população, computaremos a fração de indivíduos que adotaram a alternativa com mais adeptos e a fração de indivíduos indecisos. Essas grandezas podem ser influenciadas pelo grau de aleatoriedade da rede ou por sua conectividade média, ou até mesmo, pelas condições iniciais do sistema. Portanto, variaremos esses fatores.

Veremos que as duas dinâmicas estudadas podem ter como resultado diferentes configurações finais, tais como equipartição de preferências, consenso, ou ainda, casos em que a quantidade de indivíduos indecisos é expressiva.

Partiremos de uma configuração inicial da rede com determinada quantidade de agentes iniciadores em posições escolhidas aleatoriamente (para não obterem vantagens topológicas). São os iniciadores os responsáveis pela divulgação das opiniões. Os demais agentes serão considerados como indecisos. Usaremos aqui sempre a mesma quantidade de iniciadores por opção para que nenhuma comece em vantagem. Desta forma, as opções se espalharão pela rede seguindo as regras dinâmicas mencionadas acima.

Para a regra A, com propagação de opiniões do indivíduo para seus vizinhos, a atualização é feita de forma assíncrona, sendo atualizado um grupo de vizinhos de cada vez.

Já para a regra B, em que o contágio é da vizinhança local para um dado

indivíduo, teremos duas formas de atualização: assíncrona e síncrona.

O restante da dissertação será organizado como segue. No Capítulo 2, mostraremos exemplos de redes reais e suas propriedades e estudaremos as principais medidas para analisá-las. Veremos também uma classificação das redes de contatos, abrangendo as redes regulares, aleatórias e as de pequeno mundo. Para as redes de pequeno mundo, será apresentada a contextualização histórica, destacando suas principais propriedades.

No Capítulo 3, descreveremos em detalhe as duas dinâmicas de opinião escolhidas, assim como os dois tipos de atualização mencionados acima.

Após estas definições teremos os resultados mostrados no Capítulo 4, onde basicamente estudaremos o efeito da aleatoriedade da rede, da conectividade média, do tamanho da rede, do número de alternativas, assim como das condições iniciais, sobre as configurações finais.

Finalmente, no último capítulo, discutiremos as conclusões relevantes deste trabalho.

2

Redes complexas

Para tratar sistemas complexos podemos fazer uma modelagem a fim de analisar e entender melhor o seu comportamento. Muitas vezes fazemos isso representando os sistemas como redes complexas, ou seja, redes que exibem propriedades “não triviais”, mais notavelmente, distribuição larga de conectividade [30], alto coeficiente de aglomeração e pequena distância média entre vértices [29]. Estas são propriedades que aparecem em redes reais.

Uma rede é uma representação simplificada que reduz um sistema para uma estrutura abstrata capturando apenas o básico de padrões de conexão, que permite codificar como ocorrem as interações entre pares de objetos. Nós e ligações em uma rede podem ser marcados com informações adicionais, tais como estados ou intensidade das ligações, respectivamente, para capturar mais detalhes do sistema [31].

Na Tab. 2.1 vemos alguns exemplos de redes complexas com seus respectivos nós e ligações.

Rede	Nó	Ligação
Internet	Computador ou roteador	Cabo ou conexão wireless
World Wide Web	Página web	Hyperlink
Rede de citação	Artigo, patente	Citação
Rede elétrica	Estações geradoras ou subestações	Linha de transmissão
Rede de relacionamentos	Pessoa	Amizade
Rede metabólica	Metabólito	Reação metabólica
Rede neural	Neurônio	Sinapse
Cadeia alimentar	Espécies	Predação

Tabela 2.1: Alguns exemplos de nós e ligações retirados da Ref. [31].

Na Fig. 2.1 temos, como exemplo de redes complexas, a Rede de Doenças Humanas retirado da Ref. [32], onde cada círculo corresponde a uma doença distinta e os pequenos quadrados (quase imperceptíveis devido à escala da imagem) correspondem aos genes que eles têm em comum. A rede foi colorida com base na classe de doença para o qual ele pertence. O nome das 22 classes de doença está sendo mostrado na parte inferior da figura. O tamanho de cada nó é proporcional ao número de genes que participam da doença correspondente. A figura indica o nome de doenças com mais de 10 genes associados.

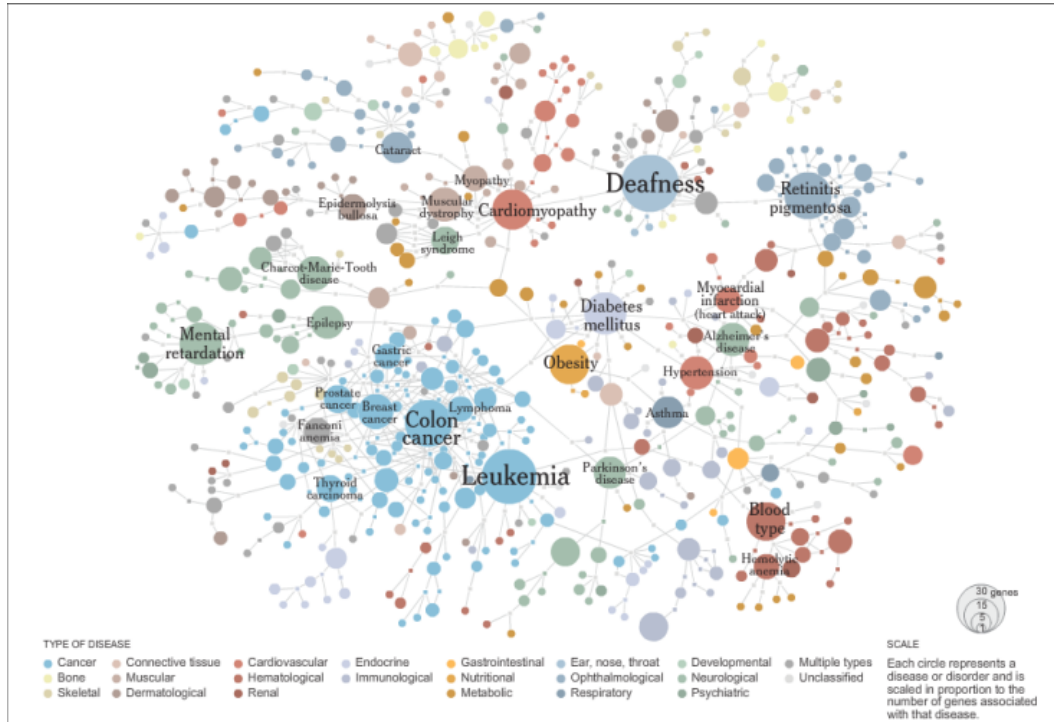


Figura 2.1: Retirada da Ref. [32] mostra a rede de doenças humanas que relaciona os tipos de transtorno com os genes que eles têm em comum.

As redes podem ser direcionadas ou não direcionadas. No primeiro caso as linhas obedecem um sentido, por exemplo, uma chamada telefônica ou uma mensagem são direcionados de uma pessoa para outra. Já as redes não direcionadas não possuem um sentido, temos apenas uma conexão entre os dois nós, como no caso em que temos uma rede de atores que são conectados caso tenham trabalhado junto em um mesmo filme.

2.1

Medidas de redes

Veremos a seguir alguns parâmetros básicos das redes complexas e nos ateremos as definições usadas em casos de redes não direcionadas.

2.1.1

Tamanho, número de ligações e grau médio

O *tamanho da rede*, que representaremos por N , é o número de componentes do sistema. O *grau* de um nó k_i (ou conectividade) representa a quantidade de linhas conectadas a esse nó e o *grau médio* é definido como a média aritmética dos graus de todos os nós:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i. \quad (2-1)$$

Na Fig. 2.2 vemos a representação de uma rede com $N = 8$ nós, bem como medidas de graus de alguns nós e o grau médio:

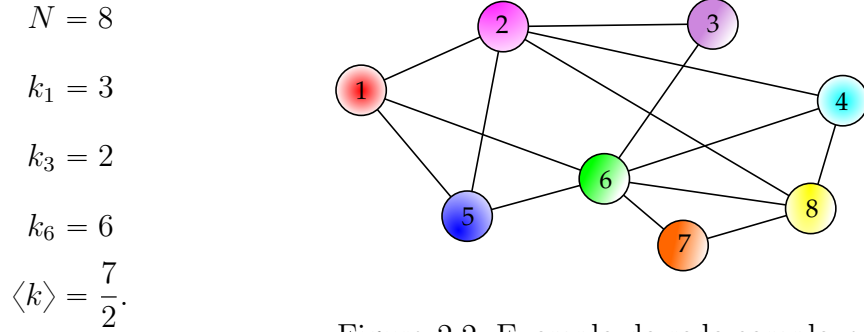


Figura 2.2: Exemplo de rede complexa

O *número total de ligações* será representado por m e pode ser calculado a partir de outros parâmetros da rede através da relação: $m = \frac{N\langle k \rangle}{2}$.

Seja uma rede onde N_k é o número de vértices com grau k . A *distribuição de grau* é uma função de distribuição de probabilidade que indica a probabilidade de um determinado nó ter um grau fixo k , $p_k = \frac{N_k}{N}$.

Há também a função de distribuição cumulativa de probabilidade, onde se mede a probabilidade de escolher um nó aleatório com grau k ou maior. A função de distribuição cumulativa [31] é definida por:

$$P_k = \sum_{k'=k}^{\infty} p_{k'}. \quad (2-2)$$

2.1.2

Caminhos e distâncias em redes

Caminho é uma sequência de nós tal que cada nó é conectado ao próximo por uma ligação e o comprimento do caminho é dado pelo número de ligações percorridas. Na Fig. 2.3 um caminho possível entre o nó 1 e o nó 4 é representado de vermelho e tem comprimento quatro. O caminho representado de azul é o menor caminho entre 1 e 4 (note que o menor caminho não é único), logo é definido como sendo a *distância geodésica* entre esses dois pontos, onde $d_{1,4} = 2$.

O *diâmetro* d é definido como a maior distância geodésica da rede, ou seja, $d = \max\{d_{i,j}\}$ (na Fig. 2.3, $d = d_{2,7} = 2$).

A *menor distância média*, representada por L , é a média das distâncias geodésicas entre todos os pares de nós da rede. Ela nos mostra, em média, o

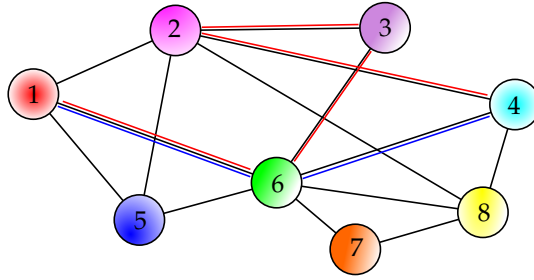


Figura 2.3: Exemplo de um caminho qualquer (em vermelho) e o menor caminho (em azul) entre os nós 1 e 4.

número de passos que leva para ir de um nó da rede para outro.

$$L = \langle d \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N d_{i,j}. \quad (2-3)$$

Para o caso da rede da Fig. 2.3, teremos:

$$\begin{aligned} L &= \frac{2}{8 \cdot 7} (d_{1,2} + d_{1,3} + d_{1,4} + \dots + d_{7,8}) \\ L &= \frac{2}{8 \cdot 7} (14 \cdot 1 + 13 \cdot 2 + 3) \simeq 1,54. \end{aligned}$$

Se estamos trabalhando com uma rede grande, esse cálculo pode se tornar muito complicado, mas existem algoritmos para auxiliar nestes cálculos. O algoritmo que usaremos será o de busca em largura, conhecido como BFS (do inglês breath first search) [33].

2.1.3

Coefficiente de aglomeração

O *coeficiente de aglomeração* de um nó i , denotado por C_i , foi definido na Ref. [29], é a probabilidade de que dois vizinhos desse nó, selecionados aleatoriamente, tenham uma ligação um com o outro. Podemos medi-lo através da seguinte expressão

$$C_i = \frac{2m_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (2-4)$$

onde m_i representa o número de conexões entre os vizinhos do nó i .

O cálculo do *coeficiente de aglomeração médio* da rede $\langle C \rangle$ se faz através da média entre os coeficientes calculados para cada nó:

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i. \quad (2-5)$$

Destacamos alguns nós da Fig. 2.2 com seus respectivos vizinhos e os representamos na Fig. 2.4. As linhas azuis representam as conexões entre o nó em que queremos avaliar o coeficiente de aglomeração e seus vizinhos, enquanto as linhas vermelhas correspondem às conexões entre os vizinhos. Podemos observar assim que $C_1 = \frac{2}{3}$, $C_3 = 0$ e $C_6 = \frac{1}{5}$. Fazendo o mesmo para todos os nós e tirando a média encontraremos $\langle C \rangle = \frac{39}{80} = 0.4875$ para a Fig. 2.2, de acordo com essas definições.

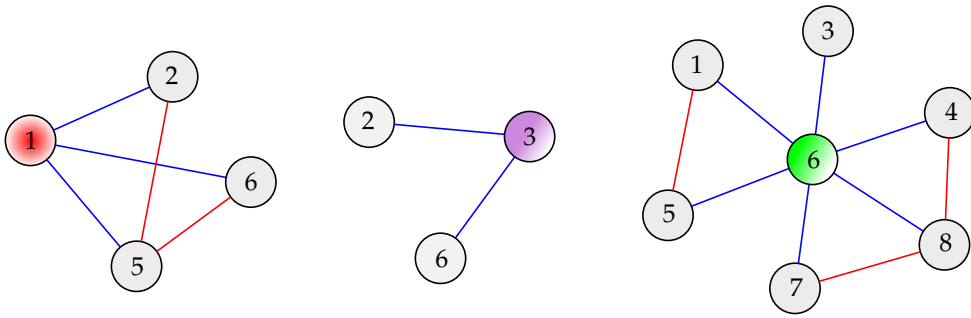


Figura 2.4: Aqui representamos alguns nós reordenados da Fig. 2.2 de forma a obter uma melhor visualização dos coeficientes de aglomeração desses nós. As linhas azuis representam conexões do nó com os vizinhos e as linhas vermelhas representam as conexões entre os vizinhos.

Além disso podemos definir o *coeficiente de aglomeração global*, que é proporcional ao número total de triângulos fechados em uma rede, da seguinte forma:

$$C = \frac{3 \times \text{número de triângulos}}{\text{número de trios conectados}}, \quad (2-6)$$

onde “trios conectados” correspondem aos trios de nós conectados por dois (trio aberto) ou três (trio fechado) conexões não direcionadas [34].

As definições de coeficiente de aglomeração médio e global não são equivalentes. Enquanto o global fornece uma visão geral do agrupamento da rede, o médio nos dá uma indicação das conexões dos nós individualmente.

2.1.4

Densidade de ligações

Chamamos *rede densa* àquela em que o número de ligações de cada nó é próximo do número máximo de nós, ou seja, cada nó está ligado a quase

todos os outros nós. Se todos os nós estão ligados entre si, dizemos que a rede é totalmente conectada. Em uma *rede esparsa*, por sua vez, cada nó está ligado a um número reduzido de nós.

Para medir a densidade de conexões D de uma rede, calcula-se a proporção de ligações m existentes para o número total de ligações possíveis. Para uma rede de N nós, a densidade de ligação de rede é

$$D = \frac{m}{m_{\max}} = \frac{2m}{N(N-1)}, \quad (2-7)$$

onde m_{\max} é igual ao número de pares em uma rede com N sítios.

A densidade de ligação D de uma rede completamente conectada é 1.

A seguir vemos uma tabela onde exemplificamos algumas dessas propriedades, que foram medidas para algumas redes reais. A Tab. 2.2 foi adaptada da Ref. [31] onde pode ser encontrado inclusive as referências dos artigos de cada rede citada na tabela. Encontra-se listado: a rede, o seu tipo (direcionada D ou não direcionada ND), o tamanho da rede N , a quantidade de ligações m , a densidade D (calculada pela Eq. 2-7), o grau médio $\langle k \rangle$, a menor distância média L , o coeficiente de aglomeração global C e o médio $\langle C \rangle$, bem como a classificação temática das redes (social, informação, tecnológica ou biológica).

2.2

Classificação das redes

Na Fig. 2.5 temos 3 redes criadas com o mesmo tamanho e número de ligações. Veremos que as redes apresentam propriedades diferentes.

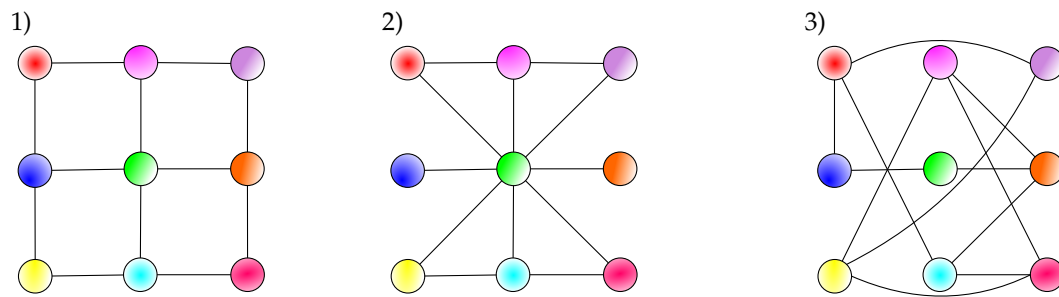


Figura 2.5: Três exemplos de rede com mesmo N e m porém com propriedades diferentes, listadas na Tab. 2.3.

Na rede 2 da figura, por possuir um menor L , uma informação se propagaria com mais facilidade do que nas demais, além de ser a rede com mais vizinhos conectados entre si, ou seja, com maior C . Podemos ver tais propriedades na Tab. 2.3.

	Rede	Tipo	N	m	D	$\langle k \rangle$	L	C	$\langle C \rangle$
Social	Film actors	ND	449 913	25 516 482	0.00025	113.43	3.48	0.20	0.78
	Company directors	ND	7 673	55 392	0.00188	14.44	4.60	0.59	0.88
	Math coauthorship	ND	253 339	496 489	0.00001	3.92	7.57	0.15	0.34
	Physics coauthorship	ND	52 909	245 300	0.00017	9.27	6.19	0.45	0.56
	Biology coauthorship	ND	1 520 251	11 803 064	0.00001	15.53	4.92	0.088	0.60
	Telephone call graph	ND	47 000 000	80 000 000		3.16			
	Email messages	D	59 812	86 300	0.00005	1.44	4.95		0.16
	Email address books	D	16 881	57 029	0.00040	3.38	5.22	0.17	0.13
Information	Student dating	ND	573	477	0.00273	1.66	16.01	0.005	0.001
	www.nd.edu	D	269 504	1 497 135	0.00004	5.55	11.27	0.11	0.29
	www AltaVista	D	203 549 046	1 466 000 000		7.20	16.18		
	Citation network	D	783 339	6 716 198	0.00002	8.57			
	Roget's Thesaurus	D	1 022	5 103	0.00978	4.99	4.87	0.13	0.15
Technological	Word co-occurrence	ND	460 902	16 100 000	0.00001	66.96			0.44
	Internet	ND	10 697	31 992	0.00056	5.98	3.31	0.035	0.39
	Power grid	ND	4 941	6 594	0.00054	2.67	18.99	0.10	0.080
	Train routes	ND	587	19 603	0.11398	66.79	2.16		0.69
	Software packages	D	1 439	1 723	0.00166	1.20	2.42	0.070	0.082
	Software classes	D	1 376	2 213	0.00234	1.61	5.40	0.033	0.012
	Electronic circuits	ND	24 097	53 248	0.00018	4.34	11.05	0.010	0.030
Biological	Peer-to-peer network	ND	880	1 296	0.00335	1.47	4.28	0.012	0.011
	Metabolic network	ND	765	3 686	0.01261	9.64	2.56	0.090	0.67
	Protein interactions	ND	2 115	2 240	0.00100	2.12	6.80	0.072	0.071
	Marine food web	D	134	598	0.06711	4.46	2.05	0.16	0.23
	Freshwater food web	D	92	997	0.23817	10.84	1.90	0.20	0.087
	Neural network	D	307	2 359	0.05022	7.68	3.97	0.18	0.28

Tabela 2.2: Tabela com valores de propriedades de redes reais adaptados da Ref. [31]. São listados algumas redes sociais, de informação, tecnológicas e biológicas, com seus respectivos tipos (direcionadas D ou não ND), tamanho, quantidade de ligações, densidade, grau médio, menor distância média, e coeficientes de aglomeração global e médio.

Logo, conhecer algumas grandezas da rede, como N , $\langle k \rangle$ ou m , não é o suficiente para entendermos suas propriedades. Podemos então criar algumas classificações de Redes Complexas em relação a determinadas propriedades estatísticas que ela possua (como a distribuição de graus e o coeficiente de aglomeração), para fazer distinção entre os diferentes tipos de redes. Generalizando observações de acordo com propriedades pode ser possível estudar fenômenos que ocorrem na rede sem necessidade de conhecer muitos detalhes da estrutura da mesma.

Veremos adiante alguns modelos de redes. Dependendo das características que estamos querendo estudar, escolhemos o modelo que melhor reproduza essa característica.

Falaremos brevemente sobre as redes regular e aleatória, pois nosso foco é trabalhar com a rede de pequeno mundo, que é a que descreveremos de uma forma mais detalhada.

	Rede 1	Rede 2	Rede 3
C	0.0	0.608	0.111
L	2	1.667	1.889
$\langle k \rangle$	2.667	2.667	2.667
D	0.333	0.333	0.333
d	4	2	3

Tabela 2.3: Tabela que ilustra algumas propriedades das redes da Fig. 2.5.

2.2.1

Regular

Na Física, por exemplo, os cristais são estudados através de redes regulares, que são assim chamadas pois cada nó possui o mesmo número de ligações. Logo $\langle k \rangle = k_i$ para qualquer nó i . Esse tipo de rede possui grandes valores de L , por causa do longo percurso necessário para alcançar determinados nós.

2.2.2

Aleatória

As redes aleatórias começaram a ser estudadas no final da década de 50 e início de 60 principalmente pelos matemáticos Paul Erdős e Alfréd Rényi, e por isso ficou conhecida como a rede de Erdős-Rényi (ER). Existem duas formas equivalentes de se criar essa rede:

- Modelo $G(N, w)$: rede com N nós em que cada par de nós pode ser conectado com uma probabilidade w . Proposto por Gilbert (1959) [35].
- Modelo $G(N, m)$: rede com N nós rotulados que estão conectados com m conexões colocados aleatoriamente. Proposto por Erdős e Rényi (1959) [36].

Podemos construir o modelo da rede aleatória $G(N, w)$ com os seguintes passos:

1. Começamos com N nós isolados.
2. Selecionamos um par de nós e geramos um número aleatório entre 0 e 1. Se esse número for maior que w , conectamos o par de nós selecionado, senão eles seguem desconectados.
3. Repete-se o passo anterior para cada um dos $N(N - 1)/2$ pares de nós.

Cada rede gerada com o modelo $G(N, w)$ terá um valor diferente de conexões m . O valor esperado da quantidade de conexões depende de N e de w de acordo com a relação $\langle m \rangle = w \frac{N(N-1)}{2}$.

Para $w = 1$, teremos a quantidade máxima de conexões dada por $m_{\max} = \frac{N(N-1)}{2}$ e o grau médio máximo dado por $\langle k \rangle_{\max} = N - 1$, e se trata de uma rede densa e completamente conectada, com $D = 1$. Esse tipo de rede raramente é observado na natureza, em geral redes reais são esparsas.

Nesse tipo de rede, o coeficiente de aglomeração é $C = w$, (pois todas as ligações têm igual probabilidade de existir). Podemos concluir que $D = w$ pela Eq. 2-7. Mas, ao contrário do que se observa aqui, podemos verificar na Tab. 2.2 que muitas redes reais possuem C muito mais elevado do que suas densidades. Assim sendo, o modelo $G(N, w)$ não consegue simular uma rede real com coeficientes de aglomeração adequados [37].

Além disso, a distribuição de grau de uma rede aleatória é binomial como descrita abaixo:

$$P_k = \binom{N-1}{k} w^k (1-w)^{N-1-k}, \quad (2-8)$$

mas, se N é grande e k pequeno, a distribuição se aproxima de uma distribuição de Poisson:

$$P_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (2-9)$$

porém, é conhecido o fato de que redes reais possuem uma distribuição de grau com cauda longa. Por possuírem distribuições tão diferentes, terão propriedades estruturais bem diferentes também.

Por esses motivos não é conveniente usar redes aleatórias de ER para representar uma rede de contatos real, mas ela serve como um paradigma de um caso extremo. Por ser mais homogênea, ela é um caso limite mais simples de entender, e análises nesta rede ajudam a compreender a dinâmica em redes mais heterogêneas.

2.2.3 Mundo pequeno

Dada as propriedades das redes regulares e das redes aleatórias, podemos nos perguntar o que aconteceria em um caso intermediário. Ao se fazer essa pergunta chegamos na rede de Watts-Strogatz (WS), que estuda a dinâmica de redes entre ordem (regular) e aleatoriedade (aleatória) e consegue representar as propriedades de pequeno mundo que veremos adiante (por tal motivo também é conhecida como rede de pequeno mundo ou “small-world”). Mas

antes de falar da rede de WS, vejamos alguns fatos históricos que nos fazem chegar ao estudo desse fenômeno de pequeno mundo.

2.2.4

Uma breve história sobre o fenômeno de mundo pequeno

Frigyes Karinthy foi um escritor húngaro que publicou, em 1929, uma coleção de pequenas histórias intitulada “Tudo é diferente”, a história de nome “Cadeia” contém a primeira referência que se conhece à propriedade de pequeno mundo, também conhecia por seis graus de separação. A personagem da obra mostra, através de exemplos, que todas as pessoas estão conectadas por um pequeno numero de ligações.

Na Ref. [30] pode ser encontrado o texto mencionado acima. As partes que fazem referência aos seis graus de separação são:

“ Look, Selma Lagerlöf just won the Nobel Prize for Literature, thus she is bound to know King Gustav of Sweden, after all he is the one who handed her the Prize, as required by tradition. King Gustav, to be sure, is a passionate tennis player, who always participates in international tournaments. He is known to have played Mr. Kehrling, whom he must therefore know for sure, and as it happens I myself know Mr. Kehrling quite well. ”

“The worker knows the manager in the shop, who knows Ford; Ford is on friendly terms with the general director of Hearst Publications, who last year became good friends with Arpad Pasztor, someone I not only know, but to the best of my knowledge a good friend of mine. So I could easily ask him to send a telegram via the general director telling Ford that he should talk to the manager and have the worker in the shop quickly hammer together a car for me, as I happen to need one. ”

Em 1958, Manfred Kochen e Ithiel de Sola Pool fazem um progresso substantivo no problema estimando o número médio de conhecidos que as pessoas possuem e, também, a probabilidade de dois membros escolhidos aleatoriamente na sociedade serem conectados por um ou dois intermediários. Esse trabalho só foi publicado no ano de 1979 [38].

Em 1967, o psicólogo Stanley Milgram transformou a ideia do Karinthy em experimento [39], baseado também no trabalho matemático de Kochen e Pool. Para isso, ele escolheu duas “pessoas alvo”: a mulher de um estudante de teologia que vivia em Cambridge para o primeiro estudo e um corretor da bolsa que trabalhava em Boston e vivia em Massachusetts para o segundo estudo (feito em colaboração com Jeffrey Travers).

Selecionou também, aleatoriamente, pessoas dentre a população de Wichita e Kansas para o primeiro estudo e de Omaha e Nebraska para o segundo estudo. Estas pessoas receberam uma carta contendo:

1. O nome da pessoa alvo e algumas informações sobre ela e a orientação de fazer a carta chegar a essa pessoa específica.
2. Um conjunto de regras para alcançar a pessoa-alvo que continha: Se eles não conhecessem a pessoa pelo primeiro nome, então eles não deveriam contatá-la diretamente, mas passar a carta a um conhecido que eles julgassem ter mais chance de conhecer o alvo, o qual deveria tentar entregar a carta seguindo as mesmas regras.
3. Uma lista, para que cada pessoa que recebesse a carta escrevesse o seu nome.

No primeiro estudo, das 296 cartas enviadas, 64 chegaram ao seu destino, e no segundo, das 160 enviadas, 44 foram recebidas. Milgram encontrou com isso uma distância menor do que o esperado para a população americana da época (cerca de 200 milhões de pessoas). Com esse experimento, ele encontrou que o número médio de intermediários entre o remetente original e a pessoa-alvo valia 5.5.

Em 1991, o dramaturgo John Guare escreveu uma peça cujo título era “Seis graus de separação” [40], que depois veio a se tornar um filme. Ele foi a primeira pessoa a se referir ao fenômeno do pequeno mundo como seis graus de separação. Em algum momento da peça, a protagonista fala com sua filha:

“Everybody on this planet is separated by only six other people. Six degrees of separation. Between us and everybody else on this planet. The president of the United States. A gondolier in Venice. It’s not just the big names. It’s anyone. A native in a rain forest. A Tierra del Fuegan. An Eskimo. I am bound to everyone on this planet by a trail of six people. It’s a profound thought. How every person is a new door, opening up into other worlds.” [40]

John Guare generalizou assim, em sua peça, a ideia de que os seis graus de separação teriam validade em todo o planeta.

De acordo com Duncan Watts e Steven Strogatz [29], antes de 1998 as conexões topológicas eram consideradas como sendo completamente regulares ou completamente aleatórias, mas algumas redes reais estavam entre esses dois extremos.

Medindo os valores de C e do L de três redes reais que já tinham sido mapeadas: a rede de atores de Hollywood (que virou um jogo para calcular o número de Bacon), a rede neural do verme *C. elegans* e a rede de energia elétrica da América do Norte (valores indicados na Tab. 2.4), eles encontram as propriedades $L \gtrsim L_{\text{aleatório}}$ e $C \gg C_{\text{aleatório}}$.

Eles desenvolvem então um modelo de rede que começa como uma rede regular, mas que é “reescrita” com um pouco de desordem. Essas redes são altamente aglomeradas, ou seja, C tem um valor alto, como nas redes regulares, porém com pequenas distâncias entre os nós, como nas redes aleatórias. Eles chamam então essa rede de “Pequeno Mundo” (ou Small-World - SW, em inglês).

Rede	N	$\langle k \rangle$	L_{real}	$L_{\text{aleatório}}$	C_{real}	$C_{\text{aleatório}}$
Atores de Hollywood	225226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027
Energia Elétrica	4941	2.67	18.7	12.4	0.080	0.005
Neural <i>C. elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05

Tabela 2.4: Tabela com valores de propriedades de redes reais com características de pequeno mundo, comparados a valores de redes aleatórias geradas com o mesmo número de vértices e grau médio de conexões da rede real [29].

No dia 4 de fevereiro deste ano, 2016, foi publicado pela equipe de pesquisa do Facebook (site de relacionamentos) que o grau médio de separação entre quaisquer dos usuários (cerca de 1.59 bilhões de pessoas ativas) era de 3.57 passos. Atualmente ele é menor do que o valor encontrado em 2011, quando a quantidade de usuários era cerca de 721 milhões de pessoas e o grau médio foi calculado como sendo 3.74.

Finalmente, na Fig. 2.6 observamos o resultado que foi obtido para a distribuição do grau médio de separação por cada usuário.

Na Fig. 2.7 vemos uma linha do tempo desses fatos relevantes para o estudo do fenômeno do pequeno mundo que foi adaptada da Ref. [33].

2.2.5

Modelo da rede de Watts-Strogatz

Como já mencionado, o modelo de Watts-Strogatz consegue reproduzir propriedades de pequeno mundo, possuindo assim alta aglomeração, baixa distância. Ela também tem a característica de ser muito esparsas, porém não tão esparsas a ponto de ser desconectadas. Para o modelo é requerido então que a rede possua $N \gg k \gg \ln(N) \gg 1$, onde $k \gg \ln(N)$ garante que a rede aleatória seja conectada (considerando k a conectividade de uma rede regular). Vejamos então o algoritmo criado por eles para gerar as redes de SW [29].

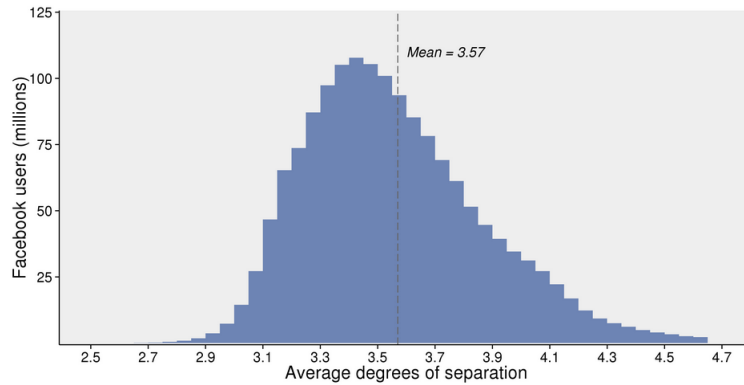


Figura 2.6: Média estimada do grau de separação entre todos os usuários do Facebook, calculado na Ref [41]. A maioria das pessoas possuem uma média entre 3 e 4 passos.

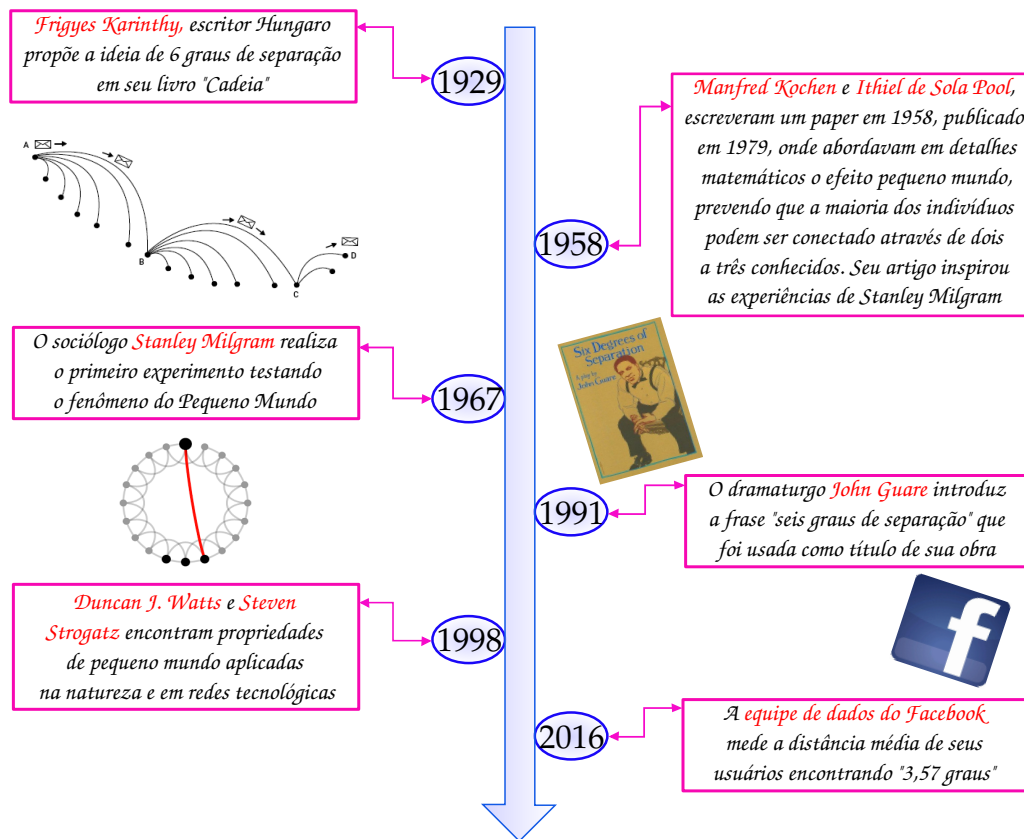


Figura 2.7: Linha do tempo de alguns eventos relevantes do estudo do fenômeno dos seis graus de separação.

Começando com um anel regular de N nós e conectividade k , visitaremos cada um dos vértices da rede em uma ordem circular e, independentemente, os reescreveremos com uma probabilidade p , onde $0 \leq p \leq 1$, ou, de forma mais explícita:

1. Visitamos cada nó do anel, um por um, no sentido horário, dando $k/2$ voltas.
2. Na primeira volta visitamos o primeiro vizinho de cada sítio i . Com uma probabilidade p reconectamos i em um outro nó escolhido aleatoriamente de uma lista dos seus não-vizinhos. Logo, com uma probabilidade $1 - p$, ele continua conectado.
3. Na volta seguinte faremos o mesmo, com o segundo vizinho de cada sítio i , e assim sucessivamente.

Três realizações desse processo são mostrados na Fig. 2.8, para diferentes valores de p . Se estamos no caso em que $p = 0$, a rede inicial não é alterada e estamos no caso da rede regular. Conforme incrementamos p ($p < 1$) o gráfico gerado representa o pequeno mundo, altamente aglomerado (como a regular) e com pequenas distâncias (como o aleatório). Chegando a $p = 1$, todos os nós foram reconectados aleatoriamente e estamos no caso aleatório.

Porém, é importante observar que ER é diferente de WS com $p = 1$. No modelo de WS apenas um lado de cada ligação é reconectado quando reescrevemos as conexões, e mesmo quando todas as ligações são reescritas, cada nó permanece pelo menos com $k = 1$. Em um verdadeiro grafo aleatório de ER, não existe a restrição de graus que acaba ocorrendo na rede de pequeno mundo, nós podem ter quantidades de conexões associadas de qualquer valor entre 0 e $N - 1$.

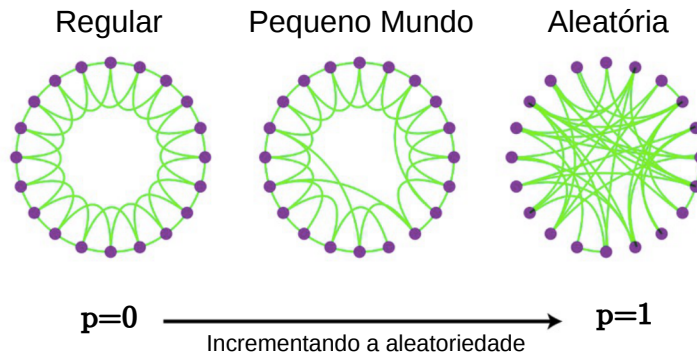


Figura 2.8: Três exemplos de rede de Watts-Strogatz com $N = 20$ e $\langle k \rangle = 4$. À esquerda, uma rede gerada com $p = 0$ (regular); no centro, uma rede com $0 < p < 1$ (pequeno mundo) e, à direita, com $p = 1$ (aleatória).

Para uma melhor análise da variação do coeficiente de aglomeração e do menor caminho médio em função da probabilidade de religação p ,

construímos o gráfico dessas variáveis que pode ser visto na Fig. 2.9 para diferentes tamanhos de rede N e grau médio $\langle k \rangle$. Através dessa simulação numérica, observa-se o decrescimento rápido da menor distância média e um decrescimento lento da aglomeração.

Usamos linhas lilás para “delimitar” o espaço em que encontramos as características desejadas de pequeno mundo, apesar de não haver uma definição precisa desse intervalo. Podemos especificar um valor entre 0 e 1, ϵ [33], tal que:

$$\begin{aligned} p > p_1(\epsilon) &\longrightarrow L(p)/L_0 < \epsilon \\ p < p_2(\epsilon) &\longrightarrow C(p)/C_0 > (1 - \epsilon), \end{aligned}$$

onde p_1 e p_2 são os valores de p em que $L(p) = L_0\epsilon$ e $C(p) = C_0(1 - \epsilon)$ respectivamente.

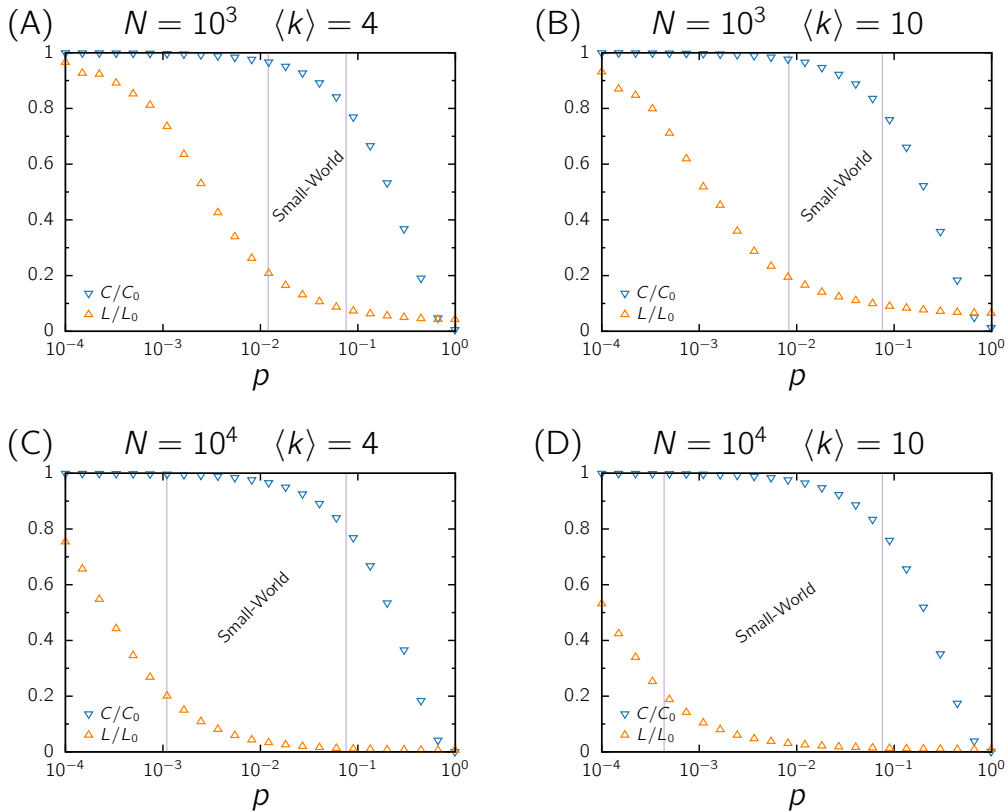


Figura 2.9: Gráficos de C/C_0 e L/L_0 em função da aleatoriedade da rede p , onde C_0 e L_0 são, respectivamente, o coeficiente de aglomeração e o menor caminho médio em $p = 0$. Foram realizadas 100 amostras por ponto, para redes com diferentes N e $\langle k \rangle$, que podem ser visualizados na própria figura. As linhas verticais definem $p_1(\epsilon)$ e $p_2(\epsilon)$.

Podemos entender que, quando p é bem pequeno, apenas algumas ligações são reposicionadas formando atalhos na rede e reduzindo drasticamente a distância entre muitos pares de nós. Desta forma, são necessários poucos atalhos para reduzir o menor caminho médio da rede. Ao mesmo tempo, reescrevendo poucas conexões, não causamos influência de forma significativa na rede inicial, que preserva sua estrutura e conseqüentemente deixa a rede com alta aglomeração.

Escolhendo $\epsilon = 0.2$ encontramos as regiões de mundo pequeno marcadas por linhas verticais na Fig. 2.9. Há um valor aproximado de p para um comportamento máximo de SW [42], que seria próximo à região que obedece:

$$\frac{L_{\text{aleatório}}}{L} - \frac{C}{C_{\text{regular}}} \approx 0. \quad (2-10)$$

Se escolhemos uma rede mais densa, com $N = 10^3$ e $\langle k \rangle = 50$ ($D = 0.05$) por exemplo, a região de pequeno mundo pode não ser observada facilmente para o valor de ϵ escolhido como, por exemplo, na Fig. 2.10.

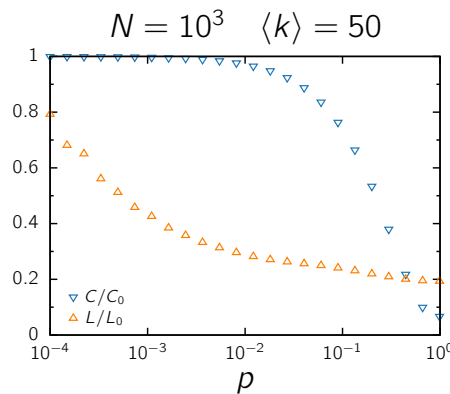


Figura 2.10: Exemplo de uma rede densa ($D = 0.05$), sem região de SW definida para $\epsilon = 0.2$. Gráfico realizado para valores de $N = 10^3$ e $\langle k \rangle = 50$.

Também no artigo original de Watts e Strogartz [29], temos uma relação para o coeficiente de aglomeração e para o menor caminho médio em função do tamanho da rede e do grau médio, para a rede regular, aleatória e SW, expresso na Tab. 2.5. Podemos observar também que o intuito de obter redes com C e L parecidos com as redes de contatos reais é satisfeito.

Definindo $k' = k/2$, a distribuição de graus na rede de pequeno mundo em função de p é dada por uma função delta centrada em k' quando $p = 0$, é dada pela Eq. 2-8 quando $p = 1$ e, em função de p , temos:

Rede	Regular	SW	Aleatório
C	$\frac{3}{4}$	$\approx \frac{3}{4}$	$\frac{\langle k \rangle}{N}$
L	$\frac{N}{2\langle k \rangle}$	$\approx \frac{\ln N}{\ln k}$	$\frac{\ln N}{\ln k}$

Tabela 2.5: Cálculos de C e L para redes regulares ($p = 0$), redes de pequeno mundo (p pequeno) e redes aleatórias ($p = 1$).

$$P(k) = \sum_{i=0}^{\min(k-k', k')} \binom{k'}{i} (1-p)^{k'} p^{k'-i} \frac{(pk')^{k-k'-i}}{(k-k'-i)!} e^{-pk'}, \quad (2-11)$$

para $k \geq k'$, e é igual a zero para $k < k'$ [43].

Após estudarmos como os indivíduos estão conectados entre si, queremos entender como essas conectividades influenciam os padrões de comportamento global de uma sociedade em que se propagam informações. Para isso, definiremos a seguir os modelos de dinâmica de opiniões que serão estudados.

3

Dinâmicas de opiniões

As simulações computacionais terão um papel importante no nosso estudo da dinâmica social, pois a ideia é imitar interações locais de contato entre indivíduos para prever comportamentos globais. Então usaremos o computador para executar nossas regras dinâmicas e assim ter uma visão aproximada do que ocorreria nas interações reais [3].

Além disso, embora experimentos reais sejam bons, uma simulação nos dá mais informações que experimentos diretos, pois podemos isolar apenas as variáveis relevantes para nossa análise, enquanto em um experimento não há como fazer separação, por exemplo, de problemas internos ou contratempos que atrapalhem a dinâmica.

Ao fazermos uma amostra computacional podemos obter qualquer resultado possível, inclusive algum que não seja representativo em nossos casos reais. Estamos mais interessados em um comportamento médio, logo realizaremos várias simulações a fim de conseguir comportamentos médios que representem os casos mais prováveis de ocorrer.

Em qualquer modelo matemático de dinâmica de opinião temos uma variável, ou conjunto de variáveis, que representa o número de opções ou escolhas de um assunto específico.

Poderemos ter 2 posições diferentes (Visão política: Direita/Esquerda), três posições (Sistema operacional: Windows/Linux/OS X) ou quantas forem necessárias (Marca de telefone: Nokia, Samsung, Motorola, LG, Apple, Asus, DELL,...). Aqui, uma opinião (ou posição) tem um significado amplo, no sentido de que pode representar opções, produtos ou candidatos políticos. Como as opiniões podem ser representadas por variáveis, o desafio é encontrar um conjunto adequado de regras matemáticas para descrever os mecanismos responsáveis pela evolução e mudanças dessas opiniões em uma sociedade. Esse conjunto de regras chamamos de modelo de dinâmica de opinião.

Iremos usar para nossas simulações dois modelos de dinâmicas de opiniões diferentes que chamaremos de *Regra A* e *Regra B*. Em ambos os modelos, consideramos uma rede com N indivíduos (nós) onde o estado de cada indivíduo é descrito pela variável S . A ordem em que estes estados são numerados é arbitrária. Os modelos também englobam um estado de indecisão, s_0 , para o indivíduo que não tenha adotado uma opção definida. Este estado corresponde à situação comum em que um indivíduo não tem uma

escolha a priori. Nestas modelagens começamos com uma rede onde a maioria das pessoas não têm uma opinião formada ainda e, depois, distribuimos q opiniões diferentes entre os nós. Os nós decididos inicialmente são chamados de “iniciadores”, representamos sua quantidade por I , e espalham suas opiniões à população de pessoas indecisas. A fim de que todas as alternativas sejam equivalentes, consideraremos o mesmo número de iniciadores (geralmente um) para cada uma delas, localizados em posições aleatórias.

Na duas próximas seções veremos com mais detalhes cada um desses modelos.

3.1

Regra A

A Regra A que utilizaremos foi um modelo proposto por Travieso e Fontoura (2006) [27]. Nesta regra a evolução das opiniões da rede de contatos segue o seguinte modelo: Para uma rede com N vértices, cada opção q é designada a I nós na rede. Os demais começam como indecisos.

A cada unidade de tempo de Monte Carlo fazemos N vezes:

1. Escolhe-se aleatoriamente um nó i com uma opção associada S^i .
2. Para todo vizinho do nó i , se ele não tem nenhuma opção associada (indeciso), associa-se a ele, com certeza, a opção S^i , senão, muda-se para S^i com uma dada *probabilidade de troca* p_s .

A atualização dos estados na rede é feita após cada interação.

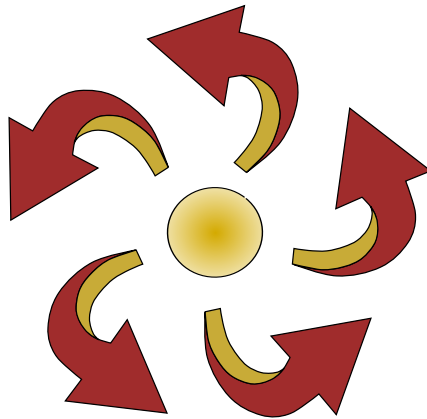


Figura 3.1: Regra A - A propagação de opinião parte do indivíduo para seus vizinhos.

Esse modelo foi motivado pelo fato de que indivíduos indecisos são passivos, no sentido de que eles não espalham sua falta de opinião para outros indecisos, e indivíduos indecisos são facilmente convencidos por interação com

alguém que já tem uma opinião formada. Além disso, a flexibilidade para mudar de opinião devido a uma interação é quantificada pelo parâmetro p_s , o mesmo para todos os indivíduos, de acordo com a versão original do modelo [27].

Para esta regra, medimos as quantidades de interesse em um estado quase estacionário. Note que, em um sistema finito, o único macro estado verdadeiramente estacionário, depois de um estado transiente que depende dos parâmetros do modelo, é o consenso de todos os nós. Então, o número de nós com o estado S , $[n(S)]$, atinge um valor estacionário no limite de $N \rightarrow \infty$. Entretanto, adotamos um critério de parada após observar que esse estado quase estacionário ocorre após a fração de estados indecisos caírem a zero. Adotamos, pois, o dobro do tempo necessário para que essa fração zere.

3.2

Regra B

Usaremos como Regra B a regra da pluralidade bem como foi proposta por Calvão, Ramos e Anteneodo (2016) [28]. Neste modelo, em cada unidade de tempo de Monte Carlo visitamos todos os nós da rede em ordem aleatória. O estado da rede é atualizado de acordo com os seguintes passos:

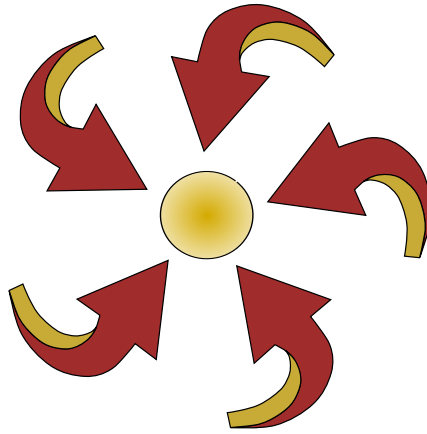


Figura 3.2: Regra B - O contágio é da vizinhança local para um dado indivíduo.

1. Definimos o conjunto de nós \mathcal{A}_i formado por i e seus vizinhos próximos.
2. Determinamos o estado de pluralidade S (tal que $S \neq s_0$), como sendo o estado compartilhado com o maior número de nós deste conjunto \mathcal{A}_i (contamos o estado atual do agente i e ignoramos s_0).
3. O agente i irá então adotar este estado S correspondente.

As atualizações são repetidas até alcançar um estado estacionário. Em caso de empate, o agente i não altera sua opinião.

Além disso, as atualizações dos estados podem ser feitas de duas maneiras diferentes, síncrona ou assíncrona. No primeiro caso todos os estados são atualizados na rede simultaneamente depois de realizadas N interações, ou um passo de Monte Carlo. No segundo caso, assíncrono, os estados são atualizados instantaneamente após as interações, fazendo as informações se propagarem pela rede em menos passos.

Na Fig. 3.3 temos ilustrações de exemplos de interação entre os indivíduos de uma rede para as duas regras utilizadas.

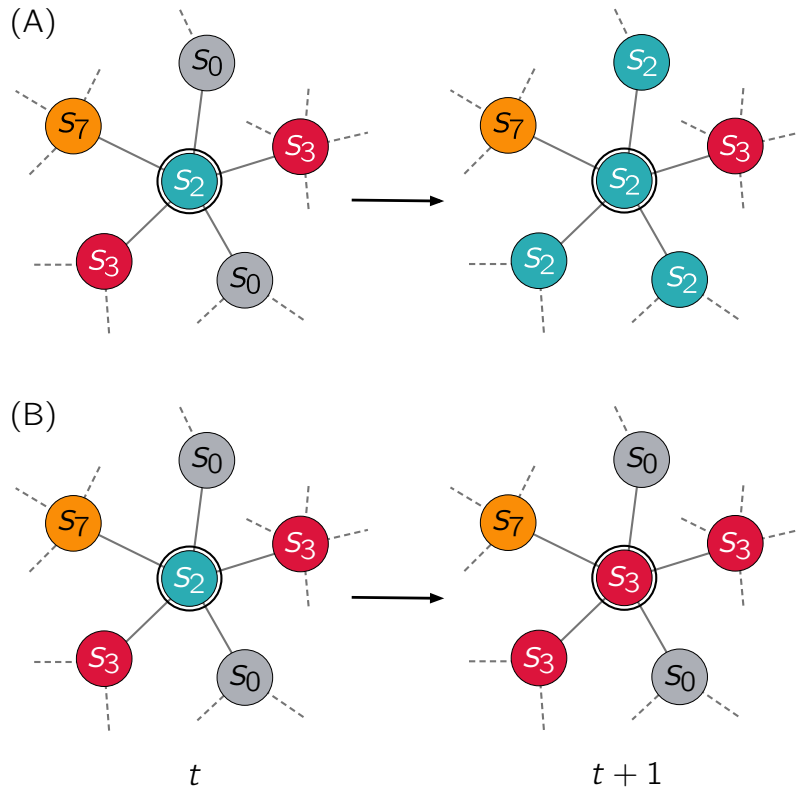


Figura 3.3: Ilustração das regras A e B. (A) Possível transição utilizando a regra A como explicada no texto; o nó central (verde) espalha sua opinião para os vizinhos indecisos. Com uma probabilidade p_s os vizinhos decididos mudam de opinião. (B) Em um dado instante t , um nó i (o nó central na figura-azul) e seus vizinhos formam um grupo \mathcal{A}_i . No caso mostrado na figura, o estado de pluralidade é $S = s_3$, já que este é o estado compartilhado por mais nós. Logo, no próximo passo, o nó i muda sua opinião de s_2 para s_3 .

4

Resultados

Conhecendo bem a rede complexa que utilizamos para representar a forma que uma população está conectada em nossas simulações e as dinâmicas que ditam a forma como as opções se espalham por essa rede, podemos agora avaliar qual é o resultado dessa propagação de opinião através de simulações computacionais.

A princípio estamos interessados em avaliar como se dá a evolução temporal de $n(S)$ e a distribuição de opiniões no estado estacionário para então trabalharmos com as médias.

Para observar o tempo em que atingimos um estado estacionário (ou quase estacionário devido ao efeito de tamanho finito), representaremos, para cada uma das regras que adotamos aqui, um exemplo de uma evolução dinâmica. Para tal, fizemos um gráfico com o estado de cada nó (cada estado representado com uma cor diferente) em função do tempo de Monte Carlo, t , lembrando que a cada unidade de tempo (MCs) são realizadas N iterações das regras definidas nas seções 3.1 e 3.2. Na Fig. 4.1 simulamos as duas regras para $N = 10^3$, $\langle k \rangle = 4$, $q = 2$ opções disponíveis e um iniciador para cada opção ($I = 1$). Esse poderia ser um exemplo simples de dois produtos diferentes e atratividades similares sendo lançados no mercado. Inicialmente vemos predominância dos indecisos que diminuem com o passar do tempo.

Uma observação geral que podemos fazer é que, para redes regulares ($p = 0$), as opções demoram mais a se propagar do que em redes com conexões aleatórias ($p = 0.1$). Isso é devido ao fato de termos um L maior associado a estas redes regulares. Em todos os casos em que $p = 0.1$, com poucos passos de Monte Carlo chegamos ao estado estacionário.

Nos painéis (A) e (B) da Fig. 4.1 vemos para $p = 0$ e $p = 0.1$ a dinâmica realizada com a regra A, utilizando $p_s = 0.1$, ou seja, com uma pequena probabilidade de troca de opinião ao interagir com um vizinho que tenha opinião contrária à sua. Devido à existência dessa probabilidade, temos flutuações nos estados.

Nos painéis (C) e (D), temos a evolução para $p = 0$ e $p = 0.1$ da regra A com $p_s = 0$. Logo, equivale a uma dinâmica sem probabilidade de troca de opinião. Como nesta regra os estados são atualizados instantaneamente, teremos resultados semelhantes aos da dinâmica da regra B com atualização assíncrona, observado nos painéis (E) e (F) da figura. De fato, a aparência

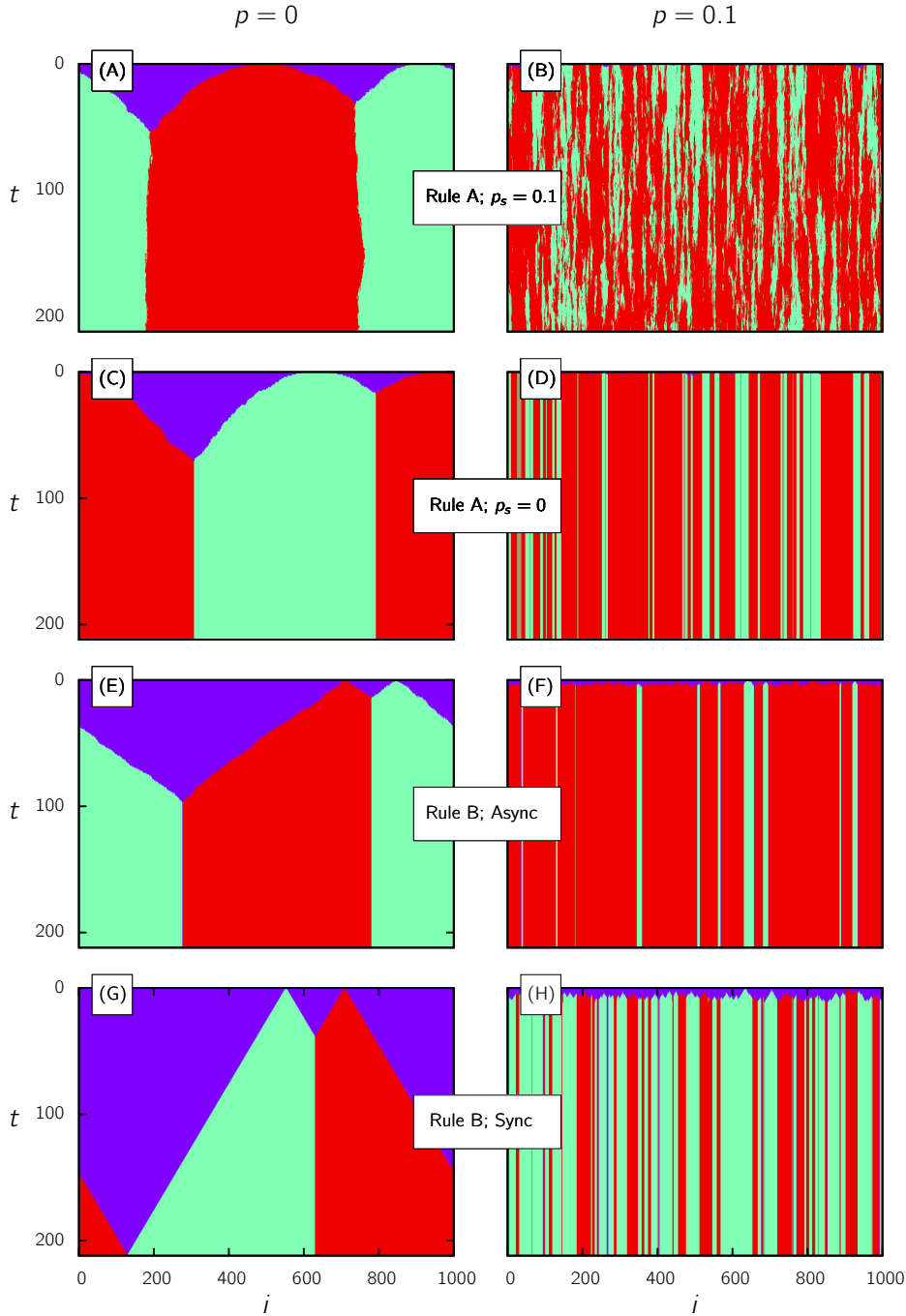


Figura 4.1: Simulações gráficas de evoluções dinâmicas para redes com $p = 0$ e $p = 0.1$ realizadas com $N = 10^3$, $\langle k \rangle = 4$ e $q = 2$. Estados diferentes são representados por diferentes cores onde o azul equivale à S_0 . No eixo das abscissas representamos os indivíduos da população e, no eixo das ordenadas, o tempo em passos de MC. Em (A) e (B) temos exemplos realizados utilizando a regra A para $p_s = 0.1$, e em (C) e (D) para $p_s = 0$. Os demais foram realizados com a regra dinâmica B para atualização assíncrona [(E) e (F)] e síncrona [(G) e (H)].

gráfica das duas dinâmicas é parecida, apesar da regra A alcançar o estado estacionário mais rápido.

Por último, nos painéis (G) e (H), temos a regra B com atualização síncrona. Apesar de ser a dinâmica mais lenta a alcançar o estado estacionário, para redes com aleatoriedades associadas, como a da figura com $p = 0.1$, esse equilíbrio também não demora muitos passos de MC para ser atingido.

Além do mais, cada grupo de nós com a mesma opinião se propaga sem interferência das outras em um regime não competitivo para $p = 0$.

Ainda analisando a evolução dos estados, temos a Fig. 4.2 que representa, para uma rede com $N = 10^4$ nós, $\langle k \rangle = 4$ e $q = 4$, o número de nós que compartilham o estado s . Destacando-se em vermelho o estado com mais nós compartilhados, e em verde, o estado indeciso.

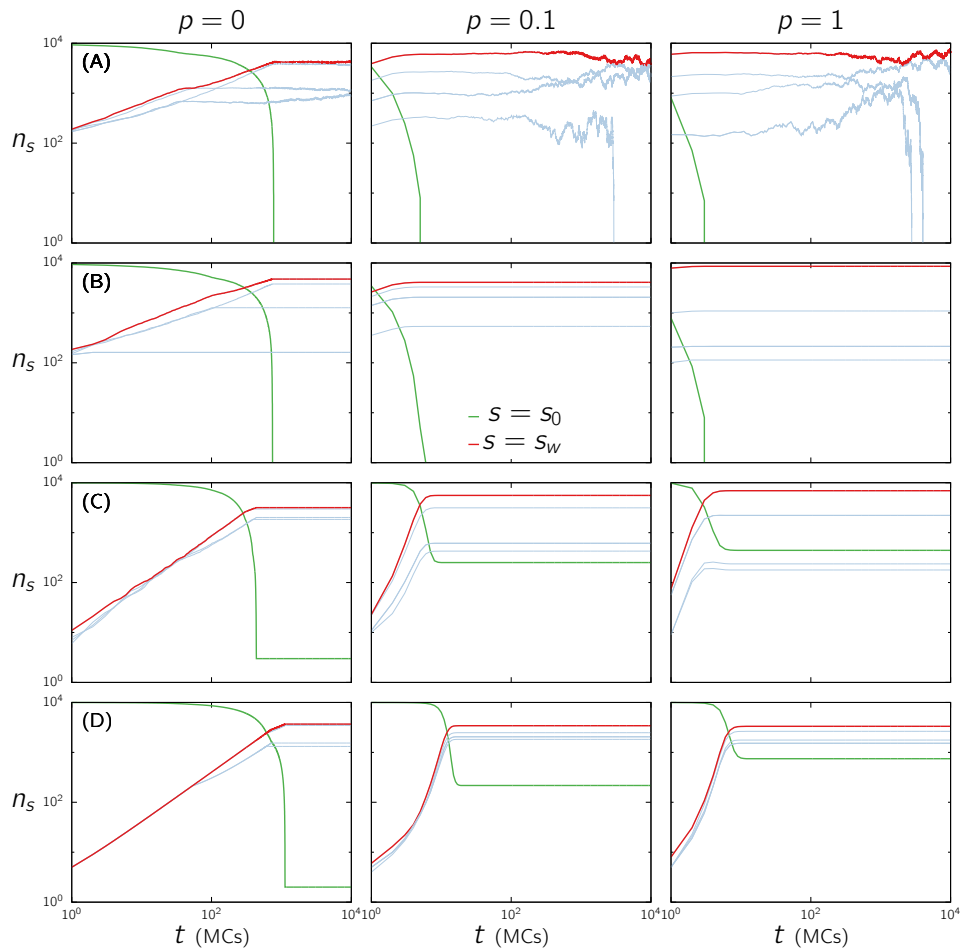


Figura 4.2: Evolução temporal da dinâmica de opinião para redes com $p = 0$ (regular), $p = 0.1$ (SW) e $p = 1$ (aleatória) realizadas com $N = 10^4$, $\langle k \rangle = 4$ e $q = 4$. Em vermelho observamos o número de nós com a opinião vencedora, e em verde o número de nós indecisos. (A) regra A e $p_s = 0.1$; (B) regra A e $p_s = 0$; (C) regra B e atualização assíncrona; (D) regra B e atualização síncrona.

Os três gráficos da faixa (A) da Fig. 4.2 foram realizados com a regra A para $p_s = 0.1$. Podemos observar as flutuações existentes, assim como na Fig. 4.1. Notamos também que atingimos um estado onde $n(s) = cte$ quando o número de indecisos vai a zero. Por isso utilizamos esse fato como critério de parada nas simulações. Após um tempo chegaremos no modo verdadeiramente estacionário que é o caso em que há consenso (mesmo que não se observe para a escala de tempo adotada).

Na faixa (B) também usamos a regra A, porém com $p_s = 0$. Em $p = 1$ (rede aleatória) vemos um caso em que uma das escolhas possíveis possui muito mais adeptos do que as demais. Nos dois casos em que realizamos as simulações com a dinâmica ditada pela regra A, temos que o estado indeciso desaparece.

Nas faixas (C) e (D) realizamos simulações utilizando a regra B, com atualizações assíncrona e síncrona, respectivamente. Nestes casos vemos a existência de uma parte da população indecisa no estado estacionário que cresce com o aumento da aleatoriedade da rede. Como será discutido nas próximas seções, a prevalência de sítios indecisos no estado final é consequência do critério de empate da regra A, e a aleatoriedade favorece as situações onde há empate.

Agora, sabendo como evoluem para um estado estacionário (ou quase estacionário no caso da regra A) as duas dinâmicas, podemos finalmente analisar como seriam as distribuições de opiniões médias vencedoras em função da aleatoriedade da rede.

Para cada realização da dinâmica, medimos a fração dos nós que compartilham a opinião mais adotada f_w , ou escolha ganhadora,

$$f_w \equiv \frac{n(s_w)}{N}, \quad (4-1)$$

e medimos também a fração de pessoas indecisas f_0 :

$$f_0 \equiv 1 - f_d \equiv 1 - \frac{n_d}{N} \equiv \frac{N - n(s_0)}{N}, \quad (4-2)$$

onde f_d é a fração da população decidida. Estas quantidades nos dão informações sobre o macroestado final do sistema e como as opiniões são espalhadas através da população. Nos gráficos seguintes, exceto quando se diga o contrário, as frações características foram feitas em uma média de 10^3 simulações.

4.1

Efeitos da aleatoriedade da rede

4.1.1

Regra A

Vejamos os efeitos da aleatoriedade da rede p , na fração de nós que compartilham a opinião vencedora para a regra A. O gráfico da Fig. 4.3 mostra que, conforme aumentamos o número de religações da rede, o valor de f_w também aumenta.

Os painéis (A), (B), (C) e (D) correspondem respectivamente a $\langle k \rangle = 4$, $\langle k \rangle = 10$, $\langle k \rangle = 20$ e $\langle k \rangle = 50$. Nota-se que aumentando a quantidade média de conexões entre os indivíduos, o tamanho da rede passa a ser significativo para os resultados onde, nestes casos, em uma população menor é mais facilitada a existência de uma opção sobressaindo.

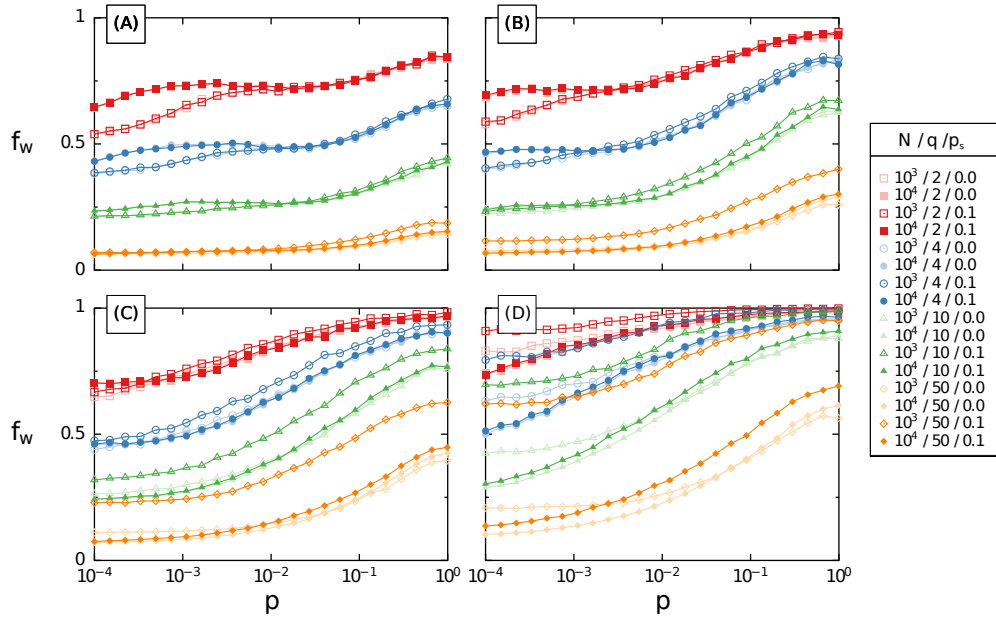


Figura 4.3: São mostrados resultados de simulações para rede de WS com a dinâmica A para diferentes valores de N (desenho aberto ou fechado), q (diferentes cores) e de p_s (diferentes tonalidades da mesma cor) da fração média de opinião vencedora em função da aleatoriedade da rede p . (A) $\langle k \rangle = 4$; (B) $\langle k \rangle = 10$; (C) $\langle k \rangle = 20$; (D) $\langle k \rangle = 50$.

Acreditamos que, se a “competição” começa cedo na dinâmica, quando há ainda nós indecisos a serem conquistados, a predominância de uma das opiniões é mais provável. Também, o incremento de $\langle k \rangle$ aumenta a dispersão em $P(k)$, tornando possível nós com grande números de vizinhos. Assim sendo, é razoável supor que estes nós espalhando suas opiniões conquistam um grande número de adeptos, bem como se vê no gráfico. Para grandes valores de $\langle k \rangle$, o consenso se torna possível.

4.1.2 Regra B

Como esta regra facilita a permanência de nós indecisos, analisaremos o f_w e o f_0 para esta dinâmica. Podemos fazer atualizações de duas maneiras diferentes: assíncrona (async) e síncrona (sync). Embora não se espere grandes diferenças entre os dois tipos de atualização, em alguns casos temos diferentes resultados.

Para pequenos valores de p , a fração média da opinião dominante é bem próxima para as duas atualizações. Porém, incrementando o valor de p , a atualização assíncrona facilita a predominância de uma das opções, e em alguns casos inclusive promove o consenso, como se pode observar na Fig. 4.4.

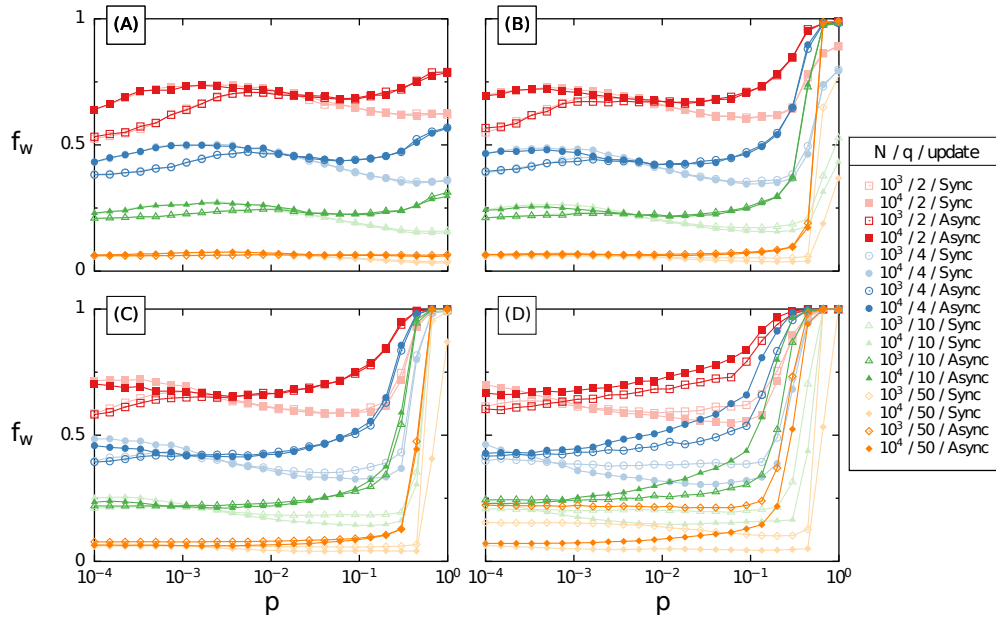


Figura 4.4: São mostrados resultados de simulações para redes de WS com a dinâmica B para diferentes valores de N , q e com diferentes atualizações (sync e async) da fração média de opinião vencedora em função da aleatoriedade da rede p . (A) $\langle k \rangle = 4$; (B) $\langle k \rangle = 10$; (C) $\langle k \rangle = 20$; (D) $\langle k \rangle = 50$.

Observa-se também na figura que é quase imperceptível a diferença do efeito da conectividade da rede sobre os resultados para p muito pequenos.

Desde que p seja menor que 0.1, aumentando muito a quantidade de opções ($q > 10$), f_w parece não depender de p e fica estagnado em um valor um pouco acima de $1/q$ mostrando a co-existência da opiniões.

Muitos fatores atuam na presença de indivíduos indecisos, vemos algumas observações importantes a respeito da fração média de indecisos representada na Fig. 4.5.

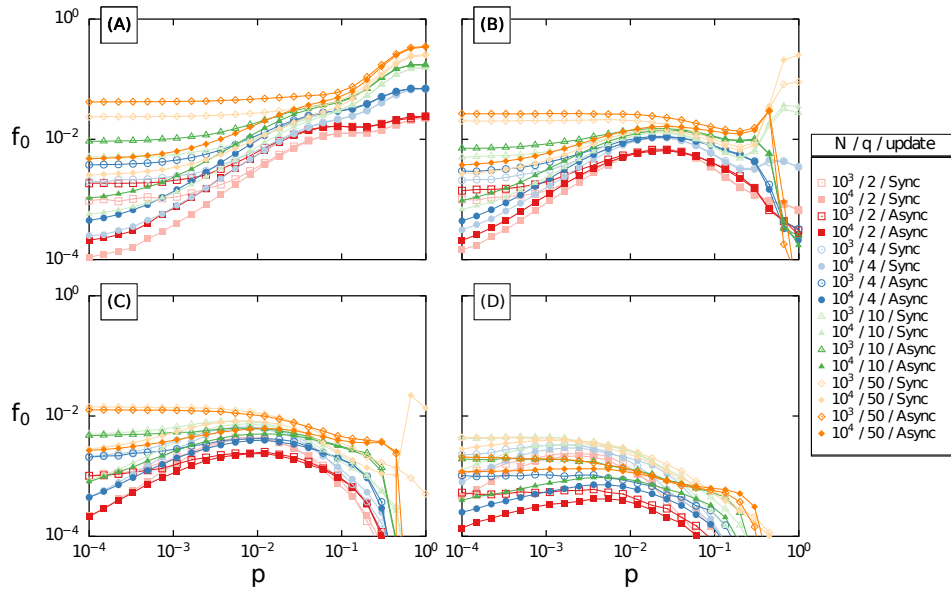


Figura 4.5: Representação da fração média de indecisos em função da aleatoriedade da rede p na rede de WS com a dinâmica B para diferentes valores de N , q e de atualizações (sync e async). (A) $\langle k \rangle = 4$; (B) $\langle k \rangle = 10$; (C) $\langle k \rangle = 20$; (D) $\langle k \rangle = 50$

Temos um valor máximo de indecisos na região de pequeno mundo, porém, conforme $\langle k \rangle$ cresce, os indecisos diminuem, chegando a ficar abaixo de 0.01 que corresponde a uma fração muito pequena da população. Isso poderia ser devido ao fato de que, como comentado anteriormente, a dispersão da média de conectividade aumenta com $\langle k \rangle$, e com isso, mais difícil seria a ocorrência de empate nas opiniões dos vizinhos de um determinado nó. Principalmente ao aumentar a aleatoriedade, onde vemos que f_0 decai até ficar praticamente nulo.

A presença do máximo local pode estar associado ao valor de p onde há mais “competição” na evolução das opiniões. Se voltarmos à Fig. 4.1 podemos observar que os estados indecisos estão presentes justo nas interfaces das opiniões diferentes.

Redes menores facilitam mais a ocorrência de indecisão e quanto maior o número de opções disponíveis, mais nós indecisos estarão presentes na rede.

4.2

Dependência com a conectividade

Ainda na tentativa de entender melhor como as propriedades da rede afetam as configurações finais das variáveis de estado, representamos nas Figs. 4.6 e 4.7 as frações da opinião vencedora e as frações de indecisos em

função da conectividade da rede para as diferentes regras e com diferentes valores de p .

Para a regra A, painéis (A) e (B) da Fig. 4.6, é notório o crescimento da fração ganhadora em função do $\langle k \rangle$, e também, como visto anteriormente, que maiores aleatoriedades estão diretamente relacionadas com maior fração de adeptos da opinião vencedora.

Para a regra B, painéis (C) e (D), nas curvas correspondentes aos valores de p iguais a 10^{-1} , 10^{-2} e 10^{-3} , estamos na região de pequeno mundo onde obtemos um comportamento não-trivial.

Vimos na Tab. 2.5 que para maiores valores de $\langle k \rangle$, menor o L .

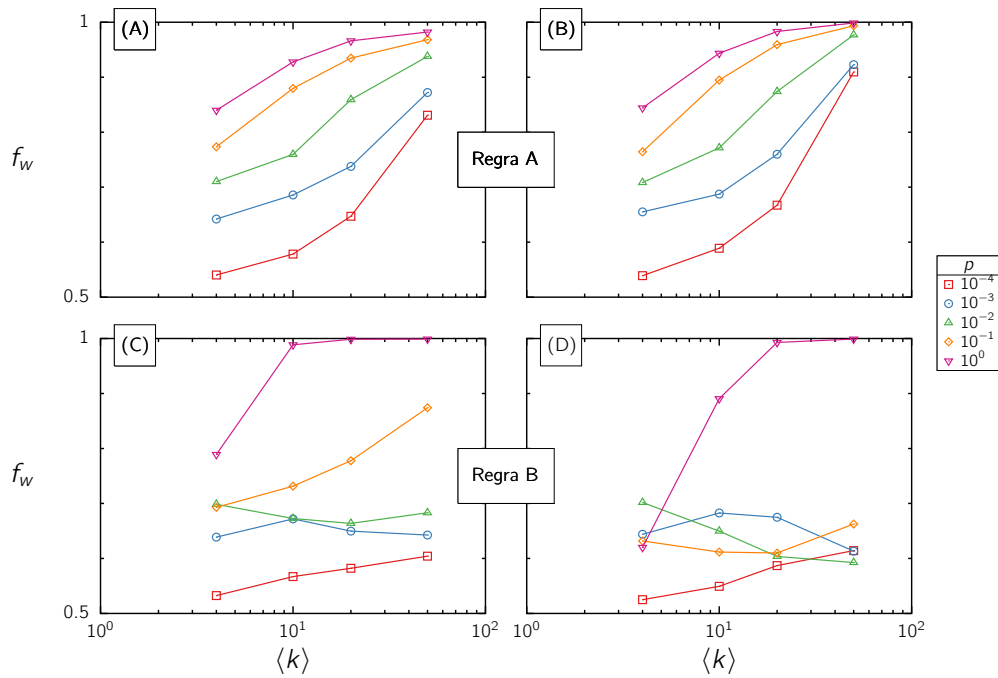


Figura 4.6: Fração da opinião vencedora em função da conectividade da rede realizada para $N = 10^3$ e $q = 2$; (A) e (B) realizadas com a regra A para valores de $p_s = 0.0$ e $p_s = 0.1$, respectivamente; (C) e (D) realizados com a regra B para atualizações assíncrona e síncrona, respectivamente. Cada cor corresponde a um valor diferente de p .

Na Fig. 4.7 representamos a fração de indecisos em função da conectividade média da rede para as atualizações assíncrona e síncrona, respectivamente, utilizando a dinâmica B. Para p pequenos a fração de indecisos quase não é afetada pela conectividade da rede, isso devido ao regime não competitivo citado anteriormente. Para p maiores, a quantidade de indecisos diminui com $\langle k \rangle$ pois, devido a altas conexões e à dispersão da

rede, mais difícil seria para um indivíduo se encontrar em uma situação onde os estados dos vizinhos empatam.

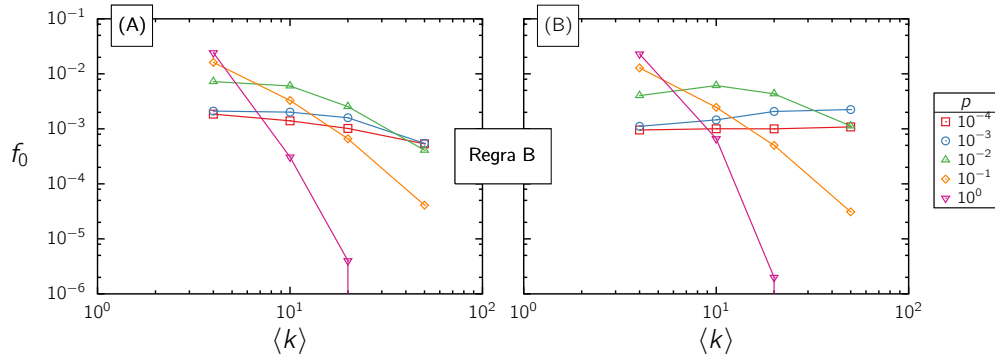


Figura 4.7: Fração da indecisos em função da conectividade da rede realizada para $N = 10^3$, $q = 2$ e utilizando a regra B; (A) realizando atualização assíncrona; (B) realizando atualização síncrona. Cada cor corresponde a um valor diferente de p .

4.3

Influência das quantidades de iniciadores em função do p

Todos os resultados analisados até agora supunham que cada uma das opções foi introduzida na rede por apenas um indivíduo. Mas podemos verificar o que ocorre na presença de mais iniciadores I , alterando as condições iniciais. Na Fig. 4.8 vemos essa dinâmica com diferentes iniciadores para a regra A com $p_s = 0.1$ e para a regra B com a atualização assíncrona. Usamos para tal $N = 10^4$, $\langle k \rangle = 10$ e $q = 2$.

Conforme aumentamos a quantidade de propagadores da opinião na configuração inicial da rede temos uma diminuição de f_w observada para redes com certa aleatoriedade associada. Em redes regulares, ou quase regulares, não há diferença nos resultados para diferentes I 's.

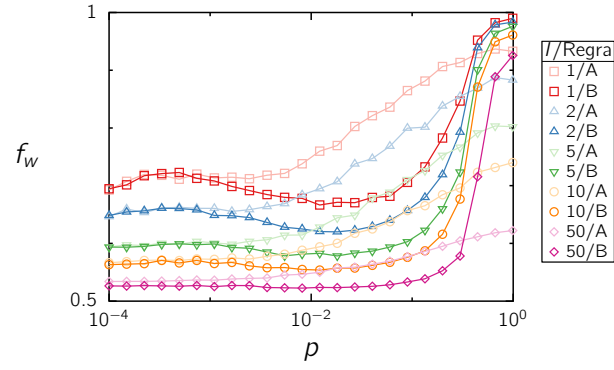


Figura 4.8: Resultados da fração média da opinião vencedora para diferentes iniciadores para a regra A com $p_s = 0.1$ e para a regra B com a atualização assíncrona. Os valores utilizados foram $N = 10^4$, $\langle k \rangle = 10$ e $q = 2$.

Conclusões e observações finais

Nesta dissertação, em suma, investigamos dinâmicas de múltiplas escolhas em redes de Watts-Strogatz determinando como varia a distribuição das preferências com os parâmetros do modelo e da rede, em particular, determinando sob quais condições ocorrem casos especiais tais como equipartição, consenso ou predominância de uma das alternativas.

Obtivemos resultados em função da aleatoriedade da rede, da conectividade média, do tamanho do sistema, da quantidade de iniciadores e de opções, bem como as diferenças dependendo da regra dinâmica e da forma de atualização aplicadas.

Podemos concluir, a partir destes resultados, que o papel da aleatoriedade da rede é não trivial: para um número pequeno de opiniões, as dinâmicas das regras A e B (com atualização síncrona) apresentam um valor ótimo de p , onde o predomínio da opinião vencedora apresenta o máximo.

O consenso pode ser alcançado em situações de grande aleatoriedade nos seguintes casos: (i) Com a regra A: para conectividades altas ($\langle k \rangle > 20$) e poucas opções ($q < 10$). (ii) Com a regra B (qualquer atualização): para conectividades altas ($\langle k \rangle > 20$) e qualquer número de opções (contanto que seja muito menor que o tamanho da rede, que é o caso estudado). (iii) Com a regra B (no caso especial de atualização assíncrona): com $\langle k \rangle > 10$.

Ou seja, a formação de consenso é influenciada por muitos fatores, mas em resumo, ele ocorre se temos conectividade média alta e alta aleatoriedade (p próximo a 1). Portanto, para a obtenção do consenso, o menor caminho médio parecer ser a condição mais importante que o alto coeficiente de aglomeração.

Outra conclusão é que os efeitos de tamanho finito em f_w são mais pronunciados para altos valores de $\langle k \rangle$.

Além disso, as duas dinâmicas (e seus diferentes modos de atualização) coincidem para baixa desordem da rede, mas diferem para graus de desordem maiores. Isto pode ser explicado em termos da maior interatividade que surge com os atalhos de uma rede mais desordenada, em contraste com a expansão não interativa que ocorre em redes regulares.

Uma diferença entre ambas dinâmicas é que, enquanto para a regra A, o aumento da conectividade média sempre favorece o predomínio de uma opinião, para a regra B, isso não é verdade.

Vimos também que a quantidade de iniciadores diminui a fração da opinião vencedora para todas as dinâmicas e atenua o máximo local que aparece na região de mundo pequeno.

Apesar do modelo de rede de WS nos permitir analisar os efeitos da aleatoriedade, e de capturar propriedades realísticas como a do mundo pequeno, esse modelo recebe críticas por não capturar um aspecto fundamental de muitas redes reais (que é a distribuição de graus com lei de potência). Além disso, redes de contatos reais estão em constante mudança, a todo momento novas relações são feitas e antigas são desfeitas, logo seria interessante obter um estudo em redes evolutivas. Em uma continuidade deste trabalho poderíamos tentar incluir estes aspectos na nossa rede de contatos, a fim de obter resultados cada vez mais próximas dos casos reais.

Referências Bibliográficas

- [1] NUSSENZVEIG, H. M.; JÚNIOR, J. P. **Complexidade e caos**. Editora UFRJ/COPEA, 1999.
- [2] DE OLIVEIRA, P.; DE OLIVEIRA, S. M. M. **Física em computadores**. Livraria da Física, 2010.
- [3] CASTELLANO, C.; FORTUNATO, S. ; LORETO, V. **Reviews of modern physics**. Statistical physics of social dynamics, journal, v.81, n.2, p. 591, 2009.
- [4] GALAM, S. **J. Math. Psychol.** Majority rule, hierarchical structures, and democratic totalitarianism: A statistical approach, journal, v.30, p. 426–434, 1986.
- [5] GALAM, S.; MOSCOVICI, S. **European Journal of Social Psychology**. Towards a theory of collective phenomena: Consensus and attitude changes in groups, journal, v.21, n.1.
- [6] BIKHCHANDANI, S.; HIRSHLEIFER, D. ; WELCH, I. **A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Informational Cascades**, 1992.
- [7] KIRMAN, A. **Q. J. Econ.** Ants, Rationality, and Recruitment, journal, v.108, p. 137–156, 1993.
- [8] GALAM, S. **Physica A**. Rational group decision making: A random field Ising model at $T = 0$, journal, v.238, p. 66–80, 1997.
- [9] DEFFUANT, G.; NEAU, D.; AMBLARD, F. ; WEISBUCH, G. **Adv. Complex Syst.** Mixing beliefs among interacting agents, journal, v.3, p. 87–98, 2000.
- [10] CONT, R.; BOUCHAUD, J.-P. **Macroecon. Dyn.** Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets, journal, v.100, p. 170–196, 2000.
- [11] CHALLET, D.; MARSILI, M. ; ZHANG, Y. **Minority Games**. Oxford University Press, 2005.
- [12] CURTY, P.; MARSILI, M. **J. Stat. Mech.** Phase coexistence in a forecasting game, journal, p. P03013, 2000.

- [13] DE MARTINO, A.; MARSILI, M. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. Statistical mechanics of socio-economic systems with heterogeneous agents, journal, v.39, n.43, p. R465–R540, 2006.
- [14] CHEN, P.; REDNER, S. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. Consensus formation in multi-state majority and plurality models, journal, v.38, n.33, p. 7239, 2005.
- [15] HOLME, P.; NEWMAN, M. E. J. **Phys. Rev. E**. Nonequilibrium phase transition in the coevolution of networks and opinions, journal, v.74, p. 056108, 2006.
- [16] GALAM, S. **Eur. Phys. J. B**. Minority opinion spreading in random geometry., journal, v.25, p. 403–406, 2002.
- [17] KRAPIVSKY, P. L.; REDNER, S. **Phys. Rev. Lett.** Dynamics of majority rule in two-state interacting spin systems, journal, v.90, p. 238701, 2003.
- [18] SHAO, J.; HAVLIN, S. ; STANLEY, H. **Phys. Rev. Lett.** Dynamic opinion model and invasion percolation, journal, v.103, p. 018701, 2009.
- [19] BISWAS, S.; CHATTERJEE, A. ; SEN, P. **Physica A**. Disorder induced phase transition in kinetic models of opinion dynamics, journal, v.391, p. 3257–3265, 2012.
- [20] CROKIDAKIS, N.; BLANCO, V. H. ; ANTENEODO, C. **Phys. Rev. E**. Impact of contrarians and intransigents in a kinetic model of opinion dynamics, journal, v.89, p. 013310, 2014.
- [21] CROKIDAKIS, N.; ANTENEODO, C. **Phys. Rev. E**. Role of conviction in nonequilibrium models of opinion formation, journal, v.86, p. 061127, 2012.
- [22] RAMOS, M.; SHAO, J.; REIS, S. D. S.; ANTENEODO, C.; ANDRADE JR, J. S.; HAVLIN, S. ; MAKSE, H. A. **Scientific reports**. How does public opinion become extreme?, journal, v.5, 2015.
- [23] RAMOS, M.; CALVÃO, A. M. ; ANTENEODO, C. **PLoS ONE**. Statistical patterns in movie rating behavior, journal, v.10, n.8, p. e0136083, 08 2015.
- [24] Intel divulga números de embalagens lançadas em 2014. <http://celuloseonline.com.br/intel-divulga-numeros-de-embalagens-lancadas-em-2014/>. "acessado em 03/03/2016".

- [25] AXELROD, R. **Journal of conflict resolution**. The dissemination of culture a model with local convergence and global polarization, journal, v.41, n.2, p. 203–226, 1997.
- [26] VAZQUEZ, F.; REDNER, S. **Europhysics Letters**. Non-monotonicity and divergent time scale in axelrod model dynamics, journal, v.78, n.1, 2007.
- [27] TRAVIESO, G.; DA FONTOURA COSTA, L. **Physical Review E**. Spread of opinions and proportional voting, journal, v.74, n.3, p. 036112, 2006.
- [28] CALVÃO, A.; RAMOS, M. ; ANTENEODO, C. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**. Role of the plurality rule in multiple choices, journal, v.2016, n.2, p. 023405, 2016.
- [29] WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. **Nature**. Collective dynamics of ‘small-world’ networks, journal, v.393, n.6684, p. 440–442, 1998.
- [30] NEWMAN, M.; BARABASI, A.-L. ; WATTS, D. J. **The structure and dynamics of networks**. Princeton University Press, 2006.
- [31] NEWMAN, M. **Networks: An Introduction**. New York, NY, USA: Oxford University Press, 2010.
- [32] **Mapping the human ‘diseasome’**. http://www.nytimes.com/interactive/2008/05/05/science/20080506_DISEASE.html. "acesado em 01/02/2016".
- [33] BARABÁSI, A.-L. **Network Science**. New York, NY, USA: PDF Version, November 2012.
- [34] SERRANO, M. A.; BOGUÑÁ, M.; PASTOR-SATORRAS, R. ; VESPIGNANI, A. **Large scale structure and dynamics of complex networks: From information technology to finance and natural sciences**. Correlations in complex networks, journal, p. 35–66, 2007.
- [35] GILBERT, E. N. **The Annals of Mathematical Statistics**. Random graphs, journal, v.30, n.4, p. 1141–1144, 1959.
- [36] ERDŐS, P.; RÉNYI, A. **Publicationes Mathematicae Debrecen**. On random graphs, journal, v.6, p. 290–297, 1959.
- [37] FIGUEIREDO, D. R. **Atualizações em Informática**. Introdução a redes complexas, journal, p. 303–358, 2011.

- [38] DE SOLA POOL, I.; KOCHEN, M. **Social Networks**. Contacts and influence, journal, v.1, n.1, p. 5–51, 1979.
- [39] MILGRAM, S. **Psychology Today**. The small world problem, journal, v.2, n.1, p. 60–67, 1967.
- [40] GUARE, J. **Six degrees of separation: A play**. Vintage, 1990.
- [41] **Three and a half degrees of separation**. https://research.facebook.com/blog/three-and-a-half-degrees-of-separation/?hc_location=ufi. "acessado em 29/02/2016".
- [42] TELESFORD, Q. K.; JOYCE, K. E.; HAYASAKA, S.; BURDETTE, J. H. ; LAURIENTI, P. J. **Brain Connectivity**. The ubiquity of small-world networks, journal, v.1, n.5, p. 367–375, 2011.
- [43] BARRAT, A.; WEIGT, M. **Eur. Phys. J. B**. On the properties of small-world network models, journal, v.94, p. 85–94, 2000.