4
Método Estendido dos Elementos Finitos

4.1
Introdução

Baseado no conceito de Partição da Unidade de Melenk e Babuska (1996) e admitindo, por hipótese, que o Princípio do Trabalho Virtual (PTV) é capaz de representar o comportamento de um corpo fraturado cujas faces estejam livres da ação de forças de superfície, Belytschko e Black (1999) apresentaram a primeira formulação do Método Estendido dos Elementos Finitos (*eXtended Finite Element Method* - XFEM) para um corpo bidimensional. Empregando a função da ponta da fratura (*crack tip*), conforme Equação 4.5, para descrever o campo de deslocamentos descontínuos, o elemento permitiu modelar a propagação de uma fratura com pequena curvatura dispensando a geração de novas malhas. Para grandes curvaturas, a resposta do elemento deixava de ser precisa, exigindo adaptação da malha. Möes et al. (1999) aprimoraram o XFEM, proposto por Belytschko e Black (1999), introduzindo a função *Heaviside* (Equação 4.4) para representar a descontinuidade de deslocamentos ao longo das faces da fratura. A função *crack tip* passou a ser aplicada apenas para representar o campo de deslocamentos na ponta da fratura, eliminando a necessidade de geração de novas malhas para fraturas com grande curvatura.

Embora o XFEM seja relativamente recente, a bibliografia referente à sua aplicação na modelagem de problemas com singularidades no domínio é extensa e seu uso é crescente. Detalhes sobre XFEM e suas aplicações podem ser encontrados no livro de Mohammadi (2008) e nos trabalhos de Belytschko et al. (2009) e Fries e Belytschko (2010).

Uma alternativa do método XFEM tradicional para descontinuidades fortes, baseada na abordagem de Hansbo e Hansbo (2004), foi desenvolvida por Song et al. (2006), chamada de método dos nós fantasmas. Neste caso a fratura não é

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

modelada com a adição de graus de liberdade, mas por elementos sobrepostos, conforme será discutido na seção 4.3.

Outras extensões ou alternativas do XFEM são o método *cohesive segment*, proposto por Remmers et al. (2003, 2008), onde a fratura é representada por um conjunto de segmentos coesivos que atravessam três elementos inteiros (Figura 4.1). Uma abordagem semelhante foi desenvolvida por Song e Belytschko (2009), com o método *cracking node*, onde a fratura passa diretamente através do nó de um elemento (Figura 4.2). Em ambos os métodos, a continuidade da trajetória da fratura não é requerida.

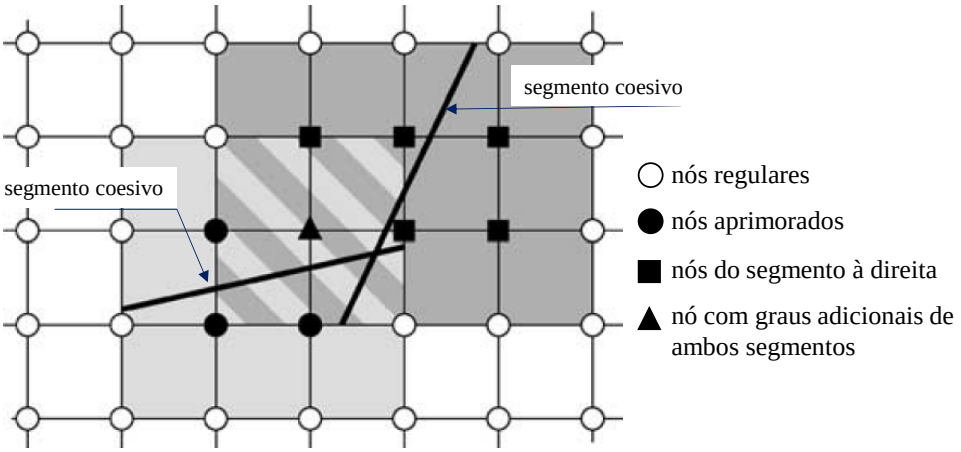

Figura 4.1 - Representação do método *cohesive segment* (Remmers et al., 2003).

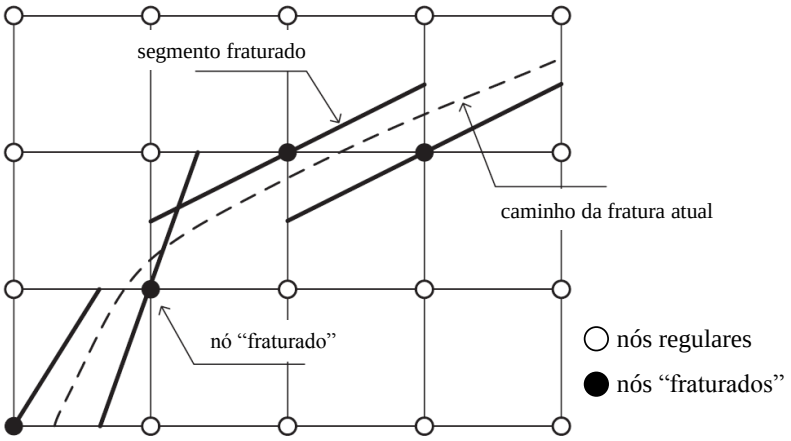

Figura 4.2 - Representação do método *cracking node* (Song e Belytschko, 2009).

Duas etapas independentes estão presentes na análise de propagação dinâmica de fratura pelo XFEM. Inicialmente, um procedimento de rastreamento da fratura é necessário para representar uma fratura existente e sua evolução através do tempo, enquanto que a segunda etapa está relacionada com a formulação da propagação

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

dinâmica da fratura. Uma breve revisão bibliográfica de propagação dinâmica de fraturas utilizando XFEM será descrita a seguir.

Uma das primeiras formulações XFEM abordando a propagação dinâmica de fraturas foi apresentada por Belytschko et al. (2003), utilizando ao longo da fratura uma lei tensão vs. deslocamento (modelo da zona coesiva). A direção e a velocidade de propagação de fratura são controladas pelo critério da perda de hiperbolicidade. Para este propósito, um indicador de hiperbolicidade foi definido, cujo valor mínimo define a direção de propagação da fratura. Essa formulação é limitada a materiais com comportamento independente da taxa de deformação e foi aplicada a vários problemas de propagação dinâmica de fraturas, incluindo ramificações.

Outros aperfeiçoamentos no método foram feitos. Belytschko e Chen (2004) desenvolveram um método de elemento finito enriquecido singular para propagação de fraturas elastodinâmicas. Réthore et al. (2005a, 2005b) propuseram uma generalização do XFEM para modelar fraturas dinâmicas e problemas dependentes do tempo. Zi et al. (2005) analisaram a evolução de fraturas dinâmicas com o modelo de zona coesiva e Menouillard et al. (2006) introduziram uma matriz de massa concentrada para elementos enriquecidos, o que permitiu utilizar uma formulação explícita em aplicações do XFEM.

4.2
Formulação do XFEM

Na formulação do XFEM adicionam-se às funções de interpolação do método convencional dos elementos finitos um conjunto de funções de forma especiais $N_I(x)$, no domínio onde existam descontinuidades, que satisfaçam à condição:

$$\sum_{i \in I} N_I(x) = 1, \; x \in \Omega \tag{4.1}$$

onde I representa o conjunto de todos os nós no domínio Ω.

Logo, qualquer função $\psi(x)$ pode ser reproduzida por:

$$\sum_{i \in I} N_I(x) \cdot \psi(x) = \psi(x) \tag{4.2}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

Ao se escolher adequadamente a função $\psi(x)$ para cada grau de liberdade, pode-se então incorporar um comportamento desejado, mantendo a base matemática do método de elementos finitos convencional.

Considere I_Λ os nós que contém a ponta da fratura e I_Γ o conjunto dos nós que contém a trajetória da fratura ($I_\Lambda \cap I_\Gamma = 0$), conforme Figura 4.3. Um enriquecimento da aproximação dos deslocamentos pode ser escrito como:

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} N_I(x) \left[u_i + \underbrace{H(x) a_J}_{J \in I_\Gamma} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{4} F_\alpha(x) b_K^\alpha}_{K \in I_\Lambda} \right] \tag{4.3}$$

onde u_i é o vetor de deslocamentos nodais do MEF convencional, a_J é o vetor de descontinuidades nos nós enriquecidos, b^α_K o vetor de graus de liberdade no nó enriquecidos da trajetória da fratura assintótica, $H(x)$ a função *Heaviside* definida por:

$$H(x) = \begin{cases} +1, & \text{se } (x\text{-}x^*) \cdot n \geq 0 \\ -1, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.4}$$

onde x é um ponto qualquer (ou um ponto de integração), x^* é a projeção de x sobre a superfície da fratura e n é vetor unitário normal à fratura em x^*, como ilustrado na Figura 4.3.

As funções $F_\alpha(x)$ na mecânica da fratura linear elástica são funções assintóticas associadas com a ponta da fratura:

$$[F(x)]_{\alpha=1}^{4} = \left[\sqrt{r} \cdot \text{sen}\frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cdot \text{sen}\frac{\theta}{2} \text{sen}\theta, \sqrt{r} \cdot cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \text{sen}\theta \right] \tag{4.5}$$

onde (r, θ) são as coordenadas radial e angular, respectivamente, conforme Figura 4.3, e $\theta = 0°$ representa a tangente à trajetória na ponta da fratura.

Para maior eficiência computacional, o enriquecimento é executado apenas nos subdomínios onde são necessários, identificando-se o subconjunto de nós pertencente a I_Λ e I_Γ que devem passar por este processo. Um método conveniente para escolher tais nós é o chamado método *level-set*, descrito a seguir.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

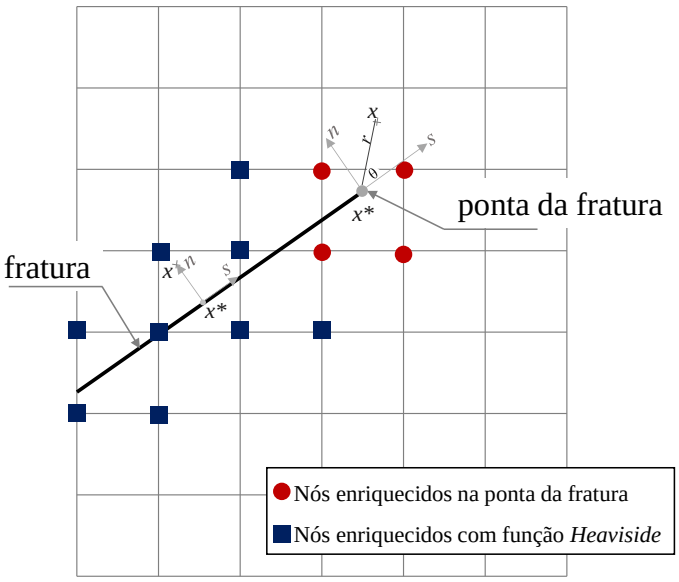

Figura 4.3 - Esquema de enriquecimento dos nós em uma malha de elementos finitos.

O método *level set* foi proposto por Osher e Sethian (1988) para a localização de interfaces (fraturas) e é largamente utilizado na aplicação do XFEM (Chessa e Belytschko, 2003; Duflot, 2007; Duddu et al, 2008). A utilização do *level set* simplifica a atualização da posição da interface bem como o cálculo da curvatura da mesma.

Em geral, uma interface Γ pode ser representada por:

$$\Gamma(t) = \left\{ x \in R^2 : \Phi(x,t) = 0 \right\} \tag{4.6}$$

onde Φ(x,t) é uma função *level set* dependente da distância da interface a um ponto x, expressa por:

$$\Phi(x) = \pm \min_{x^* \in \Gamma} \left\| x - x^* \right\|, \ \forall \mathrm{x} \in \Omega \tag{4.7}$$

onde os sinais positivo e negativo indicam o lado da interface no qual se encontra o ponto.

A descrição de uma interface aberta requer uma segunda função *level set* Ψ, para localizar seu término. A função Ψ também é uma função distância similar à função Φ (Equação 4.7) mas ortogonal à superfície da fratura. A interface aberta Γ é então descrita por:

$$\Gamma(t) = \left\{ x \in R^2 : \Phi(x,t) = 0 \text{ e } \Psi(x,t) \leq 0 \right\} \tag{4.8}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

As funções de forma convencionais do método dos elementos finitos podem ser utilizadas para interpolar a função Φ em qualquer ponto x do domínio, expressa por:

$$\Phi(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) \cdot \Phi_i \tag{4.9}$$

onde o somatório se dá sobre todos os nós do elemento finito que contém o ponto x.

Assim, a seleção dos nós a serem enriquecidos pode ser feita com base nas seguintes equações (4.10) e (4.11). Um elemento é seccionado se a função distância (Φ) mudar de sinal no interior do elemento. Para identificar o elemento que contém a ponta da fratura, dois critérios devem ser atendidos simultaneamente (Equação 4.11), onde I^{el} é o conjunto de nós do elemento, conforme um exemplo é ilustrado na Figura 4.4.

$$\begin{aligned} &\min_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) \cdot \max_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) < 0, \text{ elemento seccionado} \\ &\min_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) \cdot \max_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) > 0, \text{ elemento não seccionado} \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\min_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) \cdot \max_{i \in I^{el}}(\Phi(x)) < 0 \\ &\min_{i \in I^{el}}(\Psi(x)) \cdot \max_{i \in I^{el}}(\Psi(x)) < 0 \end{aligned}\right\} \text{elemento da ponta da fratura} \tag{4.11}$$

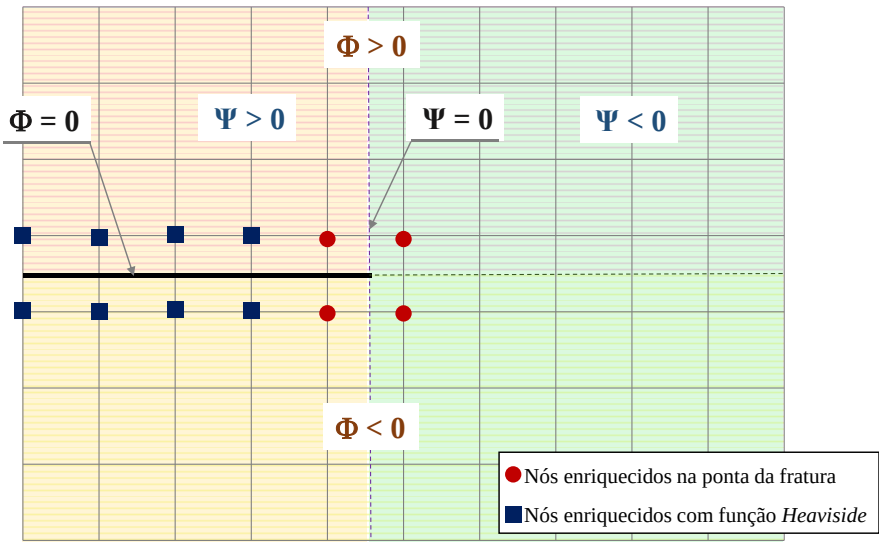

Figura 4.4 - Valores das funções *level set* para descrição da fratura.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

Os nós que estão em um determinado raio a da ponta da fratura são enriquecidos (Figura 4.5), por meio de:

$$I^*_{ponta} = \left\{ i : \left\| x_i - x_i^* \right\| < r \right\} \tag{4.12}$$

onde $\|x_i - x_i^*\|$ é a distância entre um ponto x_i e ponta da fratura x_i^*. Para fraturas estacionárias, o programa ABAQUS v.6.14 usa como estimativa do raio um valor três vezes superior ao do comprimento característico do elemento. No entanto, para o caso de propagação de fraturas, o enriquecimento da ponta da fratura não está implementado neste programa.

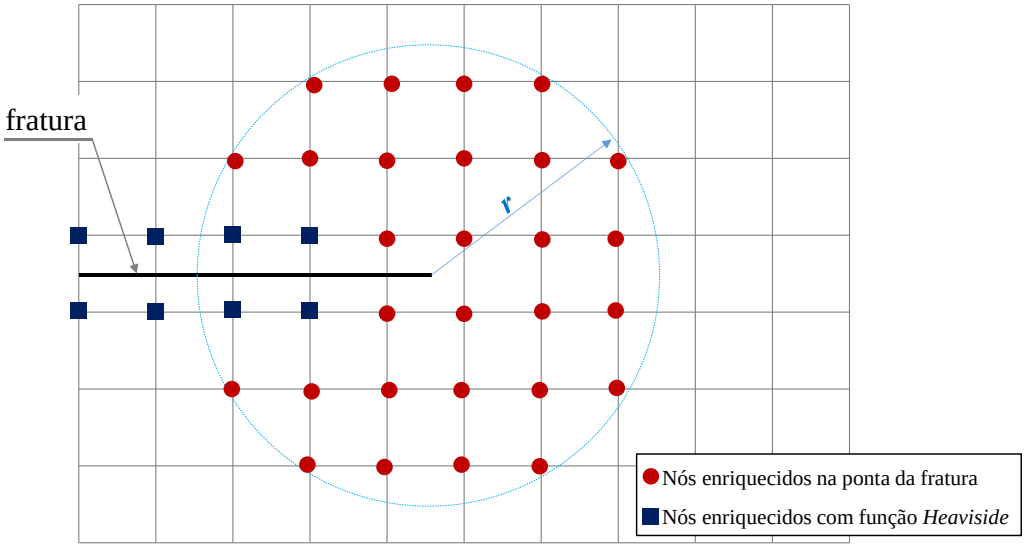

Figura 4.5 - Estratégia de enriquecimento na ponta da fratura.

4.3 Descontinuidade com nós fantasmas

Song et al. (2006) apresentaram uma técnica para modelar a propagação dinâmica de fraturas, descrevendo a descontinuidade por meio de elementos finitos sobrepostos e introduzindo o conceito de nós fantasmas. Sem necessidade de introduzir graus de liberdade adicionais, como inicialmente proposto no XFEM, e as funções de interpolação associadas a um elemento fraturado são as mesmas dos elementos intactos, o que facilita a implementação desta técnica em programas computacionais existentes.

A Figura 4.6 apresenta um exemplo de um domínio fraturado Ω_0 apoiado no contorno Γ_u e submetido a forças de superfície t aplicadas no contorno Γ_t. No

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

elemento seccionado por uma fratura, nós fantasmas com coordenadas inicialmente coincidentes são gerados e agregados aos subconjuntos dos nós reais (Figura 4.6). Quando a fratura se propaga, os nós fantasmas se afastam entre si dependendo da magnitude da abertura da fratura, governada por uma lei coesiva.

A aproximação do campo de deslocamentos através da fratura é definida como a diferença entre os campos de deslocamentos gerados nos dois elementos formados pela fratura:

$$u^h(X) = \sum_{I \in \{w_0^+, w_p^-\}} N_I(x) \cdot u_I \cdot H(f(X)) + \sum_{J \in \{w_0^-, w_p^+\}} N_J(x) \cdot u_J \cdot H(-f(X)) \qquad (4.13)$$

onde w_0^+, w_0^- são os nós reais e w_p^+, w_p^- os nós fantasmas dos subdomínios Ω_0^+, Ω_0^-, Ω_p^+ e Ω_p^-, respectivamente, com a função *level set* $f(X)$ avaliada no ponto X. A descontinuidade dos deslocamentos é então determinada executando-se as integrações do método dos elementos finitos em ambos os elementos nos subdomínios Ω_0^+ e Ω_0^- (Figura 4.6) que contém os nós reais e se estendem até a um lado da fratura.

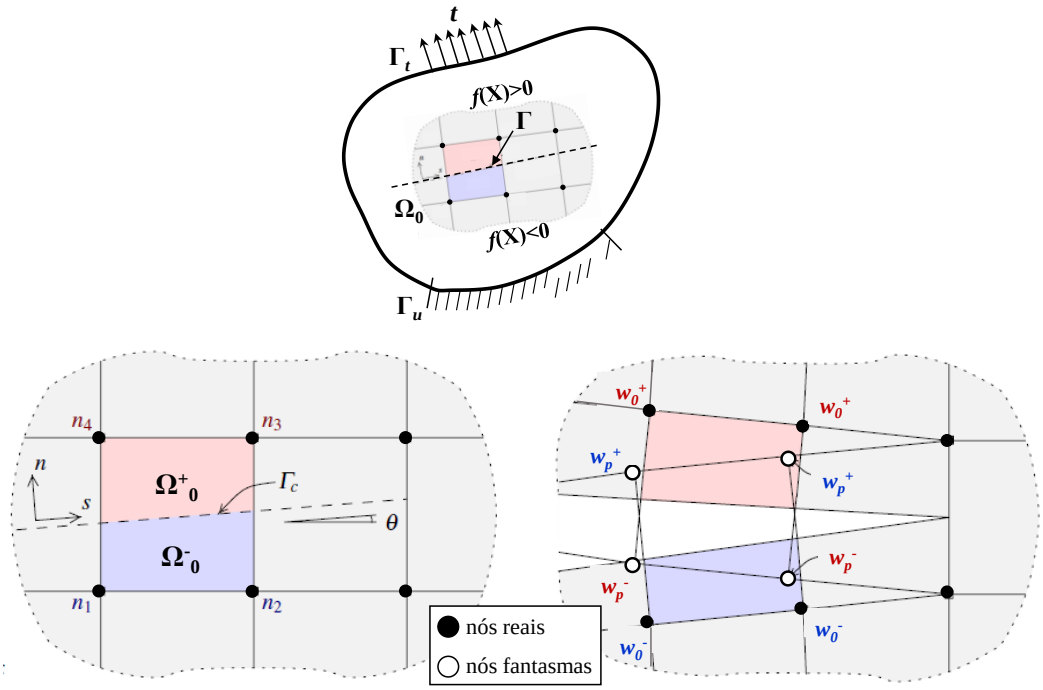

Figura 4.6 - Ilustração da técnica dos nós fantasmas gerados quando uma fratura secciona o elemento finito. As integrações são realizadas separadamente nos domínios Ω_0^+ e Ω_0^-.

Embora o XFEM seja adequado para modelar o campo de tensões e deformações ao redor da ponta de uma fratura, a técnica dos nós fantasmas só se

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

aplica à representação de fraturas associadas ao modelo da zona coesiva, com o campo de tensões singulares substituído por forças coesivas. No programa ABAQUS v.6.14 o trecho da fratura estende-se completamente de um contorno a outro do elemento, mas Rabczuk et al. (2008) empregaram a técnica dos nós fantasmas para modelar uma fratura cuja ponta se situa no interior do elemento.

4.4
Modelo da zona coesiva

O processo de fraturamento está associado ao desenvolvimento de uma região em torno da ponta da fratura que apresenta deformações plásticas antes da propagação (Figura 4.7). Essa região, chamada de zona de processo de fratura, apresenta duas subregiões não lineares: uma caracterizada pelo comportamento de amolecimento progressivo do material (área amarela na Figura 4.7) e uma subregião subjacente, denominada zona de endurecimento não linear, que representa a escoamento plástico (área azul claro na Figura 4.7).

Para o primeiro tipo de comportamento (Figura 4.7a), ambas as regiões de amolecimento progressivo e endurecimento não linear são relativamente pequenas de tal forma que a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) pode ser geralmente aplicada. Materiais frágeis, tais como vidro, cerâmica e certos metais ilustram este tipo de processo de fratura.

Para o segundo tipo de comportamento (Figura 4.7b), devido à maior zona de endurecimento não linear onde ocorre escoamento plástico, a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) deve ser empregada. Materiais dúcteis, como determinados metais, representam este segundo tipo de comportamento.

O terceiro tipo de comportamento (Figura 4.7c) está relacionado com o presente trabalho, que simula o dano progressivo do material amolecido ao longo da zona de processo de fratura. Enquanto a zona de endurecimento não linear pode ser insignificante para este tipo, a zona de amolecimento relativamente grande influencia significativamente a redistribuição das tensões. Este comportamento, chamado quase frágil, é típico de concreto, gelo, papel, rochas brandas, etc.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

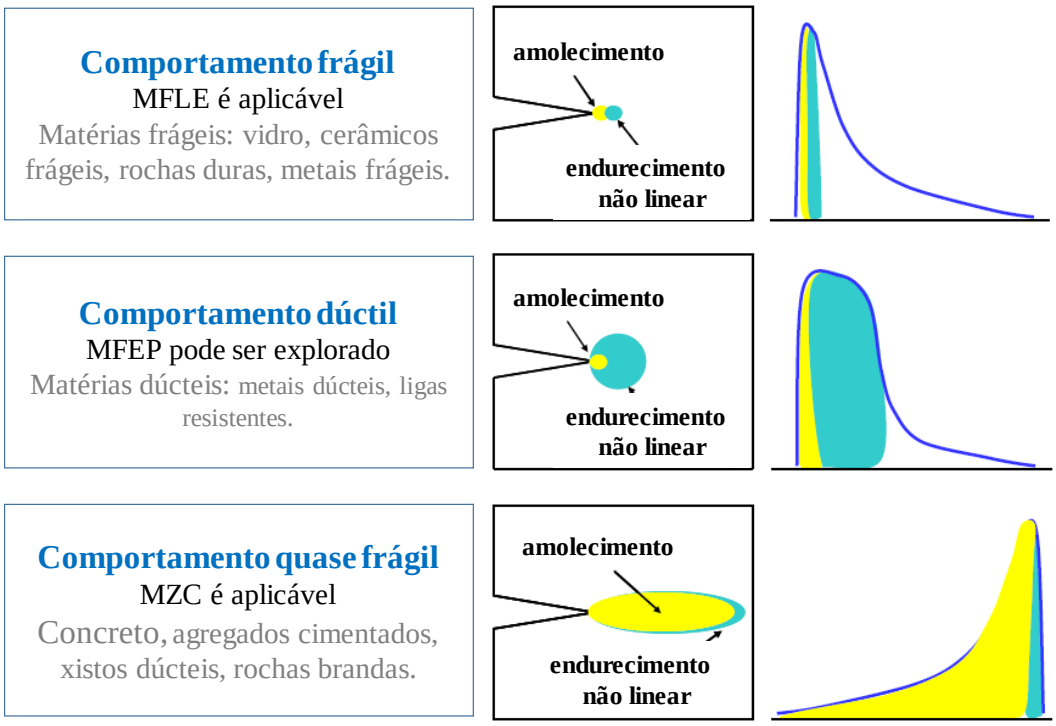

Figura 4.7 - Tipos de comportamento da zona de processo de fratura (Bazant e Planas, 1998).

Para levar em conta as deformações inelásticas que surgem na zona de fratura, o Modelo de Zona Coesiva (MZC), originalmente proposto por Barenblatt (1962) e Dugdale (1960), é geralmente empregado. Nesse modelo as deformações na ponta da fratura antes da propagação são contabilizadas e a dissipação de energia é considerada ocorrer em uma região finita próxima à ponta. O modelo da zona coesiva simula a iniciação e evolução de fraturas através de uma trajetória arbitrária dependente das condições do problema. À medida que a propagação acontece, a zona coesiva é estendida através dos elementos. O MZC não deve ser confundido com elementos de interface, descritos na seção 3.3, onde a zona de processo de fratura é somente restrita ao longo dos contornos dos elementos.

Hillerberg et al. (1976) propuseram o modelo de fratura fictícia no qual a propagação acontece quando a tensão na ponta atinge a resistência à tração do material, com as tensões ao longo das superfícies da fratura decrescendo com a abertura da mesma, porém não subitamente e sem causar singularidades junto à ponta da fratura (Figura 4.8). Várias versões do MZC foram propostas na literatura nas últimas décadas. A principal diferença entre elas se refere à forma da resposta tensão de tração versus deslocamento (abertura da fratura) e as constantes usadas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

para descrição do modelo. Fora da zona de processo de fratura o material é considerado com comportamento elástico linear (Figura 4.9a).

O início de dano se refere ao início da degradação da resposta de um ponto do material. O processo de degradação começa quando as tensões ou deformações satisfazem aos critérios de iniciação de dano, que devem ser especificados. Neste estudo, a tensão principal máxima σ_{max} foi utilizada como critério de dano, expressado por:

$$f = \left\{ \frac{\langle \sigma_{\max} \rangle}{T_{\max}} \right\} \tag{4.14}$$

onde T_{max} é a resistência à tração da rocha. O símbolo $\langle\ \rangle$ representa os parênteses de *Maculay* e sua interpretação é a seguinte: $\sigma_{max} = 0$, se $\sigma_{max} < 0$ e $\langle \sigma_{\max} \rangle = \sigma_{max}$, se $\sigma_{max} \geq 0$. A iniciação do dano começa quando esta razão for igual a um ($f = 1$).

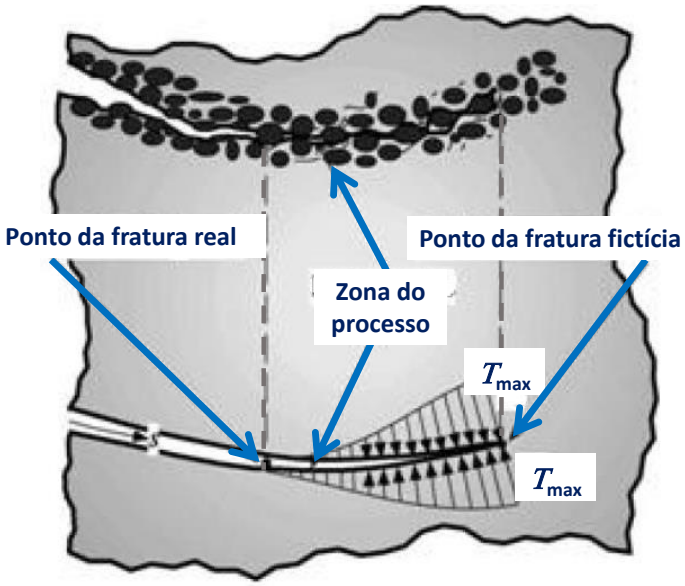

Figura 4.8 - Zona de processo de fratura para o modelo de zona coesiva (adaptado de Hillerberg et al., 1976).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

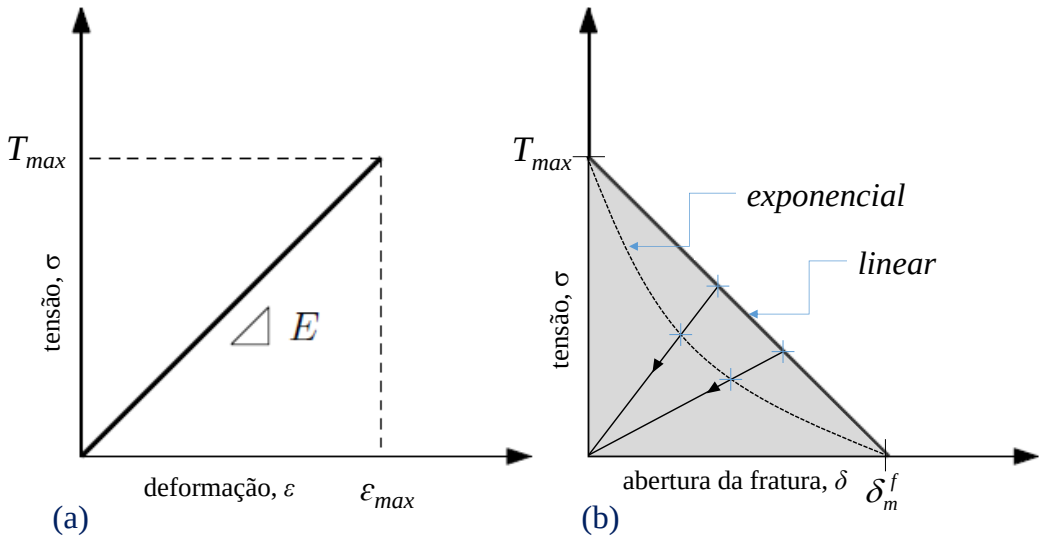

Figura 4.9 - Modelo constitutivo: (a) zona de processo de fratura; (b) evolução do dano.

A evolução do dano descreve a taxa pela qual a rigidez do material é degradada uma vez que o critério de iniciação seja atingido. A taxa de degradação D é um escalar que varia entre 0 a 1. As componentes da tensão afetadas pelo dano são:

$$t_n = \begin{cases} (1-D)\bar{t}_n, & \bar{t}_n \geq 0 \\ \bar{t}_n, & \textit{(sem dano na compressão)} \end{cases} \qquad (4.15)$$

$$t_s = (1-D)\bar{t}_s$$

onde o vetor de tração nominal t tem duas componentes, que refletem a tensão normal e de cisalhamento; as correspondentes parcelas elásticas $\bar{t}_n$ e $\bar{t}_s$ são utilizadas quando o material não experimentou qualquer dano.

O comportamento da variável de dano depende da forma do amolecimento plástico do material, geralmente linear ou exponencial (Figura 4.9b). Para o amolecimento linear, D reduz-se à expressão proposta por Camanho e Davila (2002):

$$D = \frac{\delta_m^f\left(\delta_m^{\max} - \delta_m^o\right)}{\delta_m^{\max}\left(\delta_m^f - \delta_m^o\right)} \qquad (4.16)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

onde $\delta_m^{\max}$ refere-se ao valor máximo de deslocamento efetivo $\delta_m = \sqrt{\langle \delta_n \rangle^2 + \delta_s^2}$ atingido durante a história do carregamento, δ_m^0 e δ_m^f representam os deslocamentos inicial e final, respectivamente.

No MZC os modos I e II de fraturamento contribuem para abertura da fratura, conforme Figura 4.10. A ilustração mostra a ocorrência de tração no eixo vertical, bem como as magnitudes das separações normal e cisalhante ao longo dos eixos horizontais. Os triângulos mais claros nos planos verticais representam a resposta tração vs. separação no MZC sob deformações normais e cisalhantes, respectivamente. Todos os demais planos verticais intermediários, que passam pelo eixo vertical na Figura 4.10, representam a resposta de dano sob condição de modo misto de fraturamento. O critério de modo misto I-II é utilizado como a envoltória da lei de potência, estabelecida em termos de uma interação entre as taxas de liberação de energia (Wu e Reuter, 1965):

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^{\eta} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^{\eta} = 1 \tag{4.17}$$

onde G_I e G_{II} representam a energia de fraturamento nos modos I e II, respectivamente; G_{IC} e G_{IIC} as correspondentes energias críticas de fraturamento nos modos I e II, com η um exponente empregado para definição da forma da envoltória. Na presente pesquisa foi adotado o valor $\eta = 1$.

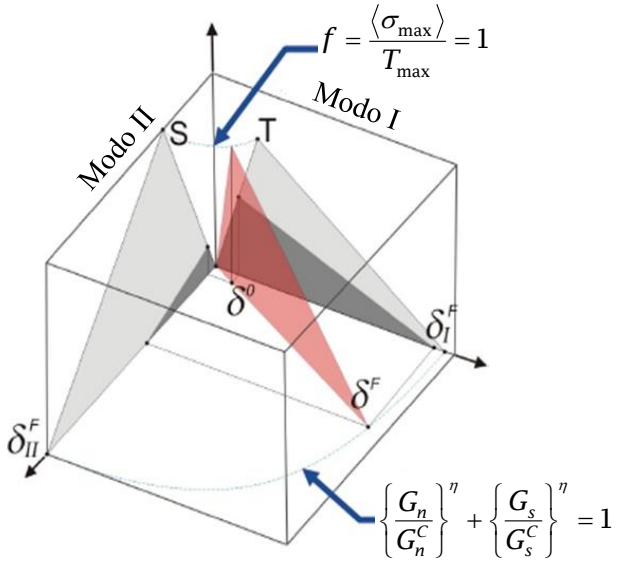

Figura 4.10 - Respostas no modo misto do MZC.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

4.5
Discretização espacial

Considerando um problema dinâmico 2D, a equação de momentum linear para uma descrição Lagrangeana é expressa por:

$$\frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i - \rho_0 \ddot{u}_i = 0, \text{ em } \Omega_0 \tag{4.18}$$

onde P é o tensor de tensão nominal, ρ_0 a massa específica do material, b o vetor das forças de corpo e $\ddot{u}$ o vetor das acelerações.

As condições de contorno do problema podem ser especificadas como:

$$\begin{aligned} & n_j^0 P_{ji} = \bar{t}_i^0 && \text{sobre } \Gamma_t^0 \\ & u_i = \bar{u}_i && \text{sobre } \Gamma_u^0 \\ & n_j^0 P_{ji}^- = -n_j^0 P_{ji}^+ = \tau_i^{0c}(\llbracket u_i \rrbracket) && \text{sobre } \Gamma_c^0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde n^0 é p vetor unitário normal ao contorno indicado, τ^{0c} a força coesiva sobre a fratura, $\bar{t}^0$ a força aplicada sobre o contorno de Neumann Γ_t^0 e $\bar{u}$ o campo de deslocamentos prescritos aplicado sobre o contorno de *Dirichlet* Γ_u^0 com $\Gamma_u^0 \cup \Gamma_t^0 = 0$, $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$, como ilustrado na Figura 4.11. Os sinais positivo (+) e negativo (-) dos superescritos na Equação (4.19) se referem aos dois lados da descontinuidade.

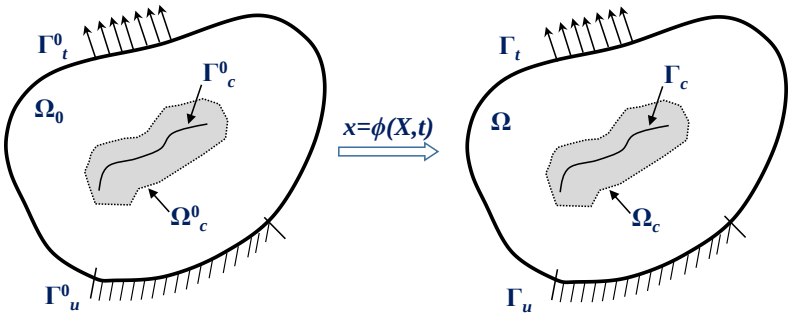

Figura 4.11 - Corpo 2D com uma descontinuidade e sua representação no domínio inicial (esquerda) e atual (direita).

Equações discretas são construídas através do procedimento padrão do método de Galerkin. O espaço admissível para os campos de deslocamentos é definido como segue:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

$$\mathcal{U}=\{u(X,t) \parallel u(X,t) \in C^0, u(X,t)= \bar{u}(t) \text{ sobre } \Gamma_u{}^0, u \text{ descontinua sobre } \Gamma_c\} \tag{4.20}$$

$$\mathcal{U}_0=\{\delta u(X,t) \parallel \delta u(X,t) \in C^0, \delta u(X,t)= 0 \text{ sobre } \Gamma_u{}^0, \delta u \text{ descontinua sobre } \Gamma_c\} \tag{4.21}$$

A forma fraca da equação de momentum linear é escrita como:

$$\delta W^{cin} = \delta W^{int} - \delta W^{ext} + \delta W^{coh} \qquad \forall \delta u(X) \in \mathcal{U}_0 \tag{4.22}$$

onde δW^{int} é o trabalho das forças internas, δW^{ext} o trabalho das forças externas, δW^{cin} o trabalho correspondente à energia cinética e δW^{coh} o trabalho realizado pelas forças coesivas ao longo da superfície da fratura Γ_c. Estas quantidades são definidas como (Belytschko et al., 2000):

$$\partial W^{cin} = \int_{\Omega_0} \delta u \cdot \rho_0 \ddot{u} d\Omega_0 \tag{4.23}$$

$$\partial W^{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \delta u}{\partial X} : P d\Omega_0 \tag{4.24}$$

$$\partial W^{ext} = \int_{\Omega_0} \delta u \cdot \rho_0 b d\Omega_0 + \int_{\Gamma_t^0} \delta u \, \bar{t}^{\,0} d\Gamma_t^0 \tag{4.25}$$

$$\partial W^{coh} = -\int_{\Gamma_c} \delta[|u|] \cdot \tau^c d\Gamma_c \tag{4.26}$$

onde $\bar{t}$ é o carregamento normalizado prescrito em $\Gamma_t{}^0$ e τ^c a força coesiva aplicada sobre a superfície da descontinuidade. Uma forma Lagrangiana atualizada é utilizada na Equação (4.26).

A discretização em elementos finitos da Equação (4.22) produz então:

$$\mathrm{f}^{\text{cin}} = \mathrm{f}^{\text{int}} - \mathrm{f}^{\text{ext}} + \mathrm{f}^{\text{coh}} \tag{4.27}$$

onde:

$$\mathrm{f}_e^{kin} = \int_{\Omega_0^e} \rho_0 N^T N H\left((-1)^e f(X)\right) d\Omega_0^e \ddot{u}_e \tag{4.28}$$

$$\mathrm{f}_e^{\text{int}} = \int_{\Omega_0^e} \mathrm{B}^T \mathrm{P}_e H\left((-1)^e f(X)\right) d\Omega_0^e \tag{4.29}$$

$$\mathrm{f}_e^{\text{int}} = \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \mathrm{N}^T \mathrm{b} H\left((-1)^e f(X)\right) d\Omega_0^e + \int_{\Gamma_t^{e0}} \mathrm{N}^T \bar{t}^0 H\left((-1)^e f(X)\right) d\Gamma_t^{e0} \tag{4.30}$$

$$\mathrm{f}_e^{coh} = (-1)^e \int_{\Gamma_c^{e0}} N^T \tau^c n_0 d\Gamma_c^{e0} \tag{4.31}$$

com o índice subscrito 'e' assumindo os valores 1 ou 2, representando o elemento real e o elemento sobreposto, respectivamente. O índice sobrescrito 'e' indica uma

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

restrição de domínio do elemento enquanto que B é o operador discreto que relaciona deformações com deslocamentos nodais.

4.6
Integração numérica

Para avaliar as integrais das equações (4.28) - (4.31) nos elementos finitos onde as funções *Heaviside* ocorrem, é necessário um esquema modificado de quadratura numérica, como a integração de subdomínios (Belytschko et al., 2003). Na integração de subdomínios, o elemento é subdividido em vários subdomínios, cada qual integrado separadamente (Figura 4.12a). Segundo Song et al. (2006), várias dificuldades surgem nesta abordagem quando descontinuidades em movimento devem ser consideradas. Por exemplo, na propagação da fratura em materiais não lineares, as variáveis históricas armazenadas nos pontos de quadratura devem ser interpoladas para os pontos de quadratura recém criados quando um esquema de integração de subdomínios é utilizado. Alternativamente, Song et al. (2006) sugeriram esquema de integração com apenas um ponto de Gauss fixo por elemento, com controle de modos de energia nula.

Como mostrado na Figura 4.12b, o elemento seccionado é substituído por dois elementos e as forças nodais são obtidas por integrações executadas separadamente:

$$f_e = f_{e1} + f_{e2} \tag{4.32}$$

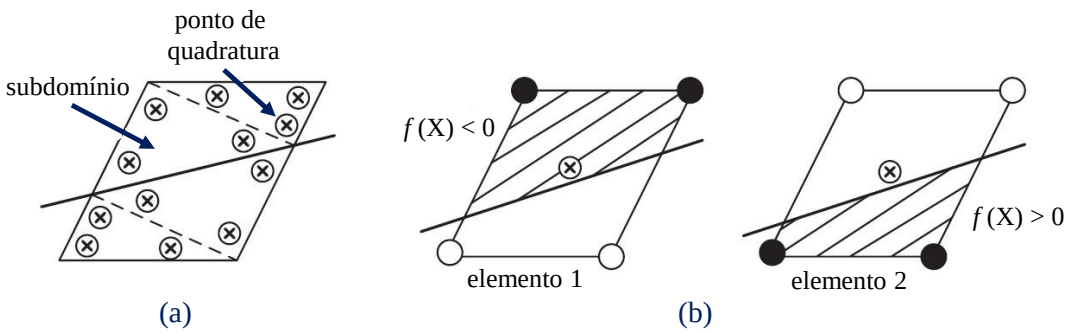

Figura 4.12 - Integração numérica com esquema de integração: (a) de subdomínio; (b) com um ponto (Song et al., 2006).

onde f_e representam forças no elemento seccionado e f_{e1} e f_{e2} forças nos elementos sobrepostos construídos com a técnica dos nós fantasmas. Expandindo as equações, resulta:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA

$$\mathrm{f}_{e1}^{\mathrm{cin}} = \frac{A_{e1}}{A_0}\int_{\Omega_0^e} \rho_0 N^T N d\Omega_0^e \ddot{u}_{e1} \;\text{ e }\; \mathrm{f}_{e2}^{\mathrm{cin}} = \frac{A_{e2}}{A_0}\int_{\Omega_0^e} \rho_0 N^T N d\Omega_0^e \ddot{u}_{e2} \tag{4.33}$$

$$\mathrm{f}_{e1}^{\mathrm{int}} = \frac{A_{e1}}{A_0}\int_{\Omega_0^e} \left\{B^T P_{e1} + \mathrm{f}_{e1}^{\mathrm{stab}}\right\} d\Omega_0^e \;\text{ e }\; \mathrm{f}_{e2}^{\mathrm{int}} = \frac{A_{e2}}{A_0}\int_{\Omega_0^e} \left\{B^T P_{e2} + \mathrm{f}_{e2}^{\mathrm{stab}}\right\} d\Omega_0^e \tag{4.34}$$

$$\mathrm{f}_{e1}^{\mathrm{ext}} = \frac{A_{e1}}{A_0}\int_{\Omega_0^e} \rho_0 N^T b d\Omega_0^e + \int_{\Gamma_t^{e0}} H(-f) N^T \bar{\mathrm{t}}^0 d\Gamma_t^{e0} \tag{4.35}$$

$$\mathrm{f}_{e2}^{\mathrm{ext}} = \frac{A_{e2}}{A_0}\int_{\Omega_0^e} \rho_0 N^T b d\Omega_0^e + \int_{\Gamma_t^{e0}} H(f) N^T \bar{\mathrm{t}}^0 d\Gamma_t^{e0} \tag{4.36}$$

$$\mathrm{f}_{e1}^{\mathrm{coh}} = -\int_{\Gamma_c^{e0}} N^T \tau^c n_0 d\Gamma_c^{e0} \tag{4.37}$$

$$\mathrm{f}_{e2}^{\mathrm{coh}} = \int_{\Gamma_c^{e0}} N^T \tau^c n_0 d\Gamma_c^{e0} \tag{4.38}$$

onde $\mathrm{f}^{\mathrm{stab}}$ é uma força de estabilização para controle de modos de energia nula, A_0 a área total do elemento, A_{e1} e A_{e2} as áreas dos elementos sobrepostos.

Pode-se observar que a partir das equações (4.33) - (4.36), quando são calculadas as forças em um elemento seccionado, apenas a fração de área é modificada. Este procedimento computacional pode ser facilmente implementado em um programa de elementos finitos convencional.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0921953/CA