

**Bruno Ribeiro Ratton**

**Desenvolvimento de um Aparato para  
Visualização e Análise do Comportamento  
Dinâmico de Motocicletas em Escala**

**PROJETO DE GRADUAÇÃO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA  
MECÂNICA**

Programa de Graduação em  
Engenharia Mecânica

Rio de Janeiro  
Junho de 2016

**Bruno Ribeiro Ratton**

**Desenvolvimento de um Aparato para  
Visualização e Análise do Comportamento  
Dinâmico de Motocicletas em Escala**

**PROJETO DE GRADUAÇÃO**

Projeto apresentado como requisito para obtenção do grau de Bacharel pelo Programa de Graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

**Orientador**  
Mauro Speranza Neto

**Rio de Janeiro,**

**Junho de 2016**

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente aos meus pais, Eliane e Rodrigo, juntamente com meu irmão Daniel, por toda a educação, apoio e incentivo incondicional para alcançar este objetivo. Em especial, agradeço à minha avó Therezinha e meu falecido avô Hostilio, por tornarem possível estudar nesta universidade.

Ao meu orientador Prof. Mauro Speranza Neto e ao aluno de Doutorado Allan N. de Albuquerque, agradeço pela disponibilidade, incentivo e orientação desde o início do projeto.

À minha namorada Amanda meu agradecimento especial pelo carinho, apoio e motivação durante todo esse tempo.

À equipe do Laboratório de Desenvolvimento de Controle (LDC), em especial, Lucas Ribeiro e Marilia Assad, que estiveram sempre à disposição para ajudar e apoiar.

Por fim, aos amigos de curso da PUC-Rio, e futuros companheiros de profissão, que tornaram esta e outras experiências únicas em nossas vidas.

Bruno Ribeiro Ratton

## **Resumo**

A origem da motocicleta pode ser considerada no ano de 1867 com o aparecimento da primeira bicicleta motorizada construída por Sylvester Howard Roper. O protótipo de motocicleta consistia em um quadro de madeira com duas rodas, alimentado por um motor de dois cilindros movido à queima de carvão. Esta máquina foi a primeira tentativa bem-sucedida de motorizar um veículo de duas rodas. Desde o modelo primitivo, a motocicleta evoluiu para se tornar um veículo bastante complexo. Devido à sua versatilidade, as motos têm alcançado um papel importante na vida diária moderna. Cada ano a demanda de diferentes modelos desses veículos aumenta à medida que novas aplicações e necessidades surgem, tais como transporte, lazer e esportes. Este aumento da procura de melhores veículos de duas rodas tem levado a modelos muito especializados e motivou estudos sobre as motocicletas.

Apesar dos esforços para melhorar as motocicletas, elas ainda apresentam, sob certas condições, problemas comportamentais que induzem efeitos desestabilizadores. Portanto, estudos do comportamento dinâmico da motocicleta contribuem para uma melhor compreensão dos seus movimentos.

O presente estudo tem como objetivo o desenvolvimento de um aparato, inexistente no mercado, que permita a visualização e o estudo dos movimentos e efeitos da dinâmica de uma motocicleta em escala. Para a realização deste projeto, foi necessário testar primeiramente o software, através da criação de modelos 3D e simulações para que houvesse certeza de que os efeitos gerados pelos movimentos da motocicleta, em especial seus efeitos giroscópicos, seriam considerados na programação do software. Após realizados esses estudos e seus resultados analisados, pode-se afirmar que o software em questão é capaz de realizar as simulações futuras de maneira a obedecer aos comportamentos físicos esperados.

Por fim, o aparato foi projetado através de análises e modificações nas versões anteriores. Esta nova versão desenvolvida permite que a moto realize os movimentos de rolagem (*roll*), arfagem (*pitch*) e o movimento de guinada (*yaw*), antes não permitido. Considerando a base do aparato, foi projetado um sistema que permite um movimento de rotação do aparato em torno de um eixo fixo, conforme a moto execute movimento similar ao de realizar uma curva.

Ao fim do trabalho, apesar de não ter sido possível realizar a construção do aparato para testá-lo, o modelo desenvolvido se mostra capaz de atender a todas as exigências de projeto, sendo apresentado todo o detalhamento dos componentes e montagens necessário para sua construção.

**Palavras-chave:** dinâmica, motocicleta, aparato de estudo, efeito giroscópico, giroscópio.

## **Abstract**

The origin of the motorcycle can be considered 1867 with the appearance of the first motorized bicycle built by Sylvester Howard Roper. The motorcycle prototype consisted of a wooden frame with two wheels powered by a charcoal-fired, two-cylinder engine. This machine was the first successful attempt to motorize a two-wheeled vehicle. Since the original model, the motorcycle has evolved to become a very complex vehicle. Due to their versatility, motorcycles have achieved an important role in modern daily life. Each year the demand for different models of these vehicles increases as new applications and needs arise, such as transportation, leisure and sports. This increased demand for better two-wheeled vehicles has led to very specialized models and motivated studies on motorcycles.

Despite efforts to improve the motorcycles, they still have, under certain conditions, behavioral problems that induce destabilizing effects. Therefore, motorcycle dynamics behavior studies contribute to a better understanding of their movements.

This study aims to develop an apparatus non-existent in the market that allows previewing and studying the movements and effects of scaled motorcycles dynamics. To accomplish this project, it was necessary to test the software first by creating 3D models and run simulations to be sure that the effects generated by the motorcycle movements, especially its gyroscopic effects, would be considered in the software programming. After performing these studies and their results analyzed, it can be said that the software tested is able to run future simulations in order to faithfully reproduce expected physical behaviors.

Finally, the apparatus has been designed by testing and modifying previous versions. This new version allows the bike to roll, to pitch and to yaw, unlike the previous version. Whereas the base of the apparatus, a system was designed so the apparatus could spin about a fixed axis due to the bike turning movement.

At last even though the model developed attends all the design requirements with its manufacturing details, was not possible to build and test the apparatus.

**Keywords:** dynamics, motorcycle, study apparatus, gyroscopic effect, gyroscope.

## Índice

1. Introdução.....	1
1.1. Objetivos.....	1
1.2. Motivação.....	2
1.3. Revisão Bibliográfica.....	2
1.4. Organização do Trabalho.....	3
2. Revisão de conceitos e definições.....	5
2.1. Introdução.....	5
2.2. Momentos de Inércia de Área.....	5
2.3. Momentos de Inércia de Massa.....	6
2.4. Raio de Giração.....	8
2.5. O Giroscópio.....	9
2.6. Precessão de um Giroscópio.....	10
3. Modelos e Simulações para Estudo do Efeito Giroscópico.....	14
3.1. Introdução.....	14
3.2. <i>SolidWorks Motion</i> .....	14
3.3. Modelo 1.....	15
3.3.1. Estudo 1.....	16
3.3.2. Simulação do Estudo 1.....	17
3.3.3. Estudo 2.....	19

3.3.4. Simulação do Estudo 2 .....	21
3.4. Modelo 2 .....	22
3.4.1. Estudo 3 .....	23
3.4.2. Simulação do Estudo 3 .....	24
4. Dinâmica de uma motocicleta .....	26
4.1. Introdução .....	26
4.2. Centro de Gravidade e Momentos de Inércia.....	28
4.2.1. Centro de Gravidade da Motocicleta.....	28
4.2.2. Momentos de Inércia .....	31
4.3. Rolagem da Motocicleta em Curva Constante.....	32
4.3.1. Ângulo de Rolagem Ideal.....	32
4.3.2. Ângulo de Rolagem Efetivo .....	33
4.3.3. Velocidade da Roda em uma Curva .....	34
4.4. Efeitos Giroscópicos em uma Motocicleta .....	35
4.4.1. Efeitos Giroscópicos Gerados Pelo Movimento de Guinada .....	36
4.4.2. Efeitos Giroscópicos Gerados pelo Movimento de Rolagem .....	39
4.4.3. Efeitos Giroscópicos Gerados Pela Direção.....	42
5. Desenvolvimento do Aparato para Estudo da Dinâmica de Motocicletas em Escala.....	44
5.1. Introdução .....	44
5.2. Suporte da Moto.....	45
5.3. Estrutura da base .....	47

5.4. Esferas transferidoras .....	50
5.5. Base para Contrapeso .....	52
5.6. Montagem final .....	54
6. Conclusões e Etapas Futuras .....	58
6.1. Conclusões .....	58
6.2. Etapas Futuras .....	58
Referências .....	59
Apêndice A.....	61
Apêndice B.....	67

## Índice de Figuras

Figura 1.1 – Diagrama de interação dos projetos .....	1
Figura 2.1 – Momento de inércia de área .....	6
Figura 2.2 – Giroscópio (Beer et al., 2013).....	9
Figura 2.3 - Giroscópio Victoriano ( <i>Victorian Gyroscope</i> ) .....	10
Figura 2.4 - Vista lateral do giroscópio mostrando as forças atuantes.....	11
Figura 2.5 - Vista lateral com o momento de forças representado.....	11
Figura 2.6 - Momentos atuantes .....	12
Figura 2.7 - Diagrama vetorial .....	12
Figura 3.1 – Modelo 1 (Estrutura de <i>Gimbals</i> ) .....	16
Figura 3.2 - Face selecionada para estudo de movimento.....	16
Figura 3.3 - Forças atuantes em um primeiro instante no estudo de movimento.....	17
Figura 3.4 - Forças atuantes em um segundo instante no estudo de movimento .....	17
Figura 3.5 – Gráfico de deslocamento linear em relação aos eixos $x$ , $y$ e $z$ . .....	18
Figura 3.6 - Gráficos de velocidade angular em relação aos eixos $x$ , $y$ e $z$ . .....	18
Figura 3.7 – Face selecionada para estudo de movimento .....	19
Figura 3.8 – Forças atuantes em um primeiro instante do estudo de movimento .....	19
Figura 3.9 - Força aplicada no segundo instante do estudo de movimento .....	20
Figura 3.10 - Força aplicada no terceiro instante do estudo de movimento.....	20
Figura 3.11 - Gráfico de deslocamento linear em relação aos eixos $x$ , $y$ e $z$ . .....	21
Figura 3.12 - Gráficos de velocidade angular em relação aos eixos $x$ , $y$ e $z$ . .....	22
Figura 3.13 – Modelo 2 (Estrutura de <i>Gimbals</i> ) .....	22
Figura 3.14 - Face selecionada para estudo de movimento.....	23
Figura 3.15 – Forças atuantes no estudo de movimento .....	23

Figura 3.16 - Gráficos de velocidade angular em relação aos eixos $x$ , $y$ e $z$ .	24
Figura 3.17 - Gráficos de aceleração linear em relação aos eixos $x$ , $y$ e $z$ .	25
Figura 4.1 – Diagrama da dinâmica de uma motocicleta	27
Figura 4.2 – Posição longitudinal do centro de gravidade (Cossalter, 2006)	28
Figura 4.3 – Posição do centro de gravidade da motocicleta e do condutor (Cossalter, 2006)	29
Figura 4.4 – Medida da altura do centro de gravidade (Cossalter, 2006)	30
Figura 4.5 – Momentos de inércia (Cossalter, 2006)	31
Figura 4.6 – Ângulo de rolagem da motocicleta equipada com pneus de espessura nula (Cossalter, 2006)	32
Figura 4.7 – Curva constante: ângulo de rolagem da moto equipada com pneus reais (Cossalter, 2006)	34
Figura 4.8 – Efeito giroscópico gerado pela roda dianteira durante a curva (o sistema de coordenadas com subscrito $m$ é fixo ao garfo da motocicleta) (Cossalter, 2006)	36
Figura 4.9 – Influência no equilíbrio exercida pelo efeito giroscópico gerado pelas rodas durante a curva (Cossalter, 2006)	38
Figura 4.10 – Variação do ângulo de rolagem causada pelo efeito giroscópico de guinada (Cossalter, 2006)	39
Figura 4.11 – Rotação da roda dianteira: o movimento de rolagem provoca um momento giroscópico agindo na extremidade dianteira (Cossalter, 2006)	40
Figura 4.12 – Efeito giroscópico gerado pelo movimento de rolagem da motocicleta e a rotação das rodas (Cossalter, 2006)	41
Figura 4.13 – Efeito giroscópico gerado pelas rotações da roda dianteira e do guidão (Cossalter, 2006)	42
Figura 5.1 – Primeira versão do aparato (Moser, 2015)	44

Figura 5.2 – Vista trimétrica do suporte da moto.....	45
Figura 5.3 – Vista frontal do suporte da moto.....	45
Figura 5.4 – Vista lateral do suporte da moto .....	46
Figura 5.5 – Vista superior do suporte da moto .....	46
Figura 5.6 – Vista explodida do suporte da moto .....	47
Figura 5.7 – Vista trimétrica da estrutura da base.....	47
Figura 5.8 – Vista frontal da estrutura da base.....	48
Figura 5.9 – Vista lateral direita da estrutura da base .....	48
Figura 5.10 – Vista lateral esquerda da estrutura da base .....	49
Figura 5.11 – Vista superior da estrutura da base .....	49
Figura 5.12 – Vista explodida da estrutura da base.....	50
Figura 5.13 – Vista trimétrica da esfera transferidora.....	51
Figura 5.14 – Vista frontal da esfera transferidora.....	51
Figura 5.15 – Vista superior da esfera transferidora .....	51
Figura 5.16 – Vista trimétrica da base para contrapeso .....	52
Figura 5.17 – Vista superior da base para contrapeso.....	52
Figura 5.18 – Vista frontal da base para contrapeso .....	53
Figura 5.19 – Vista explodida da base para contrapeso .....	53
Figura 5.20 – Vista explodida da base completa com todos seus componentes .....	54
Figura 5.21 – Vista trimétrica do aparato completo.....	55
Figura 5.22 – Vista superior do aparato completo .....	55
Figura 5.23 – Vista frontal do aparato completo.....	56
Figura 5.24 – Ilustração do modelo final da base com a motocicleta .....	56
Figura 5.25 – Exemplo da adição da carga para contrapeso .....	57

# 1. Introdução

## 1.1. Objetivos

O trabalho em questão faz parte de um conjunto de projetos interligados, com a finalidade de obter novas formas de estudos de diferentes disciplinas, relacionadas ao estudo de motocicletas.

Este projeto em especial tem como um dos seus objetivos verificar a possibilidade de utilização do programa *SolidWorks* e seu suplemento de Estudo de Movimento (*SolidWorks Motion*) em simulações que serão realizadas em projetos futuros de acordo com o diagrama.

	TRABALHOS EM DINÂMICA E CONTROLE DE BICI e/ou MOTOCICLETAS: RESPONSÁVEIS (células sombreadas) e USUÁRIOS (células em itálico)						
	Revisão Bibliográfica Detalhada e Documentada	Modelos Dinâmicos	Identificação de Parâmetros e Aquisição de Dados	Simulação da Dinâmica e Calibração dos Modelos	Controle de Velocidade, Atitude e Trajetória	Testes Experimentais e Desenvolvimento de Aparatos	OUTROS
Mauro Speranza Neto	<i>Ensino, Dinâmica e Controle, etc</i>	Aplicações Ensino PBL e CDIO	Aplicações Ensino PBL e CDIO	Aplicações Ensino PBL e CDIO	Aplicações Ensino PBL e CDIO	Aplicações Ensino PBL e CDIO	Organização das Atividades
Guilherme Nobrega Martins	Ensino de Engenharia	Desenvolvimento	Definição do Procedimento	Definição do Procedimento	Definição da Abordagem	Concepção e Verificação	Aplicações PBL
Marília Maurell Assad	Dinâmica e Controle	Estabilidade e Trajetória	Motocicleta em Escala	Motocicleta em Escala	Controle Autônomo	Base Móvel p/ Moto em Escala	Coorientação Atividades
Allan N. de Albuquerque	Mecanismos Fechados	Mecanismos Fechados	Aquisição de Dados IMU	Mecanismos Fechados	Controle de Posição Via IMU	Plataforma Plana c/ 3 GL's	Coorientação Atividades
Ana Carolina Caliman 15.2		Din. Longitudinal Cin. Esterçamento	Caracterização Bicicleta	Din. Longitudinal Cin. Esterçamento		Instrumentação Embarcada	
Bruno Ratto 16.1		Efeito Giroscópico	Motocicleta em Escala			Base Móvel p/ Moto em Escala	
Felipe Roballo 16.1		Efeito Giroscópico				Roda Motocicleta Efeito Giroscópico	
Leticia Nicolino 16.1			Caracterização Moto em Escala				
Gabriela Paiva 16.1		Atuador Elétrico Linear					
Renato Trabach 16.1			Atuador Elétrico Linear				
Alessandro Soares			Aquisição de Dados IMU			Eletrônica Aparatos	
Renan Vilela						Instrumentação Embarcada	
Thaiene Fcamidu 16.2		Motodroide (Notação DH)		Motodroide (Notação DH)	Controle por Aprendizado	Motodroide (c/ microservos)	
				Verificação IMU	Controle Veloc. Angular	Testador IMU	
		Dinâmica Completa		Dinâmica Completa			

Figura 1.1 – Diagrama de interação dos projetos

O segundo objetivo é projetar um aparato de estudo da dinâmica de uma motocicleta em escala, de forma passiva, ou seja, sem interferência nos movimentos realizados pela moto, possibilitando a obtenção de dados experimentais capazes de comprovar as teorias e estudos existentes sobre a dinâmica de uma motocicleta.

## **1.2. Motivação**

A necessidade de ter uma melhor compreensão do comportamento dinâmico da motocicleta geral e suas implicações para áreas como a estabilidade, manuseio e conforto levou a um intenso esforço em pesquisas nas últimas décadas, havendo estudos formais sobre motos e bicicletas há mais de um século. Os resultados obtidos a partir de estudos complementares da dinâmica da motocicleta podem levar a veículos mais confiáveis e acessíveis, melhorando o design, testes e processo de desenvolvimento de projetos.

Desta forma, este trabalho objetiva a realização do projeto e desenvolvimento de um aparato para visualização e estudo dos movimentos dinâmicos de uma motocicleta em escala, inexistente no mercado.

A criação deste aparato tem uma intenção estritamente acadêmica, podendo ser utilizado em salas de aula, apresentações e diversas outras atividades, desconsiderando qualquer forma de comercialização do mesmo.

## **1.3. Revisão Bibliográfica**

Trabalhos na área de modelagem e controle de motocicletas – tripuladas ou não – têm sido desenvolvidos de forma a minimizar os efeitos característicos desse sistema instável. Quanto a modelagem matemática desse sistema, o modelo que melhor representa o comportamento dinâmico desse tipo de veículo é o multicorpo, no qual a motocicleta é considerada como a junção

de corpos rígidos ou flexíveis – incluindo as rodas, amortecedores, chassi, guidão, garfo e motorista – os quais separadamente possuem comportamentos característicos e, em conjunto cada componente pode influenciar na dinâmica de outros.

Esse tipo de modelo é objeto de estudos realizados por autores como Åström (2005), Cossalter (2006), Meijaard (2007) e Assad (2015). Os modelos levam em consideração o escorregamento e atrito entre as rodas e o chão, a geometria do veículo e o efeito giroscópico, no qual um objeto em rotação – no caso, as rodas – tende a manter seu eixo estável, ajudando a estabilizar o veículo. Apesar de fiel ao comportamento real de uma motocicleta, esses modelos dão origem a sistemas complexos, não lineares e com diversas restrições a ser adicionadas ao problema durante as simulações, aumentando a dificuldade de analisar esses modelos.

Com relação a estudos direcionados à equipamentos para análise do comportamento dinâmico de motocicletas temos Johannes (2015), que realiza o estudo e desenvolvimento de um aparato para análise do comportamento dinâmico de uma motocicleta em escala. Em seu projeto foi construído um modelo do aparato que permitiu a realização de alguns testes, chegando-se a conclusão de que haviam algumas melhorias a ser feitas em projetos futuros.

#### **1.4. Organização do Trabalho**

O presente trabalho é constituído de 5 capítulos, que envolvem uma introdução, uma revisão teórica, o desenvolvimento de modelos, simulações e o projeto final do aparato.

O primeiro capítulo contém uma introdução ao trabalho, juntamente com a motivação e os objetivos que levaram à realização deste projeto.

No segundo capítulo é feita uma breve revisão de conceitos e definições importantes para melhor entendimento e desenvolvimento do projeto.

No terceiro capítulo temos o desenvolvimento de modelos CAD de giroscópios, utilizados para realizar simulações com o objetivo de validar o programa *SolidWorks* e seu suplemento de Estudo de Movimento (*SolidWorks Motion*) através de uma comparação dos resultados obtidos com a teoria.

O quarto capítulo é uma introdução ao projeto de desenvolvimento do aparato final, tendo como objetivo uma breve abordagem de conceitos e definições sobre a dinâmica e os efeitos estudados anteriormente aplicados a uma motocicleta.

Por fim, no quinto capítulo temos o desenvolvimento do aparato para visualização e análise do comportamento dinâmico de motocicletas em escala.

## 2. Revisão de conceitos e definições

### 2.1. Introdução

Inicialmente é importante revisarmos, de maneira sucinta, as definições de momentos de inércia, raio de giração, movimento giroscópico e precessão para que possamos entender seus efeitos e suas consequências na dinâmica de uma motocicleta e do aparato a ser desenvolvido.

### 2.2. Momentos de Inércia de Área

O momento de inércia de área é uma propriedade geométrica da seção (plana) transversal de um corpo. Fisicamente o momento de inércia de área tem relação com a resistência à deformação. A unidade básica no Sistema Internacional (SI) é o  $m^4$  ou  $mm^4$ .

Em engenharia, é comum utilizar a expressão reduzida *momento de inércia* para se referir ao momento de inércia de área.

Como podemos observar na Figura 2.1 temos uma superfície plana de área  $A$  e um sistema de coordenadas ortogonais  $xy$ . Segundo Meriam & Kraige (2009), os momentos de inércia em relação a cada eixo podem ser definidos por

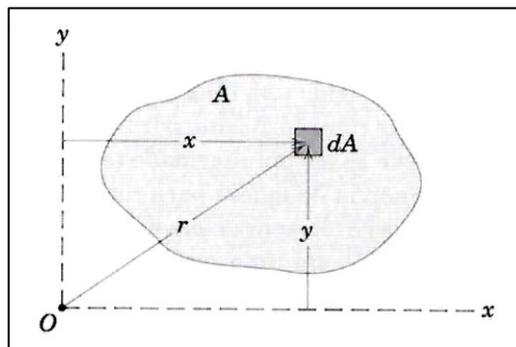
$$I_x = \int y^2 dA \quad (2.1)$$

$$I_y = \int x^2 dA \quad (2.2)$$

O momento de inércia em relação à origem ou ao eixo  $z$ , perpendicular ao plano da superfície, pode ser chamado de momento polar de inércia e é definido por

$$I_o = I_z = \int r^2 dA \quad (2.3)$$

onde  $dA$  é o elemento diferencial de área e a partir da relação trigonométrica  $r^2 = x^2 + y^2$ , concluímos que  $I_z = I_x + I_y$ . Como o elemento  $dA$  é multiplicado pelo quadrado da distância a partir do eixo de referência, os momentos de inércia também são chamados de segundos momentos de área.



**Figura 2.1 – Momento de inércia de área**

### 2.3. Momentos de Inércia de Massa

O momento de inércia de massa pode ser definido como sendo a resistência à uma mudança de velocidade de giro de um corpo em rotação. Na literatura, é comum ser denominado também de inércia rotacional.

O momento de inércia de massa de um objeto depende de sua massa e da distância da massa ao seu eixo de rotação. Por exemplo, um volante de 1 kg com a maior parte de sua massa perto do eixo terá um momento de inércia menor que outro volante de 1 kg com a maior parte da massa próxima ao seu contorno externo. O momento de inércia de um corpo não é uma quantidade

única e fixa. Se um objeto gira em torno de eixos diferentes, seus momentos de inércia também serão diferentes, uma vez que a distribuição de sua massa em relação ao novo eixo normalmente difere da anterior. O módulo de velocidade de uma partícula de um corpo rígido rodando em torno de um eixo fixo é

$$v = r\omega \quad (2.4)$$

Onde:

$r$  é a distancia ao eixo de rotação

$\omega$  é a velocidade angular

A energia cinética de uma partícula de massa  $m$  é

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.5)$$

Substituindo (2.4) em (2.5) temos que

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 \quad (2.6)$$

Assim, para um corpo rígido, a energia rotacional será a soma das energias de todas as partículas que constituem o corpo

$$E_{cr} = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2\right) \quad (2.7)$$

O termo em parênteses se refere ao modo como a massa se distribui em torno do eixo de rotação  $e$ , recebe o nome de momento de inércia de massa  $I$ , do corpo em relação ao eixo de rotação. Para uma dada geometria e eixo de rotação, o momento de inércia rotacional tem um valor constante. Explicitando  $I$  a partir de (2.7) temos:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (2.8)$$

Assumindo que corpos rígidos normalmente são constituídos de um elevado número de partículas adjacentes, o somatório torna-se uma integral calculada em relação à massa.

$$I = \int r^2 dm \quad (2.9)$$

## 2.4. Raio de Giração

A distância conhecida como raio de giração é encontrada ocasionalmente na mecânica. Gere & Goodno (2009) propõe que o raio de giração pode ser considerado como sendo a distância (do eixo de referência) em que a massa de um determinado corpo pode ser concentrada sem alterar o momento de inércia do corpo original.

O raio de giração de um corpo em relação a um eixo é definido como a raiz quadrada do momento de inércia do corpo dividido pela própria massa; dessa forma

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (2.10)$$

Uma vez que, de acordo com o SI, o momento de inércia tem como unidades  $m^4$ , e a massa tem unidades de kg, o raio de giração tem como unidades o m.

## 2.5. O Giroscópio



Figura 2.2 – Giroscópio (Beer et al., 2013)

O giroscópio consiste num disco solidário com um eixo normal que, por sua vez, está montado num aro, num plano transversal do disco que, por sua vez, pode girar em torno de outro eixo, no plano longitudinal.

A principal e importante característica dos giroscópios é chamada de rigidez giroscópica (ou no espaço) ou inércia giroscópica que como visto na seção 2.3 é a resistência que um corpo em rotação oferece em mudar sua posição no espaço quando gira.

Para justificar essa rigidez, temos a 1ª Lei de Newton que diz: *“um corpo que está em repouso tende a permanecer em repouso. Um corpo que está em movimento tende a permanecer em movimento uniforme a menos que uma força externa modifique seu estado”*.

Outra característica importante dos giroscópios é que quando aplicada uma força qualquer com a intenção de mudar o plano de rotação, o giroscópio tende a reagir como se a força tivesse sido aplicada exatamente a  $90^\circ$  da força aplicada e no sentido de rotação do giroscópio. Esta reação

do giroscópio produz um movimento de rotação cônico chamado de precessão que será abordado mais adiante.

## 2.6. Precessão de um Giroscópio

Precessão é o movimento que descreve uma mudança na direção do eixo de rotação de um objeto. Para demonstrar este movimento será utilizado um giroscópio Victoriano (*Victorian Gyroscope*) como o da Figura 2.3.

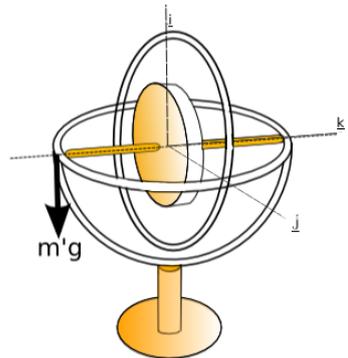
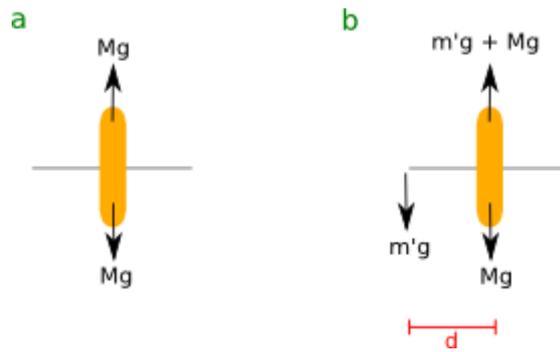


Figura 2.3 - Giroscópio Victoriano (*Victorian Gyroscope*)

Quando o peso é adicionado ao giroscópio (com o disco girando) ocorre a precessão do giroscópio. Esta precessão é dada numa direção perpendicular à direção em que a força atua peso.

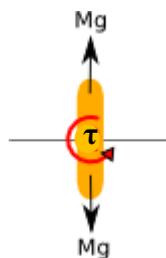
O peso que é pendurado está deslocado do centro de massa do giroscópio e permanece no mesmo lugar. É esse deslocamento de forças que faz com que a precessão ocorra.



**Figura 2.4 - Vista lateral do giroscópio mostrando as forças atuantes**

Pode ser visto que, antes de pendurar o peso do giroscópio todas as forças atuam através do mesmo ponto (o centro de massa), não havendo precessão neste caso. A partir da Figura 2.4b, pode observar-se que todas as forças que não atuam mais através do mesmo ponto e são deslocadas de uma distância,  $d$ . Dois vetores são definidos como um sistema de forças com um torque resultante, mas sem nenhuma força resultante. Portanto a Figura 2.4b é equivalente a Figura 2.4a com um torque  $\tau$  também atuando, onde

$$\tau = m'g \times d \tag{2.11}$$



**Figura 2.5 - Vista lateral com o momento de forças representado**

Pode ser visto que, ao aplicar um peso no giroscópio na posição mostrada um torque foi introduzido no sistema.

O momento angular do disco é definido como  $L = I\omega$  onde  $I$  é o momento de inércia do disco.

A partir desta fórmula pode ser visto que a direção do momento angular coincide com a direção de rotação do disco.

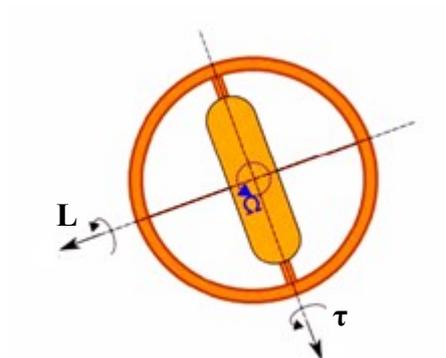


Figura 2.6 - Momentos atuantes

Conforme os estudos apresentados por Wilson (2007), a força de deslocamento pode ser representada por um torque e a direção do vetor momento angular é paralela à rotação, a precessão do giroscópio também pode ser representada como na Figura 2.7.

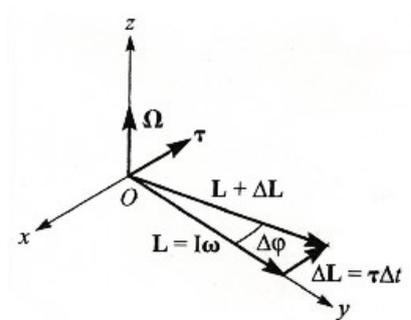


Figura 2.7 - Diagrama vetorial

Se o torque aplicado tivesse a mesma direção que  $L$

$$\Delta L = \tau \Delta t = I \Delta \omega \quad (2.12)$$

e resultaria em uma frenagem ou aceleração do giroscópio.

Mas como o torque da força peso  $\tau$  aplicado é perpendicular  $L$ , ele não altera a magnitude do momento angular, apenas sua direção. Consequentemente, como no movimento circular uniforme, o vetor  $L$  gira um ângulo  $\Delta\phi$  no intervalo de tempo infinitesimal  $\Delta t$ , tal que

$$\Delta L = L \Delta\phi = \tau \Delta t \quad (2.13)$$

### **3. Modelos e Simulações para Estudo do Efeito Giroscópico**

#### **3.1. Introdução**

O estudo do efeito giroscópico foi realizado através da criação de modelos 3D de dois aparatos conhecidos como Estrutura de *Gimbals*, utilizando o programa *SolidWorks*, que serão apresentados nos itens subsequentes.

Após o desenvolvimento dos modelos, foram realizadas as simulações utilizando o suplemento de Estudo de Movimento (*SolidWorks Motion*), que nos permite obter resultados graficamente.

Através dos gráficos gerados pelo programa, foram extraídos os seus dados e exportados para o programa *Matlab*, através de planilhas do *Microsoft Excel*. No *Matlab*, os dados receberam um tratamento, e foram então gerados os gráficos que serão apresentados adiante.

#### **3.2. *SolidWorks Motion***

A Análise de Movimento do *SolidWorks* (*SolidWorks Motion*) permite que dois tipos de problemas relacionados com o movimento dos corpos sólidos sejam estudados: a Cinemática, que consiste no estudo do movimento de um corpo rígido sem considerar as forças que resultam neste movimento, e a Dinâmica, que consiste no estudo do movimento de um corpo rígido como um resultado das cargas aplicadas sobre o corpo. Estas podem ser forças e/ou torques externos (fontes de esforços), motores lineares ou rotativos ideais (fontes de fluxo), molas (elementos resistores do sistema), amortecedores (elementos capacitores do sistema) e as massas e momentos de inércia que são incluídos a partir do próprio modelo desenvolvido em CAD (elementos de inércia do sistema). Assim, a simulação do *SolidWorks Motion* é capaz de calcular o efeito destes elementos,

da ação da gravidade e do contato entre os componentes (via inserção de coeficientes de atrito nas superfícies do modelo; Nizar, M. H. M., 2013).

No ambiente de simulação, um corpo rígido sem restrições no espaço tem seis graus de liberdade: três translacionais e três rotacionais. Este pode mover-se ao longo dos eixos  $X$ ,  $Y$ , e  $Z$ , assim como rotacionar em torno destes eixos. Entretanto, condicionantes podem ser adicionadas para adequar o modelo às restrições do sistema real ou até mesmo para simplificar uma simulação.

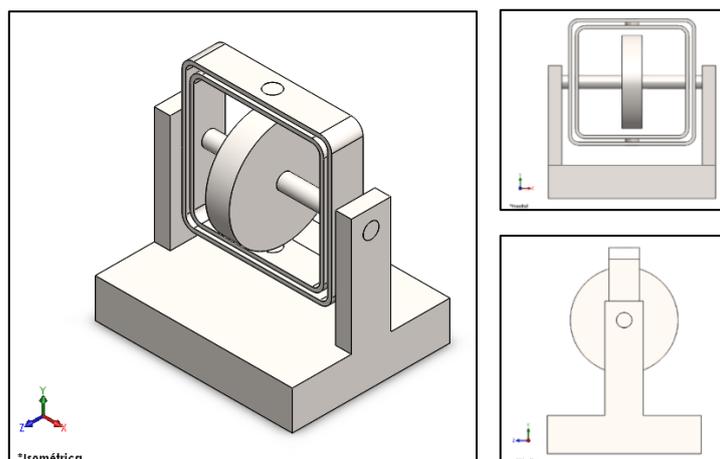
Um conjunto de equações diferenciais e equações algébricas definem as equações de movimento do *SolidWorks Motion*. A solução numérica é obtida pela integração destas equações diferenciais enquanto são satisfeitas as restrições algébricas em cada passo do tempo de simulação. Com esta ferramenta, é possível detectar também as interferências mecânicas existentes nos modelos simulados durante o movimento analisado.

As entradas do sistema podem ser valores constantes, funções no tempo ou até mesmo dados interpolados de uma curva de desempenho de um atuador, por exemplo. Para este último caso, existem três métodos de interpolação possíveis: interpolação Akima (Akima, H., 1970), cúbica ou linear.

### **3.3. Modelo 1**

O modelo da Figura 3.1, trata-se de um giroscópio de *gimbals* fixo. Sua utilização no estudo tem como objetivo observar a ação inercial proveniente do efeito giroscópico.

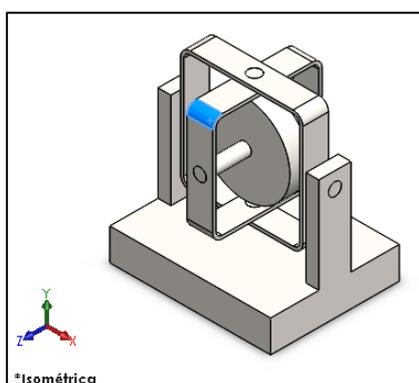
Para os estudos 1 e 2 em questão, após modelado o giroscópio, todos os seus componentes foram definidos como sendo de aço carbono simples, para que pudessem ser consideradas as respectivas massas, momentos de inércia, centros de gravidade, e outros fatores que influenciam diretamente no comportamento do aparato, desconsiderando apenas o atrito entre componentes.



**Figura 3.1 – Modelo 1 (Estrutura de *Gimbals*)**

### **3.3.1. Estudo 1**

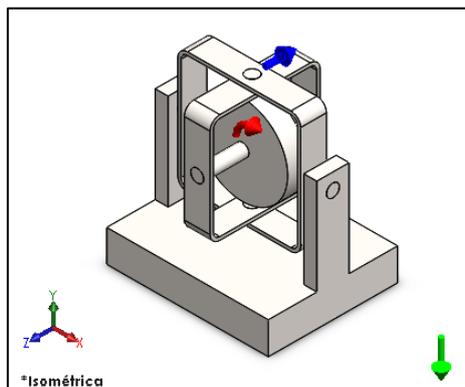
A face destacada na Figura 3.2 foi selecionada para o estudo de movimento com a intenção de visualizar de forma clara e simples o comportamento do modelo e as reações do efeito giroscópico sobre o mesmo.



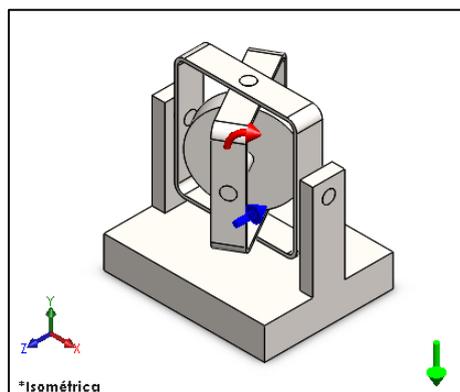
**Figura 3.2 - Face selecionada para estudo de movimento**

Para realizar a simulação, foi aplicada a força gravitacional, um motor rotativo com velocidade angular igual a 100 rpm indicado pela cor vermelha na Figura 3.3, e uma força com

intensidade de 0,05 N aplicada primeiramente no período de 2s a 5s, indicada pela cor azul. Aos 11s uma força semelhante foi novamente aplicada durante 3s (Figura 3.4).



**Figura 3.3 - Forças atuantes em um primeiro instante no estudo de movimento**



**Figura 3.4 - Forças atuantes em um segundo instante no estudo de movimento**

### **3.3.2. Simulação do Estudo 1**

Nessa primeira simulação, analisando o gráfico de deslocamentos lineares (Figura 3.5), podemos identificar os instantes em que o giroscópio se movimenta, indicados pelas áreas destacadas em cinza, devido à aplicação das forças.

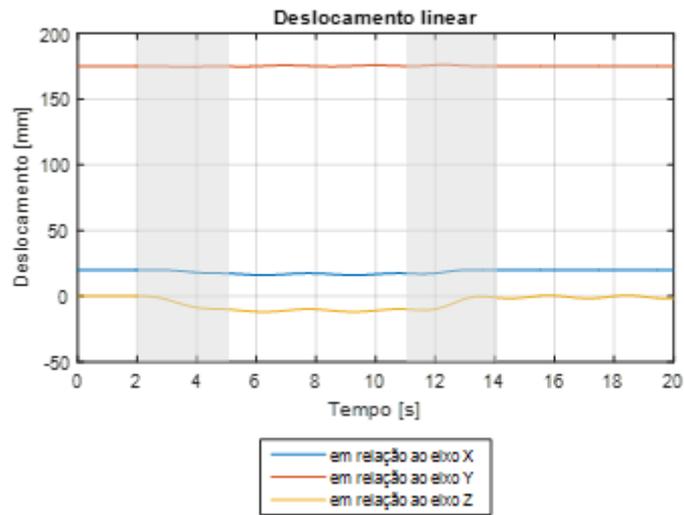


Figura 3.5 – Gráfico de deslocamento linear em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Analisando os gráficos de velocidade angular (Figura 3.6), percebe-se a perturbação gerada pela aplicação das forças (áreas cinzas), onde aparecem picos, seguidos de uma estabilização.

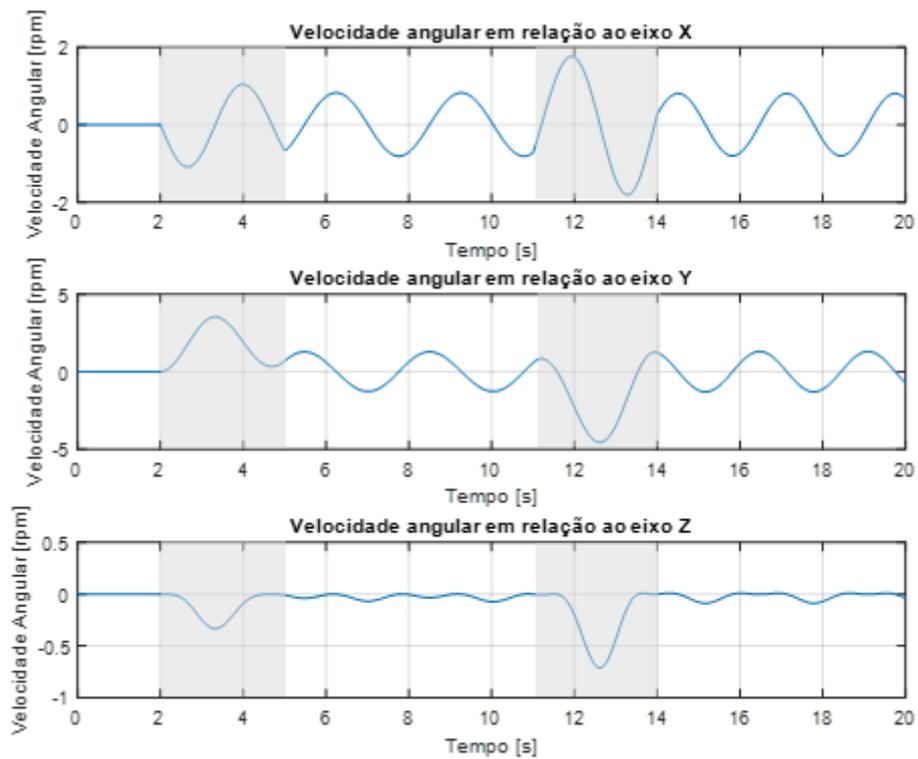


Figura 3.6 - Gráficos de velocidade angular em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Esse comportamento demonstra o movimento esperado de acordo com a teoria do movimento de precessão, onde ao aplicarmos uma força, gerando um toque perpendicular ao momento angular do disco, inicia-se uma rotação na tentativa de restabelecer o equilíbrio do sistema, e ao retirarmos essa força, o giroscópio retorna à uma posição de equilíbrio.

### 3.3.3. Estudo 2

Assim como no estudo 1, a face destacada na Figura 3.7 foi selecionada para o estudo com a intenção de visualizar o comportamento do modelo e o efeito giroscópico sobre o mesmo.

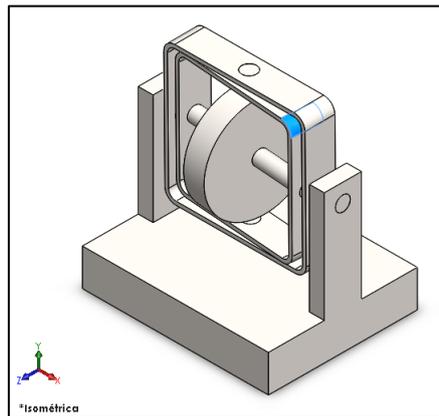


Figura 3.7 – Face selecionada para estudo de movimento

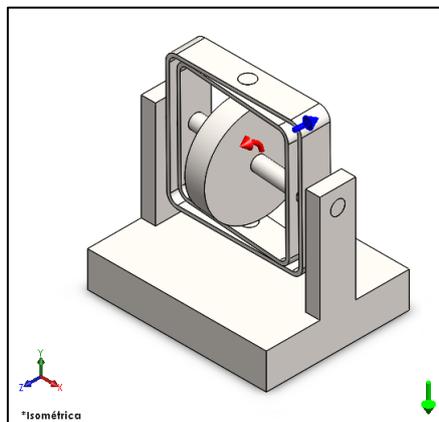
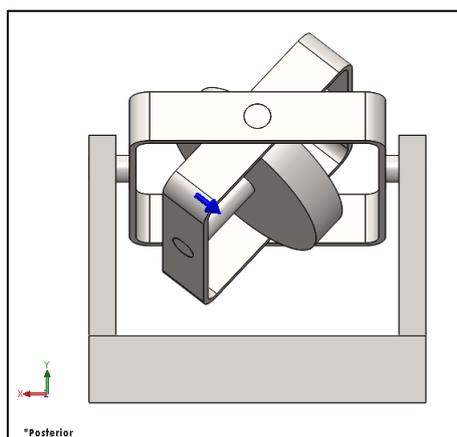
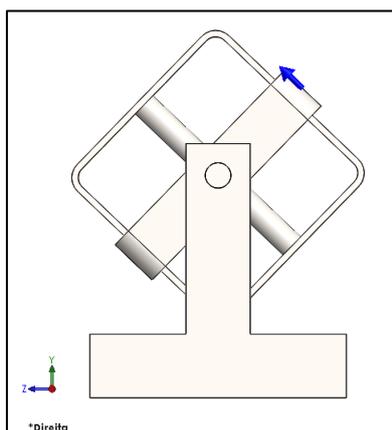


Figura 3.8 – Forças atuantes em um primeiro instante do estudo de movimento



**Figura 3.9 - Força aplicada no segundo instante do estudo de movimento**

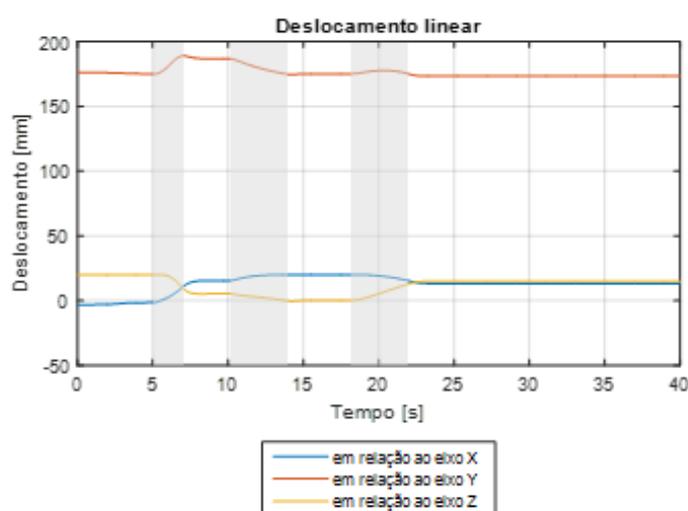
Para realizar a simulação, foi aplicada a força gravitacional, um motor rotativo com velocidade angular igual a 1000 rpm indicado pela cor vermelha na Figura 3.8, e uma força com intensidade de 0,1 N aplicada primeiramente no período de 5s a 7s, indicada pela cor azul. Aos 10s a mesma força foi novamente aplicada durante 4s (Figura 3.9). Por fim, uma força de mesma intensidade, porém sinal contrária foi aplicada aos 18s durante 4s (Figura 3.10).



**Figura 3.10 - Força aplicada no terceiro instante do estudo de movimento**

### 3.3.4. Simulação do Estudo 2

Observando os gráficos de deslocamento dessa segunda simulação (Figura 3.11), podemos perceber claramente que o giroscópio se movimenta nos momentos em que as forças são aplicadas (áreas cinzas destacadas). É possível ver também que a terceira força, que tem direção oposta às duas primeiras aplicadas, faz com que o giroscópio se movimente no sentido contrário ao que estava se movimentando anteriormente como era esperado.



**Figura 3.11 - Gráfico de deslocamento linear em relação aos eixos x, y e z.**

Assim como no estudo 1, analisando os gráficos obtidos (Figura 3.11 e 3.12), podemos perceber claramente a perturbação gerada pela aplicação das forças (áreas cinzas destacadas), onde aparecem picos de velocidade angular, seguidas de uma estabilização no movimento, que aqui aparecem de forma mais clara, após a retirada da força. Esse comportamento demonstra novamente o movimento esperado de acordo com a teoria do movimento de precessão, onde ao aplicarmos uma força, gerando um torque perpendicular ao momento angular do disco, inicia-se uma rotação na tentativa de restabelecer o equilíbrio do sistema, e ao retirarmos essa força, o giroscópio retorna à uma posição de equilíbrio cessando seu movimento.

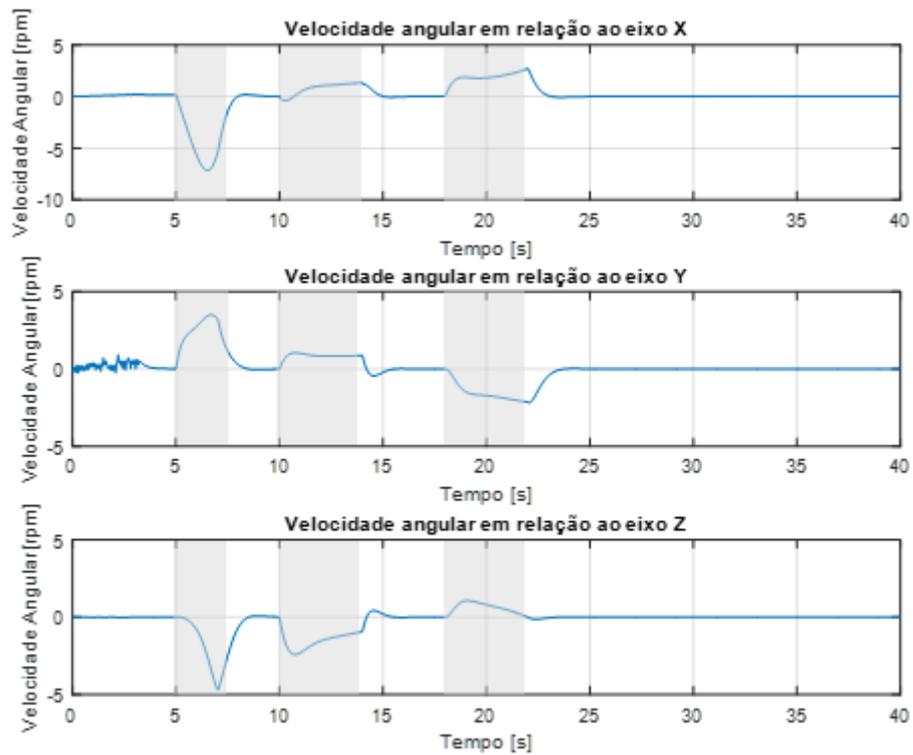


Figura 3.12 - Gráficos de velocidade angular em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

### 3.4. Modelo 2

O modelo 2, mostrado na Figura 3.13, trata-se de um giroscópio simples. Sua utilização no estudo tem como objetivo observar como o efeito giroscópico é capaz de sustentar o aparato em uma posição vertical, sem nenhuma ação externa.

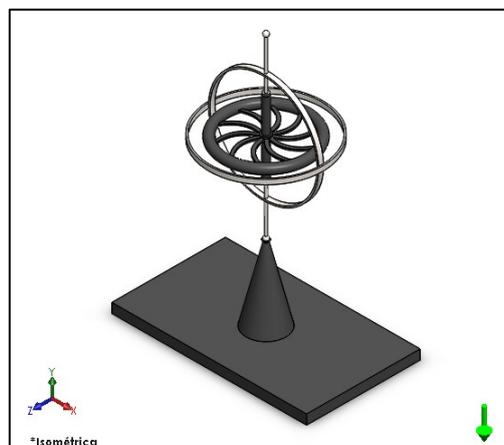
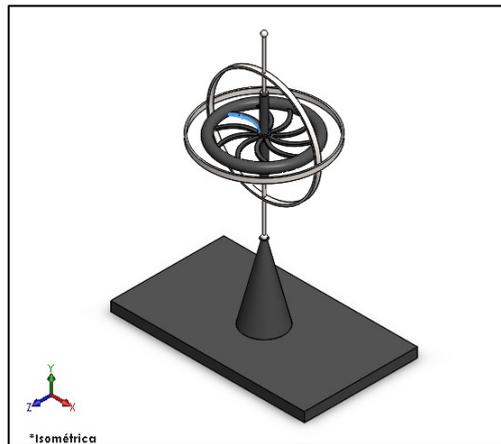


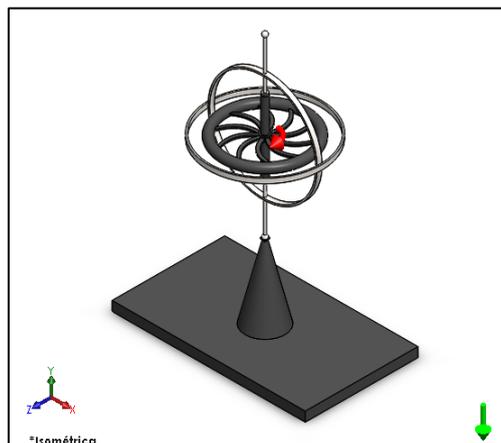
Figura 3.13 – Modelo 2 (Estrutura de Gimbals)

### 3.4.1. Estudo 3

A face destacada na Figura 3.14 foi selecionada para o estudo de movimento com a intenção de visualizar de forma clara e simples o comportamento do modelo e as reações do efeito giroscópico sobre o mesmo.



**Figura 3.14 - Face selecionada para estudo de movimento**



**Figura 3.15 – Forças atuantes no estudo de movimento**

Para realizar da simulação, foi considerada a força gravitacional e um motor rotativo com velocidade angular igual a 100 rpm indicado pela cor vermelha na Figura 3.15.

### 3.4.2. Simulação do Estudo 3

Analisando os gráficos da velocidade angular dessa terceira simulação (Figura 3.16), vemos que as mesmas são nulas em relação aos eixos de referência  $x$  e  $z$ . Esse resultado era esperado visto que o giroscópio permanece em equilíbrio na posição vertical (direção do eixo  $y$ ), comprovando que o efeito giroscópico é capaz de manter a estrutura em equilíbrio apenas com a rotação da roda. A velocidade angular em relação ao eixo  $y$  inicia a simulação em zero e sobe linearmente até estabilizar no valor especificado de 100 rpm.

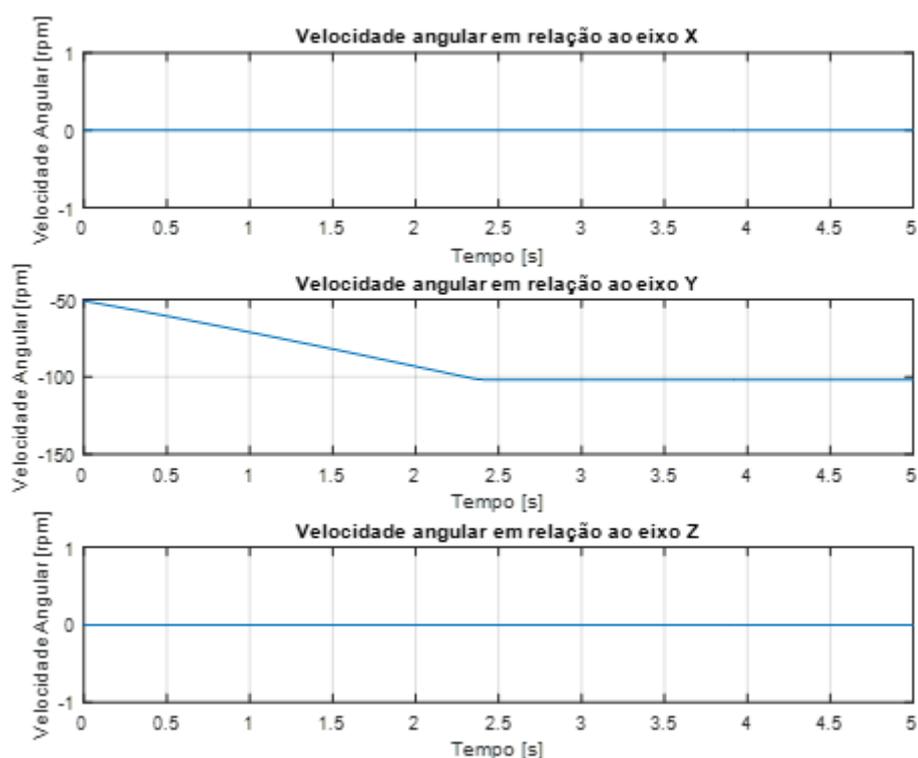
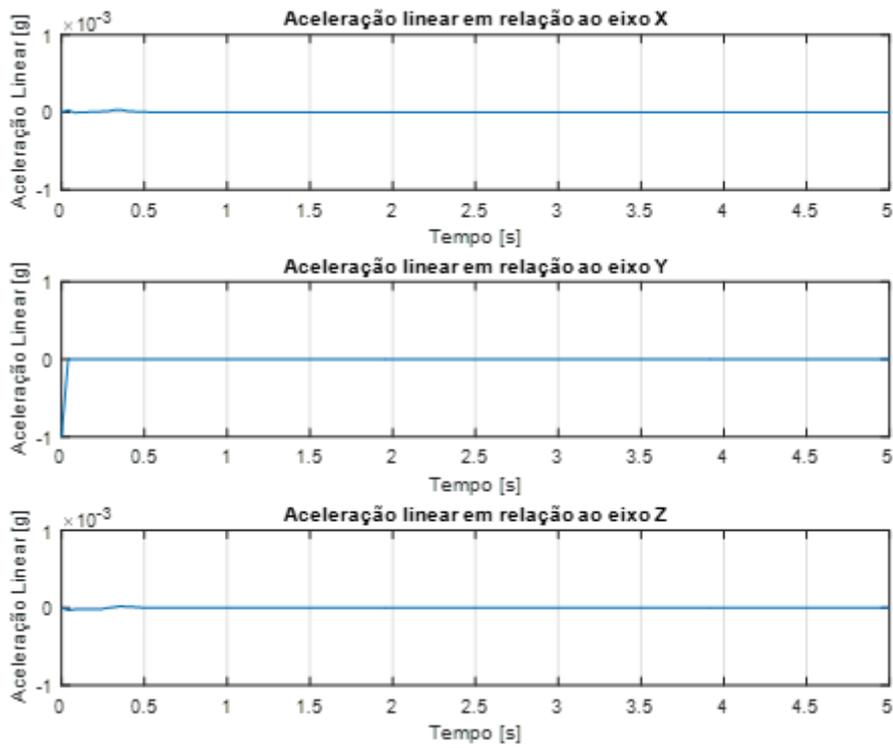


Figura 3.16 - Gráficos de velocidade angular em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Através dos gráficos de aceleração linear (Figura 3.17), vemos que existe uma aceleração linear inicial em relação ao eixo  $y$ , que indica que a simulação parte do repouso e “pula” rapidamente para a condição de rotação determinada. Em relação aos eixos  $x$  e  $z$ , existem pequenas oscilações que são devido às incertezas matemáticas do programa e, portanto, são nulas.



**Figura 3.17 - Gráficos de aceleração linear em relação aos eixos x, y e z.**

## 4. Dinâmica de uma motocicleta

### 4.1. Introdução

Dinâmica da bicicleta e da motocicleta é a ciência do movimento de motos e bicicletas e seus componentes, devido às forças que agem sobre eles. Dinâmica é um ramo da mecânica clássica, que por sua vez é um ramo da física. Movimentos de interesse em relação às motos incluem equilíbrio, direção, frenagem, aceleração, ativação de suspensão, e vibração. O estudo destes movimentos teve início no final do século IX e continua até hoje, como os realizados por Åström (2005), Cossalter (2006), Meijaard (2007) e Assad (2015).

Assim como acontece com monociclos, pela falta de estabilidade lateral das motocicletas quando estão paradas e na maioria das circunstâncias, só permanecem na posição vertical quando se deslocam para a frente. Experimentações e análises matemáticas têm mostrado que uma motocicleta permanece na posição vertical quando é orientada para manter seu centro de massa sobre suas rodas. Esta direção é normalmente fornecida por um piloto, ou em certas circunstâncias, pela própria moto. Vários fatores, incluindo geometria, distribuição de massa e efeito giroscópico, todos contribuem em vários graus para esta autoestabilidade, mas as hipóteses mais antigas e afirmações sobre qualquer efeito único como o giroscópico, ser o único responsável pela força de estabilização, têm sido desacreditadas.

Manter-se na posição vertical pode ser o principal objetivo dos pilotos iniciantes. Em curva a moto deve inclinar-se, a fim de manter o equilíbrio: quanto maior a velocidade ou menor que o raio de curvatura, é necessária maior inclinação. Isso equilibra o torque de rolagem sobre os trechos de contato das rodas gerado pela força centrífuga devido à curva com a da força gravitacional. Esta inclinação é normalmente produzida por uma direção momentânea no sentido oposto, denominado *countersteering*. A habilidade de *countersteering* é geralmente adquirida pela aprendizagem motora e executada através da memória processual em vez de pensamento consciente. Ao contrário de outros veículos de rodas, a entrada de controle primário em bicicletas é o torque de direção, não a posição.

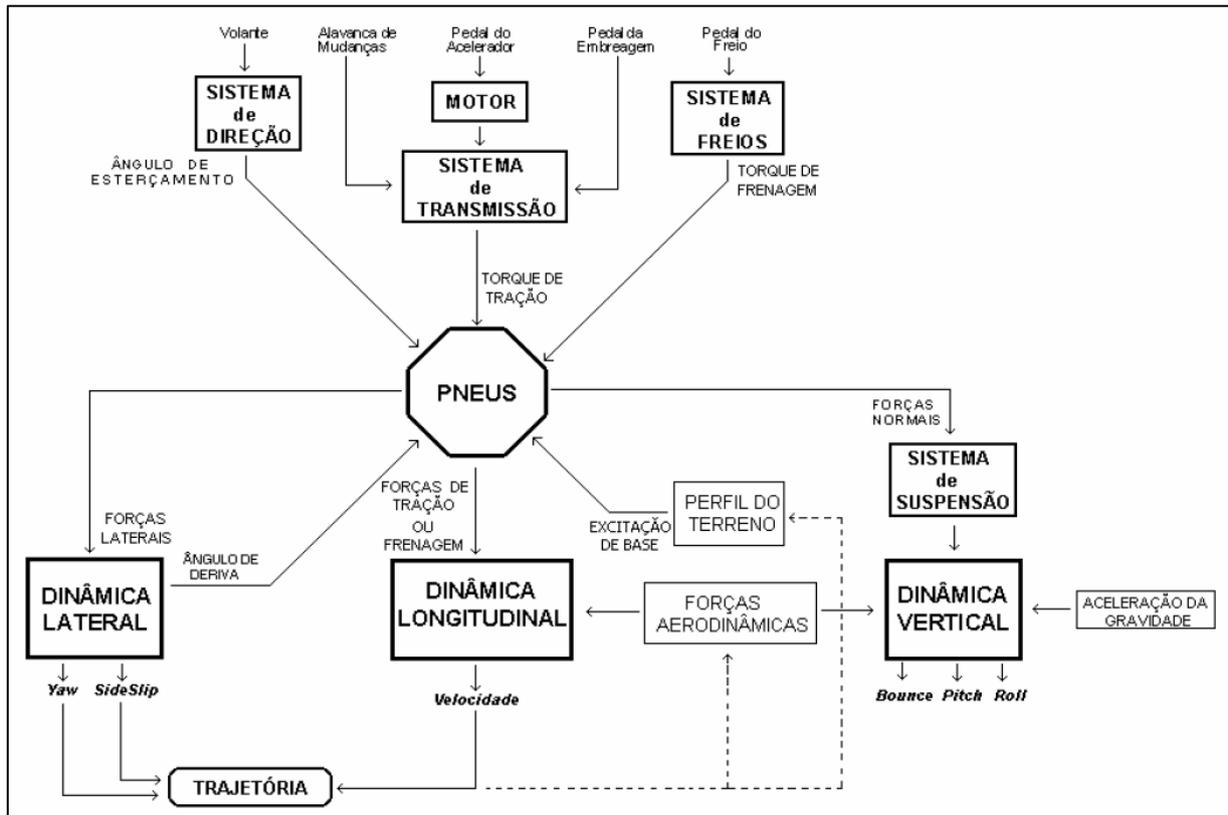


Figura 4.1 – Diagrama da dinâmica de uma motocicleta

Embora longitudinalmente estável quando estacionário, motocicletas muitas vezes têm um centro de massa alto o suficiente e uma distância entre eixos curta o suficiente para levantar a roda do solo sob aceleração ou desaceleração suficientes. Ao frear, dependendo da localização do centro de massa combinado da moto e do piloto em relação ao ponto de contato das rodas dianteiras no chão, motocicletas podem derrapar a roda dianteira ou erguer a moto e piloto sobre a roda dianteira. Uma situação semelhante é possível enquanto acelera, mas com respeito à roda traseira.

## 4.2. Centro de Gravidade e Momentos de Inércia

### 4.2.1. Centro de Gravidade da Motocicleta

A posição do centro de gravidade de uma motocicleta tem uma influência significativa no comportamento dinâmico da moto. A sua posição depende da distribuição e da quantidade de massa dos componentes individuais da motocicleta (motor, tanque, bateria, escapamentos, radiadores, rodas, garfos, quadro, etc.). Para uma motocicleta real, uma vez que o motor é o componente mais pesado (cerca de 25% da massa total), a sua localização tem grande influência na localização do centro de gravidade da motocicleta.

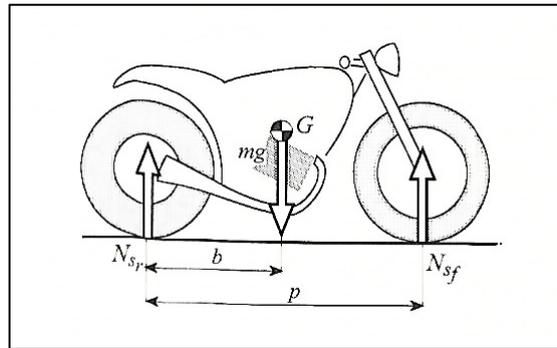


Figura 4.2 – Posição longitudinal do centro de gravidade (Cossalter, 2006)

A distância longitudinal  $b$  entre o ponto de contato da roda traseira e o centro de gravidade pode ser facilmente determinada através da medição da massa total da moto e as cargas sobre as rodas, em condições estáticas (carga frontal  $N_{sf}$ , carga traseira  $N_{sr}$ ):

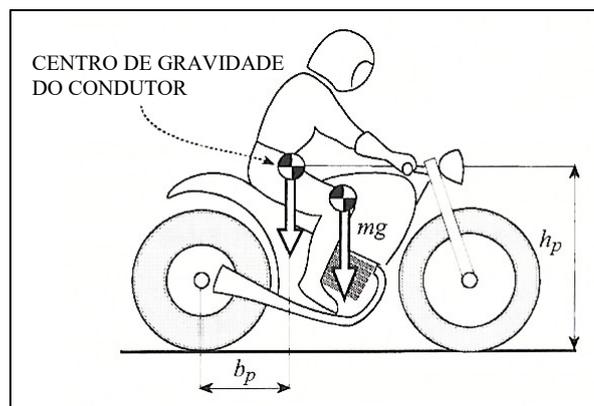
$$b = \frac{N_{sf} p}{mg} = p - \frac{N_{sr} p}{mg} \quad (4.1)$$

Em geral, uma motocicleta é caracterizada pelas cargas estáticas que atuam sobre as rodas, expressas em uma fórmula de percentagem:

$$\frac{\% \text{ front load}}{\% \text{ rear load}} = \frac{N_{s_f}/mg}{N_{s_r}/mg} = \frac{b/p}{(p-b)/p} \quad (4.2)$$

Quando o centro de gravidade está mais para a frente (carga frontal > 50%), a pilotagem da moto torna-se mais difícil por existir uma maior resistência no contato com o solo e conseqüentemente facilitando a transferência de energia para o solo. Uma carga frontal mais elevada compensa parcialmente os efeitos aerodinâmicos que descarregam a roda dianteira, sendo um fato importante em altas velocidades. Quando a posição do centro de gravidade está localizada mais próximo à traseira da moto, a capacidade de frenagem aumenta, reduzindo o perigo de perda de aderência da roda traseira durante uma parada repentina com o freio da frente.

A relação  $b/p$  sem piloto varia de 0,35 a 0,51: os menores valores para scooters e os mais altos para motos de corrida. Em geral, a posição do motociclista desloca o centro de gravidade global para a retaguarda (Figura 4.3), e, conseqüentemente, a sua presença aumenta a carga sobre a roda traseira diminuindo assim a percentagem de carga sobre a roda dianteira (por exemplo, a relação  $b/p$  vai de 0,53 a 0,50).



**Figura 4.3 – Posição do centro de gravidade da motocicleta e do condutor (Cossalter, 2006)**

Uma vez que a posição longitudinal do centro de gravidade foi encontrada, a sua altura pode ser determinada medindo a carga sobre uma única roda, por exemplo, sob a roda traseira com a roda dianteira levantada a uma altura conhecida, como na Figura 4.4.

$$h = \left( \frac{N_{sr}}{mg} - (p - b) \right) \cot \left[ \sin^{-1} \left( \frac{H}{p} \right) \right] + \frac{R_r + R_f}{2} \quad (4.3)$$

A altura do centro de gravidade tem uma influência significativa sobre o comportamento dinâmico de uma motocicleta, especialmente nas fases de aceleração e de frenagem como é explicado por Cossalter (2006). Um centro de gravidade alto, durante a fase de aceleração, conduz a uma maior transferência de carga partindo da frente para a roda traseira. Uma carga maior sobre a roda traseira aumenta a força motriz que pode ser aplicada ao solo, mas uma carga menor sobre a roda dianteira torna o movimento de rotação mais provável.

Na frenagem, um centro de gravidade mais elevado leva a uma maior carga sobre a roda dianteira e a uma carga inferior resultante na parte traseira. Quanto maior a carga sobre a roda dianteira, melhor a frenagem, mas também faz com que empinar para a frente seja mais provável, que ocorre quando a roda traseira é totalmente descarregada.

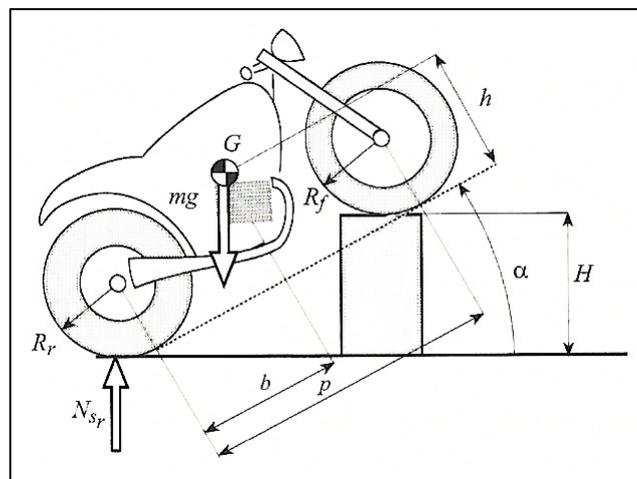


Figura 4.4 – Medida da altura do centro de gravidade (Cossalter, 2006)

## 4.2.2. Momentos de Inércia

O comportamento dinâmico de uma motocicleta também depende da inércia da moto e do condutor. A medição dos momentos de inércia é baseada em metodologias de identificação complexas, que estão fora do objetivo deste trabalho. Os momentos de inércia mais importantes são os de rolagem (*Roll*), arfagem (*Pitch*), guinada (*Yaw*) do quadro principal, o momento de inércia da estrutura frontal em relação ao eixo de direção, os momentos das rodas e o momento de inércia do motor.

O momento de inércia da guinada influencia a capacidade de manobra da motocicleta. Em particular, seus altos valores (obtidos, por exemplo, por bagagem pesada colocada no porta-bagagem) reduzem a manobrabilidade. O momento de inércia de rolagem influencia a velocidade do veículo em movimento de rolamento, onde em valores elevados, mantendo a mesma altura do CG, retardam o movimento de rolamento na entrada e na saída de uma curva.

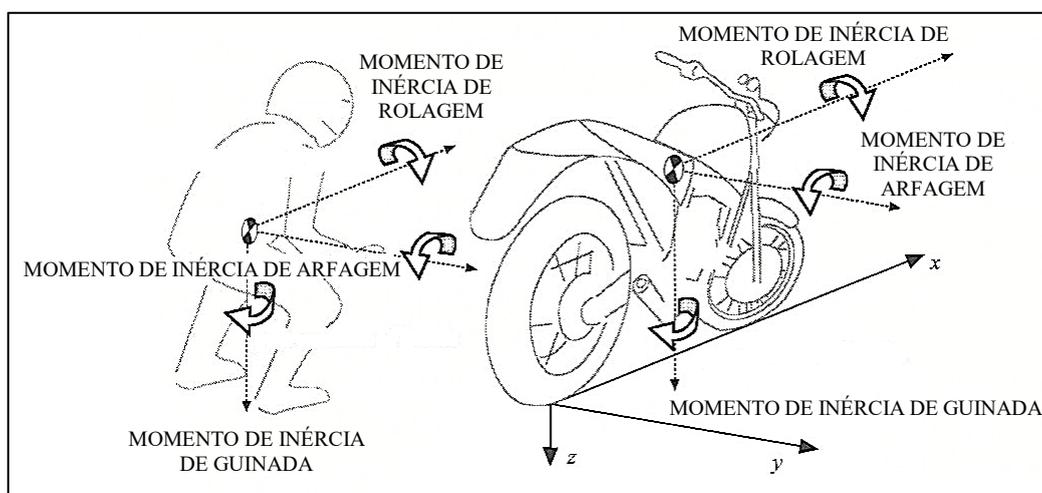


Figura 4.5 – Momentos de inércia (Cossalter, 2006)

### 4.3. Rolagem da Motocicleta em Curva Constante

#### 4.3.1. Ângulo de Rolagem Ideal

A motocicleta em curva constante é simultaneamente sujeita ao momento de restauração, gerado pela força centrífuga que tende a retornar a moto para posição vertical, e a um momento basculante, gerado pela força peso, que tende a inclinar a motocicleta ou ângulo de rolagem (Figura 4.6).

Cossalter (2006) apresenta as hipóteses simplificadoras de que a moto corre ao longo de uma curva de raio constante a velocidade constante (condições de estado estacionário); e o efeito giroscópico é desprezível.

Considerando a espessura da seção transversal dos pneus sendo igual a zero, o equilíbrio dos momentos permite derivar o ângulo de rolagem em termos da velocidade de deslocamento  $V$  e o raio da curva  $R_c$  (medido a partir do centro de gravidade ao eixo de rotação):

$$\varphi_i = \tan^{-1} \frac{R_c \Omega^2}{g} = \tan^{-1} \frac{V^2}{g R_c} \quad (4.4)$$

Onde  $\Omega$  indica a taxa angular de guinada, enquanto  $V = \Omega R_c$  indica a velocidade linear do veículo:

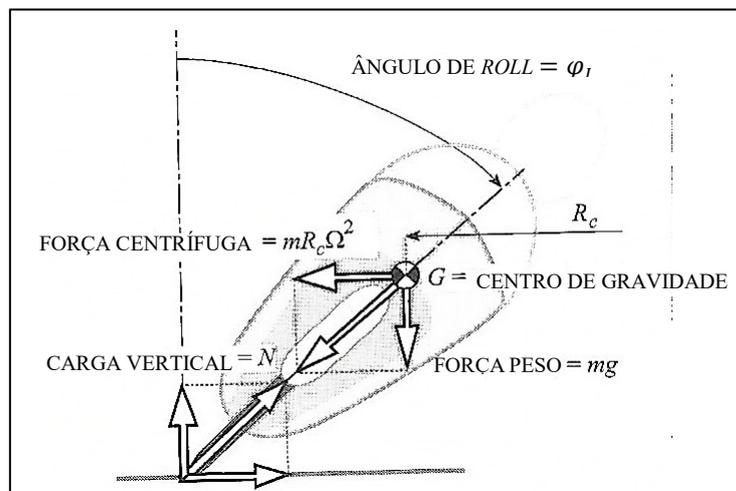


Figura 4.6 – Ângulo de rolagem da motocicleta equipada com pneus de espessura nula (Cossalter, 2006)

Em condições de equilíbrio, a resultante da força centrífuga e da força do peso passa através da linha que une os pontos de contato dos pneus no plano da estrada. Esta linha encontra-se no plano da motocicleta se as rodas têm espessura zero e o ângulo da direção é muito pequeno.

Na realidade, admitindo-se um ângulo de direção nulo, o ponto de contato dianteiro é deslocado lateralmente em relação ao eixo  $x$  da estrutura traseira, e a linha que une os pontos de contato dos pneus não pertence ao plano da parte traseira do quadro.

### 4.3.2. Ângulo de Rolagem Efetivo

Considerando uma moto com pneus de espessura  $2t$  que traça o mesmo raio de curvatura  $R_c$  com a mesma velocidade de guinada  $\Omega$ . Uma vez que a espessura dos pneus não é zero, o ângulo de rolagem  $\varphi$  necessário para o equilíbrio dos momentos exercidos pela força peso e a força centrífuga, é maior do que o ideal  $\varphi_i$  (Figura 4.7):

$$\varphi = \varphi_i + \Delta\varphi \quad (4.5)$$

O aumento  $\Delta\varphi$  do ângulo de rolamento, é dado pela equação:

$$\frac{\sin \Delta\varphi}{t} = \frac{\sin \varphi_i}{h - t} \quad (4.6)$$

O ângulo de rolamento efetivo é:

$$\varphi = \varphi_i + \Delta\varphi = \tan^{-1} \frac{V^2}{gR_c} + \sin^{-1} \frac{t \cdot \sin \left( \tan^{-1} \frac{V^2}{gR_c} \right)}{h - t} \quad (4.7)$$

A equação anterior mostra que  $\Delta\phi$  aumenta conforme o ângulo de rolagem e o raio da seção transversal aumentam e, conforme a altura do centro de gravidade  $h$  diminui. Portanto, o uso de pneus largos implica na utilização de maiores ângulos de rolagem em relação ao ângulo necessário para uma moto equipada com pneus mais finos. Além disso, com seções transversais dos pneus iguais para traçar a mesma curva com a mesma velocidade linear, é necessário inclinar mais uma moto com centro de gravidade baixo do que uma moto com centro de gravidade mais alto.

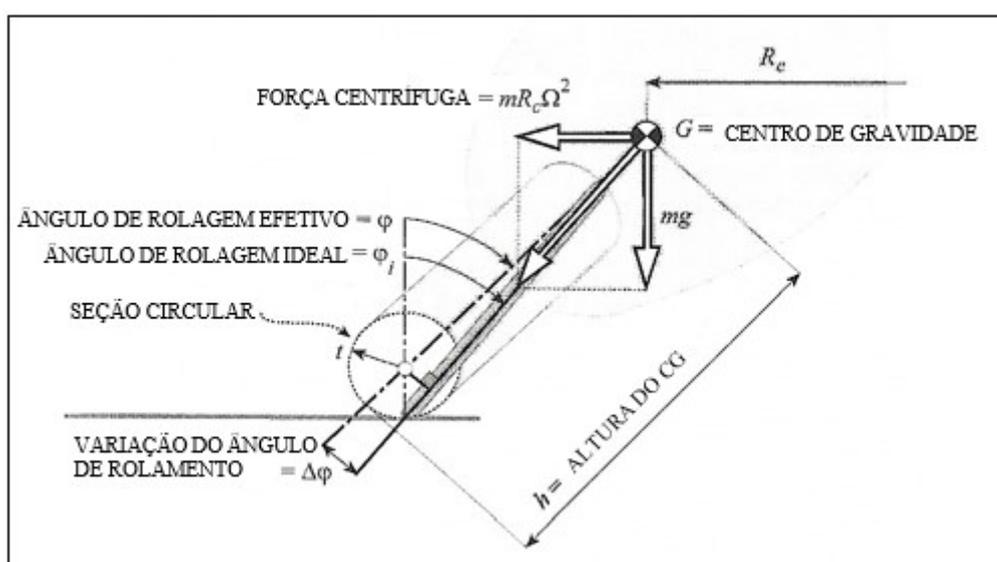


Figura 4.7 – Curva constante: ângulo de rolagem da moto equipada com pneus reais (Cossalter, 2006)

### 4.3.3. Velocidade da Roda em uma Curva

De acordo com Cossalter (2006), a velocidade do veículo é representada pela velocidade linear do ponto de contato da roda traseira. Portanto, a velocidade de guinada  $\Omega$  é:

$$\Omega = \frac{V}{R_{C_r}} \quad (4.8)$$

Supondo a ausência de deslizamento longitudinal entre os pneus e a superfície da estrada (na direção de avanço das rodas), a velocidade de rotação das rodas, em função da velocidade linear do veículo, do ângulo de rolagem e do ângulo de direção cinemática, é então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_r = -\frac{V}{\rho_r + t_r \cos \varphi} \\ \omega_f = -\frac{V}{(\rho_f + t_f \cos \beta) \cos \Delta} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Na realidade, deve observar-se que, durante as fases de impulso e de frenagem, há sempre um deslizamento longitudinal entre a roda traseira e o plano da estrada. Na roda da frente há deslizamento longitudinal na fase de frenagem, enquanto sob condições de estado estacionário a derrapagem é insignificante, porque é apenas devido à resistência ao rolamento.

É importante notar que, com a mesma velocidade linear, a velocidade angular das rodas aumenta durante a curva em relação à velocidade angular das rodas em trajetória retilínea, porque o contato não ocorre na maior circunferência das rodas.

#### 4.4. Efeitos Giroscópicos em uma Motocicleta

A dinâmica de uma motocicleta engloba uma variedade de efeitos giroscópicos, que podem ser divididos de acordo com o segundo eixo de rotação:

- Efeitos Giroscópicos de Guinada (*Yaw*): o eixo de rotação passa pelo centro da trajetória da curva e é perpendicular à estrada;
- Efeitos Giroscópicos de Rolagem (*Roll*): o eixo de rotação é a linha reta que se encontra no plano da estrada que passa pelos pontos de contato do pneu;
- Efeitos Giroscópicos de Direção (*Steering*): o eixo de rotação é o eixo dianteiro da direção.

#### 4.4.1. Efeitos Giroscópicos Gerados Pelo Movimento de Guinada

Para tratar do efeito giroscópico gerado pelas rodas nas curvas, Cossalter (2006) considera a roda dianteira sozinha, a uma velocidade de rotação constante  $\omega_f$  em que a motocicleta realiza uma curva de raio  $R_c$  com uma velocidade de guinada constante  $\Omega$  (Figura 4.8).

O movimento da roda à medida que realiza a curva gera um momento giroscópico em torno do eixo horizontal, o que tem o efeito de endireitamento da roda:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_g = I_{w_f} \left( \omega_f \Omega - \frac{\Omega^2 \sin \varphi}{2} \right) \cos \varphi \\ \\ M_g \cong I_{w_f} \omega_f \Omega \cos \varphi \end{array} \right. \quad (4.10)$$

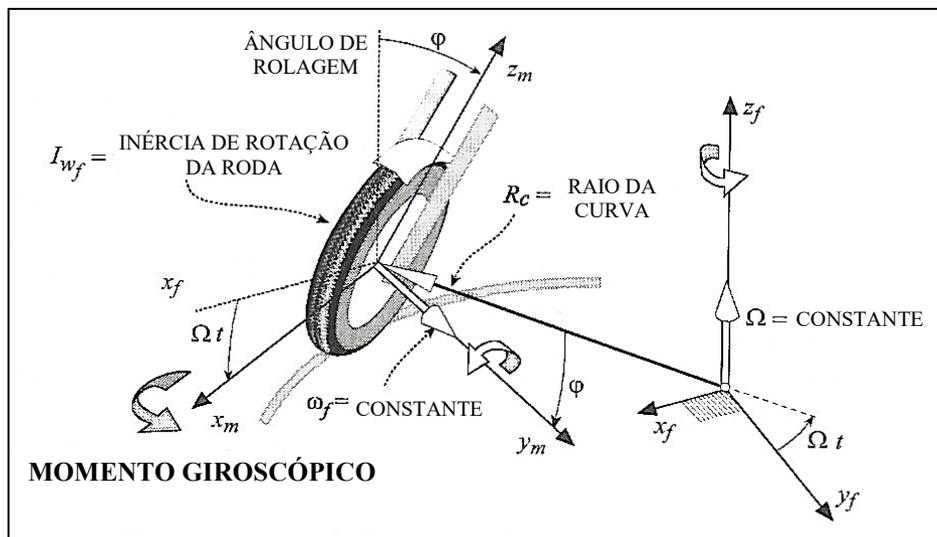


Figura 4.8 – Efeito giroscópico gerado pela roda dianteira durante a curva (o sistema de coordenadas com subscrito  $m$  é fixo ao garfo da motocicleta) (Cossalter, 2006)

A segunda expressão aproximada é válida se a velocidade de guinada  $\Omega$  puder ser considerada pequena em relação à velocidade de rotação  $\omega_f$ . Esta suposição pode ser verificada na prática, porque

o raio de giro é muito maior do que o raio da roda. O eixo  $xm$  é fixado ao garfo e, portanto, é um eixo móvel.

Observando o efeito de ambas as rodas e desconsiderando o fato de que tenham ângulos de rolagem e indicações nas curvas ligeiramente diferentes, seus efeitos giroscópicos podem ser somados:

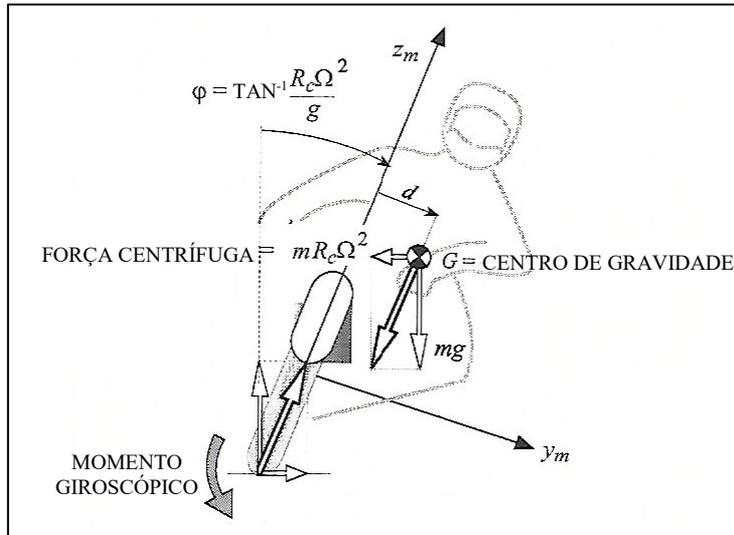
$$M_g \approx (I_{w_f} \omega_f + I_{w_r} \omega_r) \Omega \cos \varphi = I_w \omega \Omega \cos \varphi \quad (4.11)$$

O equilíbrio da motocicleta ocorre quando a força resultante do peso e da força centrífuga intersecta a linha que une os pontos de contato das duas rodas. Segundo Cossalter (2006), desconsiderando o efeito giroscópico e assumindo a espessura das rodas nula, o ângulo de rolagem ideal para uma motocicleta em uma curva constante é dada pela simples equação:

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{R_c \Omega^2}{g} \right) \quad (4.12)$$

Como visto, o efeito giroscópico das rodas em curvas manifesta-se por um momento de endireitamento. Para contrariar o efeito giroscópico das duas rodas e, assim, manter o equilíbrio, o piloto pode por sua vez, inclinar-se de tal maneira que a resultante da força de peso e da força centrífuga gera um momento igual e oposto ao momento giroscópico das duas rodas, como mostrado na Figura 4.9.

$$M = \sqrt{(mg)^2 + (mR_c \Omega^2)^2} \cdot d = -M_g \quad (4.13)$$



**Figura 4.9 – Influência no equilíbrio exercida pelo efeito giros cópico gerado pelas rodas durante a curva (Cossalter, 2006)**

Naturalmente, o piloto pode atingir o equilíbrio sem deslocar o tronco, a fim de produzir um deslocamento do centro de massa no sentido de dentro da curva, mas o ângulo de inclinação da motocicleta será maior do que o ângulo de rolagem ideal calculado assumindo que o efeito giros cópico é nulo (Figura 4.10).

Neste caso, o momento de endireitamento gerado pela força centrífuga e o momento gerado pelo efeito giros cópico (que também tem um efeito de endireitamento) são ambos compensados pelo momento de derrube da força peso. O efeito giros cópico faz com que o ângulo de rolagem real seja maior do que o ângulo de rolagem ideal que seria alcançado se o efeito giros cópico estivesse ausente.

O aumento do ângulo de rolamento  $\Delta\phi$  necessário para contrabalançar o efeito giros cópico, de acordo com Cossalter (2006), é dado por:

$$\Delta\phi = \sin^{-1} \frac{d}{h} = \sin^{-1} \frac{I_w \omega \cdot \Omega \cos(\phi + \Delta\phi)}{h \sqrt{(mg)^2 + (mR_c \Omega^2)^2}} \quad (4.14)$$

Como  $\Delta\varphi$  é pequeno em relação a  $\varphi$ , pode ser desconsiderado no numerador do lado direito, obtendo a equação:

$$\Delta\varphi \cong \frac{I_w \omega \cdot \Omega \cos \varphi}{h\sqrt{(mg)^2 + (mR_c\Omega^2)^2}} \quad (4.15)$$

O numerador representa o momento giroscópico gerado pelas duas rodas da motocicleta. O momento  $M$  que contrabalança o momento giroscópico é gerado pela força resultante do peso e da força centrífuga. O incremento  $\Delta\varphi$  faz a motocicleta menos manobrável, uma vez que a motocicleta leva mais tempo para atingir o equilíbrio, cada vez maior, do ângulo de rolagem (que por sua vez é maior).

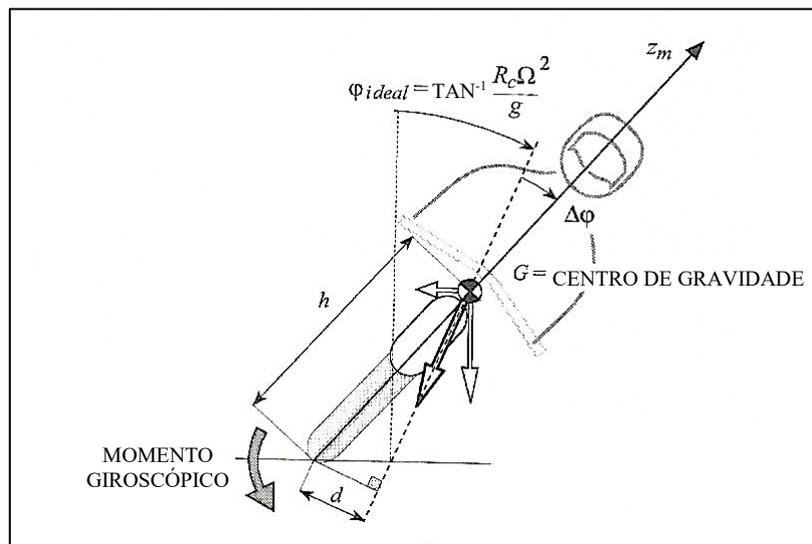


Figura 4.10 – Variação do ângulo de rolagem causada pelo efeito giroscópico de guinada (Cossalter, 2006)

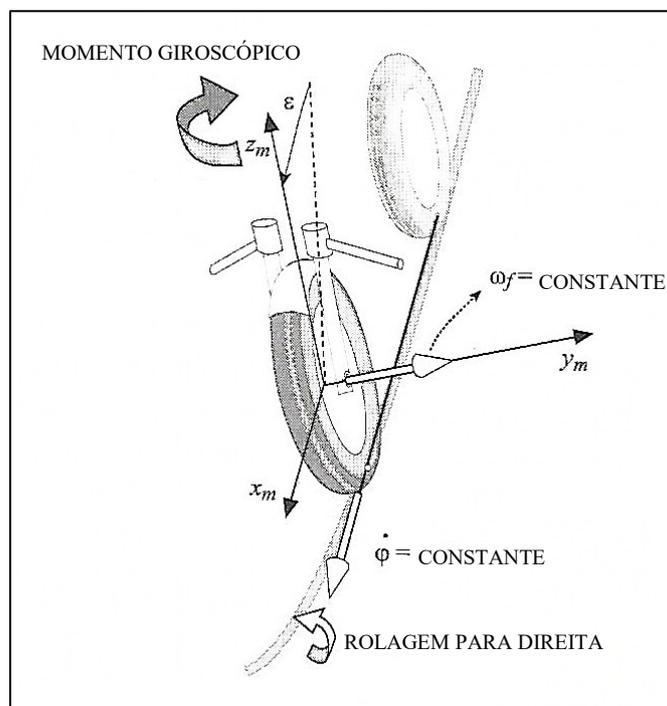
#### 4.4.2. Efeitos Giroscópicos Gerados pelo Movimento de Rolagem

A roda dianteira será analisada agora, enquanto a moto está rolando para a direita. Sua rotação juntamente com a rolagem para a direita, gera um momento giroscópico  $Mg$  que atua sobre a armação dianteira em torno do eixo localizado no plano da motocicleta e perpendicular ao eixo longitudinal de rolagem, como mostrado na Figura 4.11:

$$M_g = -I_{w_f} \omega_f \dot{\phi} \quad (4.16)$$

A projeção ao longo do eixo de direção, proporciona o momento benéfico em torno do eixo de direção:

$$M_{g_u} = -I_{w_f} \omega_f \dot{\phi} \cos \varepsilon \quad (4.17)$$

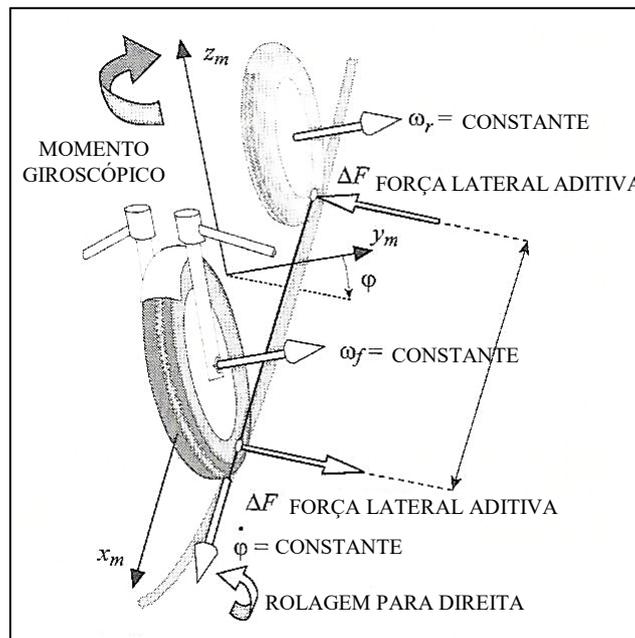


**Figura 4.11 – Rotação da roda dianteira: o movimento de rolagem provoca um momento giroscópico agindo na extremidade dianteira (Cossalter, 2006)**

De acordo com Cossalter (2006), o momento giroscópico tem o efeito de virar a cabeça de direção para a direita, ajudando assim a motocicleta entrar na curva (aumentar o ângulo de direção reduz o raio de curvatura). Analogamente, quando a velocidade de rolagem muda de sinal conforme a

moto retorna para a posição vertical, o momento giroscópico tem o efeito de reduzir o ângulo da direção, ajudando assim a saída da motocicleta da curva e seu retorno ao movimento retilíneo.

Se a motocicleta é assumida como sendo um corpo rígido (isto é, com a cabeça da direção fixa), o efeito giroscópico da rotação da roda durante a rolagem pode ser facilmente indicado para gerar um momento de guinada, como mostrado na Figura 4.12.



**Figura 4.12 – Efeito giroscópico gerado pelo movimento de rolagem da motocicleta e a rotação das rodas (Cossalter, 2006)**

Novamente, considerando uma moto rolando partindo da esquerda para a direita. O momento giroscópico agindo na moto é igual a:

$$M_g = -(I_{w_f}\omega_f + I_{w_r}\omega_r)\dot{\phi} \quad (4.18)$$

O momento giroscópico tende a fazer a moto virar para a direita, e é equilibrado pela resistência lateral nas rodas exercida pelo chão. Assim, a força lateral dianteira aumenta ligeiramente  $\Delta F$ , enquanto a força lateral traseira diminui na mesma proporção:

$$M_g = - \left( I_{w_f} \omega_f + I_{w_r} \omega_r \right) \dot{\varphi} = \Delta F \cdot p \cos \varphi \quad (4.19)$$

Ao sair da curva, a motocicleta rola da direita para a esquerda. O momento giroscópico tem seu sinal invertido, e, portanto, a variação das forças laterais nos pneus muda de sinal também.

#### 4.4.3. Efeitos Giroscópicos Gerados Pela Direção

Uma vez que a direção de rotação da roda é perpendicular ao eixo da coluna de direção, girar o guidão da direita para a esquerda gera um momento giroscópico em torno do eixo perpendicular a ambos os eixos de direção e da roda dianteira, como mostrado na Figura 4.13:

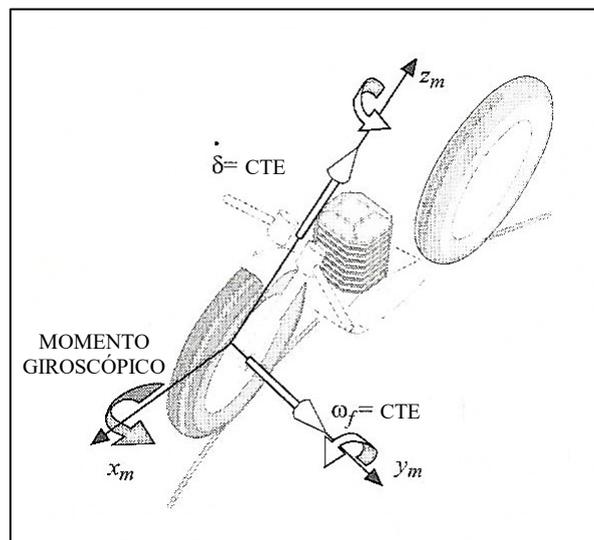


Figura 4.13 – Efeito giroscópico gerado pelas rotações da roda dianteira e do guidão (Cossalter, 2006)

$$M_g = I_{wf} \omega_f \dot{\delta} \quad (4.20)$$

Isso tem o efeito de inclinar mais a motocicleta para a direita. A projeção do momento giroscópico sobre o eixo de rolagem (linha que liga os pontos de contato das duas rodas) é dada por:

$$M_{g_u} = I_{wf} \omega_f \dot{\delta} \cos \varepsilon \quad (4.21)$$

Com base nesses efeitos giroscópicos, é possível concluir que uma motocicleta é ideal quando as inércias das rodas são nulas. No entanto, é importante ressaltar que o efeito giroscópico gerado pela roda e pelo movimento de direção desempenham um papel importante na estabilidade da motocicleta durante o movimento retilíneo.

## 5. Desenvolvimento do Aparato para Estudo da Dinâmica de Motocicletas em Escala

### 5.1. Introdução

O desenvolvimento de um aparato para visualização e estudo da dinâmica de uma motocicleta em escala é um tema que vem sendo estudado nesses últimos anos através de projetos finais de graduação, dissertações de mestrado, teses de doutorado e outros estudos. O objetivo principal da criação de um equipamento com essa finalidade é que através dele seja possível obter resultados experimentais que demonstrem as teorias existentes.

Uma primeira versão do aparato (Figura 5.1) foi desenvolvida e construída no projeto final de graduação de Johannes Ney Moser, em julho de 2015. Essa versão foi utilizada para a realização de alguns testes, onde foi verificado que seu peso e suas dimensões poderiam ser reduzidos, em conjunto com o aperfeiçoamento do modelo visando otimizar o projeto.

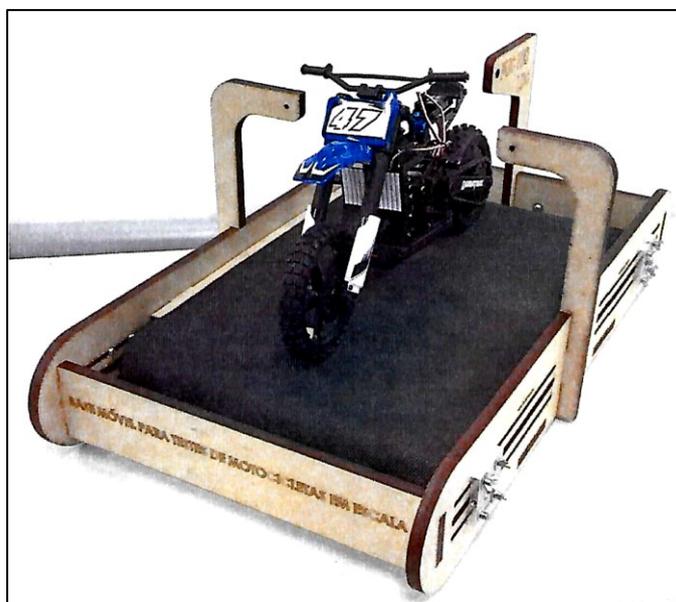
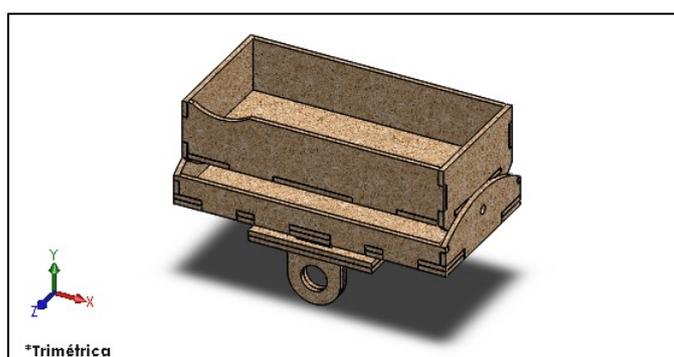


Figura 5.1 – Primeira versão do aparato (Moser, 2015)

## 5.2. Suporte da Moto

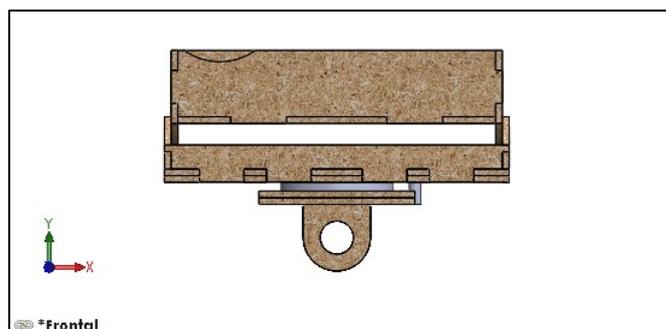
No desenvolvimento da nova versão da base, a primeira etapa foi desenvolver um suporte para a moto que possibilitasse os três principais movimentos dinâmicos de uma moto, sendo eles rolagem (*roll*), guinada (*yaw*) e arfagem (*pitch*).

Definido esse objetivo, e utilizando o suporte da versão anterior da base como modelo, foi projetada uma estrutura formada por duas “caixas” e rolamentos.

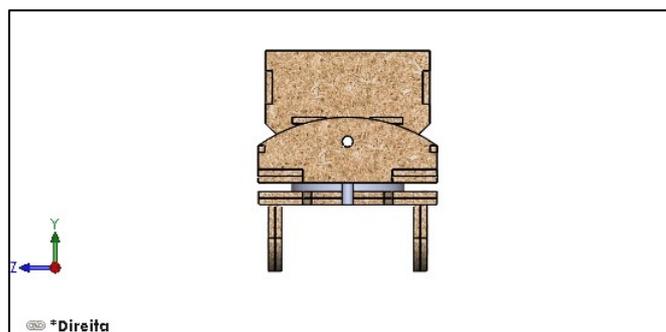


**Figura 5.2 – Vista trimétrica do suporte da moto**

Foi importante atentar para o design da estrutura dos “caixas”, visando não haver interferências com a estrutura da motocicleta a ser usada no estudo. A Figura 5.3 nos mostra que existe um corte em uma das laterais do “caixa interna” que evita a obstrução de uma engrenagem da moto utilizada para o estudo.



**Figura 5.3 – Vista frontal do suporte da moto**



**Figura 5.4 – Vista lateral do suporte da moto**

Observamos na Figura 5.4 a existência de furos em ambas as caixas, destinados à rolamentos não definidos neste projeto. Sendo assim, a escolha dos mesmos será parte das próximas etapas de desenvolvimento do aparato.



**Figura 5.5 – Vista superior do suporte da moto**

A Figura 5.6 apresenta a vista explodida do suporte da moto, mostrando todos os seus componentes e como é realizada a sua montagem.

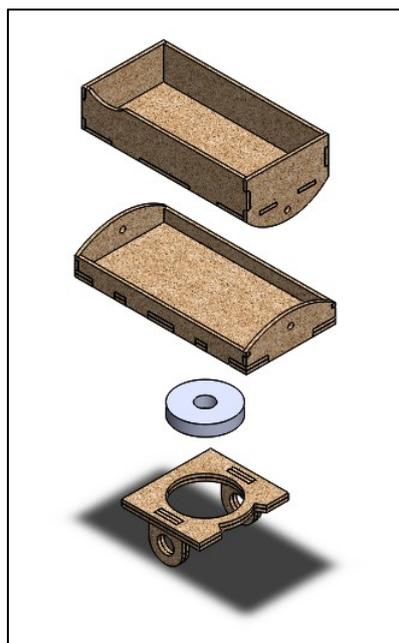


Figura 5.6 – Vista explodida do suporte da moto

### 5.3. Estrutura da base

No projeto da estrutura da base, o objetivo foi de reduzir o peso total da estrutura e diminuir suas dimensões, porém sem gerar interferência nos movimentos da moto ou do próprio aparato.

A base foi projetada de forma que suas laterais, ambas são formadas de três placas de MDF nas dimensões encontradas no apêndice A, e a parte traseira e dianteira formadas por duas placas de MDF cada, sendo as placas exteriores gravadas como mostrado na Figuras 5.9 e 5.10.

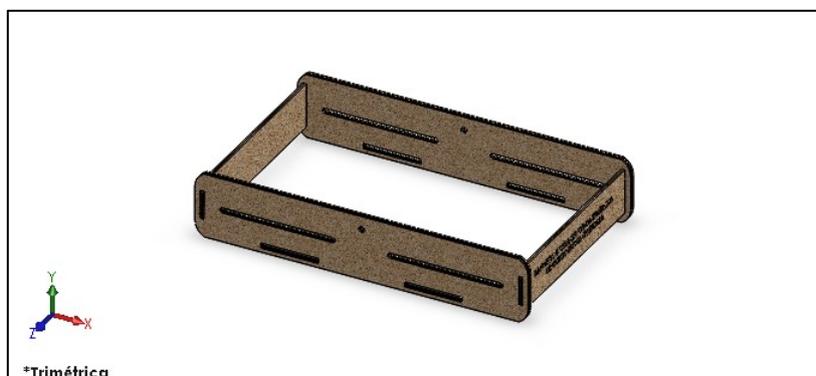
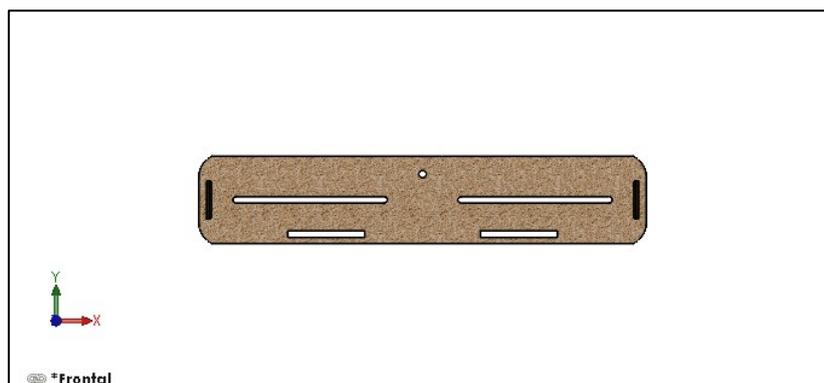


Figura 5.7 – Vista trimétrica da estrutura da base

Durante o projeto era possível a realização de alguns frisos ao longo das laterais, que ajudariam a reduzir ainda mais a massa total do aparato. Ocorre que para a aplicação destes frisos, testes com a estrutura seriam necessários para que não houvesse mudança na sua integridade estrutural.



**Figura 5.8 – Vista frontal da estrutura da base**

As figuras 5.7, 5.8 e 5.11 apresentam respectivamente as vistas trimétrica, frontal e superior da estrutura da base.

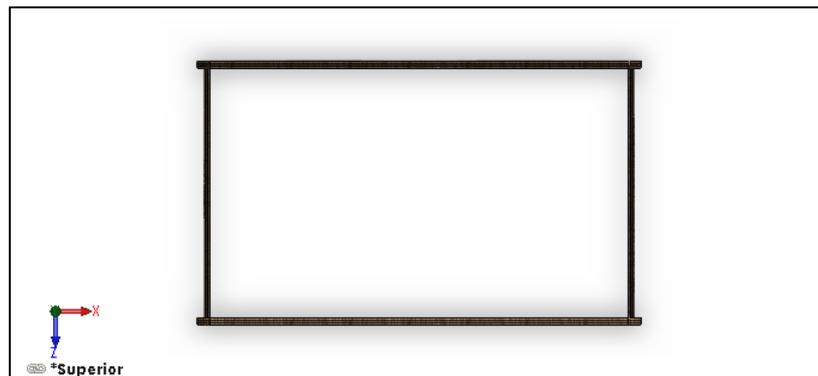


**Figura 5.9 – Vista lateral direita da estrutura da base**



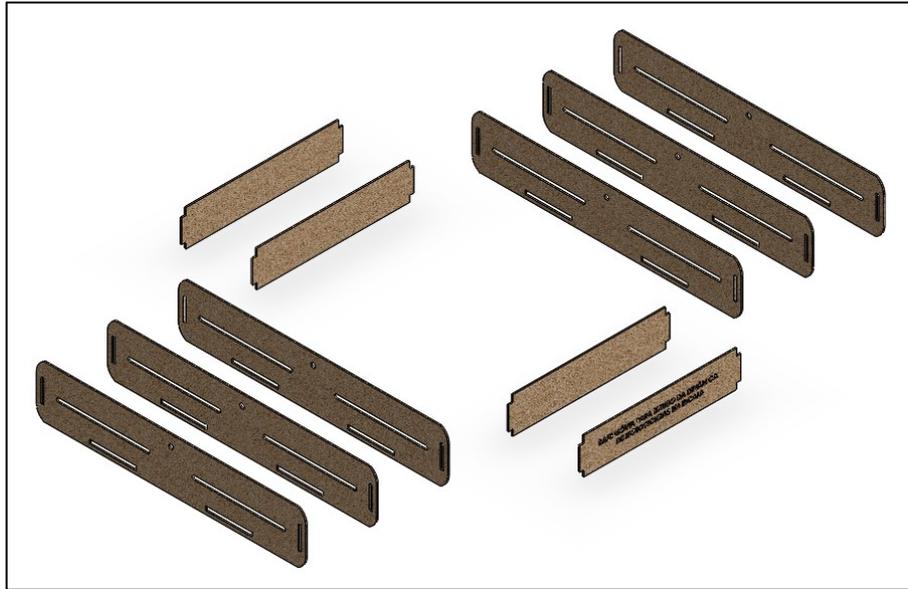
**Figura 5.10 – Vista lateral esquerda da estrutura da base**

Nas Figuras 5.9 e 5.10 apresentam as laterais que foram identificadas com o nome do aparato, o ano de projeto, o laboratório e a universidade responsável.



**Figura 5.11 – Vista superior da estrutura da base**

A Figura 5.12 mostra a vista explodida da estrutura, permitindo a visualização de todos os seus componentes e como é realizada sua montagem.



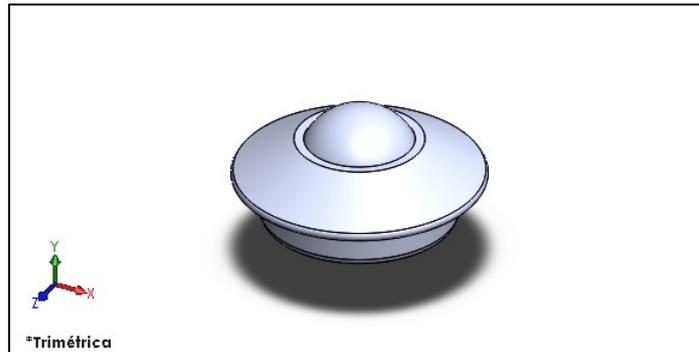
**Figura 5.12 – Vista explodida da estrutura da base**

#### **5.4. Esferas transferidoras**

Para possibilitar o movimento de rotação da base em torno da base do contrapeso, foi encontrada no mercado a opção de esfera transferidora. Essas esferas são comumente encontradas em chão de fábricas onde são utilizadas na parte inferior de plataformas para transporte de cargas, permitindo movimentos em todas as direções, sem muito atrito. Cada modelo de esfera contém especificações, entre elas as dimensões, carga limite para carregamento e materiais, podendo variar de acordo com o modelo e catálogos.

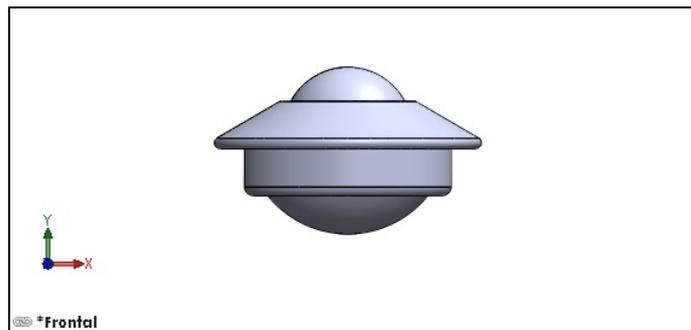
As esferas escolhidas são da marca *Bosch Rexroth* e modelo ET9/50R53615G (apêndice B), comercializadas pela loja online Só Esferas.

Um modelo simplificado das esferas transferidoras foi criado no *SolidWorks* (Figura 5.13) para que a montagem final da base pudesse ser apresentada.

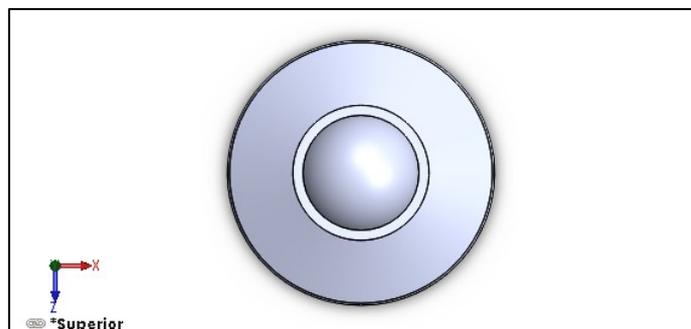


**Figura 5.13 – Vista trimétrica da esfera transferidora**

As figuras 5.13, 5.14 e 5.15 apresentam respectivamente as vistas trimétrica, frontal e superior do modelo simplificado da esfera transferidora.



**Figura 5.14 – Vista frontal da esfera transferidora**



**Figura 5.15 – Vista superior da esfera transferidora**

## 5.5. Base para Contrapeso

A base para contrapeso foi projetada como sendo o centro de rotação e o ponto de fixação da estrutura como um todo. Para que isso ocorresse, foi pensado que o atrito dessa base em questão, com a superfície em que ela estiver apoiada (uma mesa, sob o solo ou outra estrutura) pudesse não ser suficiente para mantê-la em repouso enquanto a base com a motocicleta estiver realizando a rotação desejada. Por isso, o componente inferior dessa base de contrapeso foi projetado para ser de borracha, silicone ou outro material com características de aderência similares ( $\mu \approx 1246,5 \text{ kg/m}^3$ ).

Foi projetada também, uma área destinada a posicionar uma determinada carga extra capaz de aumentar o atrito entre a superfície inferior, de borracha, com a superfície de apoio como é mostrado na Figura 5.25.

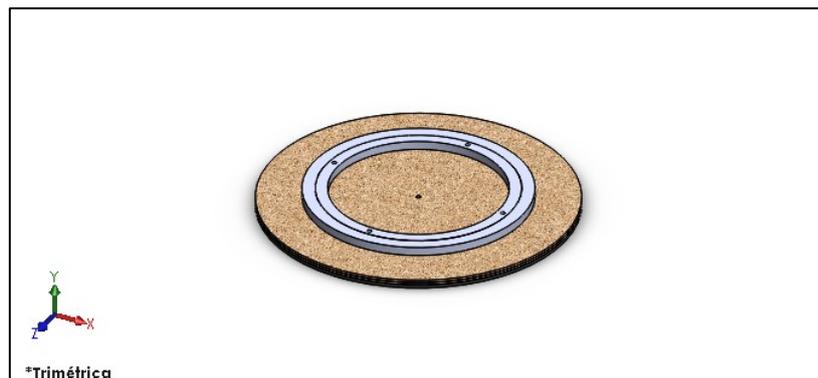


Figura 5.16 – Vista trimétrica da base para contrapeso

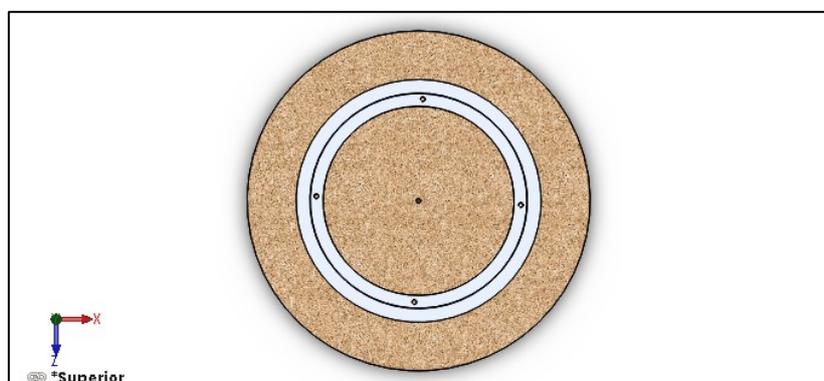
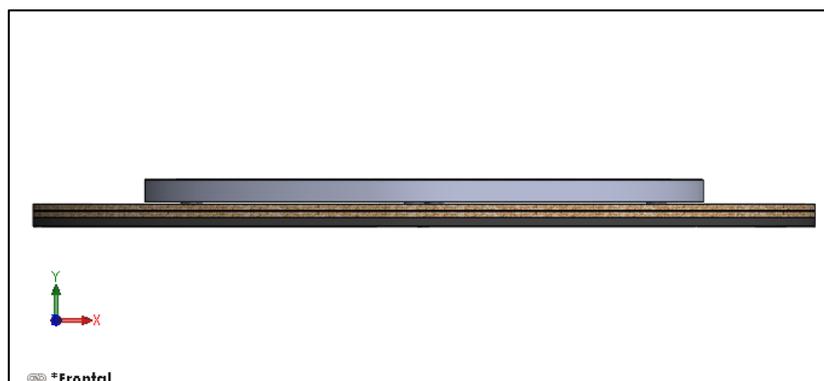
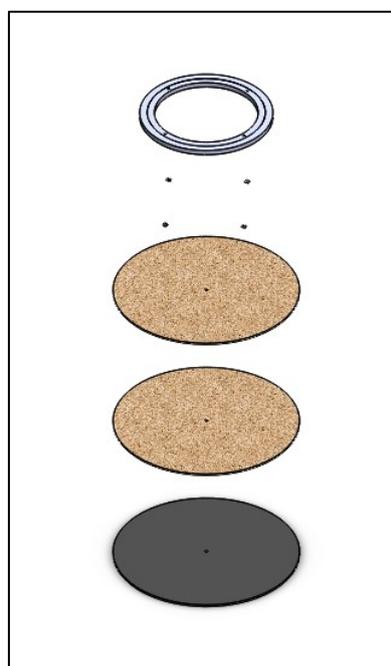


Figura 5.17 – Vista superior da base para contrapeso



**Figura 5.18 – Vista frontal da base para contrapeso**

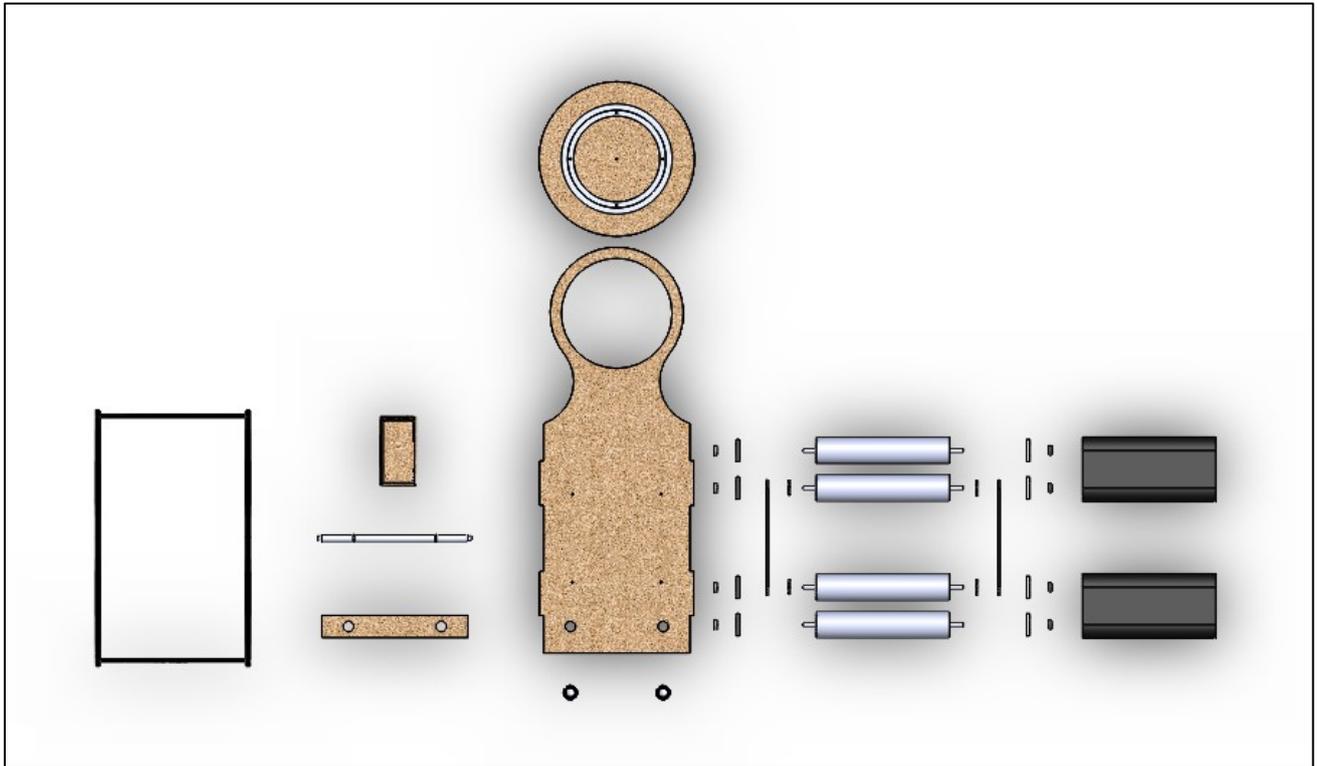
Na Figura 5.19 encontra-se a vista explodida desta montagem, permitindo a visualização de todos os seus componentes e suas localizações. O desenho técnico contendo as reais dimensões encontra-se no apêndice A.



**Figura 5.19 – Vista explodida da base para contrapeso**

## 5.6. Montagem final

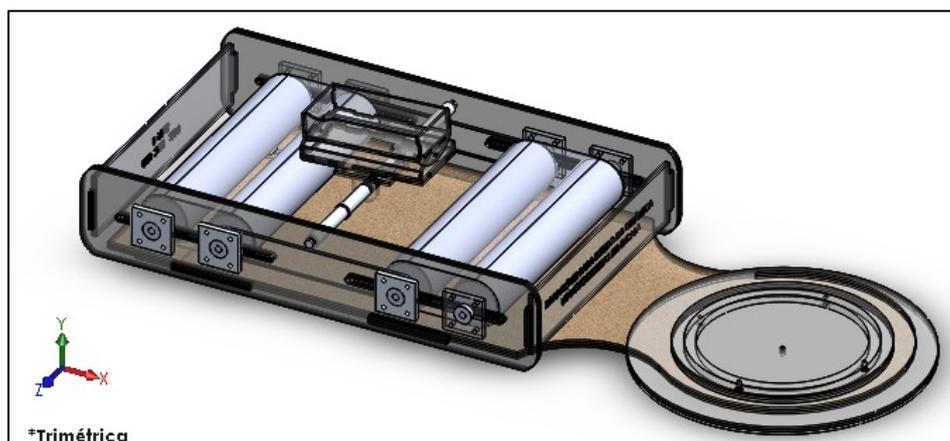
A Figura 5.20 é uma vista explodida da base completa, onde é possível visualizar todos os seus componentes. A montagem final pode ser vista nas Figuras 5.21 a 5.23.



**Figura 5.20 – Vista explodida da base completa com todos seus componentes**

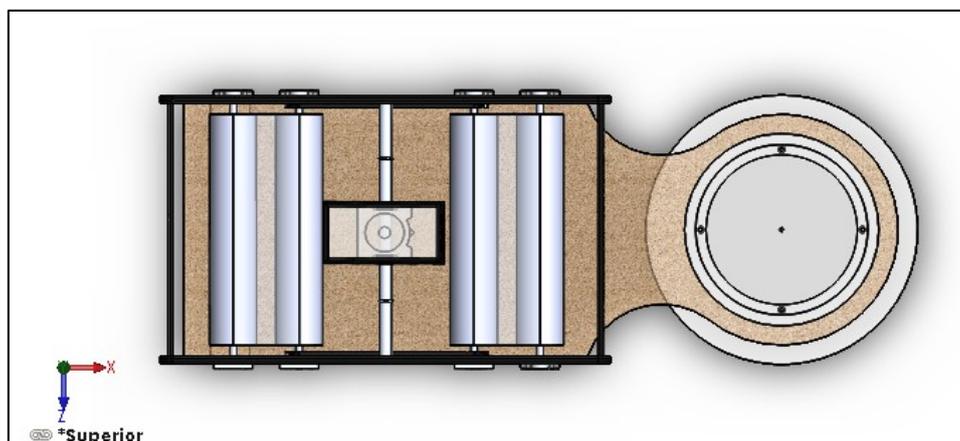
A Figura 5.21 mostra o aparato completo, em uma vista trimétrica com transparência dos seus componentes, permitindo a visualização da montagem de todos os componentes apresentados na Figura 5.20.

Dessa forma, é possível observar como as peças estão conectadas e conseqüentemente, como ocorrerão os devidos movimentos destes componentes e suas limitações, para que o aparato realize a movimentação desejada.



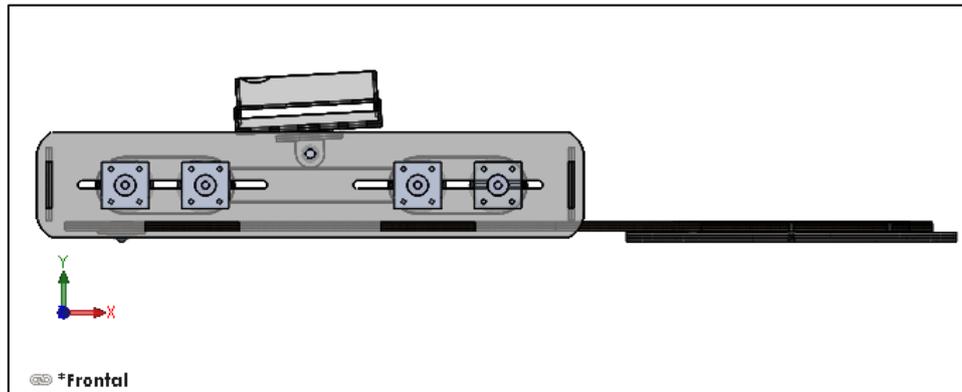
**Figura 5.21 – Vista trimétrica do aparato completo**

Na Figura 5.22 podemos ver a parte interna das esteiras, onde se encontram os rolos, os rolamentos e suas conexões. É possível compreender como a estrutura do suporte da moto permitirá os movimentos dinâmicos da mesma, e vemos também a conexão entre a base para contrapeso e o resto da estrutura do aparato.



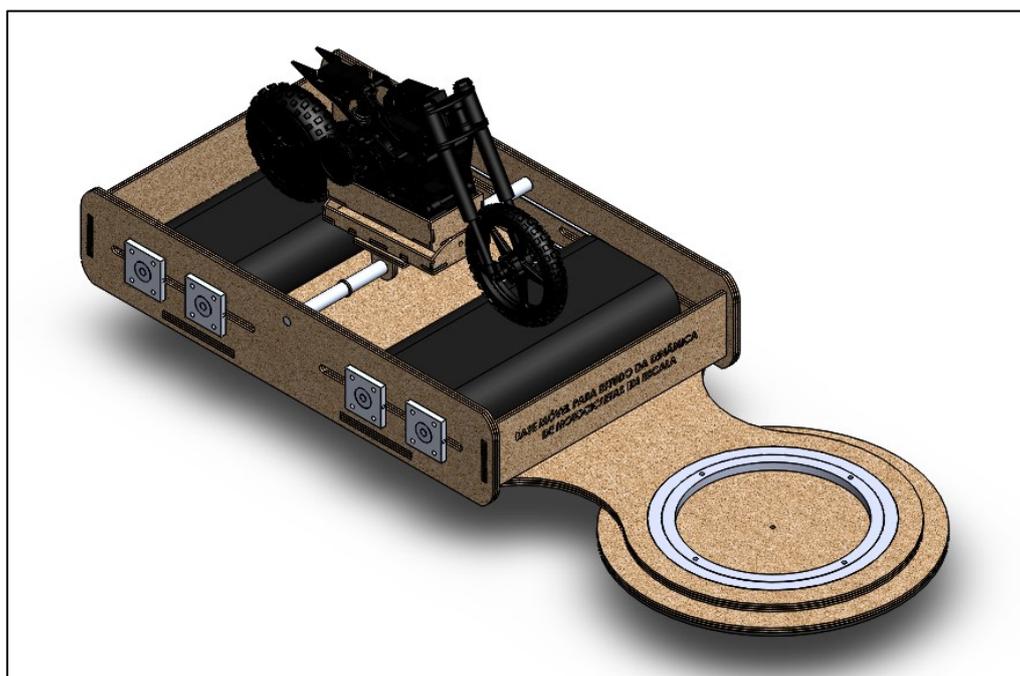
**Figura 5.22 – Vista superior do aparato completo**

Na Figura 5.23, temos uma visão de como os rolos, rolamentos, correias, engrenagens e esteiras estão conectados e posicionados na estrutura. Esses componentes serão os responsáveis pela transferência de movimento das rodas para as esteiras e entre as esteiras também.



**Figura 5.23 – Vista frontal do aparato completo**

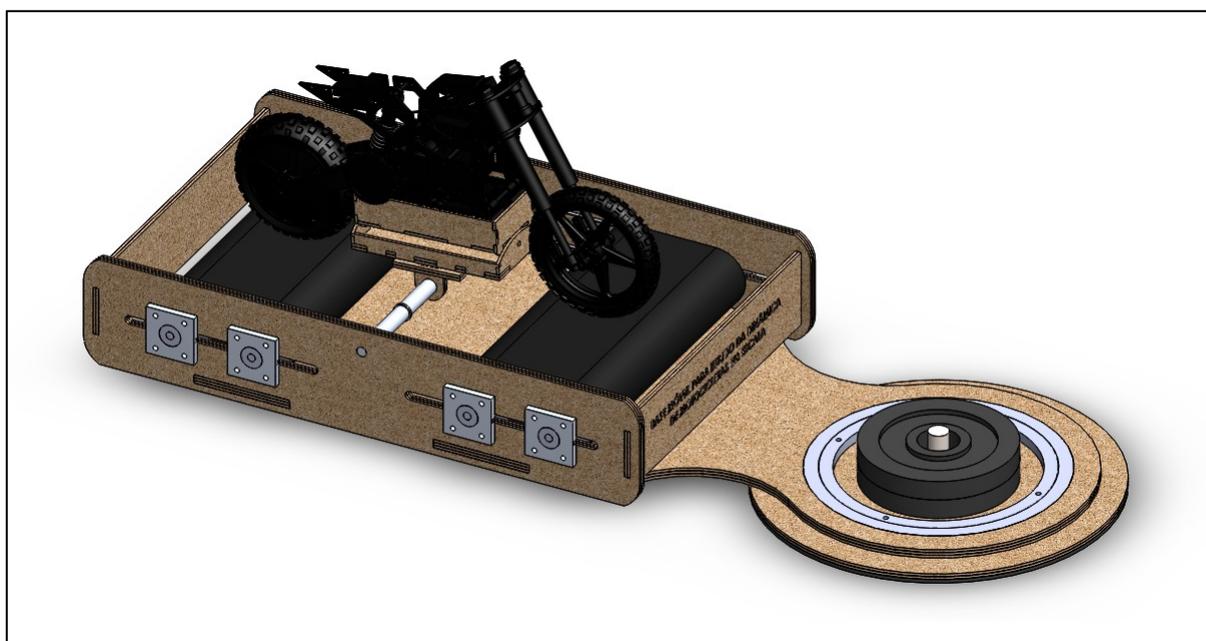
A Figura 5.24 ilustra o aparato com a moto, apresentando como deverá ficar o posicionamento ao final do desenvolvimento e construção.



**Figura 5.24 – Ilustração do modelo final da base com a motocicleta**

Um exemplo de carga para contrapeso que pode ser utilizada, é a colocação de anilhas na área determinada pelo projeto como é apresentado na Figura 5.25.

As dimensões da montagem e de seus componentes, seus respectivos posicionamentos e detalhes, encontram-se no apêndice A, no final do trabalho.



**Figura 5.25 – Exemplo da adição da carga para contrapeso**

## **6. Conclusões e Etapas Futuras**

### **6.1. Conclusões**

No desenvolvimento deste trabalho, foi possível aplicar os conceitos de dinâmica, desenho mecânico, dimensionamento de peças, especificação de componentes entre outros, ministrados ao longo do curso de graduação em engenharia mecânica, cumprindo a finalidade do projeto final em consolidar os conhecimentos adquiridos.

Ao final deste trabalho obtivemos resultados satisfatórios das simulações realizadas, que nos permitiram validar o uso do suplemento *SolidWorks Motion*, provando que a programação do software em questão considera o efeito giroscópico em suas simulações, assim como suas consequências e influências sob os modelos. Com isso, será possível utilizar este meio para realizar futuramente as simulações necessárias testando a versão do aparato desenvolvida neste trabalho.

O projeto da nova versão do aparato desenvolvido teve suas dimensões otimizadas, juntamente com uma redução de peso da estrutura como um todo, diminuindo assim as resistências geradas na realização do movimento de rotação. Esta versão permite que a moto realize seus movimentos dinâmicos de rolagem, arfagem e guinada, tornando o movimento mais fiel ao movimento realizado fora da estrutura.

### **6.2. Etapas Futuras**

A próxima etapa relacionada ao desenvolvimento deste aparato é a realização de análises e testes de simulação para validar as dimensões de projeto desta nova versão do aparato, ou se necessário realizar mudanças para que o objetivo final seja alcançado.

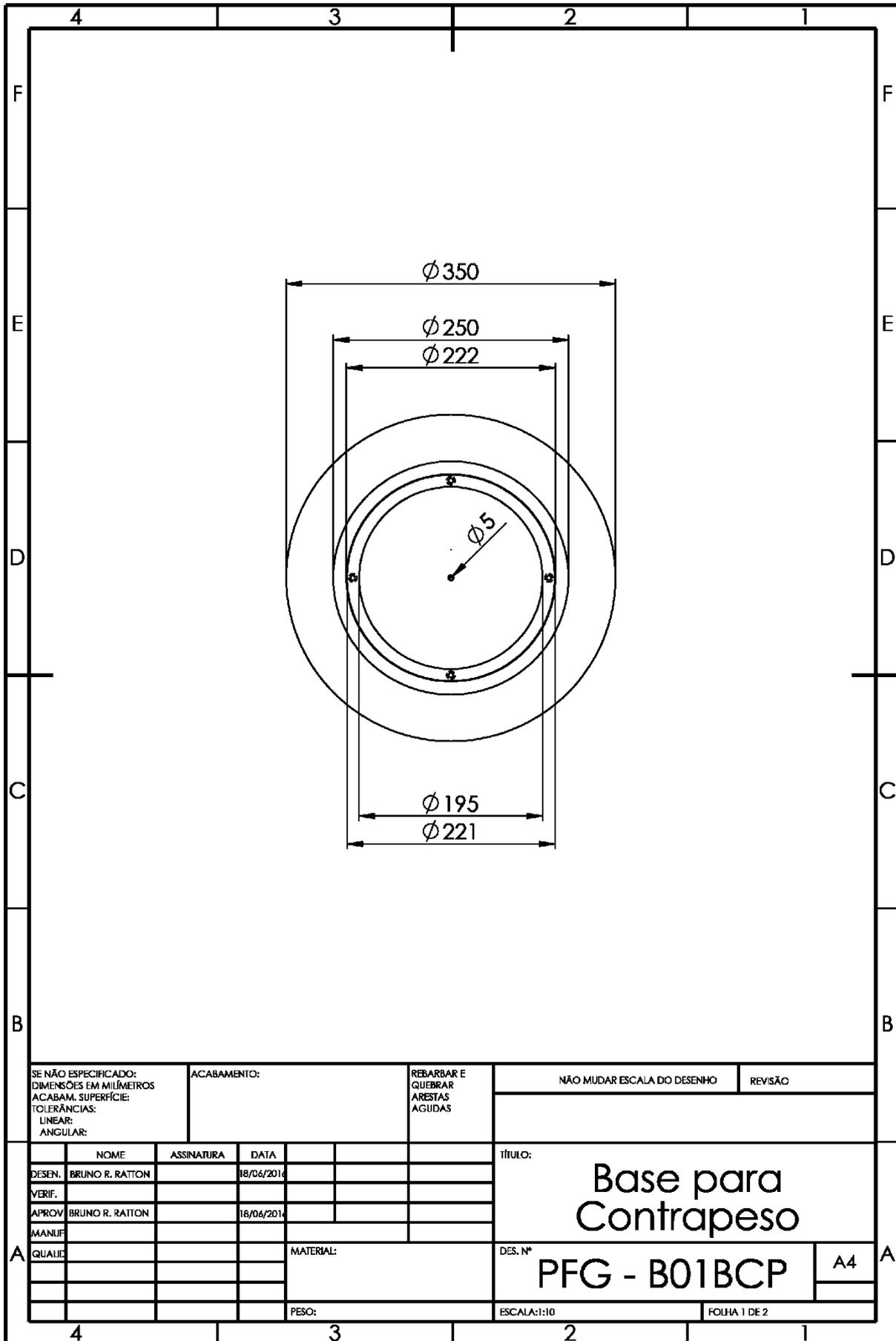
Após concluída esta etapa de análises, será possível dar início à etapa de construção do aparato e validação experimental, verificando se os resultados obtidos estarão de acordo com os desejados.

## Referências

- [1]. Akima, H., - “A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures”, J.ACM, vol. 17, n° 4, pp. 589-602, Boulder, EUA, outubro de 1970.
- [2]. Assad, M.M.; Meggiolaro, M.A., - “Implementação e validação experimental de estratégias de controle para estabilização e acompanhamento de trajetórias de motocicletas autônomas”, Proposta de Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2015, 45p.
- [3]. Åström, K.J., Klein, R.E.; Lennartsson, A., - “Bicycle dynamics and control: adapted bicycles for education and research. Control Systems”, IEEE, vol. 25, n° 4, 2005, p. 26-47.
- [4]. Beer, F.P., Johnston Jr., E.R., Mazurek, D.F., Cornwell, P.J., - “Vector Mechanics for Engineers – Statics and Dynamics”, 10ª edição, Ed. McGraw-Hill, 2013;
- [5]. Cossalter, V., - “Motorcycle Dynamics”, 2ª edição norte-americana, Ed. Lulu, 2006;
- [6]. Dassault Systèmes SolidWorks Corp., - “Understanding Motion Simulation”, 2008.
- [7]. Gere, J.M., Goodno, B.J., - “Mecânica dos Materiais”, tradução da 7ª edição norte-americana, Ed. Cengage Learning, 2009;
- [8]. Kooijman, J.D.G. et al., - “A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects”, Science, vol. 332, n° 6027, 2011, p. 339-342.
- [9]. Meijaard, J.P. et al., - “Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review”, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science, vol. 463, n° 2084, 2007, p. 1955-1982.
- [10]. Meriam, J.L., Kraige, L.G., - “Mecânica para Engenharia – Dinâmica”, 6ª edição, Ed. LTC, 2009;
- [11]. Moser, J. N., - “Desenvolvimento de uma base móvel para testes de motocicleta em escala”, Departamento de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Projeto Final de Graduação, julho 2015.

- [12]. Nizar, M.H.M., - “SolidWorks Motion Study Tutorial”, South Dakota School of Mines & Technology, Dakota do Sul, EUA, agosto, 2013.
- [13]. Speranza Neto, M., Silva, F.R., - “Dinâmica de Sistemas Físicos”, Notas de aula, Capítulo 1, p. 5, 2005;
- [14]. Wilson, E., - “Virtual Gyroscopes”, MEng Thesis at Cambridge University, 2007, <http://www2.eng.cam.ac.uk/~hemh/gyroscopes/htmlgyroscopes.html> (acessado junho 2016).

# Apêndice A



SE NÃO ESPECIFICADO:  
DIMENSÕES EM MILÍMETROS  
ACABAM. SUPERFÍCIE:  
TOLERÂNCIAS:  
LINEAR:  
ANGULAR:

ACABAMENTO:

REBARBAR E  
QUEBRAR  
ARESTAS  
AGUDAS

NÃO MUDAR ESCALA DO DESENHO

REVISÃO

	NOME	ASSINATURA	DATA
DESEN.	BRUNO R. RATTON		18/06/2014
VERIF.			
APROV.	BRUNO R. RATTON		16/06/2014
MANUF.			
QUALIC			

TÍTULO:

Base para  
Contrapeso

DES. Nº

PFG - B01BCP

A4

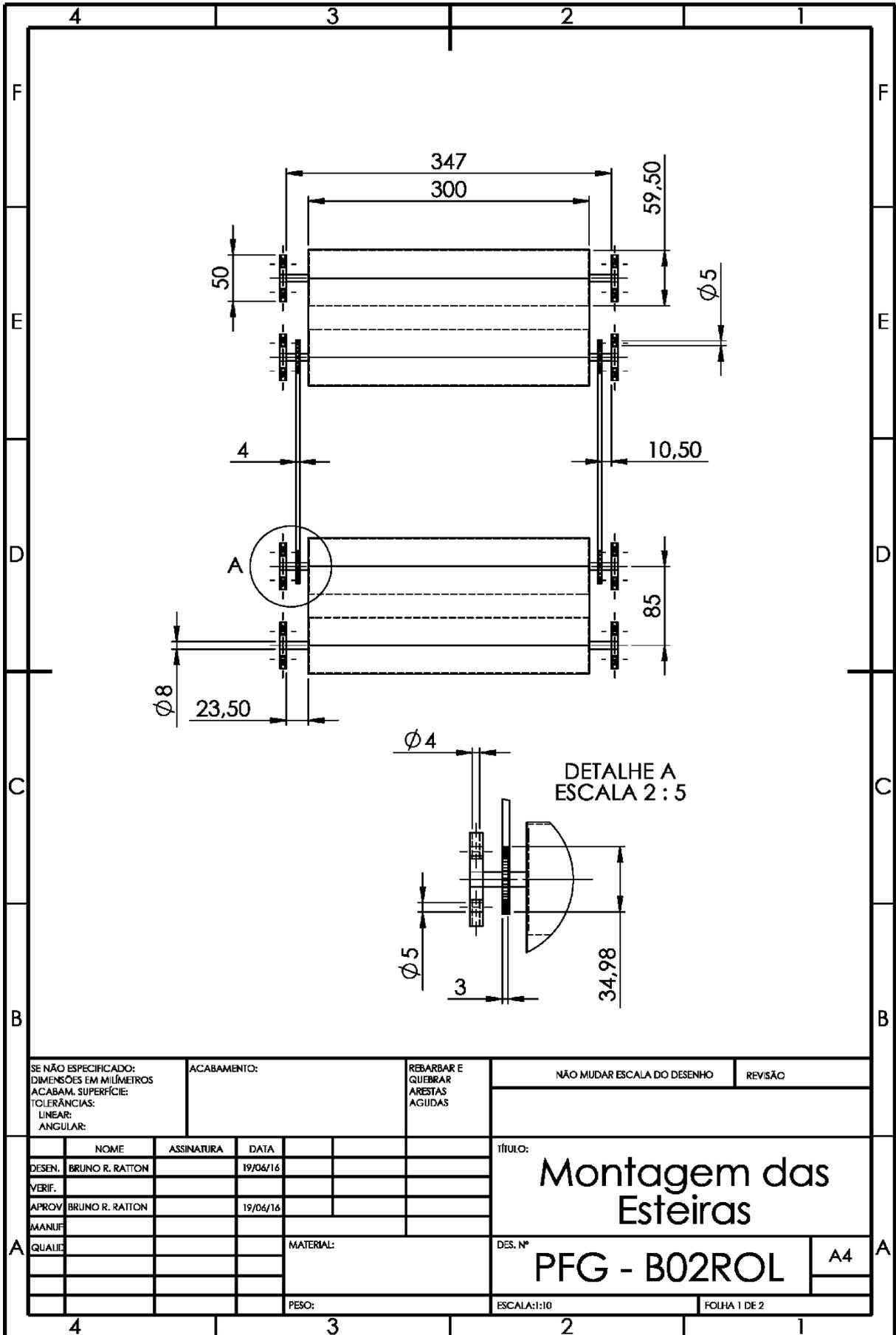
MATERIAL:

PESO:

ESCALA:1:10

FOLHA 1 DE 2





SE NÃO ESPECIFICADO:  
DIMENSÕES EM MILÍMETROS  
ACABAM. SUPERFÍCIE:  
TOLERÂNCIAS:  
LINEAR:  
ANGULAR:

ACABAMENTO:

REBARBAR E  
QUEBRAR  
ARESTAS  
AGUDAS

NÃO MUDAR ESCALA DO DESENHO

REVISÃO

	NOME	ASSINATURA	DATA
DESEN.	BRUNO R. RATTON		19/06/16
VERIF.			
APROV.	BRUNO R. RATTON		19/06/16
MANUF.			
QUALIF.			
			MATERIAL:
			PESO:

TÍTULO:

Montagem das Esteiras

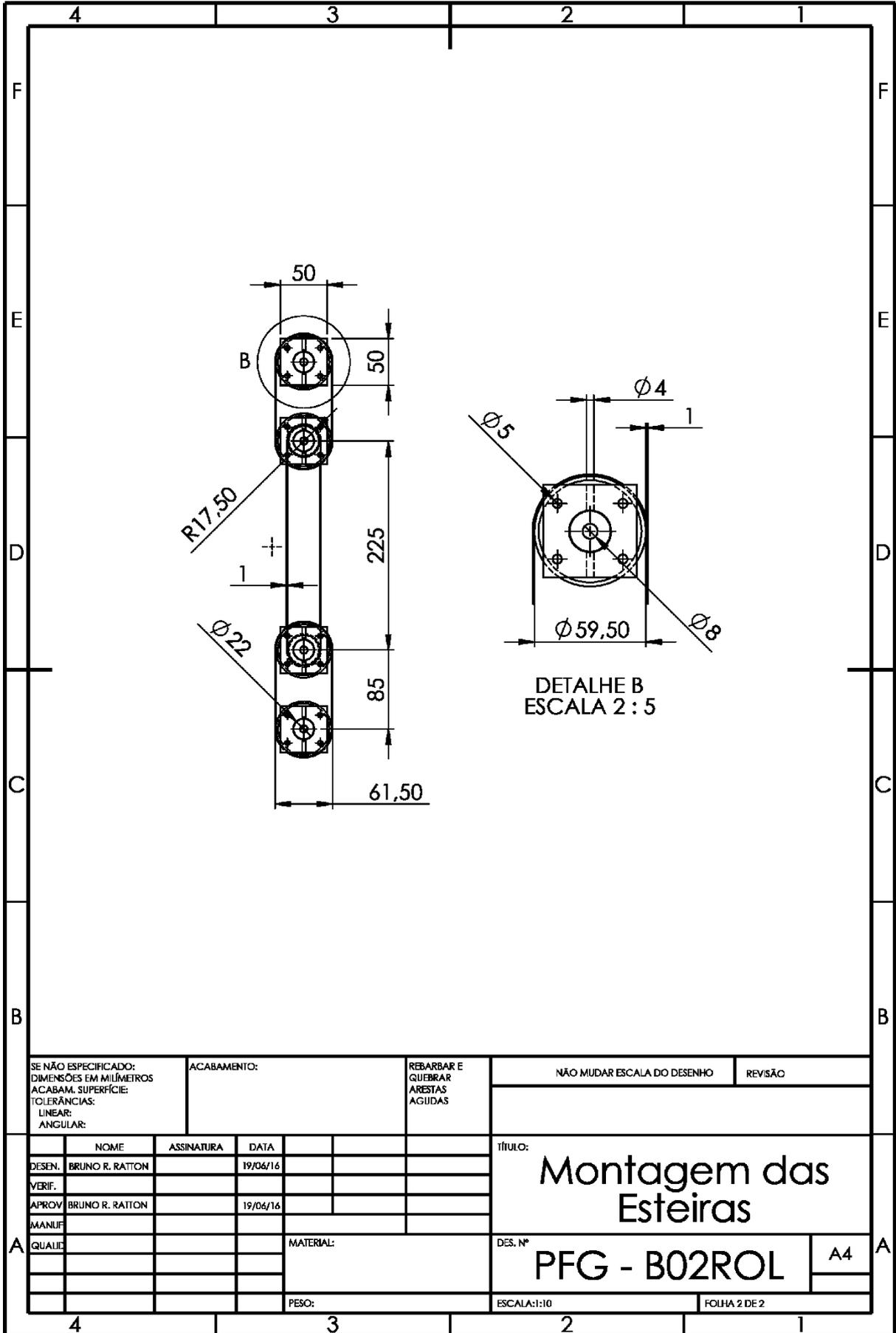
DES. Nº

PFG - B02ROL

A4

ESCALA:1:10

FOLHA 1 DE 2



SE NÃO ESPECIFICADO:  
DIMENSÕES EM MILÍMETROS  
ACABAM. SUPERFÍCIE:  
TOLERÂNCIAS:  
LINEAR:  
ANGULAR:

ACABAMENTO:

REBARBAR E  
QUEBRAR  
ARESTAS  
AGUDAS

NÃO MUDAR ESCALA DO DESENHO

REVISÃO

	NOME	ASSINATURA	DATA
DESEN.	BRUNO R. RATTON		19/06/16
VERIF.			
APROV.	BRUNO R. RATTON		19/06/16
MANUF.			
QUALIF.			
			MATERIAL:
			PESO:

TÍTULO:

Montagem das  
Esteiras

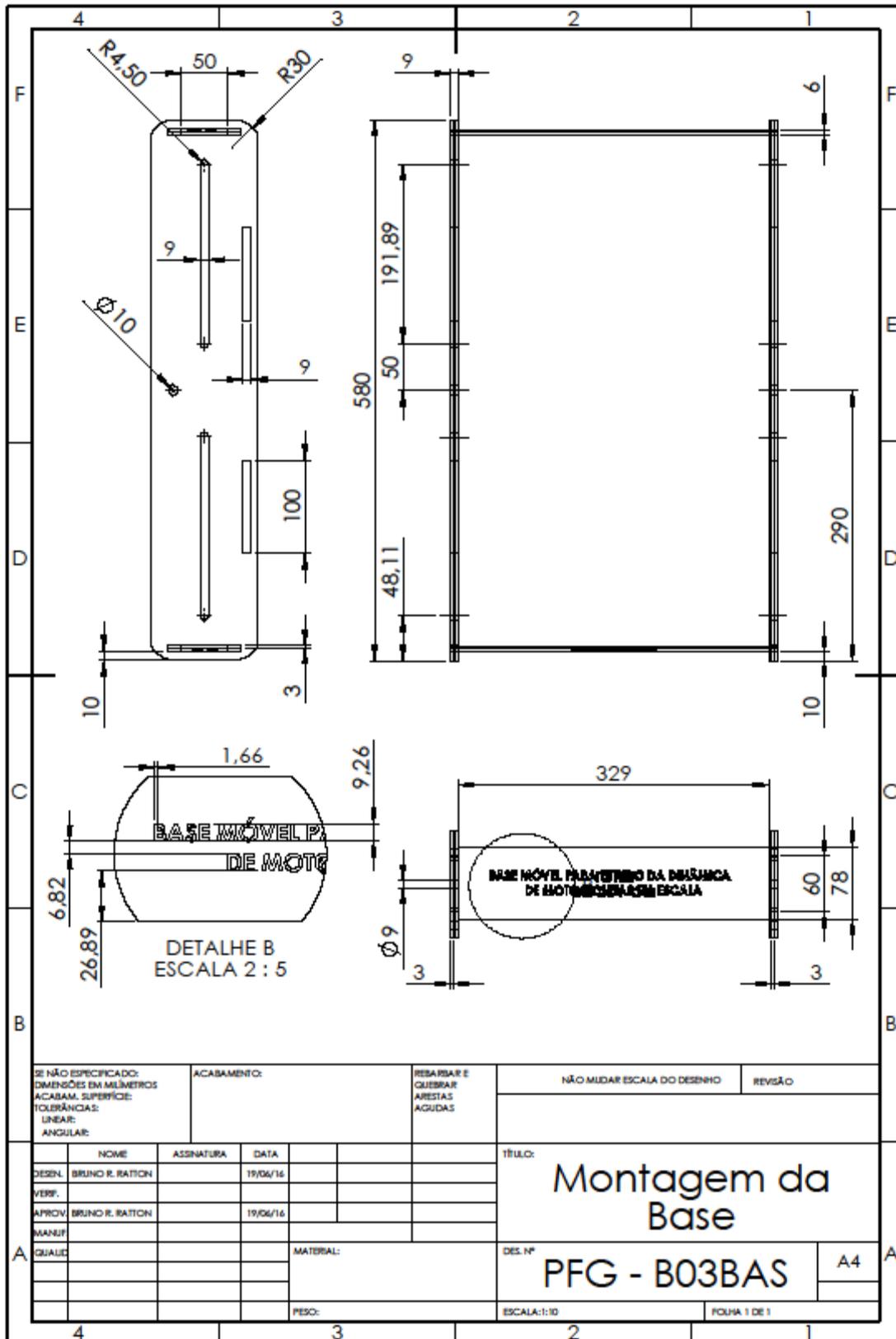
DES. Nº

PFG - B02ROL

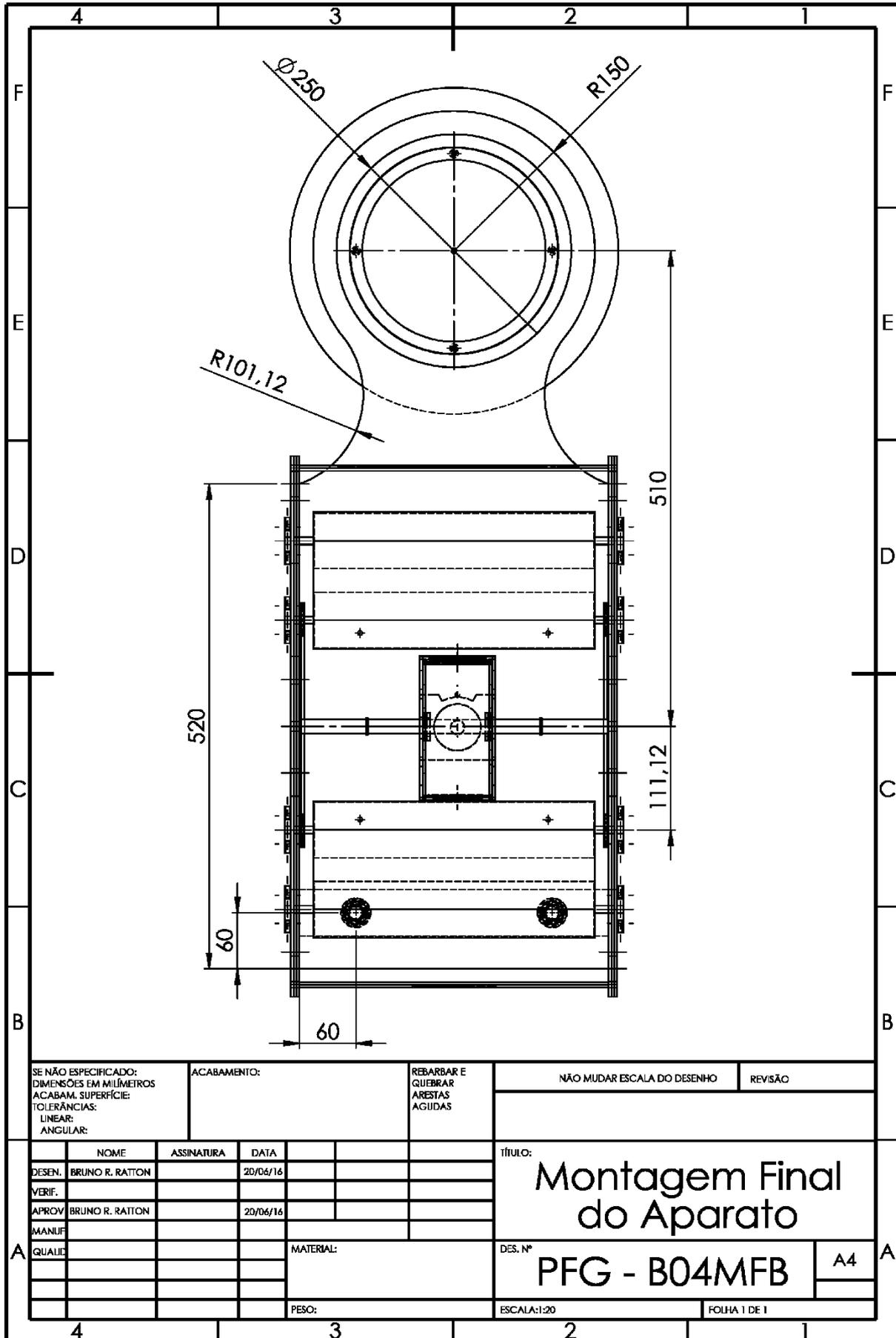
A4

ESCALA:1:10

FOLHA 2 DE 2



SE NÃO ESPECIFICADO: DIMENSÕES EM MILÍMETROS ACABAM. SUPERFÍCIE: TOLERÂNCIAS: LINEAR: ANGULAR:		ACABAMENTO:	RESBARBAR E QUEBRAR ARESTAS AGUDAS	NÃO MUDAR ESCALA DO DESENHO	REVISÃO
DESEN.	BRUNO R. RATION	ASSINATURA	DATA	TÍTULO: <b>Montagem da Base</b>	
VERIF.			19/06/16		
APROV.	BRUNO R. RATION		19/06/16		
MANUF.					
QUALIC.			MATERIAL:	DES. Nº	A4
				PFG - B03BAS	
			PESO:	ESCALA: 1:10	FOLHA 1 DE 1



SE NÃO ESPECIFICADO:  
DIMENSÕES EM MILÍMETROS  
ACABAM. SUPERFÍCIE:  
TOLERÂNCIAS:  
LINEAR:  
ANGULAR:

ACABAMENTO:

REBARBAR E  
QUEBRAR  
ARESTAS  
AGUDAS

NÃO MUDAR ESCALA DO DESENHO

REVISÃO

	NOME	ASSINATURA	DATA
DESEN.	BRUNO R. RATTON		20/06/16
VERIF.			
APROV.	BRUNO R. RATTON		20/06/16
MANUF.			
QUALIF.			

TÍTULO:

Montagem Final  
do Aparato

DES. Nº

PFG - B04MFB

A4

MATERIAL:

PESO:

ESCALA:1:20

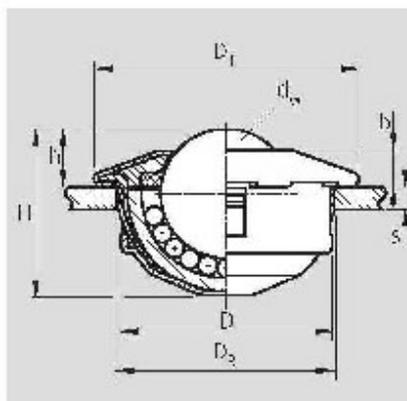
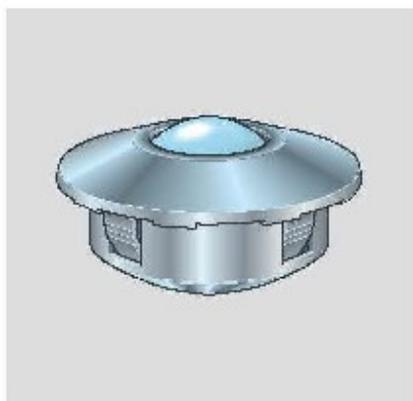
FOLHA 1 DE 1

## Apêndice B

SO ESFERAS  
 COMÉRCIO DE ESFERAS LTDA.  
 AV. SANTO AMARO, 2.620 - CEP 04556-100  
 FONE: (0XX11) 3046-5255 / FAX: (0XX11) 3046-0305  
 SÃO PAULO - SP - BRASIL  
 E-MAIL: soesferas@soesferas.com.br  
 SITE: www.soesferas.com.br



### ESFERAS TRANSFERIDORAS



Referência	Acabamento	Dimensões (mm)						Dimensões de montagem		Esfessuraminima da base S	Capacidade de carga (kg)	Peso (kg)
		dw	D	D1	h	H	b	Ds				
ET9/50R53615G	Galvanizado	15	24-0,13	31	9,5±0,2	20	5,5	24+0,5	1,5	50	0,044	
ET9/130R53622G		22	36±0,16	45	9,8±0,2	28,6	6	36+0,8	2	130	0,146	

### MARCA BOSCH REXROTH

C.N.P.J. 52.073.343/0001-80

Esferas em Aços (Cromo, Carbono, inox)  
 Esferas de Vidro (com ou sem Precisão)  
 Esferas de Zircônio  
 Esferas em Metal Duro

INSCR. ESTADUAL 110.805.740.113

Esferas em Plásticos (PP, NY, PA, Tef)  
 Esferas em Cerâmicas  
 Esferas Transferidoras  
 Rolos e Agulhas