

7 Resultados

7.1. Modelagem numérica

Nesse item são calculadas as frequências de vibrações obtidas através da formulação apresentada nos capítulos 3 e 4. As rotinas programadas em Mathcad® são apresentadas no Apêndice B e Apêndice C.

7.1.1. Comparações com soluções analíticas

Nesse item as frequências de vibrações obtidas pela modelagem numérica são comparadas com as frequências obtidas de soluções analíticas.

7.1.1.1. Vibrações axiais

Neste item são apresentados os resultados obtidos das frequências de vibrações longitudinais calculados para um elemento estrutural tratado como uma barra. As características do elemento estrutural são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 - Geometria e propriedades físicas de um elemento estrutural

Seção	Comprimento (m)	Módulo de Elasticidade (kN/m ²)	Peso Específico do Material (kN/m ³)	Área da Seção Transversal (m ²)	Momento de Inércia (m ⁴)
φ70cm	35.90	29979000	24.0	0.20390	9.18×10 ⁻³

As frequências de vibração para barra foram calculadas pelo método de Rayleigh-Ritz enriquecido com 15 funções adicionais conforme equação (4-84), buscando aproximar adequadamente as 10 primeiras frequências de vibração. Os cálculos foram realizados em uma rotina programada em Mathcad®.

As frequências calculadas são apresentadas na Tabela 3, nessa tabela também são apresentadas as frequências de vibração obtidas pela solução analítica da equação diferencial governante de vibrações longitudinais em uma barra. Os resultados apresentados na Tabela 3 demonstram a aplicabilidade do método de Rayleigh-Ritz enriquecido.

Tabela 3 - Vibrações longitudinais

Modo	Frequência (Hz)			
	Condição de Suporte - Barra			
	Engastada-Livre		Livre-Livre	
	Exata	Rayleigh-Ritz (n=15)	Exata	Rayleigh-Ritz (n=15)
1	24.377	24.377	0.000	0.000
2	73.131	73.134	48.754	48.756
3	121.886	121.900	97.509	97.522
4	170.640	170.679	146.263	146.316
5	219.394	219.479	195.017	195.124
6	268.149	268.308	243.772	244.031
7	316.903	317.175	292.526	292.904
8	365.657	366.094	341.280	342.051
9	414.412	415.082	390.034	391.007
10	463.166	464.164	438.789	440.630

7.1.1.2. Vibrações transversais

Neste item são apresentados os resultados de frequências de vibração transversais calculados para um elemento estrutural tratado como viga. As características deste elemento estrutural são idênticas às apresentadas na Tabela 2.

As frequências de vibração para viga foram calculadas pelo método de Rayleigh-Ritz enriquecido com 15 funções adicionais conforme equação (4-83), buscando aproximar adequadamente as 10 primeiras frequências de vibração. Os cálculos foram realizados em uma rotina programada em Mathcad®. As frequências calculadas são apresentadas na Tabela 3, nessa tabela também são apresentadas as frequências de vibração obtidas pela solução analítica da equação diferencial governante de vibrações transversais em uma viga. Os resultados apresentados na Tabela 4 demonstram a aplicabilidade do método de Rayleigh-Ritz enriquecido.

Tabela 4 - Vibrações transversais

Modo	Frequência (Hz)					
	Condição de Suporte - Viga					
	Simplesmente Apoiada		Engastada		Livre-Livre	
	Exata	Rayleigh Ritz (n=15)	Exata	Rayleigh Ritz (n=15)	Exata	Rayleigh Ritz (n=15)
1	0.905	0.904	0.323	0.323	0.000	0.000
2	3.621	3.621	2.055	2.021	0.000	0.000
3	8.148	8.148	5.755	5.659	2.087	2.052
4	14.485	14.485	11.277	11.090	5.753	5.657
5	22.632	22.632	18.642	18.332	11.277	11.090
6	32.590	32.590	27.848	27.386	18.642	18.333
7	44.359	44.359	38.896	38.251	27.848	27.386
8	57.938	57.938	51.784	50.929	38.896	38.255
9	73.328	73.328	66.514	65.424	51.784	50.933
10	90.528	90.528	83.085	81.731	66.514	65.442

7.1.2. Exemplos numéricos

Nesse item são apresentados os resultados de frequências de vibração obtidas através da modelagem numérica para estacas reais. Para a modelagem os módulos de fundação e coeficientes de mola foram obtidos através de ensaios estáticos realizados nas estacas.

7.1.2.1. Vibrações axiais

Neste item são apresentados os resultados obtidos das frequências de vibração longitudinais calculadas para três estacas com as características geométricas e físicas apresentadas na Tabela 5. Foram realizadas provas de cargas estáticas cíclicas nas referidas estacas. A Figura 20 apresenta o resultado do ensaio estático da estaca PI-3, a Figura 21 apresenta o resultado do ensaio estático da estaca PI-10a e Figura 22 apresenta o resultado do ensaio estático da estaca PI-11. Os deslocamentos apresentados nesses gráficos são medidos no topo da estaca.

Os ensaios estáticos cíclicos realizados possibilitaram o cálculo das constantes de mola dos solos em que as estacas em questão estão embutidas. As constantes de mola foram calculadas de maneira similar à metodologia apresentada por Das (1993) para provas de carga em placa cíclicas. De posse das sondagens representativas referidas na Tabela 5 e apresentadas no Apêndice A, observa-se que as estacas analisadas são flutuantes, de modo que a rigidez de fricção do solo é a predominante. As constantes de mola dos solos obtidas através dos ensaios são apresentadas na Tabela 6.

As frequências de vibração das estacas foram calculadas pelo método de Rayleigh-Ritz enriquecido com 15 funções adicionais conforme equação (4-84), buscando aproximar adequadamente as 10 primeiras frequências de vibração. Os cálculos foram realizados em uma rotina programada em Mathcad®. As frequências calculadas são apresentadas na Tabela 7. No item 7.2.3 estas frequências serão comparadas com os valores reais obtidos em testes de vibração forçada.

Tabela 5 - Características geométricas e físicas das estacas

Característica	Estaca		
	PI-3	PI-10a	PI-11
Tipo	Pré-Moldada de Concreto	Franki	Metálica
Seção	φ70cm	φ60cm	W610x155
Comprimento Embutido em Solo (m)	34.30	25.50	35.65
Comprimento Total (m)	35.90	27.30	46.70
Composição	3X11.00m+3.80m	27.0m	3X12.00m+11.00m
Sondagem Representativa	SPT-154	SPT-157	SPT-151
Módulo de Elasticidade (kN/m ²)	29979000	28291000	206874800
Peso Específico do Material da Estaca (kN/m ³)	24.0	24.0	77.3
Área da Seção Transversal da Estaca (m ²)	0.20390	0.30876	0.01601

Tabela 6 - Provas de carga e coeficientes de mola

Característica	Estaca		
	PI-3	PI-10a	PI-11
Comprimento Embutido em Solo (m)	34.30	25.50	35.65
Carga Máxima no Ensaio Estático (kN)	5990	4495	4583
Recalque máximo no Ensaio Estático (mm)	21.58	47.62	35.65
K_f (kN/m)	353695	374907	134458
$\overline{K_f} = K_f / L$ (kN/m ²)	10312	14702	3772
K_b (kN/m)	0	0	0

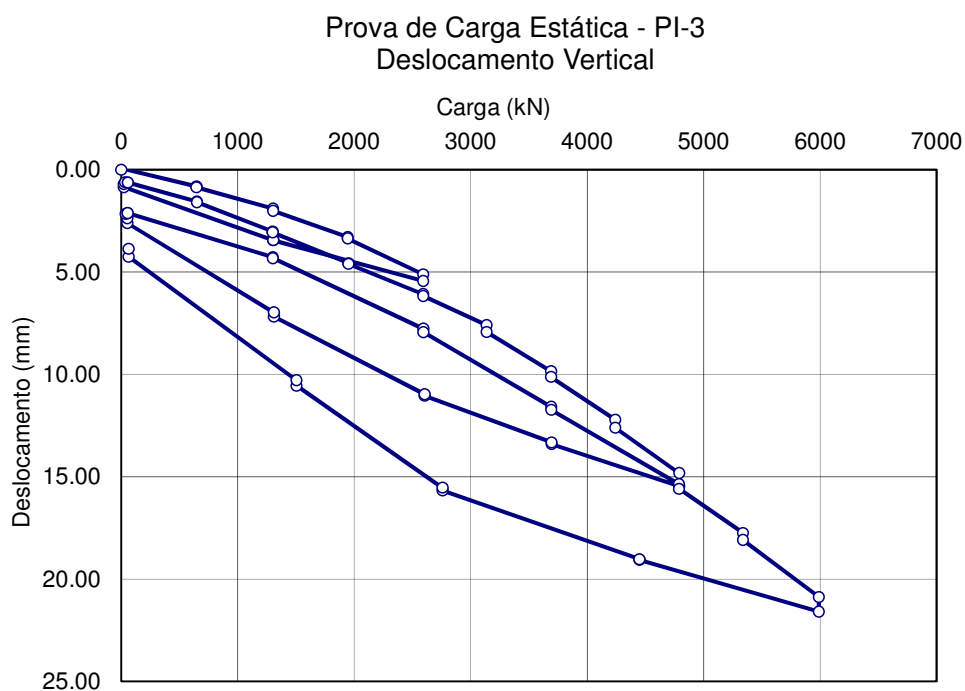


Figura 20 - Prova de carga vertical (PI-3)

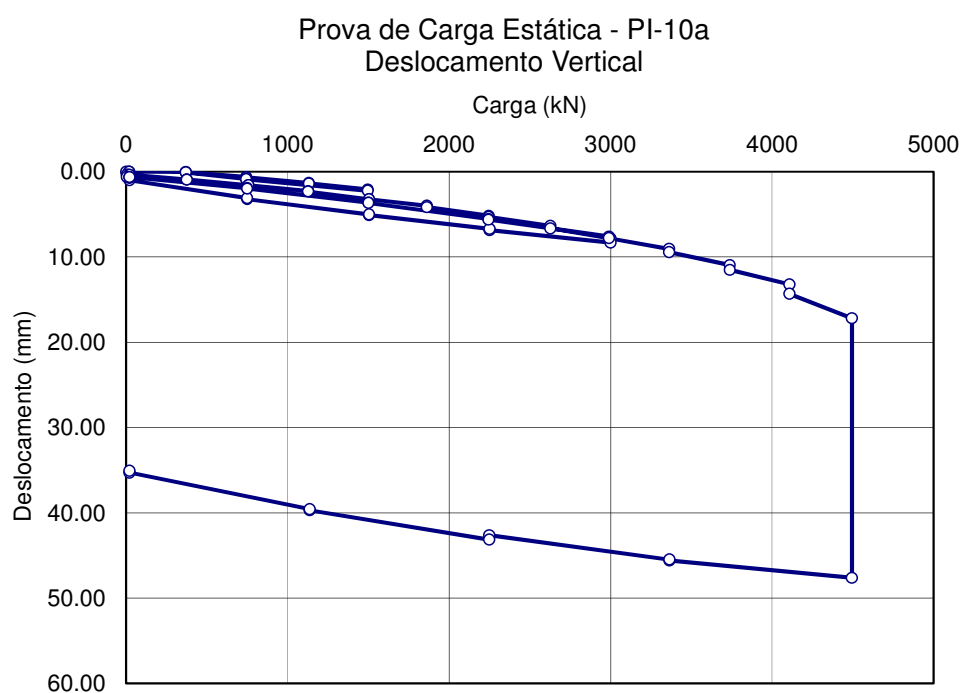


Figura 21 - Prova de carga vertical (PI-10a)

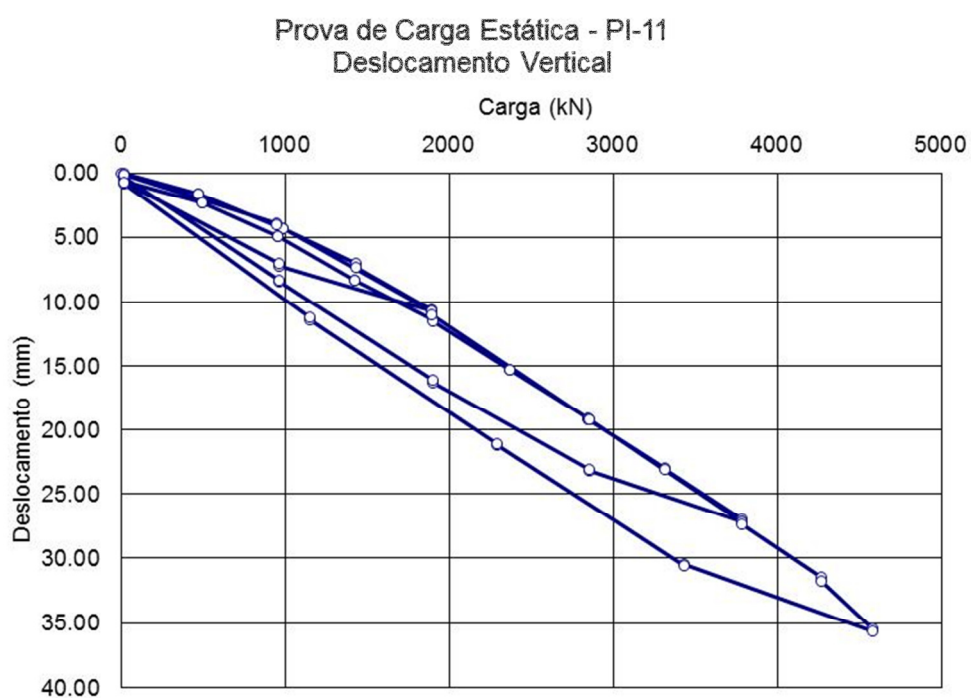


Figura 22 - Prova de carga vertical (PI-11)

Tabela 7 - Frequências de vibração longitudinais das estacas

Modo	Frequência (Hz)		
	PI-3	PI-10a	PII-11
1	22	21	24
2	53	66	59
3	100	126	112
4	148	188	167
5	196	250	221
6	245	312	276
7	293	375	330
8	343	438	386
9	392	500	441
10	441	563	496

7.1.2.2.

Vibrações transversais

Neste item são apresentados os resultados obtidos das frequências de vibração transversais e longitudinais calculadas para uma estaca com as características geométricas e físicas apresentadas na Tabela 8. Foram realizadas provas de cargas estáticas horizontais e verticais na referida estaca.

A Figura 23 apresenta o resultado do ensaio estático horizontal da estaca E-105 e a Figura 24 apresenta o resultado do ensaio estático vertical da estaca E-105.

Os ensaios estáticos realizados possibilitaram o cálculo das constantes de mola do solo em que a estaca em questão está embutida. As constantes de mola calculadas são apresentadas na Tabela 9.

As frequências de vibração das estacas foram calculadas pelo método de Rayleigh-Ritz enriquecido com 15 funções adicionais conforme equação (4-83), buscando aproximar adequadamente as 10 primeiras frequências de vibração. Os cálculos foram realizados em uma rotina programada em Mathcad®. Os resultados obtidos para as frequências transversais são apresentadas na Tabela 10. Na Tabela 10 também são calculadas as frequências de vibração transversais considerando-se o efeito de rigidez geométrica da carga de trabalho nesta estaca. A sondagem representativa mencionada na Tabela 8 é apresentada no Apêndice A. Também foram calculadas as frequências naturais de vibração longitudinais destas estacas, esses resultados também são apresentados na Tabela 10.

Tabela 8 - Características geométricas e físicas das estacas

Característica	Estaca
	E-105
Tipo	Hélice Contínua
Seção	$\phi 70\text{cm}$
Comprimento Ensaiado (m)	23.60
Sondagem Representativa	SPT-092
Módulo de Elasticidade (kN/m^2)	25044000
Peso Específico do Material da Estaca (kN/m^3)	24.0
Área da Seção Transversal da Estaca (m^2)	0.38485

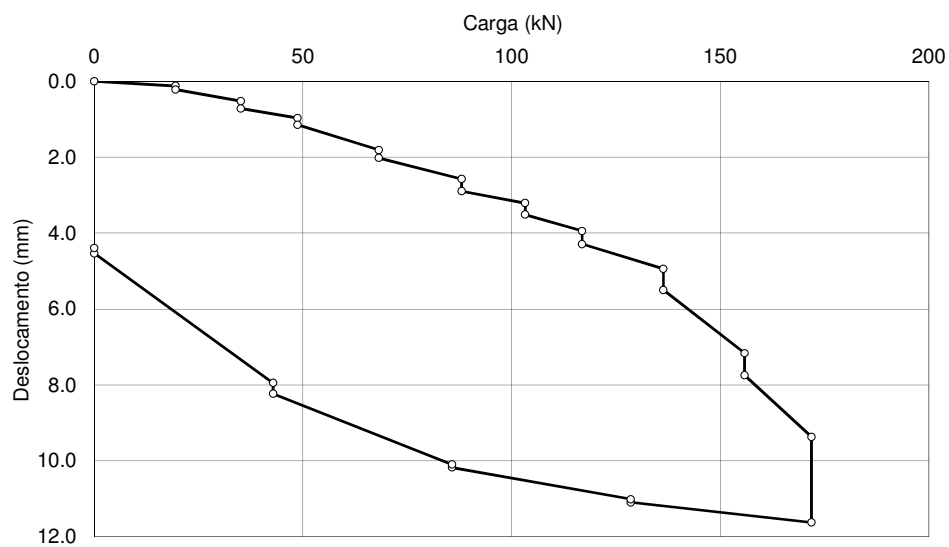
Prova de Carga Estática Horizontal
E-105

Figura 23 - Prova de carga horizontal (E-105)

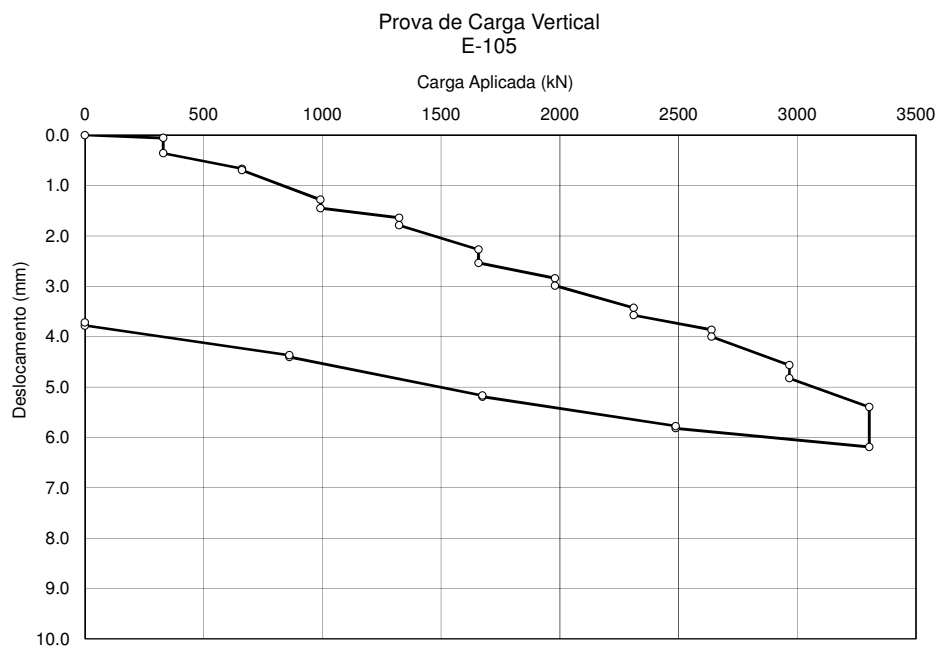


Figura 24 - Prova de carga vertical (E-105)

Tabela 9 - Provas de carga e parâmetros do solo

Característica	Estaca E-105
Comprimento Ensaiado (m)	23.60
Seção	φ70cm
Carga Máxima no Ensaio Estático Vertical (kN)	3303
Deslocamento Máximo no Ensaio Estático Vertical (mm)	6.19
Carga Máxima no Ensaio Estático Horizontal (kN)	172
Deslocamento Máximo no Ensaio Estático Horizontal (mm)	11.62
K_f (kN/m)	850000
$\overline{K_f} = K_f / L$ (kN/m ²)	36017
$k_s L$ (kN/m)	944000
k_s (kN/m ²)	40000
$k_{s_0} = k_s / b$ (kN/m ³)	57143
K_b (kN/m)	0

O valor de k_s apresentado na Tabela 9 foi determinado a partir do melhor ajuste entre a solução de Hetenyi (1979) para o caso de uma viga embutida em base elástica sujeita a uma carga concentrada em uma das extremidades e as provas de carga horizontais (carregamento no topo). K_f foi determinado de maneira similar ao descrito no item 7.1.2.1.

Tabela 10 - Frequências de vibração transversais e longitudinais

Modo	Frequências da Estaca E-105		
	Rayleig Ritz Vibração Transversal (P = 0 kN)	Rayleigh-Ritz Vibração Transversal (P = 1650 kN)	Rayleigh Ritz Vibração Longitudinal
1	32.805	32.805	31
2	32.805	32.819	75
3	32.999	33.059	139
4	34.257	34.383	206
5	38.084	38.278	273
6	45.812	46.059	341
7	57.950	58.226	408
8	74.357	74.646	477
9	94.708	95.001	544
10	118.773	119.066	613

7.2. Análise espectral

Nesse item são calculadas frequências de vibrações obtidas através da formulação apresentada no capítulo 6.

7.2.1. Exemplo de FFT em sinal puro de seno

Nesse item é aplicada uma FFT em um sinal puro de uma função seno com uma frequência de vibração de 10 Hz e amplitude de aceleração de -1 a 1 g dado pela equação $f(t) = \text{sen}(2\pi(10\text{Hz})t)$, onde $1\text{g}=9.81\text{m/s}^2$.

A Transformada de Fourier ideal deve ter um pico de magnitude 1g na frequência de exatamente 10 Hz, pois toda energia do sinal é decorrente da frequência de 10 Hz, e não há outras frequências contendo energias.

É comum espectros de frequência de um sinal gerados pela FFT não serem limpos, pois o desempenho de uma FFT depende de uma série de fatores tais como taxa de amostragem f_s ; número de pontos de dados coletados N e tempo total da coleta de dados T , onde.

$$T = \frac{N}{f_s} \quad (7-1)$$

Esta variação de desempenho é analisada com a geração de seis exemplos de FFTs da função senoidal, descrita anteriormente. Os principais parâmetros de cada uma destas FFTs bem como a indicação dos seus resultados são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 - Exemplos de FFT

Exemplo	f_s (Hz)	N	Δf (Hz)	Resultado
I	1000	256	3.906	Figura 25
II	5000	1024	4.883	Figura 26
III	200	256	0.791	Figura 27
IV	25	256	0.098	Figura 28
V	25	512	0.049	Figura 29
VI	25.6	512	0.050	Figura 30

O eixo das frequências de uma FFT varia de 0 a $\frac{f_s}{2}$ e a saída da uma FFT é em frequências discretas com um intervalo determinado pela resolução $\Delta f = \frac{1}{T}$.

Em cada um dos exemplos é apresentados o gráfico da aceleração no domínio do tempo conforme o número de pontos de dados estabelecidos na Tabela 11, e como resultado o espectro de frequências em duas escalas, de modo a observar o espectro como um todo, e em detalhe próximo à frequência de interesse.

Embora a maioria dos espectros de frequências dos exemplos gerados mostre corretamente um pico ao redor de 10 Hz, este pico não é infinitesimalmente estreito (com exceção da Figura 30 que é a solução exata).

Nesses espectros de frequências parece que há componentes significativos no sinal a frequências próxima a 10 Hz.

Esse erro não físico na FFT é chamado de *leakage* e aparece quando a aquisição de dados discreta não pára exatamente na mesma fase em que a onda senóide é iniciada. Em princípio, se um número infinito de pontos de dados discretos é tomado, o erro de *leakage* não seria um problema. Contudo em sistema de aquisição de dados reais a FFT é realizada em um número finito de pontos de dados discretos, e sempre haverá algum erro de *leakage*.

Nos exemplos apresentados observa-se que a máxima amplitude da FFT não é exatamente 1g, é menor que 1g, uma vez que a amplitude do sinal original era exatamente 1g. Esta é outra consequência do erro de *leakage*. De certa forma a energia do sinal da frequência de 10 Hz é distribuído erroneamente entre as frequências próximas a 10 Hz, dessa forma reduzindo a amplitude calculada a 10 Hz.

Aumentar a frequência de amostragem melhora amplamente a resolução da função aceleração no tempo, contudo, aumentar a frequência de coleta não melhora o espectro de frequências, conforme mostram a Figura 25 e a Figura 26. Na realidade, a saída do espectro de frequência fica com uma resolução mais pobre.

Nessa situação o pico da amplitude do espectro de frequências é menor do que o sinal esperado de 1g, isto é devido o erro de *leakage*, que é pior nestes exemplos devido às resoluções pobres.

Por outro lado, diminuir a frequência de coleta diminuiu a resolução da onda senóide, mas neste caso a frequência de resolução é muito melhor como é observado na Figura 27, Figura 28 e Figura 29. Ainda há erro de *leakage*, porém somente muito próximo ao pico. Nestas situações a máxima amplitude é ocorre praticamente nos 10 Hz.

A Figura 30 apresenta uma FFT perfeita e teórica, que foi obtida porque o dado coletado se inicia e termina na mesma fase do sinal. A frequência de coleta, nesse caso escolhida é um número inteiro de comprimentos de onda do dado coletado, de modo que o sinal coletado se inicia a termina exatamente na mesma fase. Nesse caso particular T é igual a 20 s, o que corresponde a 200 ciclos completos para a onda senóide de 10 Hz.

Nesse caso o pico da amplitude é exatamente 1g e ocorre exatamente em 10Hz. Não ocorre erro de *leakage* neste caso, a saída da FFT é exatamente zero para todas as frequências com exceção de 10 Hz.

Deve-se ter em mente que uma na Figura 30 é apresentada uma FFT perfeita e que essa é possível somente porque era sabida da frequência original do sinal, que no exemplo é uma onda senóide, e foi selecionada a frequência de coleta apropriada.

Em situações reais a frequência é desconhecida (por esta razão a FFT é necessária) e os sinais não são ondas senoidais perfeitas, ou seja, uma FFT perfeita é possível somente em situações de laboratório.

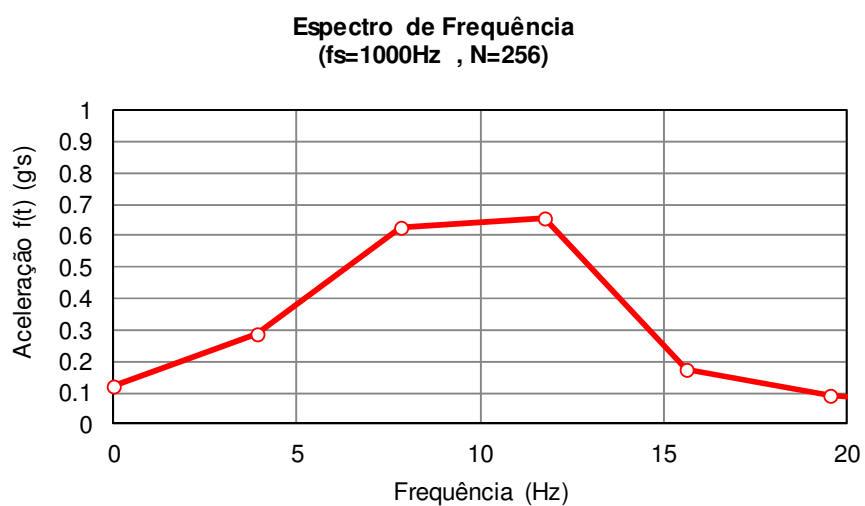
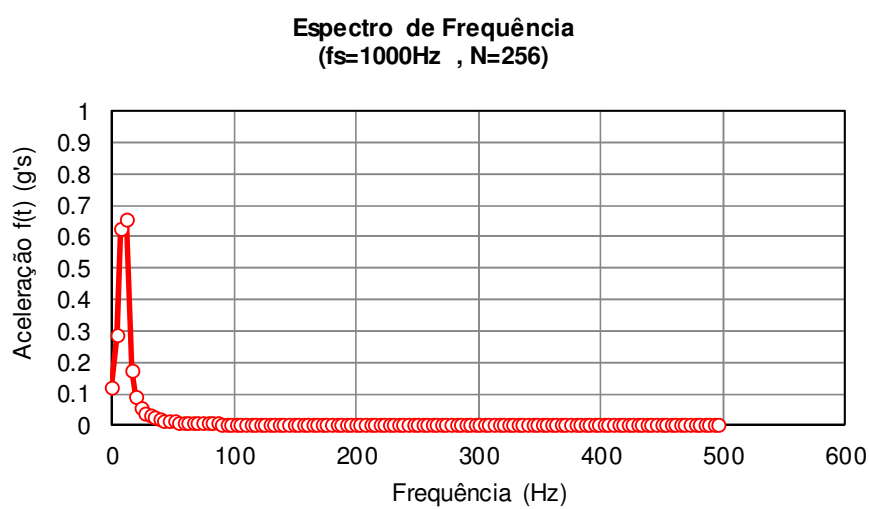
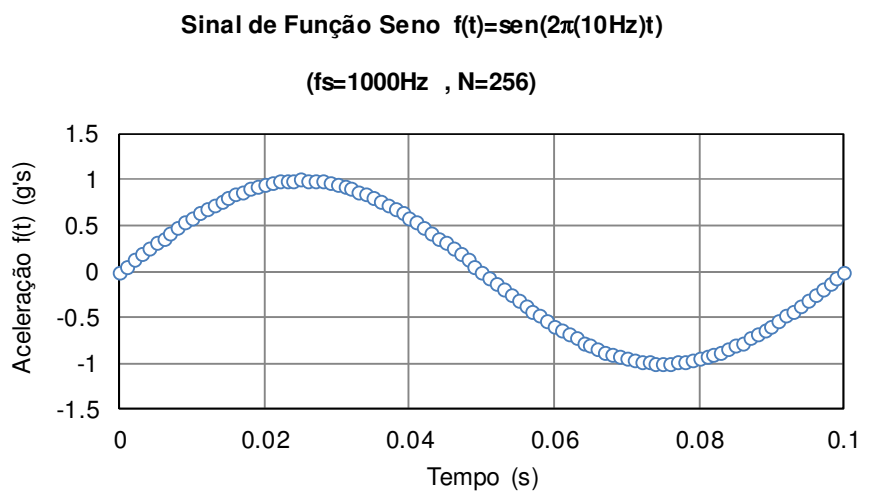


Figura 25 - FFT ($f_s=1000$ Hz, $N=256$)

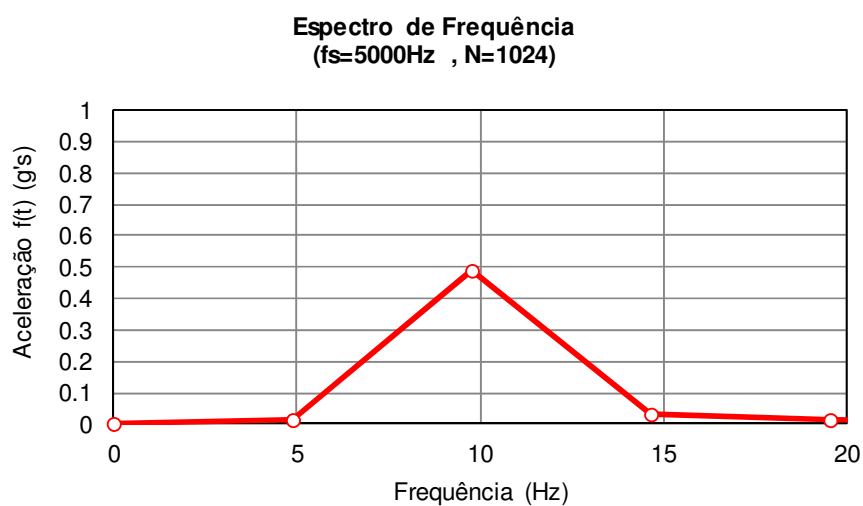
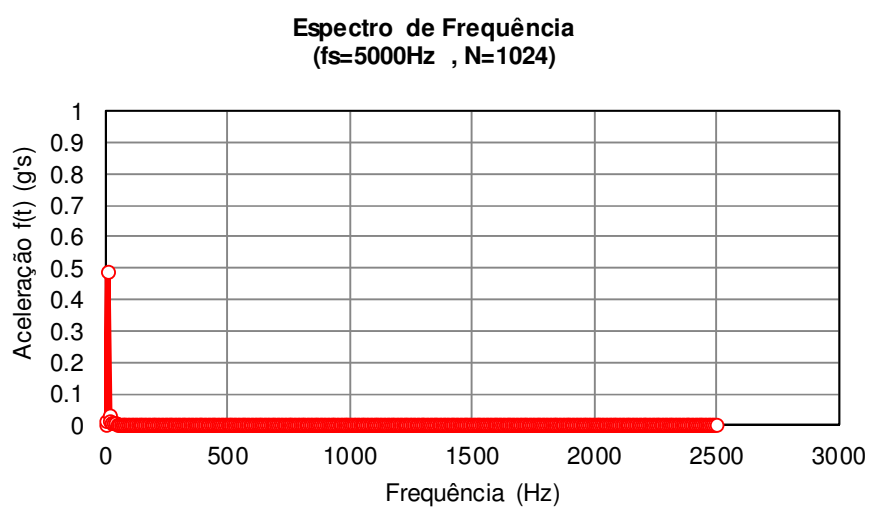
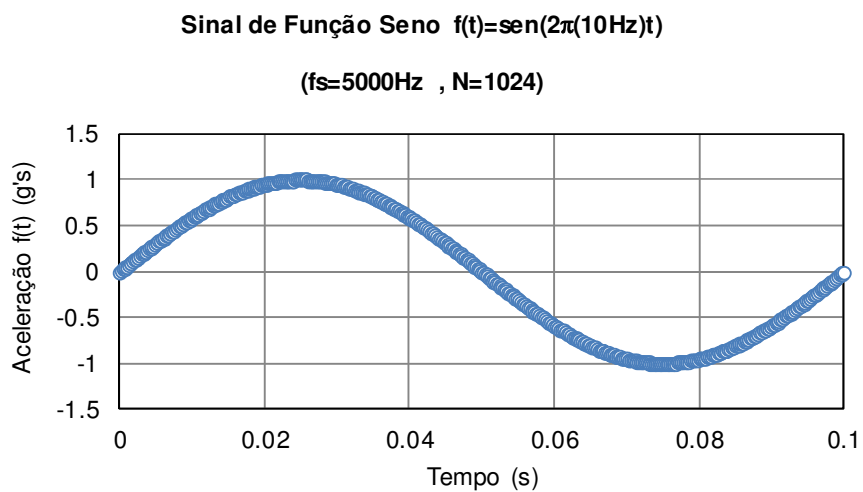
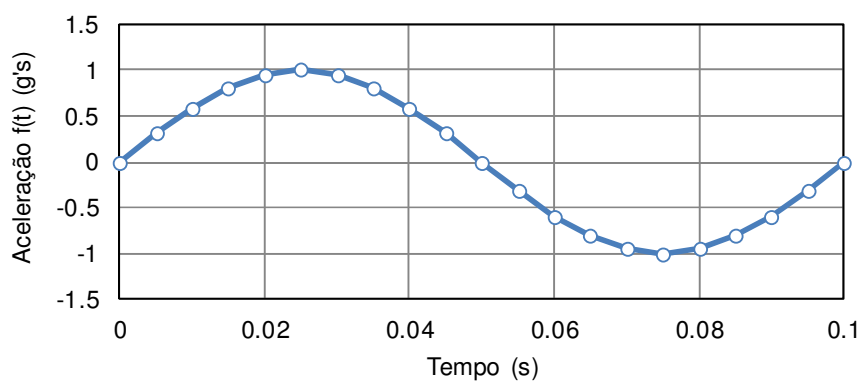


Figura 26 - FFT (fs=5000 Hz, N=1024)

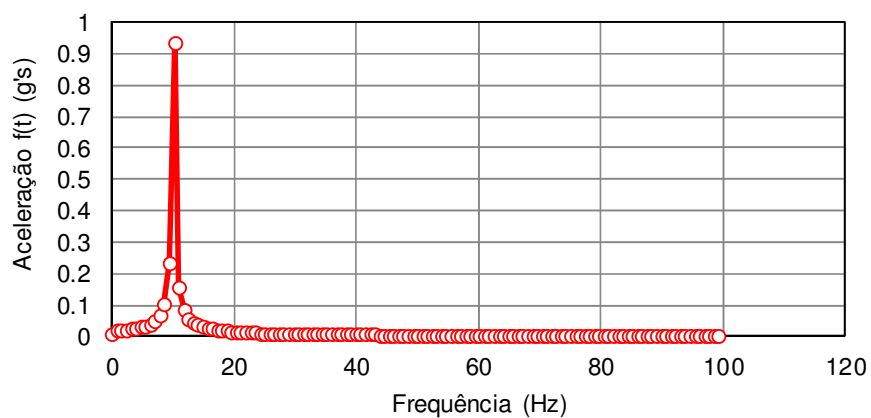
Sinal de Função Seno $f(t)=\text{sen}(2\pi(10\text{Hz})t)$

($f_s=200\text{Hz}$, $N=256$)



Espectro de Frequência

($f_s=200\text{Hz}$, $N=256$)



Espectro de Frequência

($f_s=200\text{Hz}$, $N=256$)

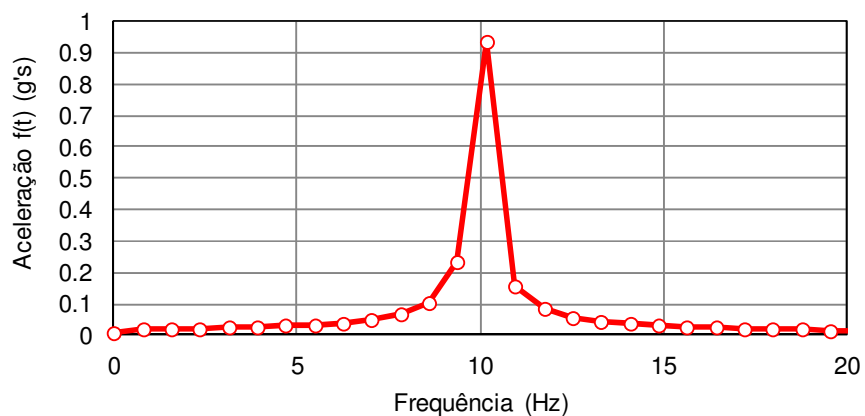


Figura 27 - FFT ($f_s=200$ Hz, $N=256$)

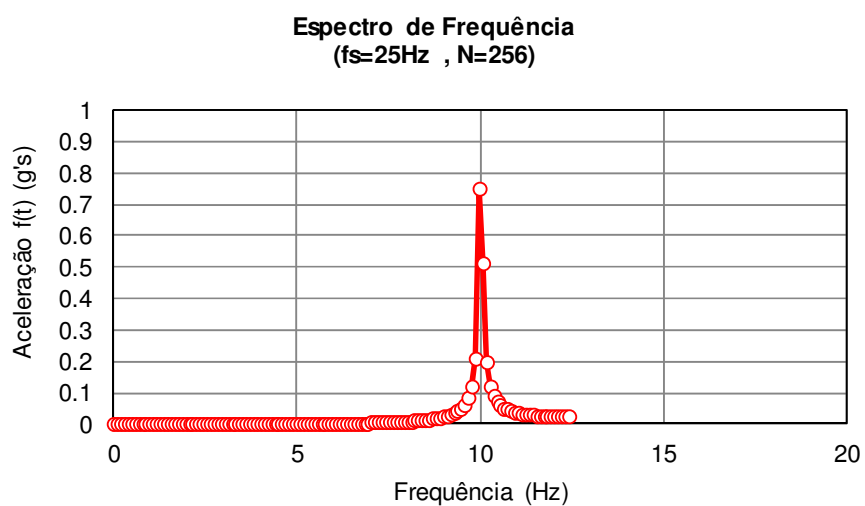
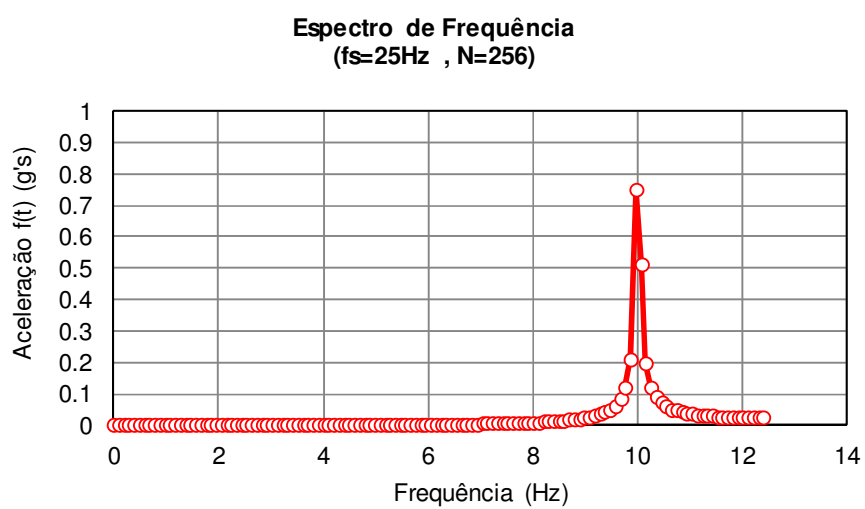
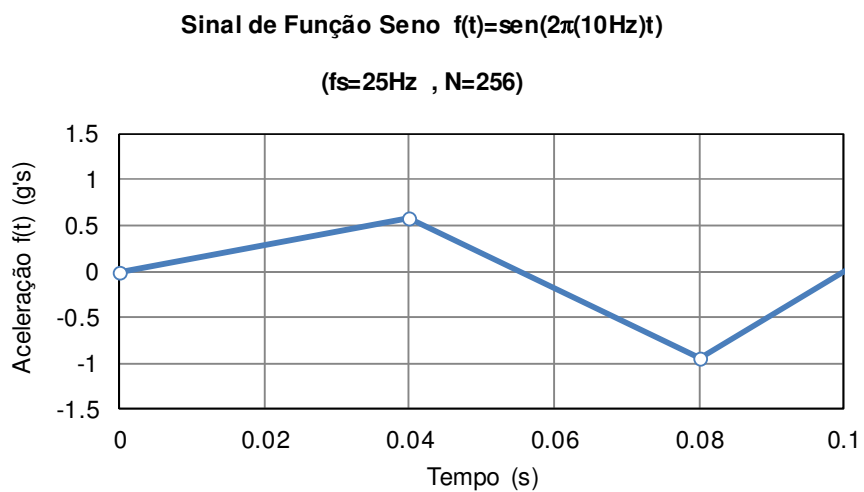


Figura 28 - FFT ($f_s=25$ Hz, $N=256$)

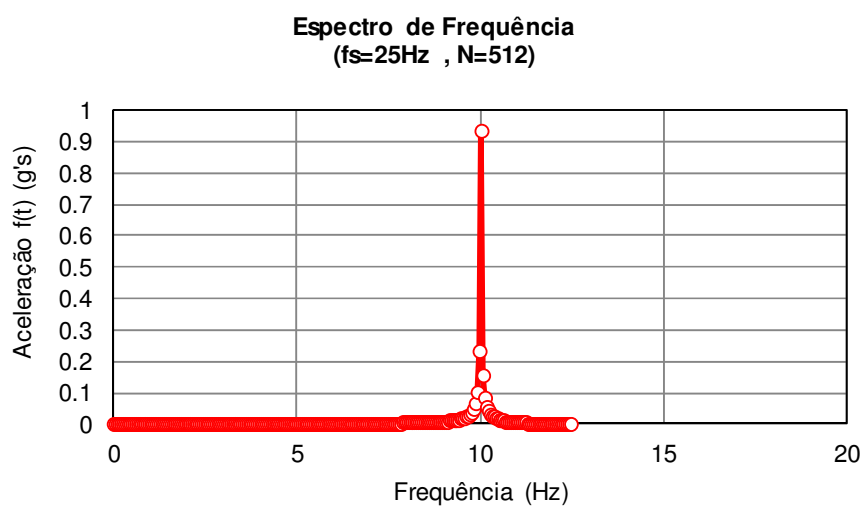
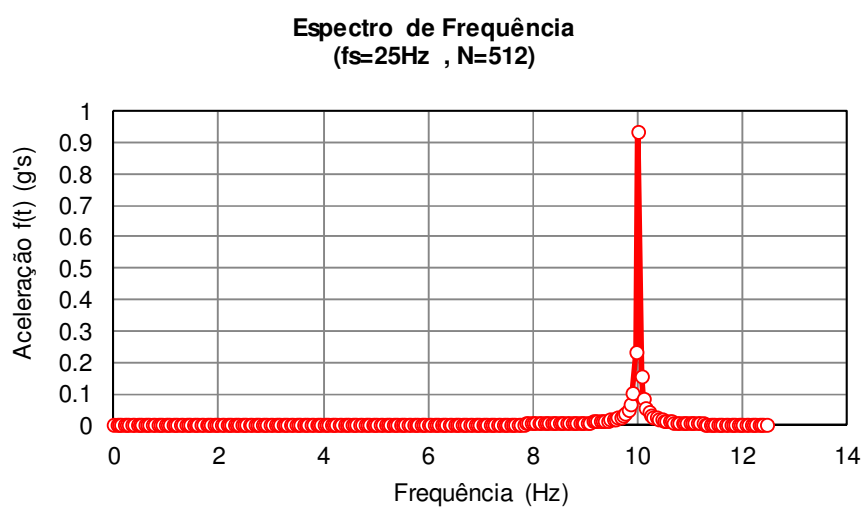
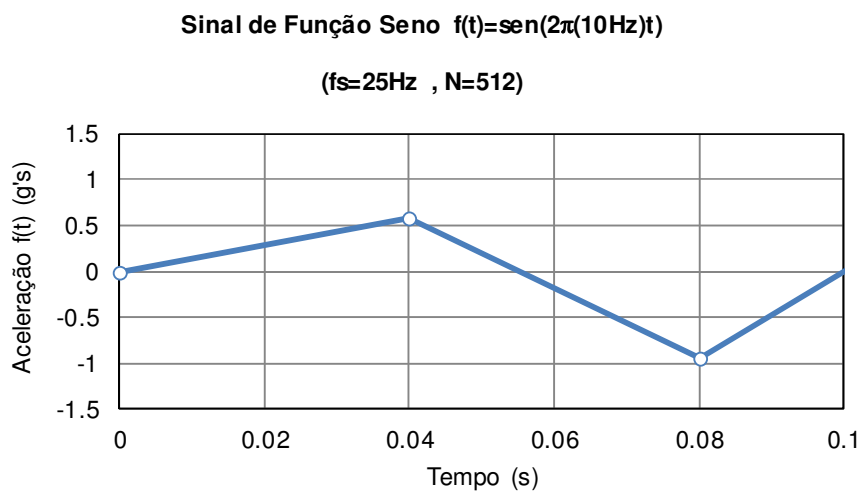


Figura 29 - FFT ($f_s=25$ Hz, $N=512$)

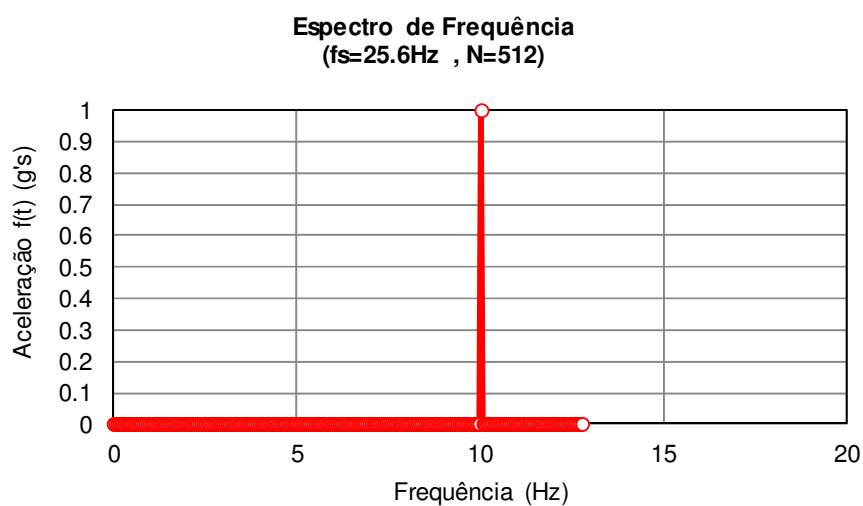
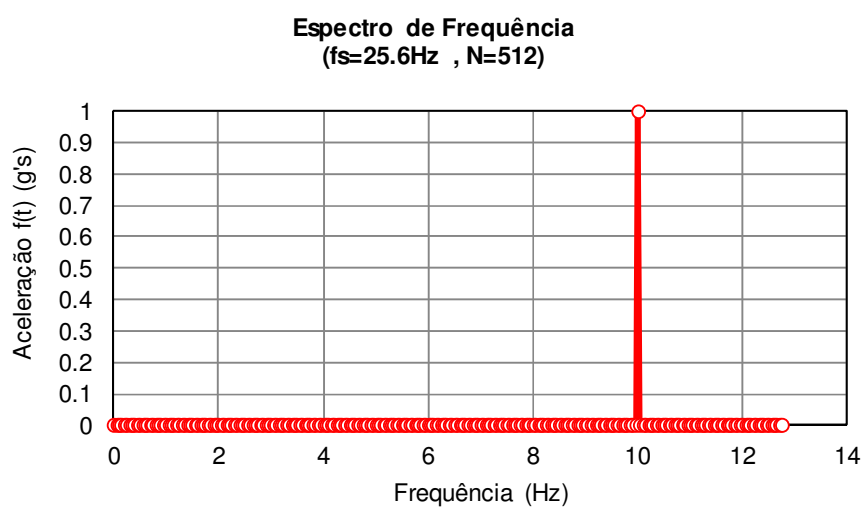
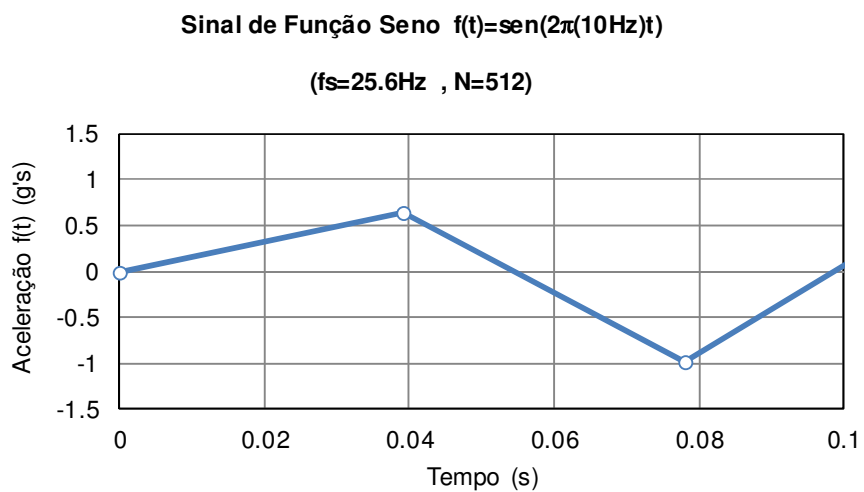


Figura 30 - FFT (fs=25.6 Hz, N=512)

7.2.2.

Exemplo de FFT em sinal periódico amortecido

Neste item é aplicada uma FFT em um sinal gerado a partir de função periódica amortecida conhecida. Neste exemplo $f(t)$ possui sete modos de vibração conforme a equação (7-2).

$$f(t) = [45\text{sen}(2\pi(25\text{Hz})t) + 135\text{sen}(2\pi(75\text{Hz})t) + 60\text{sen}(2\pi(140\text{Hz})t) + 45\text{sen}(2\pi(195\text{Hz})t) + 30\text{sen}(2\pi(250\text{Hz})t) + 15\text{sen}(2\pi(310\text{Hz})t) + 15\text{sen}(2\pi(400\text{Hz})t)]e^{-50t} \quad (7-2)$$

Um sinal da função $f(t)$ foi gerado simulando uma taxa de amostragem de 5000Hz, um número de pontos de dados coletados de 1024 e tempo total da coleta de dados de 0.2046s. Estes valores de f_s , N e T são usuais em ensaios de carregamento dinâmico em estacas.

A Figura 31 ilustra o sinal gerado e a FFT correspondente. Os resultados apresentados na Figura 31 demonstram a aplicabilidade da FFT em ensaios de carregamento dinâmico.

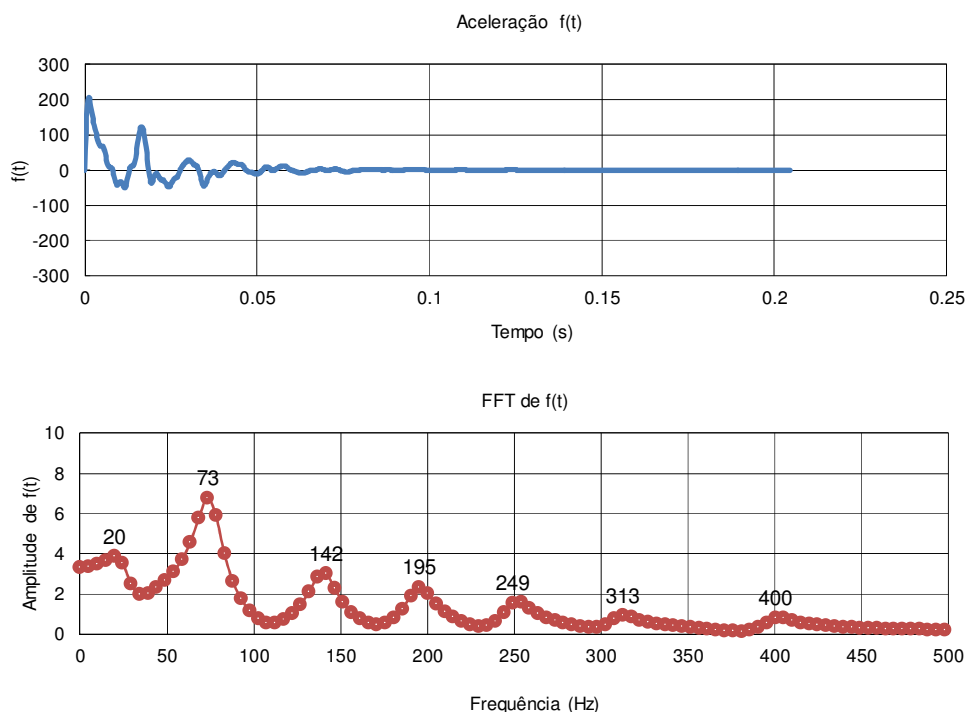


Figura 31 - Função periódica amortecida e FFT

7.2.3. Exemplo de FFT aplicado em estacas

As estacas modeladas matematicamente no item 7.1.2.1 foram ensaiadas dinamicamente. Foram realizados ensaios de carregamento dinâmico, ou seja, foram induzidas vibrações forçadas nestas estacas através de golpes aplicados com martelos de cravação. A Tabela 12 resume os golpes aplicados na estaca PI-03, a Tabela 13 resume os golpes aplicados na estaca PI-10a e a Tabela 14 resume os golpes aplicados na estaca PI-11.

Tabela 12 - Vibração forçada na estaca PI-03 – energias aplicadas

Peso do Martelo no Ensaio (kN)	Golpe	Altura de Queda (m)	Energia (kN.m)
80	1	0.4	15.7
	2	0.8	31.2
	3	1.2	45.3
	4	1.6	68.2
	5	2.0	83.9
	6	2.4	106.3
	7	2.8	116.1
	8	3.0	128.2
	9	3.6	159.1

Tabela 13 - Vibração forçada na estaca PI-10a – energias aplicadas

Peso do Martelo no Ensaio (kN)	Golpe	Altura de Queda (m)	Energia (kN.m)
80	1	0.3	14.7
	2	0.6	24.4
	3	0.9	37.3
	4	1.2	55.4
	5	1.5	71.1
	6	1.8	87.5
	7	2.1	105.4
	8	2.4	126.2
	9	2.7	148.1
	10	3.0	154.4
	11	3.0	160.6

Tabela 14 - Vibração forçada na estaca PI-11 – energias aplicadas

Peso do Martelo no Ensaio (kN)	Golpe	Altura de Queda (m)	Energia (kN.m)
54	1	0.4	22.7
	2	0.6	31.8
	3	0.8	42.7
	4	1.0	49.4
	5	1.0	45.2
	6	1.0	45.2
	7	1.0	44.6
	8	1.0	46.9

Foram registrados sinais de aceleração no tempo gerados pelos golpes aplicados no topo das estacas. A Figura 32 apresenta os sinais de aceleração obtidos na estaca PI-03, a Figura 33 apresenta os sinais de aceleração obtidos para a estaca PI-10a e a Figura 34 apresenta os sinais de aceleração obtidos para a estaca PI-11. A taxa de amostragem do ensaio foi de 5000Hz, o número de pontos de dados coletados foi de 1024 e tempo total da coleta de dados foi de 0.2046s.

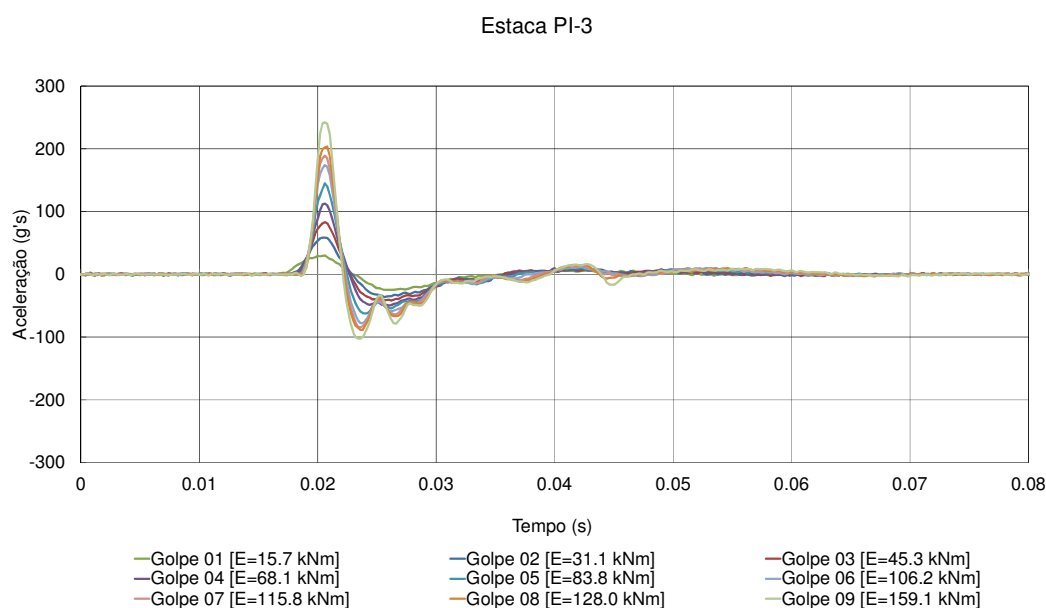


Figura 32 - Acelerações geradas na estaca PI-03 pelos golpes aplicados

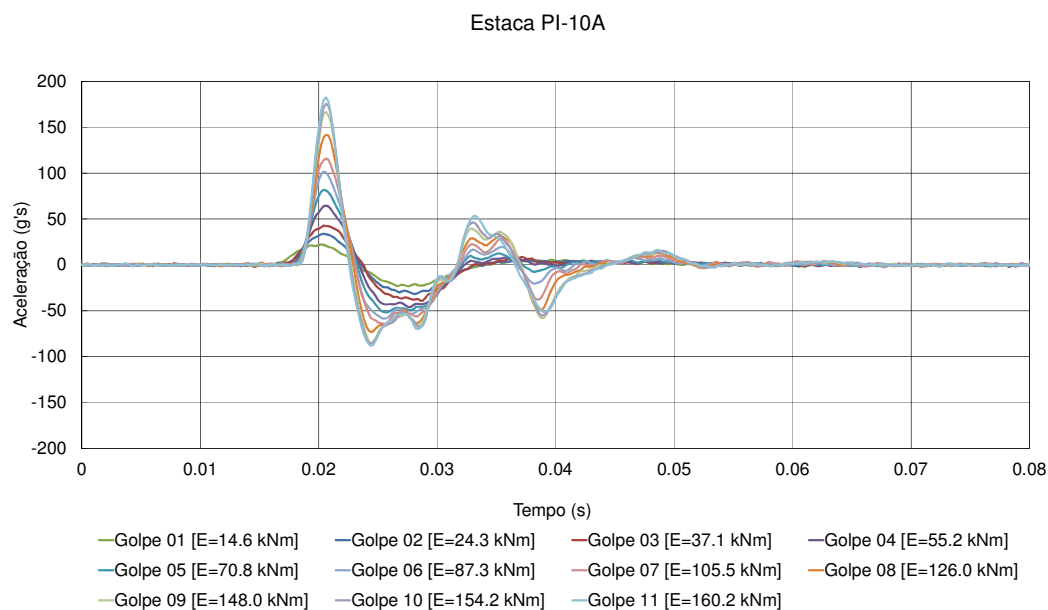


Figura 33 - Acelerações geradas na estaca PI-10a pelos golpes aplicados

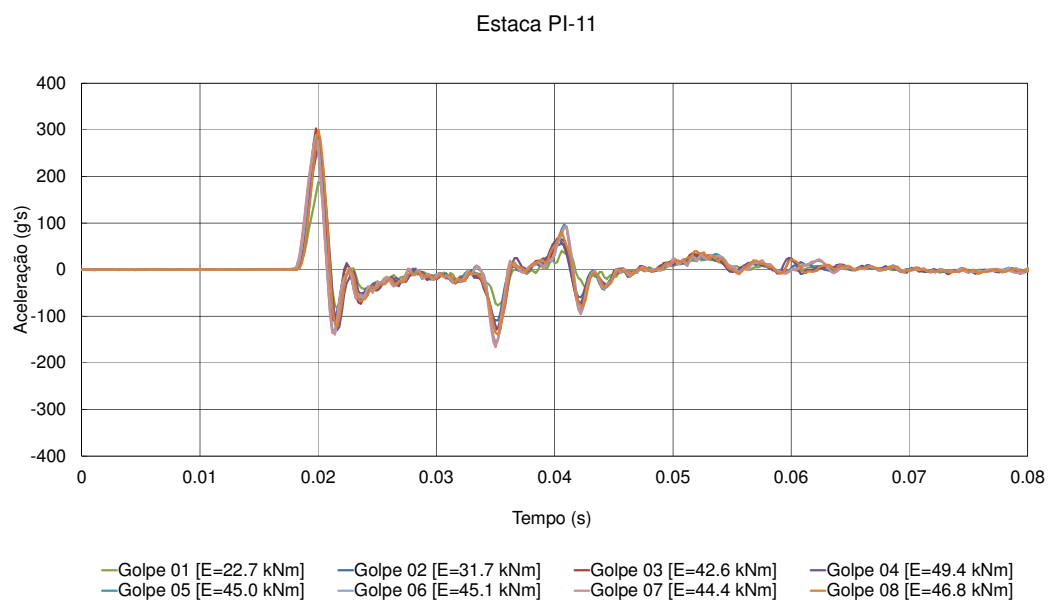


Figura 34 - Acelerações geradas na estaca PI-11 pelos golpes aplicados

Foi aplicada a técnica da FFT para cada um dos sinais coletados. Na Figura 35 é apresentado o espectro de frequências naturais encontrado para a estaca PI-03, na Figura 36 é apresentado o espectro de frequências naturais encontrado para a estaca PI-10a e na Figura 37 é apresentado o espectro de frequências naturais encontrado para a estaca PI-11. Estas figuras apresentam para cada estaca os

espectros na escala $\frac{f_s}{2}$ e em uma escala ampliada de modo a se visualizar melhor os picos dos espectros.

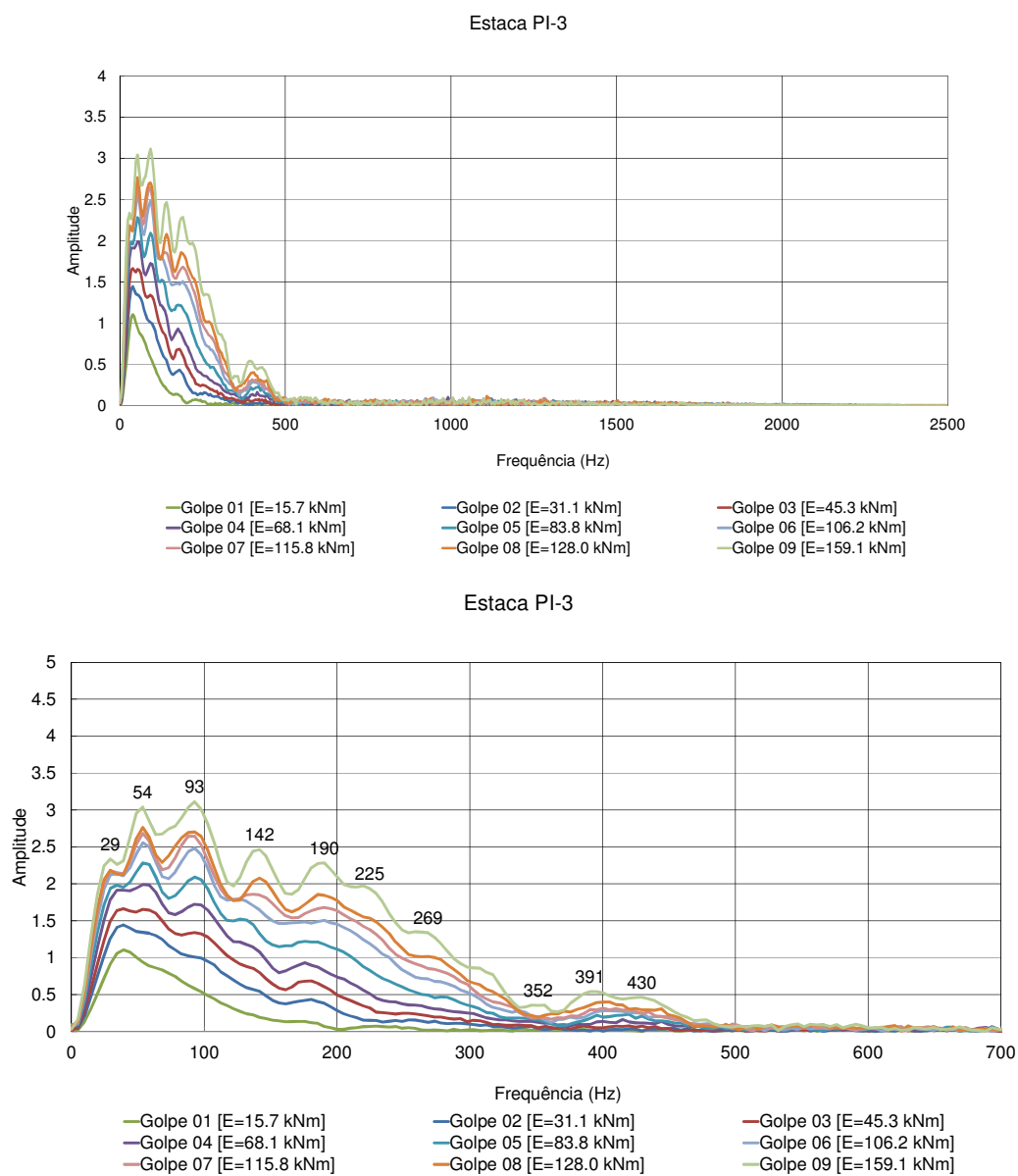
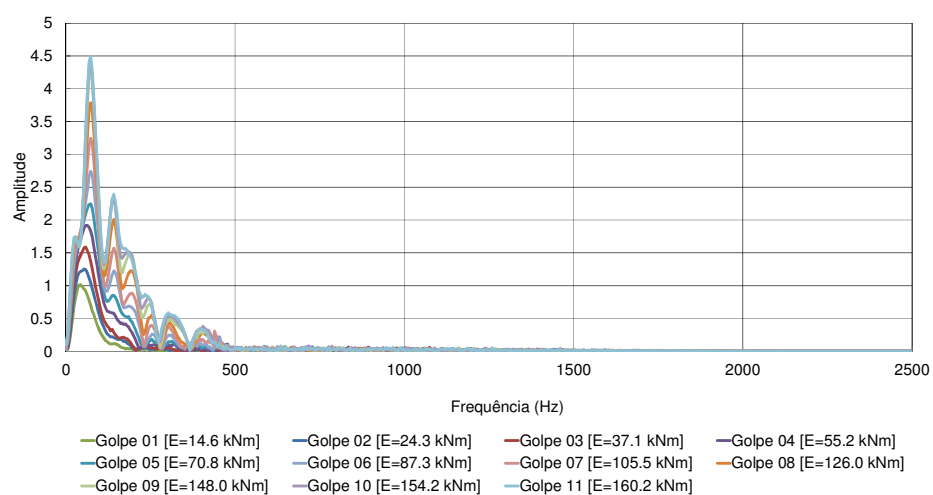


Figura 35 - Espectro de acelerações da estaca PI-03

Estaca PI-10A



Estaca PI-10A

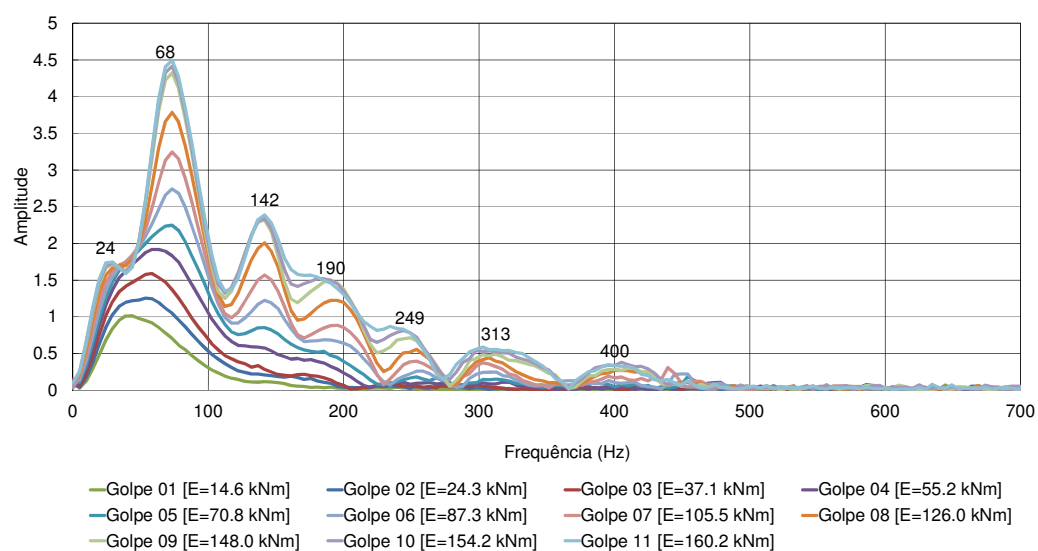


Figura 36 - Espectro de acelerações da estaca PI-10a

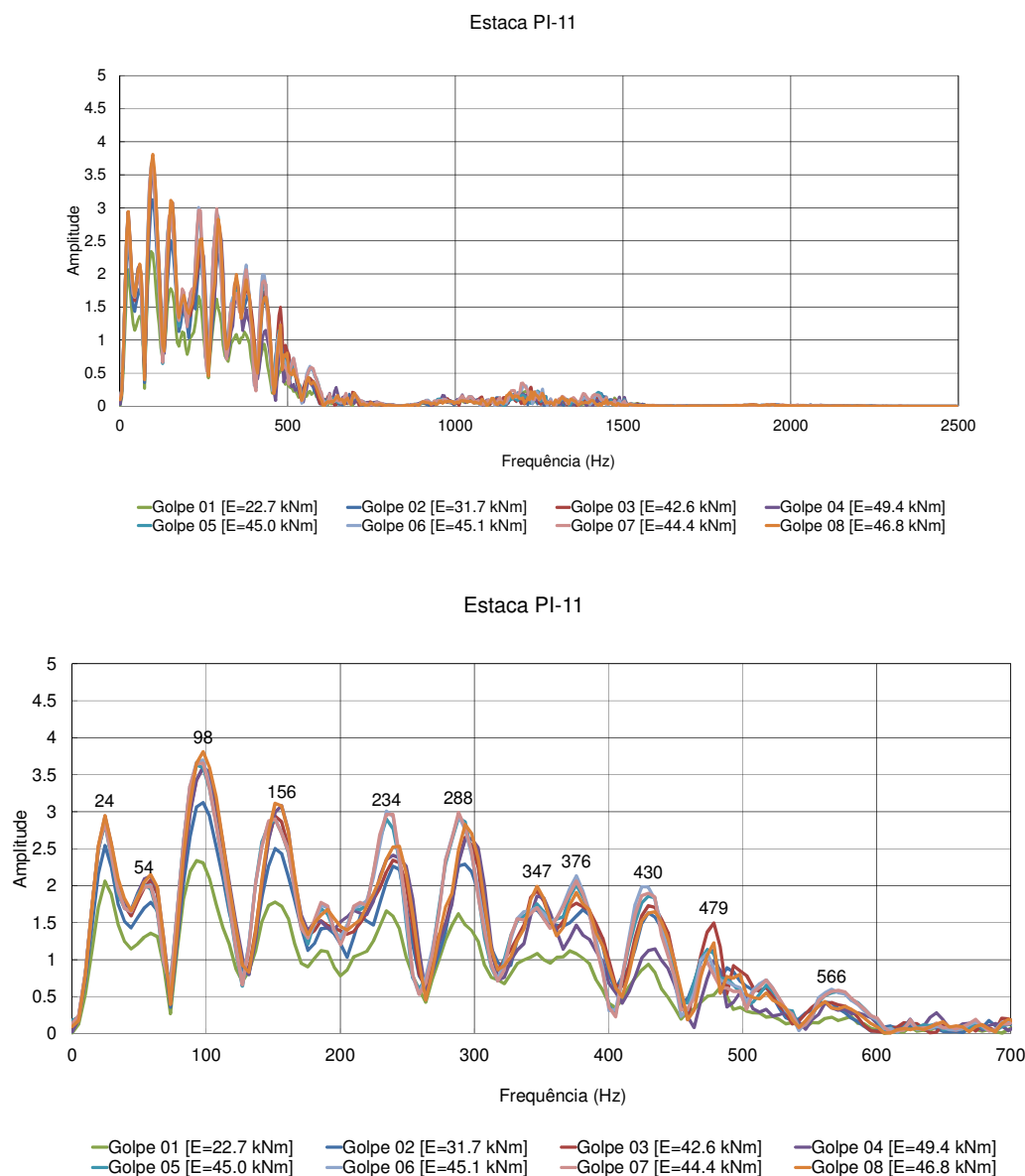


Figura 37 - Espectro de acelerações da estaca PI-11

As frequências naturais de vibração obtidas para as estacas em questão através da técnica da FFT foram comparadas com os valores obtidos da modelagem matemática no item 7.1.2.1. A Tabela 15 apresenta a comparação das frequências obtidas pelos dois métodos.

Tabela 15 - Frequências naturais longitudinais obtidas pela FFT

Modo	Frequência (Hz)					
	PI-3		PI-10a		PII-11	
	Rayleigh Ritz (n=15)	Fast Fourier Transform (FFT)	Rayleigh Ritz (n=15)	Fast Fourier Transform (FFT)	Rayleigh Ritz (n=15)	Fast Fourier Transform (FFT)
1	22	29	21	24	24	24
2	53	54	66	68	59	54
3	100	93	126	142	112	98
4	148	142	188	190	167	156
5	196	190	250	249	221	234
6	245	225	312	313	276	288
7	293	269	375	400	330	347
8	343	352	438	-	386	376
9	392	391	500	-	441	430
10	441	430	563	-	496	479