

## 4 Formulação geral

Na caracterização da resposta dinâmica de um sistema, a frequência de vibração desempenha um papel principal. A frequência fundamental do sistema é frequentemente a quantidade de interesse primário. Uma grande atenção tem então sido devotada a esta determinação (Humar, 2001).

### 4.1. Sistemas com parâmetros discretos e múltiplos graus de liberdade

É possível representar um sistema com parâmetros discretos tendo mais que um grau de liberdade por um sistema equivalente de um grau de liberdade. Como no caso de um sistema com parâmetros distribuídos, a forma dos deslocamentos de sistemas discretos é representada como o produto de funções de forma apropriadamente selecionadas e uma coordenada generalizada. Nesse caso, contudo, a função de forma é um vetor de preferência com funções contínuas das coordenadas espaciais. A equação do trabalho virtual é então escrita contemplando o trabalho feito pelas forças de inércia, pelas forças elásticas, pelas forças de amortecimento, e pelas forças aplicadas através de um pequeno deslocamento virtual. Essa equação do trabalho virtual dá diretamente as equações de movimento do sistema.

No pórtico com três níveis como mostrado na Figura 8, a massa do pórtico é assumida concentrada no chão dos níveis. As vigas do chão são assumidas rígidas e a rigidez avaliada é fornecida pelas colunas. As propriedades da massa e rigidez são representadas na Figura 8. A resistência do amortecimento no sistema é representada por amortecedores entre os níveis.

O pórtico mostrado na Figura 8(a) é colocado a vibrar no plano do papel e as colunas são consideradas axialmente rígidas. O pórtico tem três graus de liberdade, como indicado. Cada grau de liberdade representa uma possível translação lateral, do nível do chão. Para modelar o pórtico como um sistema de um grau de liberdade, assume-se que o modo de vibração é dado por  $\mathbf{u} = z(t)\boldsymbol{\psi}$ , onde  $\boldsymbol{\psi}$  é um vetor com três elementos, representando as translações dos níveis, e  $z(t)$  é uma coordenada generalizada desconhecida. As forças de inércia, a força das molas e as forças de amortecimento agindo nos níveis são mostradas na Figura 8(c). Também são mostradas as forças externas aplicadas a estes níveis. Assumindo que no sistema é dado um deslocamento virtual, e que é compatível com as restrições do sistema. Como um deslocamento virtual pode ser representado por  $\delta z\boldsymbol{\psi}$ , a equação do trabalho virtual se torna:

$$\begin{aligned}
 & (m_3\ddot{z}\psi_3)\delta z\psi_3 + (m_2\ddot{z}\psi_2)\delta z\psi_2 + (m_1\ddot{z}\psi_1)\delta z\psi_1 \\
 & + k_3z(\psi_3 - \psi_2)\delta z\psi_3 + \{k_3z(\psi_2 - \psi_3) + k_2z(\psi_2 - \psi_1)\}\delta z\psi_2 \\
 & + \{k_2z(\psi_1 - \psi_2) + k_1z\psi_1\}\delta z\psi_1 + \{c_3\dot{z}(\psi_3 - \psi_2)\}\delta z\psi_3 \\
 & + \{c_3\dot{z}(\psi_2 - \psi_3) + c_2\dot{z}(\psi_2 - \psi_1)\}\delta z\psi_2 + \{c_2\dot{z}(\psi_1 - \psi_2) + c_1\dot{z}(\psi_1)\}\delta z\psi_1 \\
 & - p_3\delta z\psi_3 - p_2\delta z\psi_2 - p_1\delta z\psi_1 = 0
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

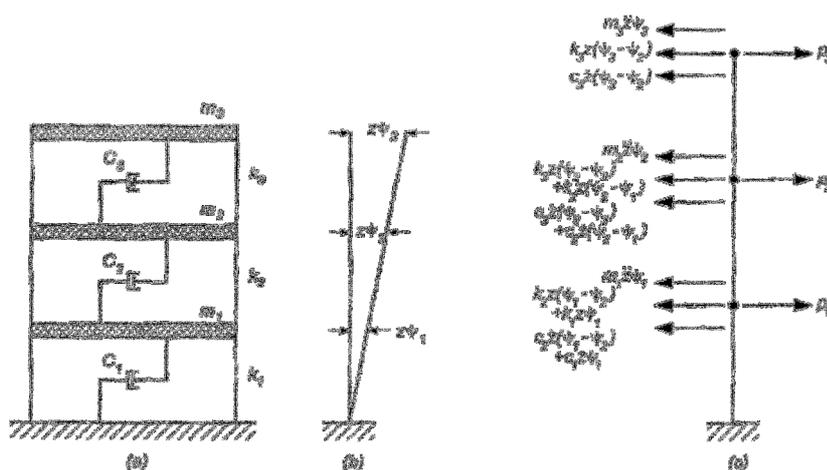


Figura 8 - (a) Pórtico de três níveis; (b) forma do deslocamento; (c) forças atuando ao longo dos graus de liberdade

A equação (4-1) pode ser escrita de maneira mais compacta usando notação matricial:

$$\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi} \ddot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\psi} \dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi} \mathbf{z} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{p} \quad (4-2)$$

Onde:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \text{ é a matriz de massa.}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ é a matriz de amortecimento.}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \text{ é a matriz de rigidez.}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \text{ é o vetor de forças aplicadas.}$$

A equação (4-2) pode ser escrita como:

$$m^* \ddot{z}(t) + c^* \dot{z}(t) + k^* z(t) = p^* \quad (4-3)$$

Onde  $m^* = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}$  é a massa generalizada,  $c^* = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\psi}$  é o amortecimento generalizado,  $k^* = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}$  é a rigidez generalizada, e  $p^* = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{p}$  é a força generalizada.

Como no caso de um sistema com parâmetros distribuídos, a precisão do método descrito depende de quão próxima a função de forma selecionada é da verdadeira forma da vibração. Exceto em simples casos, uma simples função de forma pode não ser suficiente para representar adequadamente a resposta de um sistema com múltiplos graus de liberdade.

Forças axiais atuando em um sistema podem reduzir a rigidez efetiva e podem causar instabilidade. Considerando, por exemplo, as vibrações em uma viga, uma seção infinitesimal é apresentada na Figura 9, mas somente com as forças axiais mostradas. O deslocamento virtual imposto na viga irá causar a rotação da seção de tal modo que as forças  $S(x)$  mostradas na Figura 9 se moverão juntas e próximas por uma distância  $\delta y$  que é obtida de:

$$\delta y = \frac{d}{d\theta} (1 - \cos \theta) \delta \theta dx \quad (4-4)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \delta y = \text{sen}\theta \delta\theta dx$$

$$\delta y \approx \theta \delta\theta dx$$

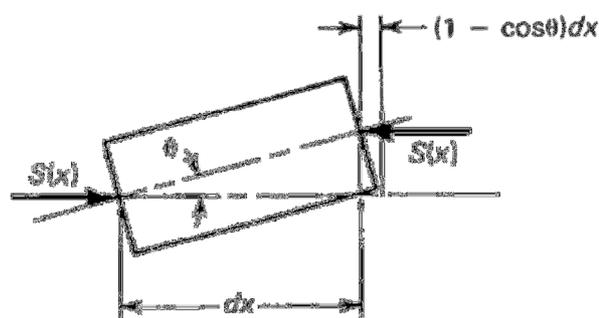


Figura 9 - Seção infinitesimal de uma viga sob efeito de forças  $S(x)$

Desde que o deslocamento da viga seja dado por  $u = z\psi(x)$ , o ângulo  $\theta$  é dado por:

$$\theta = z\psi'(x) \quad (4-5)$$

O trabalho virtual infinitesimal feito pela força axial  $S(x)$  é agora obtido por:

$$d(\delta W_s) = \delta z \left[ S(x) \{\psi'(x)\}^2 dx \right] z \quad (4-6)$$

Integrando a equação (4-6) no comprimento da viga, obtém-se a seguinte expressão do trabalho virtual feito pela força axial:

$$\delta W_s = \delta z \left[ \int_0^L S(x) \{\psi'(x)\}^2 dx \right] z \quad (4-7)$$

A rigidez geométrica é agora dada por:

$$k_G = \int_0^L S(x) \{\psi'(x)\}^2 dx \quad (4-8)$$

E a equação (4-3) é modificada para:

$$m^* \ddot{z}(t) + c^* \dot{z}(t) + (k^* - k_G) z(t) = p^* \quad (4-9)$$

A matriz de rigidez geométrica não é função das propriedades mecânicas da barra, é somente função do comprimento do elemento e da força no elemento. O termo matriz geométrica é introduzido de modo a se diferir da matriz de rigidez “mecânica” que é baseada nas propriedades físicas do elemento. A matriz geométrica existe em todas as estruturas carregadas, contudo, somente é

importante se esta é grande se comparada com a rigidez mecânica de um sistema estrutural.

## **4.2. Sistemas com múltiplos graus de liberdade**

Na seção anterior, foi apresentado um método em que a vibração de um sistema de múltiplos graus de liberdade poderia ser adequadamente representada por uma simples função de forma. Tal representação é, em fato, uma idealização que é somente válida ocasionalmente. Num caso geral, a acurácia na descrição da configuração dos deslocamentos de um sistema vibrante é possível somente através da superposição de um número de diferentes funções de forma. A seleção das funções de forma não é geralmente fácil, e se uma escolha inapropriada é feita, o resultado obtido pode ser completamente desconfiável. A dificuldade é composta pelo fato de que em procedimentos que se usa uma idealização em funções de forma, não há um simples caminho para verificar a confiabilidade do resultado obtido (Humar, 2001). Nesta seção são apresentadas técnicas para a formulação da equação de movimento para tais sistemas.

### **4.2.1. Forças principais**

Como no caso de sistemas de um grau de liberdade, as principais forças atuando em sistemas de múltiplos graus de liberdade são: forças de inércia, forças elásticas e forças de resistência ou amortecimento.

#### **4.2.1.1. Forças de inércia**

Considerando a idealização de massas concentradas em uma viga simplesmente apoiada apresentada na Figura 10. O modelo consiste na discretização em pontos de massas que são livres para vibrar na direção vertical. Para definir a configuração de deslocamentos do sistema, é necessário especificar os deslocamentos ao longo das  $N$  coordenadas.

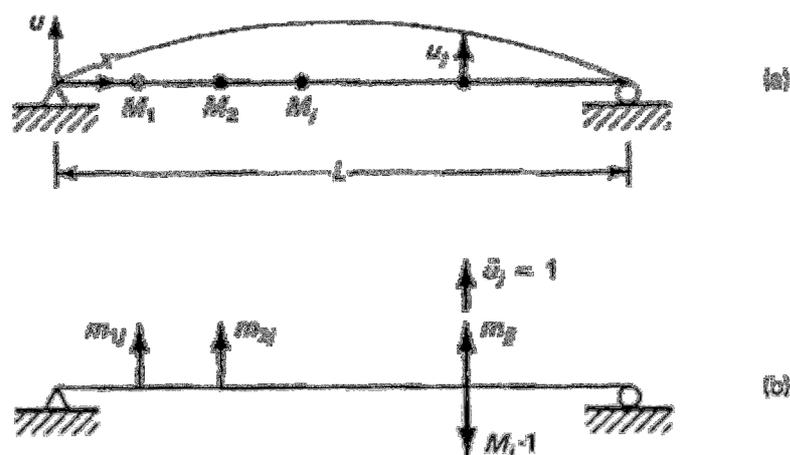


Figura 10 - Forças de inércia em um modelo de massas concentradas de uma viga simplesmente apoiada

Aplicando-se no sistema uma única aceleração unitária ao longo de uma das direções coordenadas  $j$ , enquanto a aceleração em todas as outras direções é zero. Tal estado é possível, desde que as coordenadas sejam independentes umas das outras. Para a escolha de coordenadas representada na Figura 10, esse estado implica que somente a massa  $M_j$  experimenta uma aceleração, e então a força de magnitude  $-M_j \cdot 1$  mostra que é a única força de inércia do sistema. O sinal negativo implica que a força de inércia é direcionada contra a direção da aceleração positiva unitária. Denotando por  $m_{ij}$  a força que deve ser aplicada ao longo da coordenada  $i$  para equilibrar as forças de inércia produzidas por uma aceleração unitária na coordenada  $j$ , nota-se que:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= 0 \quad i \neq j \\ m_{jj} &= M_j \end{aligned} \tag{4-10}$$

Por superposição de forças, pode ser facilmente demonstrado que o vetor de forças externas, necessário para equilibrar as forças de inércia proveniente de aceleração simultânea de todas as massas, sendo a aceleração da massa  $\ddot{u}_j$ , com  $j=1$  a  $N$ , é dado por:

$$\mathbf{f}_I = \begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ f_{I3} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{N1} & m_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

ou

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} \quad (4-12)$$

A matriz  $\mathbf{M}$  é chamada de matriz de massa. Os elementos individuais  $m_{ij}$  da matriz de massa são conhecidos como coeficiente de influência de massa.

#### 4.2.1.2. Forças de deformação elástica

Quando o sistema é linear, isto é, quando a relação tensão deformação do material usado na estrutura é linear elástico e os deslocamentos são pequenos, as forças elásticas podem ser obtidas pelo método da superposição. Considerando novamente a Figura 10, aplicando um deslocamento unitário ao longo da coordenada de direção  $j$ , mantendo todos os outros deslocamentos nulos como mostra a Figura 11(a). Forças elásticas internas irão se opor a esses deslocamentos, e para manter os deslocamentos, é necessário aplicar forças externas ao longo de todas as direções coordenadas como indicado na Figura 11(b). Denota-se a força externa requerida na coordenada  $i$  como  $k_{ij}$ .

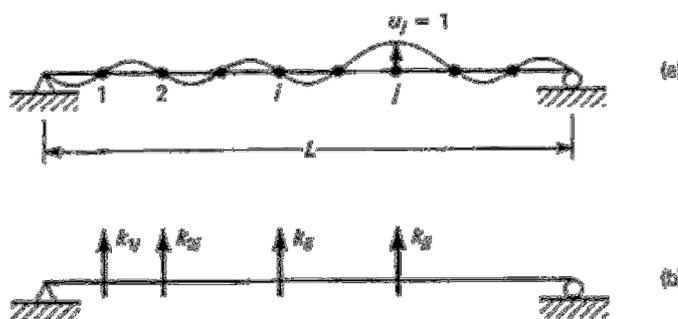


Figura 11 - Modelo de massa concentrada de uma viga (a) modelo de deslocamentos impostos; (b) forças elásticas requeridas para manter os deslocamentos em (a)

Se os deslocamentos atuais nos sistema são  $u_j$ ,  $j=1$  até  $N$ , é fácil mostrar usando o princípio da superposição que as forças externas ao longo das direções coordenadas necessárias para balancear as forças elásticas internas são dadas por:

$$\mathbf{f}_S = \begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ f_{S3} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{SN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{N1} & k_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

Ou:

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (4-14)$$

A matriz  $\mathbf{K}$  é chamada de matriz de rigidez. Os elementos individuais  $k_{ij}$  da matriz de rigidez são chamados de coeficientes de influencia de rigidez. Como no caso da matriz de massa, a matriz de rigidez também é simétrica.

#### 4.2.1.3. Forças de amortecimento

A movimentação de um corpo é contraposta por vários tipos de forças resistentes. Essas forças podem, por exemplo, aparecer da resistência do ar ou de atritos internos e externos. As características das forças externas são difíceis de definir. De um ponto de vista matemático, forças de amortecimento viscoso são proporcionais à velocidade em um sistema, mas são opostas a direção do movimento.

Considerando novamente um modelo de massa concentradas de uma viga simplesmente apoiada. Aplicando-se uma velocidade unitária na direção  $j$ , e mantendo-se as velocidades em outras coordenadas nulas conforme a Figura 12(a). O movimento especificado será contraposto por forças de amortecimento no sistema, e se o movimento é mantido, forças externas como as mostradas na Figura 12(b) devem ser aplicadas nas direções coordenadas para balancear as forças de resistência. Como no caso da inércia e das forças das molas, nos denotamos a força externa na coordenada  $i$  por  $c_{ij}$ . Se a velocidade real ao longo

das coordenadas é  $\dot{u}_j$ ,  $j=1$  até  $N$ , as forças de amortecimento são obtidas por superposição. Então:

$$\mathbf{f}_D = \begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ f_{D3} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{N1} & c_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{u}_N \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

Ou:

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} \quad (4-16)$$

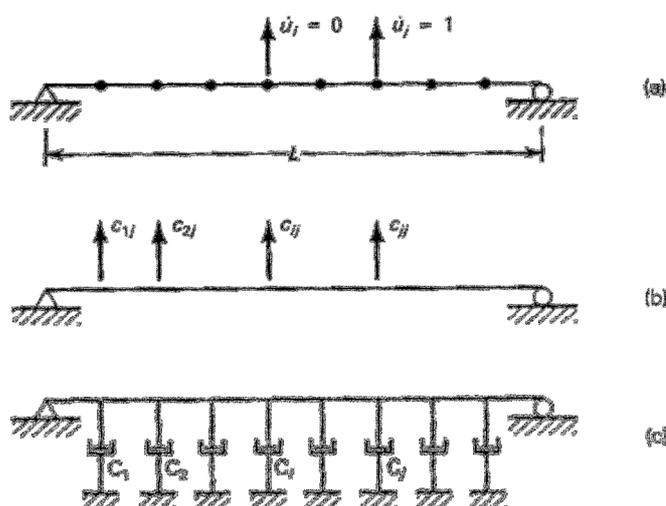


Figura 12 - Modelo de massas concentrada de uma viga (a) modelo de velocidade; (b) forças externas requeridas para balancear forças resistentes causadas pelo amortecimento; (c) modelo de amortecimento

Onde a matriz  $\mathbf{C}$  é chamada de matriz de amortecimento. Os elementos  $c_{ij}$  são referidos como coeficientes de influência de amortecimento.

Os coeficientes de influência de amortecimento  $c_{ij}$  são similares em conceito aos coeficientes de influência de massa  $m_{ij}$  e os coeficiente de influência de rigidez  $k_{ij}$ . É possível determinar os coeficientes de influência de massa  $m_{ij}$  do conhecimento da distribuição de massa internas do sistema. E de maneira similar, os  $k_{ij}$  podem ser derivados das características de rigidez interna os das relações tensão-deformação do material. Contudo, as características de amortecimento

interno são difíceis ou impossíveis de se determinar, e então os coeficientes  $c_{ij}$  podem raramente ser obtidos de considerações de características de amortecimento interno.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= 0 \quad i \neq j \\ c_{ii} &= C_i \end{aligned} \tag{4-17}$$

A matriz de amortecimento é diagonal.

#### 4.2.1.4. Efeitos da força axial

A presença de forças axiais normalmente causa uma redução da resistência que o sistema oferece para deformações elásticas. O efeito da força axial pode ser representado por um vetor de força  $f_G$  que é oposto à direção do vetor de força de mola  $f_S$ .

Considere por exemplo o modelo de massas concentradas de uma viga. Impondo um deslocamento unitário na coordenada  $j$  enquanto mantêm-se nulos os deslocamentos ao longo de outras direções coordenadas. Como estabelecido anteriormente, as deformações resultantes serão resistidas por forças elástica internas. Ao mesmo tempo, a presença de forças axiais amplificarão as deformações. A força externa líquida requerida ao longo da coordenada  $i$  para manter os deslocamentos será  $k_{ij} - k_{Gij}$ , onde  $k_{ij}$  é o coeficiente de influência de rigidez elástica, discutido anteriormente, e  $k_{Gij}$  é o coeficiente de influência de rigidez geométrica. Se os deslocamentos ao longo das coordenadas são  $u_j$ ,  $j=1$  até  $N$ , as forças de instabilidade que tendem a amplificar as deformações são dadas por:

$$\mathbf{f}_G = \begin{bmatrix} f_{G1} \\ f_{G2} \\ f_{G3} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{GN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{G11} & k_{G12} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{G1N} \\ k_{G21} & k_{G22} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{G2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{GN1} & k_{GN1} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{GNN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix} \tag{4-18}$$

Ou:

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{K}_G \mathbf{u} \quad (4-19)$$

Em que  $K_G$  é referida como matriz de rigidez geométrica.

#### 4.2.2. Formulação das equações de movimento

Uma vez as forças externas requeridas para equilibrar as forças de inércia, forças de amortecimento, forças elásticas, e forças de instabilidade que foram obtidas como descrito anteriormente, a formulação das equações de movimento é direta. Para o equilíbrio a soma das forças mencionadas acima deve ser igual às forças externa atuantes ao longo das coordenadas do sistema. Se as forças externas são denotadas por  $p(t)$ , as equações de movimento se tornam:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S + \mathbf{f}_G = \mathbf{p}(t) \quad (4-20)$$

Ou:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{K}_G \mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad (4-21)$$

##### 4.2.2.1. Vibrações transversais em uma estaca

A vibração transversal em uma estaca pode ser avaliada como uma viga em base elástica. Sistemas que possuem massa distribuída e rigidez distribuída são conhecidos como sistemas contínuos ou sistemas com parâmetro distribuído. Possuem infinitos graus de liberdade e seu movimento é representado por equações diferenciais parciais. Eles podem, contudo, ser idealizados como sistema com múltiplos graus de liberdade, também por massas concentradas ou expressando suas formas de deslocamento como uma superposição de uma série de funções de forma de coordenadas espaciais, cada uma multiplicada pela sua própria coordenada generalizada. Nesta seção é descrito o procedimento usado para obter as equações de movimento para um sistema de parâmetros distribuídos, representado pela superposição de funções de forma.

As funções de forma escolhidas para representar a forma do deslocamento devem ser independentes umas das outras, isto é, não deve ser possível derivar uma delas pela combinação linear de uma ou mais das restantes. As funções devem ao mínimo satisfazer as condições geométricas ou condições de contorno iniciais do sistema. Cada função é multiplicada por uma coordenada generalizada.

As coordenadas generalizadas então servem como incógnitas no sistema, valores que devem ser determinados pela solução das equações de movimento. O número de tais coordenadas é igual ao número de graus de liberdade do sistema.

Em uma viga apoiada em suas extremidades. A forma da vibração da viga é mostrada na Figura 13(a) é representada pela superposição de  $N$  funções de forma  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ , de modo que

$$u(x,t) = z_1\psi_1(x) + z_2\psi_2(x) + \dots + z_N\psi_N(x) \quad (4-22)$$

As forças atuando em um elemento  $dx$  são mostradas na Figura 13(b). Estas forças incluem momento de flexão  $M$ . A força de inércia  $\bar{m}\ddot{u}dx$ , e a força externa aplicada  $\bar{p}dx$ . Para serem obtidas, as equações do trabalho virtual para todos os deslocamentos virtuais admissíveis do sistema, os deslocamentos virtuais admissíveis devem satisfazer as restrições do sistema e devem ser independentes. Desde que as funções de forma  $\psi_i(x)$  sejam selecionadas para satisfazer as condições de contorno geométricas ou essenciais e sejam independentes umas das outras, funções  $\delta z_i\psi_i(x)$ ,  $i=1,2,\dots,N$  formam um grupo de  $N$  formas de deslocamentos virtuais admissíveis.

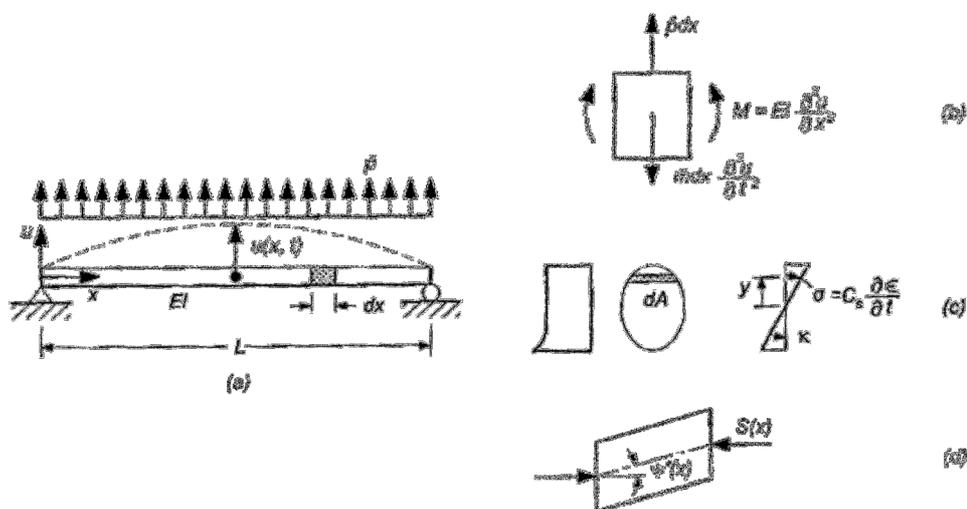


Figura 13 - (a) Vibrações de flexão; (b) forças atuando em um elemento; (c) resistência de amortecimento interno; (d) efeito da força axial

Um deslocamento virtual aplicado em uma viga causa nas duas extremidades de um elemento infinitesimal a rotação relativa por um ângulo  $\delta z_i\psi_i''(x)dx$ . De acordo com a teoria elementar de vigas, o momento é dado por

$M = EI(\partial^2 u / \partial x^2)$ . O trabalho virtual feito pelos momentos elásticos atuando no elemento é então dado por:

$$d(\delta W_{EI}) = \delta z_i \psi_i''(x) EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

$$d(\delta W_{EI}) = \delta z_i \sum_{j=1}^N z_j EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx$$
(4-23)

O trabalho virtual total feito pelos momentos elásticos é obtido pela integração da equação (4-23) no comprimento:

$$\delta W_{EI} = z_i \sum_{j=1}^N z_j \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx$$

$$\delta W_{EI} = z_i \sum_{j=1}^N z_j k_{ij}$$
(4-24)

Onde:

$$k_{ij} = \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx$$
(4-25)

No caso da viga estar em base elástica do tipo Winkler a equação (4-25) deve ser reescrita como:

$$k_{ij} = \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx + \int_0^L k_s \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$
(4-26)

O trabalho virtual interno  $d(\delta W_i)$  é o trabalho feito pelos momentos elásticos restauradores no elemento. Desde que os momentos restauradores são opostos aos sinais mostrados na Figura 13(b), o trabalho  $d(\delta W_i)$  é o negativo do trabalho  $d(\delta W_{ei})$  dado pela equação (4-23). O trabalho virtual feito pelas forças é:

$$\delta W_p = \delta z_i \int_0^L \bar{p} \psi_i(x) dx = p_i \delta z_i$$
(4-27)

Onde

$$p_i = \int_0^L \bar{p} \psi_i(x) dx$$
(4-28)

De maneira similar, o trabalho virtual das forças de inércia é:

$$\delta W_I = -\delta z_i \int_0^L \psi_i(x) \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$
(4-29)

$$\delta W_I = -\delta z_i \int_0^L \ddot{z}_j \bar{m} \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$

$$\delta W_I = -\delta z_i \sum_{j=1}^N \ddot{z}_j m_{ij}$$

Onde

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m} \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (4-30)$$

Somando os trabalhos virtuais  $\delta W_i$ ,  $\delta W_p$ , e  $\delta W_I$  e igualando a zero, obtém-se a seguinte equação do trabalho virtual:

$$-\delta z_i \left( \sum_{j=1}^N \ddot{z}_j m_{ij} + \sum_{j=1}^N z_j k_{ij} \right) + \delta z_i p_i = 0 \quad (4-31)$$

Desde que  $\delta z_i$  é arbitrário, pode ser cancelado da equação (4-31).

Correspondendo a  $N$  deslocamentos virtuais independentes  $\delta z_i \psi_i(x)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , há  $N$  equações de trabalho virtual da forma da equação (4-31).

Juntas, elas podem ser expressas em notação matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{p} \quad (4-32)$$

Onde  $\mathbf{z}$  é um vetor de  $N$  coordenadas generalizadas,  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa em que os elementos são dados pela equação (4-30), e  $\mathbf{p}$  é um vetor de forças generalizadas, dado pela equação (4-28). A matriz de massa  $\mathbf{M}$  e a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  são simétricas. Na formulação do trabalho virtual feito pelas forças internas de mola, foram negligenciadas as forças feitas pelas forças internas de cisalhamento nas deformações de cisalhamento virtuais. Para proporções normais de vigas, em que as dimensões da seção transversal são pequenas em relação ao comprimento, o trabalho feito pelas forças de cisalhamento é negligenciado em comparação ao que é feito pelos momentos fletores.

A equação (4-32) não inclui as forças de amortecimento presentes no sistema. Tais forças podem, ambas, ser externas ou internas. O amortecimento externo pode ser proveniente de forças de amortecimento viscosas como na Figura 13 (c). Denotando o coeficiente de amortecimento viscoso como  $\bar{c}$ , o trabalho virtual feito por forças de amortecimento externas é obtido como:

$$\delta W_{DE} = -\delta z_i \int_0^L \bar{c} \psi_i(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

$$\delta W_{DE} = -\delta z_i \sum_{j=1}^N \int_0^L \dot{z}_j \bar{c} \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$
(4-33)

Forças internas de amortecimento resistem a deformações dentro do elemento e suas magnitudes dependem da taxa de deformação. Assim, essa taxa de deformação é  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ , a resistência do amortecimento pode ser representada por uma tensão  $\sigma_s$  que é proporcional à taxa de deformação, a constante de proporcionalidade sendo a constante de amortecimento  $c_s$ . Assim:

$$\sigma_s = c_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$
(4-34)

Em referência à Figura 13(c) e usando a teoria elementar de vigas, que assume que seções planas permanecem planas sobre flexão, nos obtém-se as seguinte relação cinemática:

$$\varepsilon = \kappa y$$

$$\varepsilon = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} y$$
(4-35)

Onde  $\kappa$  é a curvatura da viga. Das equações (4-34) e (4-35) obtém-se:

$$\sigma_s = c_s \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} y$$
(4-36)

O momento devido ao amortecimento interno é dado por:

$$M_s = \int_A \sigma_s y dA$$

$$M_s = \int_A c_s y^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} dA$$

$$M_s = c_s I \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$$
(4-37)

Finalmente, reconhecendo que sobre um deslocamento virtual as extremidades do elemento experimentam uma rotação  $\delta z_i \psi_i''(x) dx$ , o trabalho virtual feito pelo amortecimento interno é dado por:

$$\delta W_{DI} = -\delta z_i \int_0^L c_s I \psi_i''(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} dx$$
(4-38)

$$\delta W_{Dl} = -\delta z_i \sum_{j=1}^N \int_0^L c_s I z_j \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx$$

Combinando as equações (4-33) e (4-38), o trabalho total feito pelas forças de amortecimento pode ser expresso como:

$$\delta W_D = -\delta z_i \sum_{j=1}^N \dot{z}_j \left\{ \int_0^L \bar{c} \psi_i(x) \psi_j(x) dx + \int_0^L c_s I \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \right\} \quad (4-39)$$

$$\delta W_D = -\delta z_i \sum_{j=1}^N \dot{z}_j c_{ij}$$

Onde:

$$c_{ij} = \int_0^L \bar{c} \psi_i(x) \psi_j(x) dx + \int_0^L c_s I \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad (4-40)$$

Quando o amortecimento é incluído, a equação do movimento (4-32) é escrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{p} \quad (4-41)$$

Na prática é difícil definir as constantes de amortecimento  $\bar{c}$  e  $c_s$  na base das características físicas do sistema. Métodos alternativos são usados para incluir a resistência do amortecimento no modelo. Os métodos sugeridos conduzem para uma resposta característica que se correlaciona bem com comportamentos experimentais ou observados.

Se forças axiais estão presentes, a equação do movimento (4-41) necessitará de uma modificação. Como discutido anteriormente, o efeito de forças axiais pode ser permitido pela derivação da matriz de rigidez geométrica que deve ser deduzida da matriz de rigidez da viga.

A derivação da matriz de rigidez geométrica segue um procedimento muito similar ao usado na representação de um grau de liberdade da viga. Assim, tomando como referência a Figura 13(d), o deslocamento virtual  $\delta z_i \psi_i(x)$  irá fazer com que as duas forças axiais  $S(x)$  movam-se próximas uma das outras por uma distância  $\delta z_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \psi_i'(x) dx$ , em que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  é obtido da equação (4-22). O trabalho virtual feito pelas forças axiais é então dado por:

$$d(\delta W_S) = \delta z_i \sum_{j=1}^N z_j S(x) \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx \quad (4-42)$$

O trabalho total virtual é obtido pela integração da equação (4-42) no comprimento:

$$\delta W_S = \delta z_i \sum_{j=1}^N \int_0^L z_j S(x) \psi'_i(x) \psi'_j(x) dx \quad (4-43)$$

$$\delta W_S = \delta z_i \sum_{j=1}^N \int_0^L z_j k_{Gij}$$

Onde

$$k_{Gij} = \int_0^L S(x) \psi'_i(x) \psi'_j(x) dx \quad (4-44)$$

Nota-se que  $\delta W_S$  é positivo enquanto  $\delta W_i$  estava negativo. A equação do movimento, incluindo o efeito da força axial, se torna:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_G)\mathbf{z} = \mathbf{p} \quad (4-45)$$

Onde  $\mathbf{K}_G$  é a matriz de rigidez geométrica onde seus elementos são dados pela equação (4-44).

Nesta formulação é satisfeita a aproximação clássica de Euler-Bernoulli. A estaca também poderia ser modelada com as teorias de viga de Timoshenko ou Reddy-Bickford. Yesilce e Catal (2008) apresentam um estudo comparativo de vigas em base elástica nas teorias de Timoshenko e Reddy-Bickford.

#### 4.2.2.2. Vibrações longitudinais em uma estaca

A barra uniforme mostrada na Figura 14 tem uma área  $A$  e massa por unidade de comprimento  $\bar{m}$ . A barra está vibrando na direção axial sob a ação de uma força distribuída  $\bar{p}(x)$ .

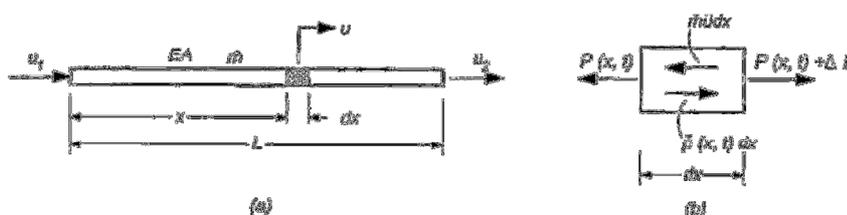


Figura 14 - Vibrações axiais em uma barra: (a) elevação da barra mostrando deslocamentos coordenados; (b) forças atuando no elemento de barra

Aplicando um deslocamento virtual na barra obtém-se uma equação do trabalho virtual para cada deslocamento virtual aplicado. Um grupo de deslocamentos virtuais admissíveis no sistema consiste em  $\delta u_i \psi_i(x)$ .

As forças atuando no elemento de comprimento  $dx$  são mostradas na Figura 14(b). Elas consistem da força elástica, força  $P$  e forças de inércia  $\bar{m}\ddot{u}dx$ . Um deslocamento virtual aplicado nessa barra causa nas duas extremidades de um elemento infinitesimal uma movimentação relativa entre estas na direção axial por uma distância  $\delta u_i \psi_i' dx$ . Se a força axial  $P$  é dado por  $P = EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ , o trabalho virtual feito pelas forças elásticas atuando no elemento é dado por:

$$d(\delta W_{ei}) = \delta u_i \psi_i'(x) EA \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$d(\delta W_{ei}) = \delta u_i \sum_{j=1}^N u_j EA \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx$$
(4-46)

O trabalho virtual total feito pelas forças elásticas é obtido pela integração da equação (4-46) no comprimento da barra:

$$\delta W_{ei} = \delta u_i \sum_{j=1}^N u_j \int_0^L EA \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx$$

$$\delta W_{ei} = \delta u_i \sum_{j=1}^N u_j k_{ij}$$
(4-47)

Onde os coeficientes de influencia de rigidez são dados por:

$$k_{ij} = \int_0^L EA \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx$$
(4-48)

No caso de barra embutida em meio elástico a equação (4-48) deve ser reescrita como:

$$k_{ij} = \int_0^L EA \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx + \int_0^L k_f(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$
(4-49)

O trabalho virtual das forças de inércia é obtido de:

$$\delta W_I = \delta u_i \int_0^L \bar{m} \psi_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

$$\delta W_I = \delta u_i \sum_{j=1}^N \int_0^L \bar{m} u_j \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$
(4-50)

$$\delta W_I = \delta u_i \sum_{j=1}^N u_j m_{ij}$$

Onde os coeficientes de influencia de massa são dados por:

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m} \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (4-51)$$

O trabalho virtual feito pelas forças aplicadas externamente é:

$$\delta W_p = \delta u_i \int_0^L \bar{p}(x,t) \psi_i(x) dx \quad (4-52)$$

$$\delta W_p = \delta u_i p_i$$

Onde:

$$p_i = \int_0^L \bar{p}(x,t) \psi_i(x) dx \quad (4-53)$$

### 4.3. Método de Ritz

O procedimento descrito nas seções anteriores em que a forma do deslocamento é representada por uma superposição de uma série de funções de forma apropriadamente selecionadas é chamado de método de Ritz. As funções de forma selecionadas que representam a configuração de deslocamentos são chamadas de formas de Ritz. Enquanto conceitualmente elegante, o método de Ritz possui várias dificuldades em aplicações práticas.

É aparente que o sucesso do método de Ritz depende da seleção das funções de forma. Isso é em geral uma tarefa difícil. No mínimo as funções de forma devem satisfazer as condições de contorno essenciais do problema. Se diferenciais de alta ordem  $m$  aparecem na equação do trabalho virtual, as funções de forma devem ser  $m$  vezes diferenciáveis. Em outras palavras, funções de forma devem satisfazer continuidade  $C^{m-1}$ , ou seja,  $(m-1)$  diferenciais devem ser contínuas. A escolha da função de forma deve então ser guiada pela natureza do problema e pelas condições de contorno, e nem sempre é aparente que funções de forma podem ser apropriadas em um caso particular.

As funções de forma devem cobrir o domínio inteiro de um sistema, mesmo assim o deslocamento representado pode variar amplamente de diferentes

maneiras em diferentes regiões do domínio. Como um exemplo, mesmo um simples caso de vibrações de flexão de uma viga, se os momentos de inércia em diferentes seções do comprimento são significativamente diferentes, funções de forma que são apropriadas para uma região podem não ser em outras.

As expressões de trabalho virtual usadas na obtenção das equações de movimento envolvem integração de funções de forma derivadas e outros produtos. A menos que as funções de forma sejam simples funções matemáticas, tal integração pode não ser direta.

As matrizes obtidas na formulação de Ritz são completamente cheias. Como resultado, quando o número de vetores de Ritz é grande, a solução se torna computacionalmente ineficiente.

As coordenadas generalizadas usadas como pesos desconhecidos nas funções de forma nem sempre tem um significado físico. Torna-se então difícil interpretar o comportamento do sistema sendo analisado por coordenadas generalizadas valores obtidos na análise.

Porém, o método de Ritz pode ser refinado, funções de forma adicionais podem ser incluídas para melhorar a acurácia da solução utilizando funções enriquecidas.

#### **4.4. Método de Rayleigh**

A principal aplicação do método de Rayleigh é na determinação de um valor aproximado da frequência fundamental de vibração de um sistema com múltiplos graus de liberdade. O método conta com uma estimativa do modo de vibração do sistema para o sistema, de modo que esse é convertido a um sistema equivalente de um grau de liberdade. A frequência do sistema equivalente é obtida aplicando o princípio da conservação de energia.

Considerando uma viga não uniforme simplesmente apoiada. A viga mostrada na Figura 15 possui uma massa  $\bar{m}(x)$  por unidade de comprimento e rigidez a flexão  $EI(x)$ , ambas as funções da coordenada  $x$ . O sistema representado por uma viga possui um número infinito de graus de liberdade. Contudo se for feita uma estimativa do modo de vibração, o sistema pode ser reduzido a um sistema equivalente de um grau de liberdade.

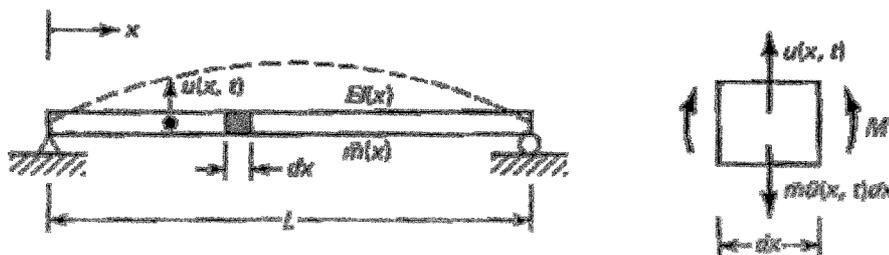


Figura 15 - Vibrações de flexão de uma viga

Assumindo que a deflexão  $u(x, t)$  é dada por:

$$u(x, t) = z(t)\psi(x) \quad (4-54)$$

Onde  $z(t)$  é uma coordenada desconhecida e  $\psi(x)$  é a forma de deflexão selecionada. A mecânica dos corpos deformáveis mostra que a energia de uma viga devido às deformações de flexão é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \dot{z}^2 \int_0^L EI(x) \{\psi''(x)\}^2 dx \quad (4-55)$$

A energia cinética é obtida de:

$$T = \frac{1}{2} \dot{z}^2 \int_0^L \bar{m}(x) \{\psi(x)\}^2 dx \quad (4-56)$$

Assumindo vibrações não amortecidas de vigas como harmônicas, então  $z = A \sin \omega t$ . Substituindo este valor de  $z$  nas equações (4-55) e (4-56), obtêm-se as seguintes expressões para as máximas energias potenciais e cinéticas:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} A^2 \int_0^L EI(x) \{\psi''(x)\}^2 dx \quad (4-57)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} A \omega^2 \int_0^L \bar{m}(x) \{\psi(x)\}^2 dx \quad (4-58)$$

Aplicando o princípio da conservação de energia, nos obtém-se:

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (4-59)$$

Ou:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) \{\psi''(x)\}^2 dx}{\int_0^L \bar{m}(x) \{\psi(x)\}^2 dx} \quad (4-60)$$

O método de Rayleigh fornece o mesmo resultado para a frequência como a formulação baseada no conceito de coordenadas generalizadas. Isto é para ser esperado porque a formulação é similar em ambos os casos,  $z(t)$  no método de Rayleigh, sendo, em efeito, uma coordenada generalizada. A única diferença nas duas aproximações é que no método de Rayleigh, aplica-se o princípio da conservação da energia, enquanto na aproximação por coordenadas generalizadas, o princípio dos trabalhos virtuais é usado.

#### 4.5. Método Rayleigh-Ritz

Na seção 4.4, foi introduzido o método de Rayleigh. A expressão do lado direito da equação (4-60) é chamada de quociente de Rayleigh. O princípio de Rayleigh determina que esse quociente assume um valor mínimo quando  $\psi(x)$  é igual ao verdadeiro modo de vibração e que o valor mínimo do quociente é igual ao quadrado da frequência fundamental. Para qualquer outro valor de  $\psi(x)$ , o quociente de Rayleigh é maior que o quadrado da frequência fundamental.

Considerações similares aplicam-se a sistemas com parâmetros discretos de múltiplos graus de liberdade. Como para um sistema contínuo, o vetor de deslocamentos pode ser dado por  $u = z(t)\psi$ , onde  $\psi$  é um vetor. A equação de movimento de um modelo para um grau de liberdade é dada por:

$$m^* \ddot{z} + k^* z = p^* \quad (4-61)$$

Onde

$$m^* = \psi^T \mathbf{M} \psi$$

$$k^* = \psi^T \mathbf{K} \psi$$

$$p^* = \psi^T \mathbf{p}$$

Uma estimativa da frequência fundamental do sistema original é obtida pela solução da equação (4-61) com  $p^* = 0$ . Isso dá:

$$\omega^2 = \frac{k^*}{m^*} \quad (4-62)$$

$$\omega^2 = \frac{\Psi^T \mathbf{K} \Psi}{\Psi^T \mathbf{M} \Psi}$$

A equação (4-62) pode também ser derivada de considerações de energia.

O quociente de Rayleigh fornece uma estimativa do limite superior do menor autovalor ou quadrado da frequência fundamental. A qualidade da estimativa da frequência fundamental depende da escolha da função de forma  $\Psi$ , quanto mais próxima ela for do verdadeiro modo de vibração, melhor será a estimativa da frequência.

Uma extensão do método de Rayleigh sugerida por Ritz e conhecida como método de Rayleigh-Ritz fornece um método alternativo para obter uma melhor estimativa da frequência fundamental. Ao mesmo tempo, ele pode ser usado para obter estimativas de várias frequências superiores. Na extensão de Ritz do método de Rayleigh para um sistema de parâmetros discretos, os deslocamentos do sistema são representados como uma superposição de vários vetores de forma diferentes e independentes, conhecidos como vetores de Ritz, cada um com o peso de sua própria coordenada generalizada:

$$\mathbf{u} = z_1(t)\Psi_1 + z_2(t)\Psi_2 + \dots + z_M(t)\Psi_M \quad (4-63)$$

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{z}$$

Onde  $\Psi$  é a matriz dos vetores de Ritz e  $\mathbf{z}$  é o vetor de  $M$  coordenadas generalizadas. Tratando  $\mathbf{u}$  como um possível modo de deslocamento, o quociente de Rayleigh correspondente à forma é dado por:

$$\rho = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}$$

$$\rho = \frac{\mathbf{z}^T \Psi^T \mathbf{K} \Psi \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \Psi^T \mathbf{M} \Psi \mathbf{z}} \quad (4-64)$$

$$\rho = \frac{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z}}$$

Onde  $\tilde{\mathbf{K}} = \Psi^T \mathbf{K} \Psi$  e  $\tilde{\mathbf{M}} = \Psi^T \mathbf{M} \Psi$ .

O valor do quociente de Rayleigh mudará se a forma dos deslocamentos é variada, que é equivalente a variar uma ou mais coordenadas generalizadas  $z_1$  a  $z_M$ . É de conhecimento que nos arredores de um sistema de autovalores,  $\rho$

assume um valor estacionário. Para sistemas discretos, o valor estacionário é um mínimo próximo a todos os autovalores exceto o mais auto, onde é um máximo. As condições de estacionariedade podem ser declaradas como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z_j} = 0 \quad (4-65)$$

$$j = 1, 2, \dots, M$$

Denotando o numerador da (4-65) por  $v$  e o denominador por  $w$ . Note que  $v$  e  $w$  são escalares. A equação (4-65) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{w} \frac{\partial v}{\partial z_j} - \frac{v}{w^2} \frac{\partial w}{\partial z_j} = 0 \quad (4-66)$$

$$j = 1, 2, \dots, M$$

Ou como:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \left( \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z} \right) - \frac{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z_j} \left( \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z} \right) = 0 \quad (4-67)$$

$$j = 1, 2, \dots, M$$

Desde que  $\tilde{\mathbf{K}}$  e  $\tilde{\mathbf{M}}$  sejam simétricas, o completo grupo de  $M$  equações pode ser representado pela equação (4-67) pode ser representada como:

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z}} \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z} = 0 \quad (4-68)$$

Agora reconhecendo que quando a condição dada pela equação (4-66) é satisfeita,  $\rho$  assume o valor de  $\omega^2$ , onde  $\omega$  é uma das frequências do sistema, nos tem-se:

$$\rho = \frac{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z}} = \omega^2 \quad (4-69)$$

Substituindo a equação (4-69) na equação (4-68) obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z} = \omega^2 \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z} \quad (4-70)$$

A equação (4-70) é reconhecida como um problema de autovalores linearizado. As frequências  $\omega$  obtidas desta solução serão aproximadamente iguais às frequências do sistema original.

As frequências obtidas pelo método de Rayleigh-Ritz são somente aproximações das verdadeiras frequências. A qualidade da aproximação depende da seleção das formas assumidas  $\Psi$ , quanto mais próximas estas formas

estiverem dos verdadeiros modos de vibração, melhores serão as estimativas das frequências do sistema e dos modos de vibração. As estimativas de frequência sempre serão maiores que a frequência fundamental e menores que a maior frequência do sistema.

O método de Rayleigh-Ritz é também aplicado a sistemas contínuos.

Similar à equação (4-63), o modo de deflexão de um sistema contínuo pode ser representado por uma superposição de  $M$  funções de forma cada uma com o peso de uma coordenada generalizada diferente. Como um exemplo, para vibrações laterais de uma viga, o modo de deflexão é representado por:

$$u(x,t) = z_1(t)\psi_1(x) + z_2(t)\psi_2(x) + \dots + z_M(t)\psi_M(x) \quad (4-71)$$

$$u(x,t) = \boldsymbol{\psi} \mathbf{z}$$

Onde  $\psi_i$ ,  $i=1$  até  $M$ , são os modos de Ritz que são funções de coordenadas espaciais  $x$ ,  $z_i$ ,  $i=1$  até  $M$ , são coordenadas generalizadas;  $\boldsymbol{\psi}$  é um vetor coluna de formas  $\psi_i$ ; e  $\mathbf{z}$  é o vetor de coordenadas generalizadas. O quociente de Rayleigh correspondente ao modo de deslocamento  $\mathbf{u}$  é dado por:

$$\rho = \frac{\int_0^L EI(x) \mathbf{z}^T [\boldsymbol{\psi}''(x)]^T \boldsymbol{\psi}''(x) \mathbf{z} dx}{\int_0^L \bar{m}(x) \mathbf{z}^T [\boldsymbol{\psi}(x)]^T \boldsymbol{\psi}(x) \mathbf{z} dx} \quad (4-72)$$

De modo que se introduz a notação:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \int_0^L EI(x) [\boldsymbol{\psi}''(x)]^T \boldsymbol{\psi}''(x) dx \quad (4-73)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_0^L \bar{m}(x) [\boldsymbol{\psi}(x)]^T \boldsymbol{\psi}(x) dx \quad (4-74)$$

De modo que:

$$\tilde{k}_{ij} = \int_0^L EI(x) [\psi_i''(x)]^T \psi_j''(x) dx \quad (4-75)$$

$$\tilde{m}_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x) [\psi_i(x)]^T \psi_j(x) dx \quad (4-76)$$

No caso do estudo de vigas em base elástica as equações (4-73) e (4-75) devem ser reescritas como:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \int_0^L EI(x) [\boldsymbol{\Psi}''(x)]^T \boldsymbol{\Psi}''(x) dx + \int_0^L k_s(x) [\boldsymbol{\Psi}(x)]^T \boldsymbol{\Psi}(x) dx \quad (4-77)$$

$$\tilde{k}_{ij} = \int_0^L EI(x) [\boldsymbol{\psi}_i''(x)]^T \boldsymbol{\psi}_i''(x) dx + \int_0^L k_s(x) [\boldsymbol{\psi}_i(x)]^T \boldsymbol{\psi}_i(x) dx \quad (4-78)$$

No caso do estudo de barras embutidas em um meio elástico as equações (4-73) e (4-75) devem ser reescritas como:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \int_0^L EA(x) [\boldsymbol{\Psi}'(x)]^T \boldsymbol{\Psi}'(x) dx + \int_0^L \overline{K_f}(x) [\boldsymbol{\Psi}(x)]^T \boldsymbol{\Psi}(x) dx \quad (4-79)$$

$$\tilde{k}_{ij} = \int_0^L EA(x) [\boldsymbol{\psi}_i'(x)]^T \boldsymbol{\psi}_i'(x) dx + \int_0^L \overline{K_f}(x) [\boldsymbol{\psi}_i(x)]^T \boldsymbol{\psi}_i(x) dx \quad (4-80)$$

Com as notações dadas pelas equações (4-73) e (4-74), a equação (4-72) se reduz a forma da equação (4-64). A aplicação da condição de estacionariedade no quociente de Rayleigh então leva a equação de autovalores (4-70).

De maneira resumida o método de Raleigh-Ritz é um método aproximado de resolução de problemas, baseado no princípio do trabalho virtual. O método de Raleigh-Ritz reduz um meio contínuo com infinitos graus de liberdade a um sistema com um número finito de graus de liberdade.

O método dos elementos finitos pode ser pensado como uma extensão do método de Raleigh-Ritz, salvo duas grandes diferenças: (1) As estruturas no método de Raleigh-Ritz são tratadas como um único elemento. No método dos elementos finitos utilizam-se múltiplos elementos e nós; (2) No método dos elementos finitos os valores de deslocamentos e rotações são as variáveis (coeficientes indeterminados), é um método mais intuitivo. Já no método de Raleigh-Ritz as deformações são as amplitudes de uma função senoidal e os coeficientes indeterminados são as constantes das equações.

#### 4.6. Formulação hierárquica

Como mencionado no item 4.3 o método de Ritz, e conseqüentemente o método de Rayleigh-Ritz pode ser refinado, funções adicionais de forma de Ritz podem ser incluídas para melhorar a acurácia da solução.

Na formulação hierárquica adota-se uma metodologia em que as funções de forma são simplesmente acrescentadas, enriquecendo a solução aproximada, sem interferência nas funções existentes. Isto é possível uma vez que os graus de liberdade generalizados são mantidos como incógnitas (Zienkiewicz, 1983). As funções trigonométricas, por sua simplicidade e alto grau de convergência, constituem-se num recurso interessante para o enriquecimento dos elementos. Tais funções são amplamente utilizadas em métodos aproximados de análise estrutural, como o de Rayleigh-Ritz (Burgos, 2005)

Lages (1992) apresentou uma metodologia na qual combinavam-se funções polinomiais e trigonométricas.

Cada função de forma adicional acrescenta um grau de liberdade “fictício” ao elemento, que será mantido como incógnita já que não está associado a um nó. A grande vantagem da formulação hierárquica é a possibilidade do aumento na precisão do elemento sem a necessidade de uma discretização.

Neste trabalho, a formulação hierárquica é utilizada na formulação de elementos para a análise de vibrações longitudinais e transversais em estacas.

Tomando por base o trabalho de Lages, formularam-se funções hierárquicas para enriquecer elementos de vigas e barras, satisfazendo-se as condições de contorno, com o intuito de não alterar os valores nodais.

Para a análise de vibrações transversais combinaram-se funções polinomiais cúbicas e funções seno, foi gerada uma família de funções da seguinte forma:

$$\psi_H(x)_n = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (4-81)$$

Onde  $n$  vai de 1 até o número de funções adicionais e  $L$  é o comprimento do elemento. Os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são obtidos pela seguinte condição de contorno:

$$\psi_H(0)_n = 0 \quad (4-82)$$

$$\psi_H(L)_n = 0$$

$$\psi'_H(0)_n = 0$$

$$\psi'_H(L)_n = 0$$

As condições de contorno impostas garantem que os valores dos deslocamentos e rotações nodais não serão alterados pelas funções adicionais. A

família de funções resultante tem a seguinte forma geral, mostrada na equação (4-90).

$$\psi_H(x)_n = -\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L^2} \left[ 2 + (-1)^n \right] x^2 - \frac{n\pi}{L^3} \left[ 1 + (-1)^n \right] x^3 + \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (4-83)$$

Estas funções são a soma de funções cúbicas com a função seno, com a propriedade de valores nulos das funções e suas primeiras derivadas nas extremidades  $x=0$  e  $x=L$ . Dessa forma, as funções adicionais permitem um refinamento hierárquico, não sendo afetadas pelas condições de contorno essenciais do elemento (deslocamentos e rotações nodais). Para melhorar a aproximação, basta especificar um número maior de funções adicionais (as funções básicas permanecem sempre as mesmas).

Para a análise de vibrações longitudinais, as funções adicionais longitudinais também são obtidas de forma hierárquica. No caso, basta utilizar termos em seno, que atendem à condição de zero deslocamento nos nós. Nesta análise a equação (4-83) se torna:

$$\psi_H(x)_n = \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (4-84)$$

As matrizes de rigidez, de massa e geométrica são acrescidas de uma linha e uma coluna para cada função adicional, mas a parcela relativa ao elemento original não é modificada.

A matriz de rigidez do elemento enriquecido, por exemplo, é dada por:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^{\text{PP}} & \tilde{\mathbf{K}}^{\text{PH}} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{\text{HP}} & \tilde{\mathbf{K}}^{\text{HH}} \end{bmatrix} \quad (4-85)$$

No estudo de vibrações transversais de vigas em base elástica,  $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{PP}}$  é a matriz de rigidez original do elemento pela formulação polinomial e  $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{HP}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{PH}}$  e  $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{HH}}$  são dadas por:

$$\tilde{k}_{ij}^{\text{PH}} = \tilde{k}_{ji}^{\text{HP}} = \int_0^L EI(x) \left[ \psi_i''(x) \right]^T \psi_{H_j}''(x) dx + \int_0^L k_s(x) \left[ \psi_i(x) \right]^T \psi_{H_j}(x) dx \quad (4-86)$$

$$\tilde{k}_{ij}^{\text{HH}} = \int_0^L EI(x) \left[ \psi_{H_i}''(x) \right]^T \psi_{H_j}''(x) dx + \int_0^L k_s(x) \left[ \psi_{H_i}(x) \right]^T \psi_{H_j}(x) dx \quad (4-87)$$

No estudo de vibrações longitudinais de barras embutidas em base elástica  $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{HP}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{PH}}$  e  $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{HH}}$  são dadas por:

$$\tilde{k}_{ij}^{PH} = \tilde{k}_{ji}^{HP} = \int_0^L EA(x) [\psi'_i(x)]^T \psi'_{H_j}(x) dx + \int_0^L \overline{K}_f(x) [\psi_i(x)]^T \psi_{H_j}(x) dx \quad (4-88)$$

$$\tilde{k}_{ij}^{HH} = \int_0^L EA(x) [\psi'_{H_i}(x)]^T \psi'_{H_j}(x) dx + \int_0^L \overline{K}_f(x) [\psi_{H_i}(x)]^T \psi_{H_j}(x) dx \quad (4-89)$$

No caso de uma barra sujeita apenas a alongamento e encurtamento o campo de deslocamentos convencional é uma função linear dos deslocamentos nodais, conforme a equação (4-90).

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (4-90)$$

No caso de uma viga o campo de deslocamentos convencional é descritos por funções polinomiais cúbicas, conforme a equação (4-91).

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (4-91)$$

Estas funções correspondem a deslocamentos unitários em cada um dos 4 graus de liberdade do elemento de viga indicados na Figura 16.



Figura 16 - Graus de liberdade de um elemento de viga