



Andrés José Rodríguez Torres

**Estudo comparativo de métodos numéricos
para solução das equações da elasticidade em
problemas de otimização topológica**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em engenharia mecânica

Orientador: Prof. Ivan Fábio Mota de Menezes

Rio de Janeiro
Setembro de 2016



Andrés José Rodríguez Torres

**Estudo comparativo de métodos numéricos
para solução das equações da elasticidade em
problemas de otimização topológica**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.
Aprovado pela comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ivan Fábio Mota de Menezes

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Anderson Pereira

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Luiz Fernando Campos Ramos Martha

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 setembro de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Andrés José Rodríguez Torres

Graduou-se em Engenharia Mecatrônica pela Universidad Santo Tomás em 2013. Sua linha de pesquisa e interesse envolve métodos numéricos para resolver problemas de elasticidade e métodos de otimização topológica.

Ficha Catalográfica

Rodríguez Torres, Andrés José

Estudo comparativo de métodos numéricos para solução das equações da elasticidade em problemas de otimização topológica / Andrés José Rodríguez Torres ; orientador: Ivan Fábio Mota de Menezes. – 2016.

54 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2016.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Otimização topológica. 3. Método dos elementos virtuais. 4. Método dos elementos finitos suavizados. 5. Malhas poligonais. 6. Minimização da flexibilidade. I. Menezes, Ivan Fábio Mota de. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Para minha avó no céu por ensinar-me a viver, meus pais Sixto e Yanet, minha tia Myriam, meus irmãos Leonardo José e Luis José, minha cunhada Yadira e meus sobrinhos Luis José e Alejandro José pelo valor da família e ser a força para fazer tudo.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da sabedoria para entender e fazer um aporte à comunidade científica.

Ao meu orientador por sua paciência e por me dirigir neste trabalho.

Ao Anderson Pereira sempre pronto a atender as minhas dúvidas.

Aos meus pais e minha tia que na distância sempre tive seu apoio.

À minha família brasileira: o Bruno e a Barbara que foram motivação nos momentos críticos desta pesquisa e igualmente o Renato e a Rosangela e seus filhos.

Aos meus colegas da PUC-Rio.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

À CAPES e à PUC-Rio por sua contribuição financeira.

Resumo

Rodríguez Torres, Andrés José; Mota de Menezes, Ivan Fábio. **Estudo comparativo de métodos numéricos para solução das equações da elasticidade em problemas de otimização topológica.** Rio de Janeiro, 2016. 54-p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho apresenta um estudo comparativo de métodos numéricos para solução das equações da elasticidade em problemas de otimização topológica. Um sistema computacional é desenvolvido em MATLAB para solução de problemas de otimização topológica usando malhas poligonais não estruturadas em domínios bidimensionais arbitrários. Dois métodos numéricos são implementados e comparados com o método dos elementos finitos (FEM) em relação à precisão e à eficiência computacional: o recém proposto Método dos Elementos Virtuais (VEM) e o Método dos Elementos Finitos Suavizados (SFEM). A principal característica que distingue estes métodos do FEM é que as funções de base canônicas não são obtidas de forma explícita. A utilização de projetores locais apropriados permite a extração do componente linear das deformações dos elementos e, por conseguinte, o cálculo da matriz de rigidez se reduz a avaliações de quantidades puramente geométricas. Exemplos numéricos representativos, usando malhas convexas e não convexas, para minimização da flexibilidade são apresentados para ilustrar as potencialidades dos métodos estudados.

Palavras-chave

Otimização Topológica; Método dos Elementos Virtuais; Método dos Elementos Finitos Suavizados; Malhas Poligonais; Minimização da Flexibilidade.

Abstract

Rodríguez Torres, Andrés José; Mota de Menezes, Ivan Fábio (Advisor). **Comparative study of numerical methods for solving the elasticity equations in topology optimization problems**. Rio de Janeiro, 2016. 54-p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work presents a comparative study of numerical methods for solving the elasticity equations in topology optimization problems. A computational framework is developed in MATLAB for solving topology optimization problems using unstructured polygonal meshes in arbitrary two-dimensional domains. Two numerical methods are implemented and compared with the finite element method (FEM) with respect to accuracy and computational efficiency: the recently-proposed Virtual Element Method (VEM) and the Smoothed Finite Element Method (SFEM). The key characteristic that distinguishes these methods from the FEM is that the canonical basis functions are not computed explicitly. The use of appropriate local projection maps allows the extraction of the linear component of the element deformations and, therefore, the computation of the stiffness matrix is reduced to the evaluation of purely geometric quantities. Representative numerical examples, using convex and non-convex meshes, for compliance minimization are presented to illustrate the capabilities of the methods studied.

Keywords

Topology Optimization; Virtual Element Method; Smoothed Finite Element Method; Polygonal Meshes; Compliance Minimization.

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Motivação	16
1.2	Revisão bibliográfica	17
1.3	Objetivos do trabalho	19
1.4	Estrutura da dissertação	19
2	Fundamentos teóricos	20
2.1	Otimização topológica	20
2.2	Métodos numéricos	22
2.2.1	VEM	22
2.2.2	FEM	29
2.2.3	SFEM	32
3	Experimentos e resultados	36
3.1	Códigos computacionais	36
3.2	Fator de estabilidade do VEM	36
3.3	Convergência	39
3.4	Convergência com elementos não convexos	45
3.5	Otimização topológica	47
4	Conclusões e sugestões	50
5	Referências bibliográficas	52

Lista de figuras

Figura 1. Subdivisão de um elemento em subcélulas: (a) quadrilátero e suas possíveis divisões (b) hexágono com 6 e 4 -triângulos.....	18
Figura 2. Domínio de projeto estendido. Fonte: Talischi <i>et al.</i> 2012b.....	21
Figura 3. Integração ao longo das arestas (linhas).	27
Figura 4. (a) áreas triangulares utilizadas para calcular as funções de forma dos elementos poligonais e (b) triangulação utilizada para integração 'numérica. Fonte: Talischi <i>et al.</i> 2012b.	31
Figura 5. Esquema de "triangulação" para integração numérica.....	31
Figura 6. Cálculo do operador gradiente discretizado suavizado. Fonte: Natarajan <i>et al.</i> 2015	34
Figura 7. Ponto central O de um polígono. Fonte: Dai <i>et al.</i> 2007.....	35
Figura 8. Viga engastada com carregamento na extremidade. Fonte: (Barber 2009)	37
Figura 9 Análise do fator de estabilidade	38
Figura 10. Tipos de malha. (a) malha quadrilateral, (b) malha poligonal, (c) malha randômica.	39
Figura 11. Análise de convergência em malhas quadrilaterais	41
Figura 12. Tempo de convergência malhas quadrilaterais	41
Figura 13. Análise de convergência em malhas poligonais.....	42
Figura 14 . (a) Convergencia do FEM com 3 (vermelho) e 7 (verde) pontos de integração. (b) Tempo em função do número de graus de liberdade	43
Figura 15. Análise de convergencia de malhas poligonais com a correção de integração numérica do FEM	44

Figura 16. Tempo de convergência para malhas poligonais	44
Figura 17. Análise de convergência em malhas randômicas	45
Figura 18. Malha de elementos não convexos	46
Figura 19. Análise de convergência em malhas não convexas.....	46
Figura 20. Geometria e condições de contorno do problema MBB	47
Figura 21. Ótima topologia para o problema MBB com $R = 0,12$ e fração de volume = 0,5.....	48
Figura 22. Ótima topologia para o problema MBB com elementos não convexos	48
Figura 23. (a) Problema do domínio clipe. (b) topologia final para o domínio clipe com $R = 0,09$ e fração de volume = 0,45	49

Lista de tabelas

Tabela 1. Dimensões das malhas nos experimentos	40
Tabela 2. Desempenho dos métodos numéricos no processo de otimização topológica	47

Lista de abreviações

VEM: Virtual Element Method (método dos elementos virtuais).

FEM: Finite Element Method (método dos elementos finitos).

SFEM: Smoothed Finite Element Method (método dos elementos finitos suavizados).

CSFEM: Cell-Based Smoothed Finite Element Method (método dos elementos finitos suavizados baseados em células).

n -SFEM: n -sided Polygonal Smoothed Finite Elements Method (método dos elementos finitos suavizados baseados em polígonos de n -arestas).

MFD: Mimetic Finite Differences (diferenças finitas miméticas).

PDE: Partial Differential Equations (equações diferenciais parciais).

SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization (material sólido isotrópico com penalização).

OC: Optimality Criteria (Critério de otimização)

Lista de símbolos

a, a_h Forma bilinear contínua e discreta

f Forma linear da carga contínua

t Trações de superfície

Ω : Dominio de trabalho

$H^k(\Omega)$: Espaço de Solobev de ordem k

\mathcal{V} Espaço de solução

J Função objetivo

e Elemento genérico.

ρ/ρ_e Função de densidade contínua e densidade elemento discreto.

V_f Fração de volume prescrito.

\mathcal{W} Espaço de funções suaves de dimensão finita sobre elemento e .

a^e, a_h^e Restrição de a, a_h como \mathcal{W} (elemento contribuição).

s^e Aproximação de forma bilinear correspondente a modos de deformação de ordem superior.

φ_i Função de base canônica.

$\bar{\mathbf{v}}$ Média de valores de \mathbf{v} amostrados ao longo dos vértices do elemento e .

$\langle \mathbf{v} \rangle$ Area média de \mathbf{v} .

\mathcal{P} Espaço do modo de deformação linear.

\mathbf{p}_i Bases que abrange o espaço \mathcal{P}

$\pi_{\mathcal{P}}$ Mapa de projeção para extrair $\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{P}$.

\mathbf{q}_i Vetor da integração de linha de coordenadas baricêntricas.

$|\cdot|$ Medida do conjunto (área) ou norma euclidiana de um vetor.

Γ Aresta

K_e Matriz de rigidez elementar

α^e Coeficiente de escala positivo para o termo de estabilidade do VEM.

\tilde{A} Redefinição das variáveis do FEM

“... quando compro algo, ou você compra, não pagamos com dinheiro, pagamos com o tempo de vida que tivemos de gastar para ter aquele dinheiro. Mas tem um detalhe: tudo se compra menos a vida, a vida se gasta. E é lamentável desperdiçar a vida para perder a liberdade. ”

Discurso do José Mujica

1 Introdução

1.1 Motivação

As técnicas de otimização topológica aplicadas a estruturas contínuas e discretas estão bem estabelecidas na indústria e modelos obtidos com a utilização de métodos de otimização constituem uma ferramenta diária da produção. Representam, assim, um uso eficiente de materiais com consequente redução de custos e peso das estruturas. A indústria aeroespacial e automotiva, por exemplo, se interessam pelo dimensionamento e otimização de formas para o projeto de estruturas e elementos mecânicos, onde o peso das peças é um fator crítico deste tipo de indústrias (Zhu *et al.* 2015). A otimização é utilizada também na fabricação de dispositivos eletromagnéticos, sistemas microeletromecânicos (MEMS), eletroquímicos e acústicos (Bendsøe & Sigmund 2003). Portanto, este trabalho é uma apresentação do método para o projeto ótimo da topologia de estruturas contínuas e uma comparação da eficiência de métodos baseados em Galerkin para solução do problema elástico.

O desenvolvimento de técnicas numéricas para encontrar soluções aproximadas de problemas de valor de contorno em malhas poligonais e poliédricas tem recebido atenção considerável na literatura recentemente (Beirão da Veiga *et al.* 2014), (G. R. Liu & Nguyen 2010). Isto se deve a diversos fatores, entre eles a dificuldade associada com a geração de malha para domínios complexos para os quais a utilização de elementos de forma arbitrária pode fornecer uma maior flexibilidade (Talischi *et al.* 2012b). Além disso, novos métodos aproximados, tais como o Método dos Elementos Virtuais (VEM) e o Método dos Elementos Finitos Suavizados (SFEM) permitem a utilização de elementos não convexos ou distorcidos com os novos métodos aproximados associados aos elementos finitos como generalização no caso do VEM ou modificação para o caso do SFEM. A utilização de elementos poligonais apresenta uma vantagem na geração e adaptação de malha além de oferecer um melhor desempenho em algumas aplicações tal como a otimização topológica (Talischi *et al.*, 2010). O método VEM é baseado no método das

diferenças finitas miméticas (MFD) com aproximações de ordem superior (Beirão da Veiga *et al.* 2014) e o método SFEM é uma modificação dos elementos finitos convencionais (Liu *et al.* 2007). Nestes métodos, as funções de forma não precisam ser calculadas explicitamente.

Na próxima seção, serão apresentados o problema de otimização topológica para domínios contínuos e os principais métodos numéricos, mencionados anteriormente, para a solução das equações diferenciais que governam o problema de elasticidade linear.

1.2

Revisão bibliográfica

Diversos trabalhos de otimização topológica foram desenvolvidos recentemente na literatura: o *Polytop* (Talischi *et al.* 2012b) apresenta um código educacional e compacto, feito em MATLAB, para solução do problema de otimização topológica estrutural com o método de elementos finitos poligonais para problemas de elasticidade. Bendsøe e Sigmund (Bendsøe & Sigmund 2003) estenderam as aplicações da otimização topológica para problemas de elasticidade discretos e contínuos, vibrações, flambagem, entre outros. Paulino & Gain 2015 pesquisaram a otimização topológica de padrões geométrico (tesselações) como um meio para unir arte e engenharia, com a resolução das equações de elasticidade com malhas geradas em base aos conceitos de desenhos artísticos desenvolvidos por Maurits Cornelis Escher.

Tal como acontece com elementos finitos, o VEM é um método de Galerkin com um espaço de aproximação subjacente definido de acordo com uma partição (malha) do domínio que teve origem no método de diferenças finitas miméticas (MFD). Beirão da Veiga *et al.*, 2013a explicitaram os princípios básicos do método aplicado ao problema mais simples em duas dimensões, e mostraram que este pode ser aplicado a um número de situações e problemas diferentes tal como geometrias complexas ou condições de contorno de ordem maior. Beirão da Veiga *et al.* 2014 apresentam uma visão geral e uma guia de implementação computacional do método com o problema modelo da equação de Poisson em duas dimensões, onde o método pode ser visto como uma extensão do FEM para elementos poligonais e poliedrais gerais. Os estudos de (Beirão da Veiga *et al.* 2013b), apresentam o método para resolver problemas de elasticidade linear compressível e materiais quase incompressíveis sob a

premissa de pequenas deformações. Os autores mostraram um exemplo em duas dimensões. Gain *et al.* 2013 aplicaram o método para problemas de elasticidade em três dimensões, com a utilização de malhas poliédricas regulares e arbitrárias e uma análise de convergência para diferentes tipos de elementos.

O método dos elementos finitos com função suavizada para problemas mecânicos e subdivisão do elemento em células foi desenvolvido por (Liu *et al.* 2007). Nesse método, o somatório das contribuições de cada uma destas células forma a matriz de rigidez local. Uma generalização para n -células, sendo n o número de arestas do polígono foi realizada por (Dai *et al.* 2007). Natarajan *et al.* 2015 realizaram uma comparação com o método VEM, mostrando semelhanças no uso das projeções elementares para o cálculo da matriz de rigidez local. Na Figura 1, observamos as possíveis subdivisões de cada elemento para o cálculo da matriz de rigidez. Liu & Nguyen 2010a fizeram uma análise numérica para uma correta divisão em células de cada tipo de elemento. Além disso, outros métodos baseados nos elementos finitos suavizados e suas aplicações foram estudados por esses autores.

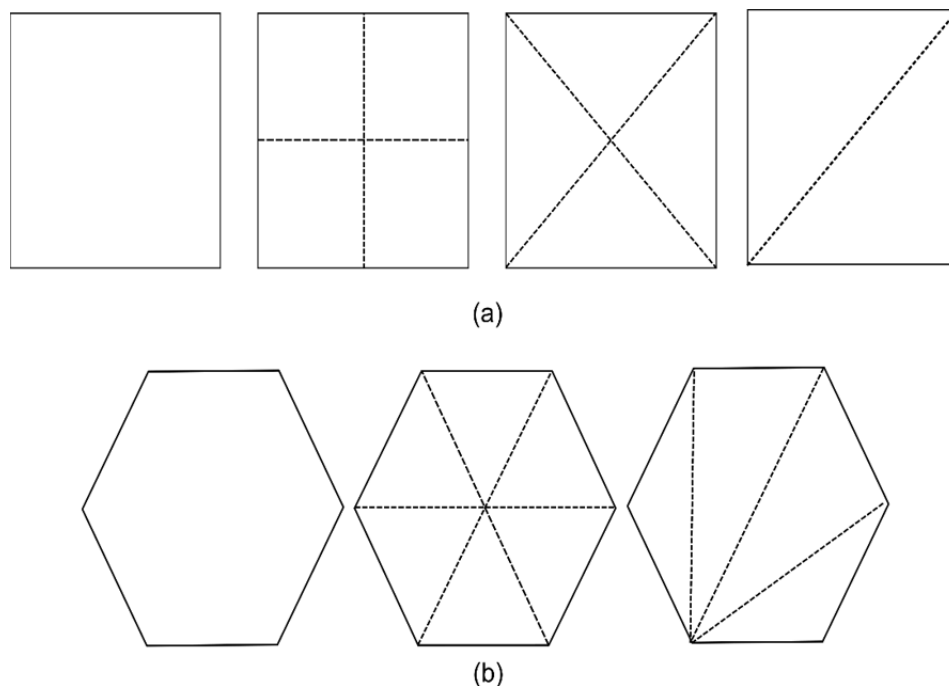


Figura 1. Subdivisão de um elemento em subcélulas: (a) quadrilátero e suas possíveis divisões (b) hexagono com 6 e 4 -triângulos.

1.3

Objetivos do trabalho

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo comparativo entre diferentes métodos numéricos para solução das equações de equilíbrio associadas ao problema de elasticidade linear no contexto da otimização topológica. Para tanto, o framework `Polytop` (Talischi *et al.*, 2012b) desenvolvido em MATLAB para a otimização topológica foi estendido para incorporar o n-SFEM e o VEM. Os resultados numéricos dos métodos avaliados são validados usando a solução analítica de um problema de elasticidade apresentada em (Barber, 2009).

Os conceitos básicos de otimização topológica aplicada a estruturas contínuas discretizadas por meio de elementos quadrilaterais, poligonais e tesselações genéricas (*i.e.* com elementos não convexos) são apresentados. Foi utilizado um *framework* para solução de problemas de otimização topológica, com implementações simples e eficientes, capaz de resolver diversas aplicações de engenharia, com malhas não estruturadas, geometrias complexas, e uma especificação simples e intuitiva das condições de carregamento e de apoio (Talischi *et al.*, 2012a). Além disso, o framework foi estendido para incorporar as implementações do método de elementos virtuais e do método dos elementos finitos suavizados na otimização topológica.

1.4

Estrutura da dissertação

Os demais capítulos desta dissertação estão distribuídos da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta uma revisão dos fundamentos teóricos e está dividido em duas partes: a primeira introduz uma breve abordagem sobre a otimização topológica e a segunda apresenta os métodos numéricos para a solução dos problemas de elasticidade linear, incluindo alguns detalhes da implementação. O capítulo 3 descreve os testes realizados: inicialmente, é feita uma verificação da convergência dos métodos numéricos usados para a aproximação da solução das equações de equilíbrio do problema, seguida de exemplos de otimização topológica usando malhas de elementos poligonais e não convexos em domínios arbitrários. Finalmente, o capítulo 4 apresenta as principais conclusões e algumas sugestões para desenvolvimento de trabalhos futuros

2 Fundamentos teóricos

Este capítulo aborda os conceitos necessários para a implementação da técnica de otimização topológica com os diferentes tipos de aproximações numéricas para solução das equações governantes da elasticidade.

2.1 Otimização topológica

Nesta seção, apresentamos a otimização topológica aplicada a um sistema linearizado submetido a trações de superfície \mathbf{t} , sob a premissa de pequenas deformações e material em regime linear elástico (Talischi *et al.* 2012b). Para um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, procura-se \mathbf{u} tal que:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (1)$$

onde,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}, & f(\mathbf{v}) &= \int_{\bar{\Gamma}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{s} \\ \mathcal{V} &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = 0\} \end{aligned} \quad (2)$$

onde \mathcal{V} é o espaço de deslocamentos admissíveis, \mathbf{C} é o tensor constitutivo do material e \mathbf{u} e \mathbf{v} são campos de deslocamentos.

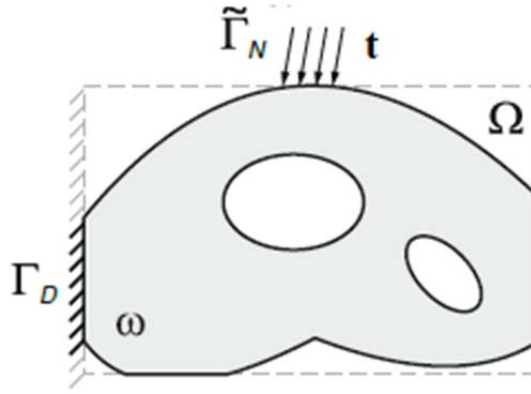


Figura 2. Domínio de projeto estendido. Fonte: Talischi et al. 2012b.

O objetivo da otimização topológica é encontrar a forma mais eficiente $\omega \subseteq \Omega$ de um sistema físico cujo comportamento é representado pela solução \mathbf{u}_ω . A forma ω corresponde à configuração mais rígida submetida a cargas aplicadas e condições de contorno; Γ_D e Γ_N formam uma partição de $\partial\Omega$, e $\tilde{\Gamma}_N \subseteq \Gamma_N$ define a região do contorno onde as trações diferentes de zero \mathbf{t} são especificadas. Para que o problema ótimo da equação (2) seja não trivial, vamos supor que para cada forma ω admissível, $\partial\omega \cap \Gamma_D$ tenha uma área de superfície diferente de zero e $\tilde{\Gamma}_N \subseteq \partial\omega$. Isso reflete o desejo de que as formas admissíveis ω são suportadas em Γ_D e submetidas às cargas de projeto definidas em $\tilde{\Gamma}_N$. Note-se que o limite livre de ω , ou seja, $\partial\omega / \partial\Omega$, é livre de tração. Desta forma, o carregamento é não dependente da forma ótima (Talischi et al. 2012b).

Em geral, os problemas de otimização topológica consistem na minimização da flexibilidade (equivalente à maximização da rigidez). Este problema equivale a encontrar a configuração mais rígida sob cargas aplicadas e condições de contorno. O problema de minimização da flexibilidade J pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \inf_{\rho} J(\rho) &= \int_{\Omega} \mathbf{C}(\rho) \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\tilde{\Gamma}_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{s} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq V_f |\Omega| \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

onde V_f é a fração de volume e $|\Omega|$ é volume do domínio Ω . O tensor $\mathcal{C}(\rho)$, que depende da densidade do material $\rho(x)$, é definido de acordo com M. P. Bendsøe & Sigmund 1999 que utiliza o modelo SIMP (material isotrópico sólido com penalização, onde p representa o fator de penalização e \mathcal{C}^0 é o tensor do material na fase sólida, ou seja, para $\rho = 1$):

$$\mathcal{C}(\rho) = [\varepsilon + (1 - \varepsilon)\rho^p]\mathcal{C}^0 \quad (4)$$

As regiões sólidas e vazias são preenchidas com os tensores \mathcal{C}^0 e $\varepsilon\mathcal{C}^0$, respectivamente, onde ε é escolhido como 10^{-4} . O parâmetro de penalização, p , está normalmente definido no intervalo de 1 até 4. A Eq. (3), na sua forma discretizada, é expressa como:

$$\begin{aligned} \inf_{\rho} J &= \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\ \text{s. t. } \left\{ \begin{array}{l} \sum_e |e| \rho_e \leq V_f |\Omega| \\ \mathbf{K}(\rho) \mathbf{U} = \mathbf{F} \end{array} \right. , \end{aligned} \quad (5)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{U} vetor de deslocamentos nodais global e \mathbf{F} nodal vetor da forças externas global.

2.2 Métodos numéricos

Nesta seção serão apresentados os métodos numéricos utilizados para solução das equações da elasticidade linear que aparecem nos problemas de otimização topológica.

2.2.1 VEM

Inicialmente, descreveremos o Método dos Elementos Virtuais (VEM) seguindo o desenvolvimento apresentado por Gain *et al.* 2013 e Paulino & Gain 2015.

Considere uma partição do domínio Ω em elementos que não se sobrepõem, e , de diâmetro máximo h . A aproximação de Galerkin \mathbf{u}_h de \mathbf{u} pertence ao espaço discreto conforme $\mathcal{V}_h \subseteq \mathcal{V}$, que consiste em campos de deslocamentos contínuos e cuja restrição para o elemento e pertence ao espaço de dimensão finita de funções suaves \mathcal{W} . O espaço \mathcal{W} contém todos os estados de deformação representados pelo elemento e , ou seja, as deformações lineares e os modos de ordem mais elevada. Devido à conformidade de \mathcal{V}_h , a forma bilinear contínua a e discreta a_h podem ser expressas como as somas das contribuições de todos os elementos:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_e a^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_e a_h^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (6)$$

Para construir o espaço \mathcal{W} , dois graus de liberdade são associados com cada um dos vértices de um elemento e . Portanto, consideramos a base canônica $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ da forma:

$$\varphi_{2i-1} = [\varphi_i, \quad 0]^T, \quad \varphi_{2i} = [0, \quad \varphi_i]^T \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

onde $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são um conjunto de coordenadas baricêntricas, que satisfazem as propriedades de partição de unidade, da completude linear, do delta de Kronecker e linear em trechos (função \mathcal{C}^0) ao longo das arestas de e . O VEM se caracteriza por estudar o comportamento do espaço \mathcal{W} ao longo das fronteiras do elemento e , tendo em vista que as funções de forma não são explicitamente computadas. Dessa forma, a matriz de rigidez é construída diretamente baseada na decomposição cinemática dos estados de deformação do espaço de funções suaves \mathcal{W} . Para simplificar as expressões, $\bar{\mathbf{v}}$ é a média dos valores da função \mathbf{v} avaliada nos vértices de e e $\langle \mathbf{v} \rangle$ é a média da área de \mathbf{v} . Definimos seis bases que definem o espaço das deformações lineares, \mathcal{P} , sobre o elemento e como:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(\mathbf{x}) &= [1, \quad 0], & \mathbf{p}_4(\mathbf{x}) &= [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})_{(2)}, \quad 0], \\ \mathbf{p}_2(\mathbf{x}) &= [0, \quad 1], & \mathbf{p}_5(\mathbf{x}) &= [0, \quad (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})_{(1)}], \\ \mathbf{p}_3(\mathbf{x}) &= [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})_{(1)}, \quad 0], & \mathbf{p}_6(\mathbf{x}) &= [0, \quad (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})_{(2)}], \end{aligned} \quad (8)$$

Em seguida, vamos definir um mapa de projeção $\pi_{\mathcal{P}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{P}$ para extrair deformações lineares como:

$$\pi_{\mathcal{P}} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \langle \nabla \mathbf{v} \rangle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (9)$$

onde a integral de área $\langle \nabla \mathbf{v} \rangle$ pode ser convertida para uma integral de linha da seguinte forma:

$$\langle \nabla \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{|e|} \int_e \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} = \frac{1}{|e|} \int_{\partial e} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} ds \quad (10)$$

Esta integral de linha pode ser calculada exatamente já que a função \mathbf{v} é assumidamente linear ao longo das arestas. Além disso, o mapa de projeção $\pi_{\mathcal{P}}$ linear pode ser expresso em termos das bases de \mathcal{P} como:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{P}} \mathbf{v} = & (\bar{\mathbf{v}})_{(1)} \mathbf{p}_1 + (\bar{\mathbf{v}})_{(2)} \mathbf{p}_2 + \langle \nabla \mathbf{v} \rangle_{(11)} \mathbf{p}_3 + \langle \nabla \mathbf{v} \rangle_{(12)} \mathbf{p}_4 + \langle \nabla \mathbf{v} \rangle_{(21)} \mathbf{p}_5 \\ & + \langle \nabla \mathbf{v} \rangle_{(22)} \mathbf{p}_6 \end{aligned} \quad (11)$$

Finalmente, qualquer estado de deformação $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$ pode ser decomposto cinematicamente como:

$$\mathbf{v} = \pi_{\mathcal{P}} \mathbf{v} + (\mathbf{v} - \pi_{\mathcal{P}} \mathbf{v}) \quad (12)$$

onde $(\mathbf{v} - \pi_{\mathcal{P}} \mathbf{v})$ representa o componente de ordem superior que pertence a um subespaço de dimensões $(2n - 6)$ do espaço \mathcal{W} . Com base na decomposição cinemática do estado de deformação e a propriedade de ortogonalidade da energia, a forma bilinear contínua pode ser reescrita como:

$$a^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a^e(\pi_{\mathcal{P}}\mathbf{u}, \pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) + a^e(\mathbf{u} - \pi_{\mathcal{P}}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) \quad (13)$$

O primeiro termo corresponde aos modos de deformação constante e pode ser exatamente calculado por meio da área do elemento e . O segundo termo corresponde a modos de deformação de ordem superior e é mais difícil de ser obtido. Este termo é substituído por uma estimativa s^e , não necessariamente precisa, que pode ser convenientemente calculada sem afetar a energia associada aos modos de deformação constantes. Assim, a Eq. (13) pode ser redefinida como:

$$a^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a^e(\pi_{\mathcal{P}}\mathbf{u}, \pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) + s^e(\mathbf{u} - \pi_{\mathcal{P}}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) \quad (14)$$

onde s^e é uma forma bilinear simétrica positiva definida escolhida de modo que se tenha a mesma energia do termo de consistência, *i.e.*, $s^e(\cdot, \cdot) = a^e(\cdot, \cdot)$, definida por Beirão da Veiga *et al.* 2013 como:

$$s^e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \alpha^e \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \quad (15)$$

onde α^e é um coeficiente positivo que garante o correto dimensionamento dos termos de ordem superior. Para implementar esta abordagem, definimos $\mathbf{P}_{\mathcal{P}}$ como a representação discreta da projeção $\pi_{\mathcal{P}}$:

$$\pi_{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi}_j = \sum_{k=1}^{2n} (\mathbf{P}_{\mathcal{P}})_{(kj)} \boldsymbol{\varphi}_k \quad (16)$$

Usamos a equação (11) para expressar $\pi_{\mathcal{P}}$ em termos das bases que geram o espaço de deformação linear como:

$$\pi_{\mathcal{P}} \boldsymbol{\varphi}_j = \sum_{l=1}^6 (\boldsymbol{w}_{\mathcal{P}})_{(jl)} \boldsymbol{p}_l \quad (17)$$

onde $\boldsymbol{w}_{\mathcal{P}}$ é uma matriz $2n \times 6$, cuja linha j_{th} é dada por:

$$\left[(\bar{\varphi}_j)_{(1)} (\bar{\varphi}_j)_{(2)} \langle \nabla \varphi_j \rangle_{(11)} \langle \nabla \varphi_j \rangle_{(12)} \langle \nabla \varphi_j \rangle_{(21)} \langle \nabla \varphi_j \rangle_{(22)} \right] \quad (18)$$

Usando a propriedade de precisão linear das funções de base canônicas apresentadas na Eq. (7) e expressando \boldsymbol{p}_l da Eq. (17) em termos da sua contrapartida discreta (amostradas nos vértices), obtemos:

$$\pi_{\mathcal{P}} \boldsymbol{\varphi}_j = \sum_{k=1}^{2n} (\boldsymbol{N}_{\mathcal{P}} \boldsymbol{w}_{\mathcal{P}}^T)_{(kj)} \varphi_k \quad (19)$$

Comparando a Eq. (19) com a Eq. (16), temos que $\boldsymbol{P}_{\mathcal{P}} = \boldsymbol{N}_{\mathcal{P}} \boldsymbol{W}_{\mathcal{P}}^T$, onde $\boldsymbol{N}_{\mathcal{P}}, \boldsymbol{W}_{\mathcal{P}}^T \in \mathbb{R}^{2n \times 6}$. Um bloco de três linhas de $\boldsymbol{N}_{\mathcal{P}}$, correspondentes ao $i_{ésimo}$ vértice do elemento e , é explicitamente expresso como:

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{N}_{\mathcal{P}})_{(2i-1:2i,:)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_i - \bar{x})_{(1)} & (x_i - \bar{x})_{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (x_i - \bar{x})_{(1)} & (x_i - \bar{x})_{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

e um bloco de três linhas de $\boldsymbol{w}_{\mathcal{P}}$ é expresso como:

$$(\boldsymbol{w}_{\mathcal{P}})_{(2i-1:2i,:)} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 & (\boldsymbol{q}_i)_{(1)} & (\boldsymbol{q}_i)_{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 & 0 & (\boldsymbol{q}_i)_{(1)} & (\boldsymbol{q}_i)_{(2)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde o vetor da integral de linha \boldsymbol{q}_i pode ser exatamente calculado de acordo com (Ahmad *et al.* 2013), como segue :

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{|e|} \int_{\partial e} \varphi_i \mathbf{n} ds = \frac{1}{|e|} (l_{i-1} \mathbf{n}_{i-1} + l_i \mathbf{n}_i) \quad (22)$$

Na figura 3, explica-se cada um dos componentes necessários para o cálculo da integral anterior.

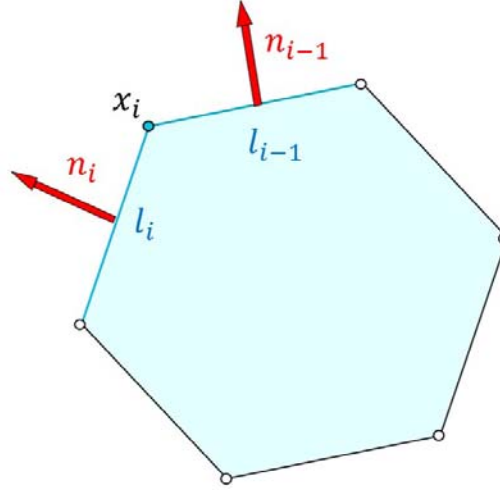


Figura 3. Integração ao longo das arestas (linhas).

Usando as matrizes $\mathbf{W}_{\mathcal{P}}$ e $\mathbf{P}_{\mathcal{P}}$, a matriz de rigidez elementar pode então ser calculada a partir da Eq.(14), ou seja:

$$(\mathbf{K}_e)_{(jk)} = a_h^e(\varphi_j, \varphi_k) = a^e(\pi_{\mathcal{P}}\varphi_j, \pi_{\mathcal{P}}\varphi_k) + s^e(\varphi_j - \pi_{\mathcal{P}}\varphi_j, \varphi_k - \pi_{\mathcal{P}}\varphi_k) \quad (23)$$

Utilizando a Eq. (17), o primeiro termo de \mathbf{K}_e pode ser simplificado como:

$$a^e(\pi_{\mathcal{P}}\varphi_j, \pi_{\mathcal{P}}\varphi_k) = |e|(\mathbf{W}_{\mathcal{P}}\mathbf{D}\mathbf{W}_{\mathcal{P}}^T)_{(jk)} \quad (24)$$

onde a matriz \mathbf{D} é uma função do tensor de elasticidade \mathbf{C} e é dada por:

$$(\mathbf{D})_{(lm)} = \frac{1}{|e|} a^e(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_m) = \mathbf{C}\nabla(\mathbf{p}_l) : \nabla(\mathbf{p}_m), \quad l, m = 1, \dots, 6 \quad (25)$$

Com base na escolha de mais baixo custo computacional de s^e Eq. (15), o segundo termo da matriz de rigidez é escrito como:

$$s^e(\varphi_j - \pi_P \varphi_j, \varphi_k - \pi_P \varphi_k) = [(I - P_P)^T S^e (I - P_P)] \quad (26)$$

onde $(S^e)_{(jk)} = (\varphi_j, \varphi_k)$ corresponde a $S^e = \alpha^e I_{2n}$. Além disso, é preciso assegurar que $s^e(\cdot, \cdot)$ seja da mesma ordem de grandeza que $\alpha^e(\cdot, \cdot)$. Então, um valor apropriado desta energia segundo (Beirão da Veiga *et al.* 2013b) pode ser expresso como:

$$\alpha^e = \bar{\alpha}^e \text{trace}(|e| W_P D W_P^T). \quad (27)$$

onde $\bar{\alpha}^e$ é o fator de estabilidade.

Finalmente, a matriz de rigidez elementar é dada por:

$$K_e = |e| W_P D W_P^T + \alpha^e (I - P_P)^T (I - P_P) \quad (28)$$

A matriz de rigidez global e o vetor de força global são obtidos pelo processo tradicional de montagem adotado no método dos elementos finitos (Cook *et al.* 2002).

O algoritmo de otimização utilizado faz uso dos gradientes da função objetivo e da restrição. Desta forma, precisamos do gradiente da flexibilidade (J) com respeito às variáveis de projeto (ρ_e). Derivando-se a função objetivo do problema definido em (5) temos:

$$\frac{\partial J}{\partial \rho_e} = -p(1 - \epsilon) \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T K_e \mathbf{u}_e \quad (29)$$

onde resulta uma multiplicação da variável de projeto pela matriz de rigidez da Eq. (28), porque existe uma dependência linear nos dois termos da função D relacionada à matriz constitutiva C , tensor que inclui as variáveis de projeto; no

primeiro termo de forma explícita e no segundo de forma implícita pelo coeficiente de escala da Eq. (27).

2.2.2 FEM

Para um problema de elasticidade linear (Cook *et al.* 2002) a matriz de rigidez elástica de um elemento finito pode ser expressa como:

$$K_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad ; \quad K_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} |J| d\xi d\eta \quad (30)$$

onde (ξ, η) indicam as coordenadas paramétricas com intervalo $[-1,1]$; $|J|$ é a determinante da matriz Jacobiana; \mathbf{C} a matriz constitutiva do material; e \mathbf{B} é matriz de deformação-deslocamento que contém as derivadas das funções de forma. Por exemplo, para um elemento quadrado (Q4) com quatro nós e dois graus de liberdade por cada nó, a matriz \mathbf{B} é expressa como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (31)$$

e as funções de forma para o tipo de elemento do exemplo anterior que formam a matriz de interpolações (31) são expressadas como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (32)$$

A matriz constitutiva \mathcal{C} depende da densidade do material e para o caso de estado plano de tensão pode ser expressa como:

$$\mathcal{C}(\rho_e) = \frac{E(\rho_e)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (33)$$

onde ρ_e é a densidade elementar do material que varia entre [0,1] e as constantes do material, E e ν , são, respectivamente, o módulo de Young e coeficiente de Poisson.

Para o caso de elementos finitos poligonais, a integração numérica é feita por subdivisão em triângulos (Sukumar & Tabarraei 2004). A formulação que adotamos é baseada nas funções de forma Laplace e transformações isoparamétricas. A função de forma avaliada no ponto (ξ) e correspondente ao nó de um dado polígono de n-arestas é definida como:

$$N_i(\xi) = \frac{\alpha_i(\xi)}{\sum_{j=1}^n \alpha_j(\xi)} \quad (34)$$

onde:

$$\alpha_i(\xi) = \frac{A(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})}{A(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \xi)A(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \xi)} \quad (35)$$

e $A(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})$ é a área do triângulo definida pelos vértices $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ conforme ilustrado na Figura 4.

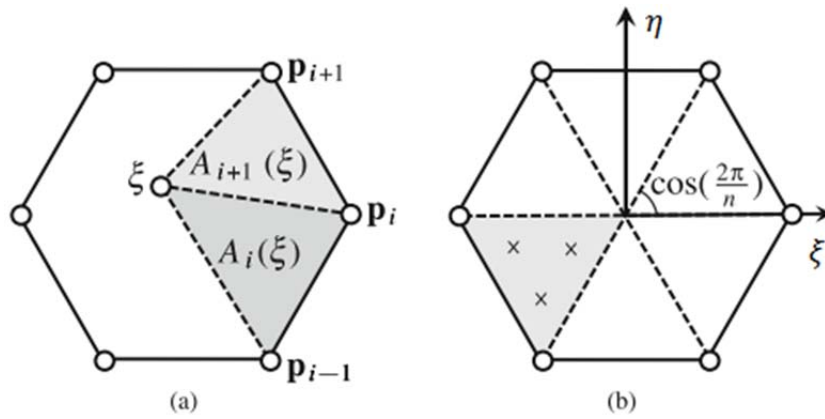


Figura 4. (a) áreas triangulares utilizadas para calcular as funções de forma dos elementos poligonais e (b) triangulação utilizada para integração numérica. Fonte: Talischi *et al.* 2012b.

Um mapeamento isoparamétrico regular de qualquer polígono convexo de n -vértices pode ser construído usando estas funções de forma, porque o campo interpolado varia linearmente nos contornos e a aproximação resultante representa um elemento conforme. Fundamentado na abordagem de elementos finitos descrita anteriormente, as funções de forma são definidas no domínio local, onde as integrais oriundas da formulação fraca são avaliadas numericamente. Um polígono de referência de n -lados é subdividido em n triângulos (conectando-se o seu centróide com os vértices), e as regras de quadratura são usadas em cada triângulo (Talischi *et al.* 2012b).

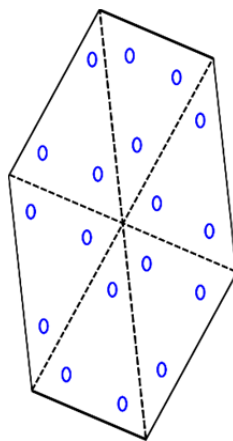


Figura 5. Esquema de "triangulação" para integração numérica

A integração numérica usada para o caso poligonal foi o esquema de “triangulação” descrito em (Talischi *et al.* 2014). Neste esquema, cada polígono é dividido em triângulos a partir de um ponto no centroide, conforme apresentado na Figura 5, e cada triângulo é integrado usando as regras de quadratura de Gauss para triângulos.

2.2.3 SFEM

Nesta seção, apresentamos o método CSFEM, desenvolvido por (Natarajan *et al.* 2014), para solução das equações governantes do problema de elasticidade linear, apresentado na Eq. (2).

A energia de deformação é calculada de forma similar ao método dos elementos finitos. Entretanto, a matriz de rigidez é calculada utilizando-se o procedimento de projeção das deformações. Nesta abordagem, o campo de deformações ε_{ij}^h , utilizado para calcular a matriz de rigidez, é definido a partir de uma média ponderada do campo de deformações padrão ε_{ij}^h . O campo suavizado de deformações, avaliado no ponto x_c de um dado elemento e , pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^h &= \int_e \varepsilon_{ij}^h(x) \Phi(x - x_c) dx \\ &= \int_e Bq \Phi(x - x_c) dx = \tilde{B}u\end{aligned}\tag{36}$$

onde u é o vetor de deslocamentos, Φ é uma função suavizada dada por:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{|\Omega_c|}, & x_c \in \Omega_c \\ 0, & x_c \notin \Omega_c \end{cases}\tag{37}$$

A partir da Eq. (37), a matriz de deformação-deslocamento suavizada sobre cada sub-célula pode ser escrita como:

$$\tilde{\mathbf{B}}_c = \frac{1}{|\Omega_c|} \int_{\Omega_c} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (38)$$

usando o teorema da divergência, obtemos:

$$\tilde{\mathbf{B}}_c = \frac{1}{|\Omega_c|} \int_{\Gamma_c} \begin{bmatrix} n_x N_i & 0 \\ 0 & n_y N_i \\ n_y N_i & n_x N_i \end{bmatrix} d\Gamma \quad (39)$$

onde N_i é a função de forma associada ao $i_{ésimo}$ nó. A matriz de rigidez suavizada elementar é computada pela soma das contribuições de cada uma das sub-células, tal como ilustrado na Figura 6, é dada por:

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \sum_{c=1}^{n_c} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}_c |\Omega_c| \quad (40)$$

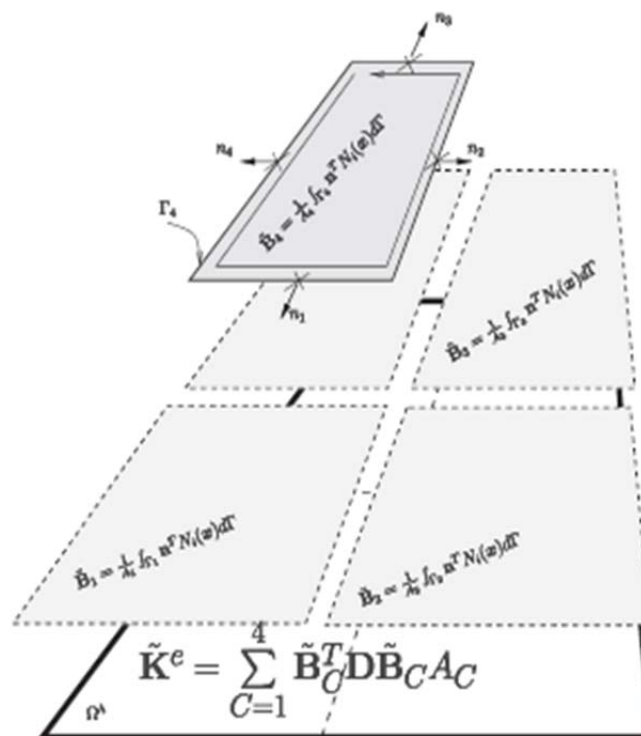


Figura 6. Cálculo do operador gradiente discretizado suavizado.

Fonte: Natarajan et al. 2015 .

onde n_c é o número das células de suavização do elemento. Para a construção das funções de forma sobre polígonos arbitrários, empregamos uma técnica de divisão do elemento em triângulos, a partir do centro geométrico e cada uma das arestas do polígono (Dai et al. 2007). Como ilustrado na Figura 7, o ponto central é obtido a partir da média aritmética simples das coordenadas dos vértices do polígono, ou seja:

$$(x_o, y_o) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i, y_i) \quad (41)$$

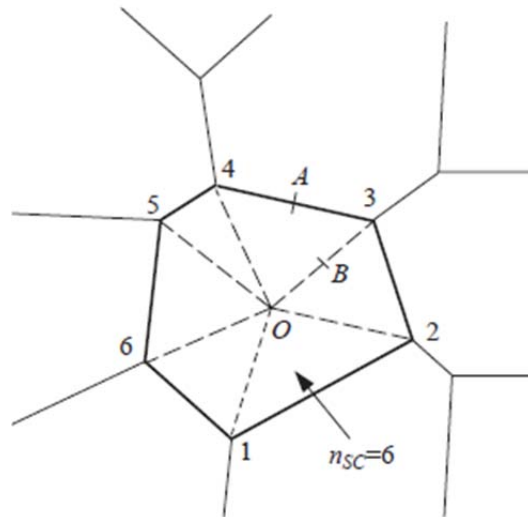


Figura 7. Ponto central O de um polígono. Fonte: Dai et al. 2007.

onde n é o número de nós do elemento poligonal. A função de forma no ponto O é dada por $[1/n \cdots 1/n]$ com tamanho $1 \times n$. Neste trabalho foi usada esta generalização para n -arestas proposta por (Natarajan et al. 2014).

3

Experimentos e resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados dos experimentos realizados na simulação de cada um dos métodos numéricos descritos no capítulo anterior. Apresentamos as seguintes simulações numéricas realizadas em MATLAB: análise do fator de estabilidade do VEM, estudo de convergência de cada método, comparação numérica entre os métodos VEM, n-SFEM e FEM e, finalmente, o ganho de desempenho proporcionado pelo uso dos métodos aproximados no contexto da otimização topológica.

3.1

Códigos computacionais

Neste trabalho, diversas ferramentas para a análise do problema de elasticidade foram utilizadas. Todos os resultados numéricos a serem apresentados foram obtidos por meio de algoritmos desenvolvidos em MATLAB. O código correspondente ao VEM foi implementado por Arun L. Gain, integrante da equipe do professor Glaucio H. Paulino da Universidade de Illinois, nos Estados Unidos, que cedeu como resultado de uma parceria de pesquisa. O código correspondente ao n-SFEM foi obtido em Natarajan *et al.* 2014. Para tratar os problemas apresentados, estes códigos foram adaptados pelo autor e incorporados ao framework computacional `PolyTop`.

3.2

Fator de estabilidade do VEM

Nesta seção, será apresentado um estudo do coeficiente de estabilidade $\bar{\alpha}^e$ da equação (27) do VEM. Para tanto, propõe-se um problema com solução analítica conhecida: uma viga engastada com uma carga na extremidade livre. Considere-se uma viga retangular em balanço, de dimensões $a = 10$, $b = \frac{1}{2}$ (ver Figura 8) preenchida com material isotrópico de módulo de Young E e

coeficiente de Poisson ν , submetida à carga na extremidade livre. Os seguintes valores numéricos foram adotados: $F = 0.1$, $E = 10^4$ e $\nu = 0.3$.

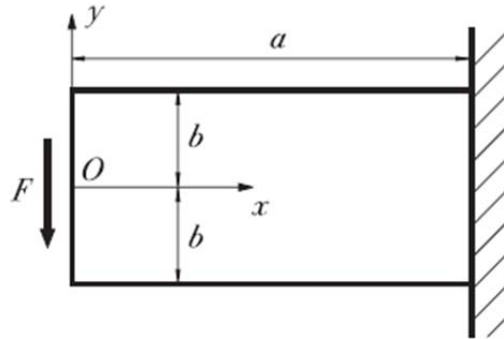


Figura 8. Viga engastada com carregamento na extremidade. Fonte: (Barber 2009)

A força aplicada pode ser expressa como:

$$\int_{-b}^b \sigma_{xy} dy = F; \quad x = 0, \quad (42)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3F(b^2 - y^2)}{4b^3}$$

A solução exata para este problema foi desenvolvida no livro (Barber 2009 p. 123-126) e é expressa como:

$$u_x = \frac{3Fx^2y}{4Eb^3} + \frac{3F(1+\nu)y}{2Eb} - \frac{F(2+\nu)y^3}{4Eb^3} + A - Cy, \quad (43)$$

$$u_y = \frac{3F\nu xy^2}{4Eb^3} - \frac{Fx^3}{4Eb^3} + B + Cx$$

as condições de contorno para este problema são dadas como:

$$u_x = 0; \quad u_y = 0; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0; \quad \text{em } x = a, y = 0. \quad (44)$$

substituindo a Eq. (43) em (44) temos que:

$$A = 0; B = -\frac{Fa^3}{2Eb^3}; C = \frac{3Fa^2}{4Eb^3} \quad (45)$$

Na Figura 9 são apresentados os erros relativos da Eq. (46) nos valores dos deslocamentos em função de $\bar{\alpha}^e$ coeficiente de escala da matriz de estabilidade para cada tipo de malha apresentada na Figura 10, i. e. poligonais (Poly), Voronoi randômicas (Random) e quadradas (Square).

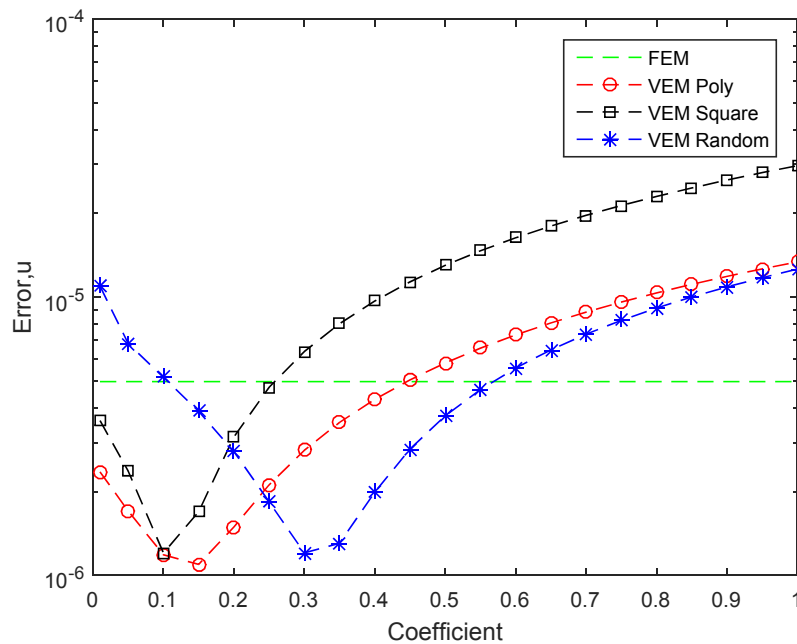


Figura 9 Análise do fator de estabilidade

De acordo com os resultados apresentados na Figura 9, a constante $\bar{\alpha}^e$ é escolhida como 0.2 para os próximos experimentos por estar associada ao menor erro obtido em todos os tipos de malha.

3.3 Convergência

Nesta seção, realizamos um estudo sobre a precisão dos métodos numéricos apresentados. O objetivo desse estudo é mostrar que a convergência numérica apresenta um comportamento monotônico e que os resultados são estáveis para os diferentes tipos de malha utilizados. Além disso, queremos comparar os diferentes métodos com relação ao desempenho computacional. Os resultados estão detalhados na Tabela 1. Os resultados da discretização quadrilateral, poligonal e randômica são obtidos pelo gerador de malha PolyMesher (Talischi *et al.* 2012a).

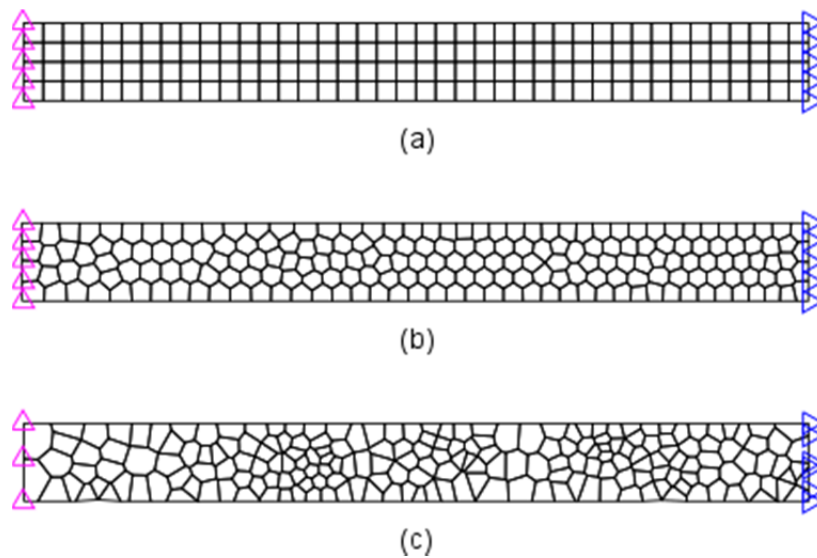


Figura 10. Tipos de malha. (a) malha quadrilateral, (b) malha poligonal, (c) malha randômica.

Esses resultados são verificados em termos do erro relativo nos deslocamentos e o tempo de CPU para cálculo da matriz de rigidez. O erro da solução dos métodos numéricos que se baseiam na subdivisão em elementos é expresso por Fish & Belytschko 2007 usando a norma de uma função definida como:

$$\|E\|_{L2} = \|\mathbf{u}^{ex}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x})\| = \left(\int_{\Omega} \left(\mathbf{u}^{ex}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \quad (46)$$

onde \mathbf{u}^{ex} é a solução exata expressa em (43) e \mathbf{u}^h é a solução aproximada de cada um dos métodos numéricos apresentados na seção 2.2 Métodos numéricos. Esta descrição do erro pode ser considerada como uma medida do erro médio quadrático. As análises descritas na Tabela 1 foram feitas em uma máquina com um processador Intel® Core i7-X980 @ 3,33 GHz e 24,0 GB de RAM rodando em MATLAB R2015a. Os experimentos foram realizados com os métodos FEM, VEM e n-SFEM utilizando-se as mesmas malhas e medindo-se o tempo da montagem da matriz de rigidez sob as mesmas condições.

Tabela 1. Dimensões das malhas nos experimentos

Malha de quadrados			Malha poligonal		
Elementos	#DoFs	Diâmetro(h)	Elementos	#DoFs	Diâmetro(h)
80x8	1458	0,1768	640	511,6	0,0326
160x16	5474	0,0884	2560	2029,6	0,0162
320x32	21186	0,0442	10240	8126,8	0,0081
640x64	83330	0,0221	40960	32516,8	0,0040
1280x128	330498	0,0110	163840	130053,6	0,0020
2560x256	1316354	0,0055	655360	520226	0,0010

A Figura 11 mostra o logaritmo da norma de erro como uma função do logaritmo do tamanho característico do elemento (h) para malhas quadrilaterais. Como pode ser visto a partir destes resultados, o erro varia linearmente com o tamanho do elemento. A implicação mais importante é que, se o tamanho do elemento é reduzido pela metade, o erro correspondente também diminui de um fator 2 para elementos lineares.

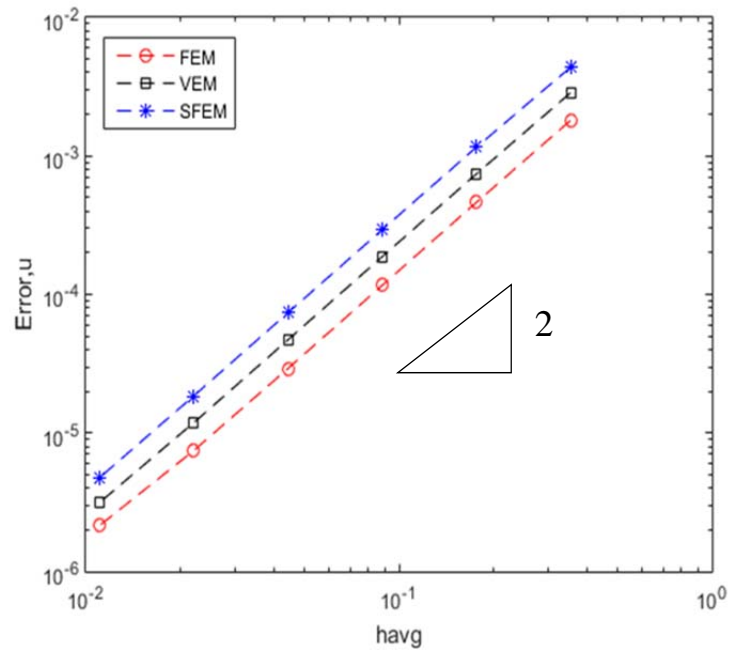


Figura 11. Análise de convergência em malhas quadrilaterais

Com o intuito de avaliar o desempenho dos diferentes métodos numéricos, foi medido o tempo da montagem da matriz de rigidez de cada um deles e plotado contra o número de graus de liberdade, conforme ilustrado na Figura 12.

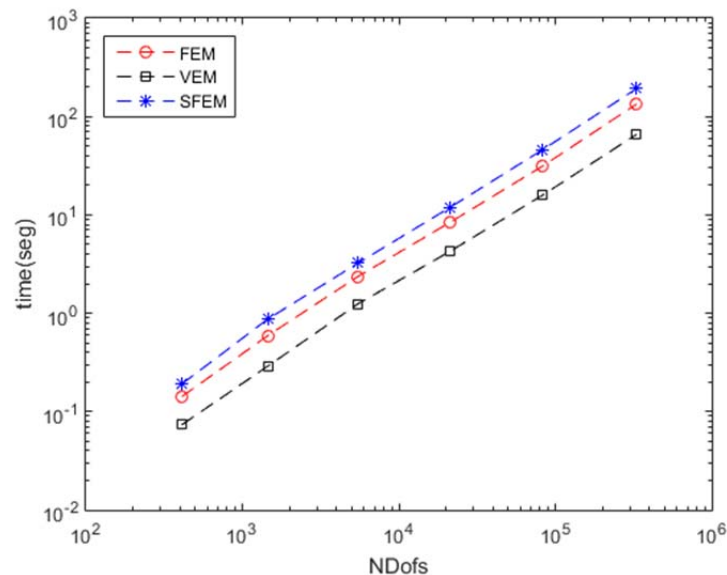


Figura 12. Tempo de convergência malhas quadrilaterais

O método dos elementos virtuais apresenta um tempo menor para a montagem da matriz e, conseqüentemente, um tempo total menor na solução do problema elástico que aparece nos problemas de otimização topológica.

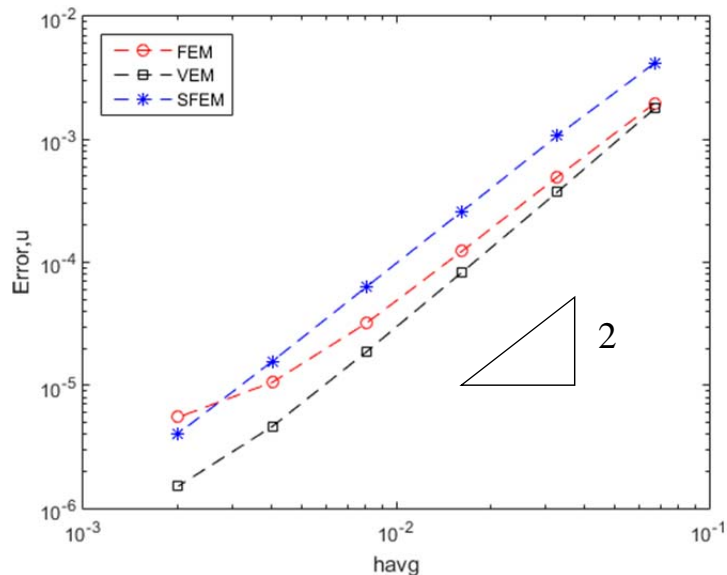


Figura 13. Análise de convergência em malhas poligonais

Para malhas poligonais (Figura 13), os resultados são produzidos a partir de uma média simples avaliada em 5 cinco malhas distintas. Estes resultados demonstram que os esquemas de quadratura de triângulo de ordem 2 (3 pontos) comumente usados para elementos finitos poligonais podem levar a erros de consistência que persistem sob refinamento de malha e, posteriormente, podem tornar as aproximações não convergentes (ou seja, não conseguindo a convergência monotônica própria dos elementos finitos na sua componente linear). Uma correção deste problema para elementos finitos poligonais foi apresentada por (Talischi *et al.* 2015), onde a melhoria foi feita nos gradientes das funções de interpolação.

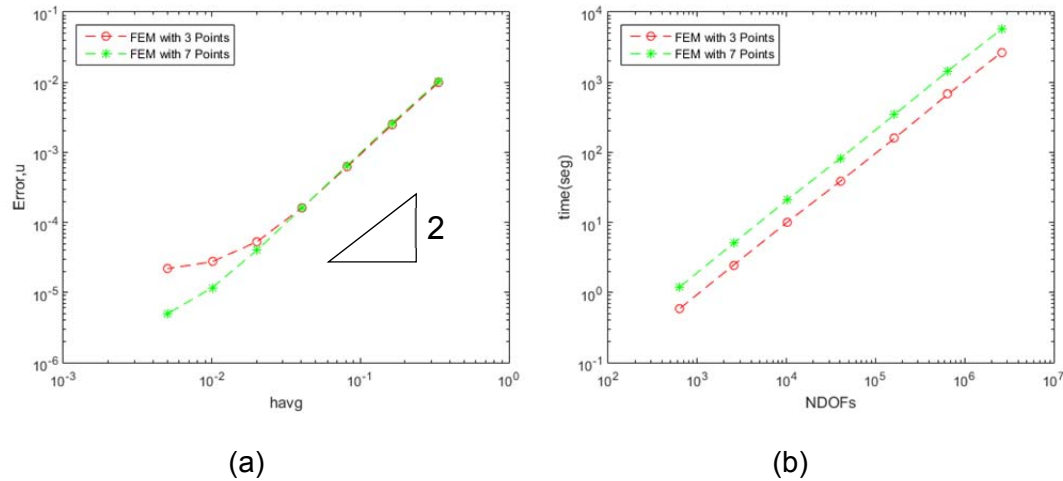


Figura 14 . (a) Convergencia do FEM com 3 (vermelho) e 7 (verde) pontos de integração. (b) Tempo em função do número de graus de liberdade

Neste trabalho, o número de pontos por triângulo de integração foi aumentado de 3 pontos a 7 para se atingir o nível de convergência ilustrado na Figura 14. Consequentemente, foi observado um maior custo computacional do método de elementos finitos poligonais para se obter o comportamento linear do problema elástico.

Os métodos dos elementos virtuais e dos elementos finitos suavizados têm uma convergência linear para o problema elástico da mesma forma que o método dos elementos finitos, onde o logaritmo do erro varia linearmente com o tamanho do elemento, como ilustrado na Figura 15.

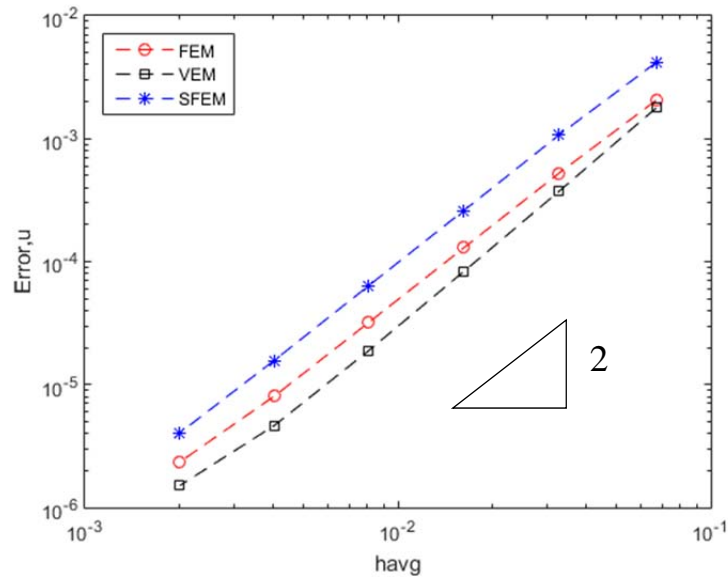


Figura 15. Análise de convergência de malhas poligonais com a correção de integração numérica do FEM

Na Figura 16 nota-se que o desempenho do VEM para a montagem da matriz de rigidez foi mais representativo nas malhas poligonais do que nas quadrilaterais, tendo em conta o custo computacional da integração numérica (ver Figura 15).

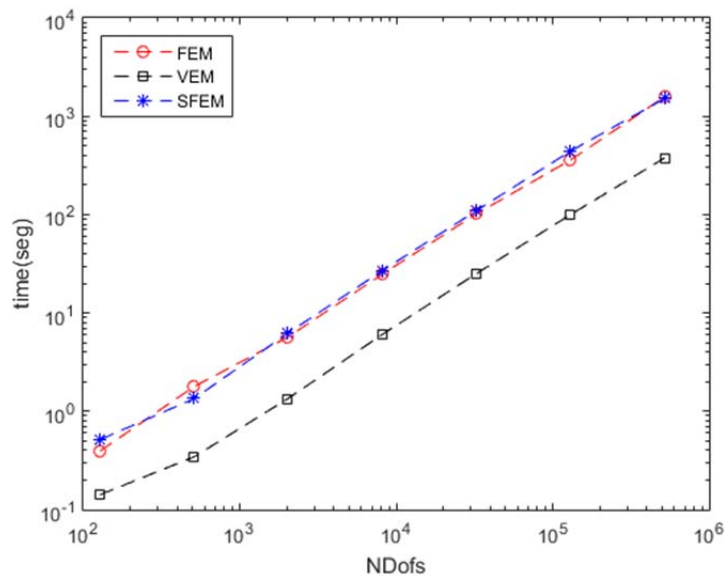


Figura 16. Tempo de convergência para malhas poligonais

Da mesma forma que no caso das malhas poligonais, os resultados obtidos nas malhas randômicas correspondem à média de 10 análises.

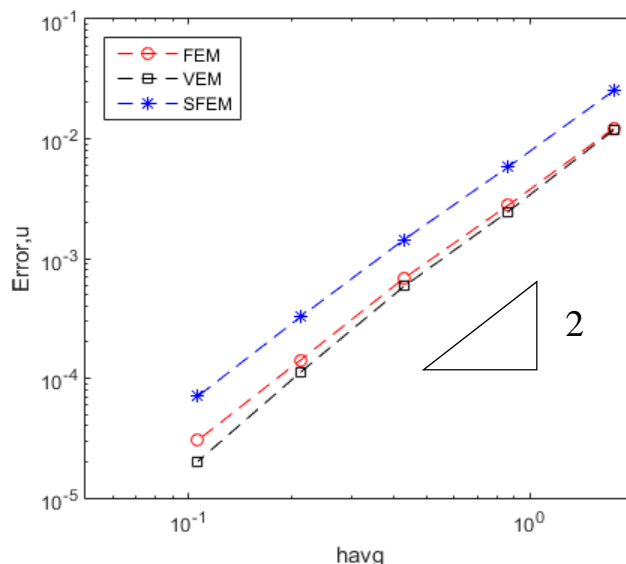


Figura 17. Análise de convergência em malhas randômicas

Foram estudados os comportamentos do FEM, VEM, e n-SFEM sob refinamento de malha para diferentes tipos de elementos mostrados na Figura 10. As Figuras 11, 13, 15 e 17 mostram o erro relativo em função do tamanho característico dos elementos da malha. As Figuras 12 e 16 mostram o tempo de montagem da matriz de rigidez para malhas quadrilaterais e poligonais, respectivamente. As formas bilineares discretas no VEM e n-SFEM são construídas de modo a serem contínuas, e os deslocamentos obtidos são compatíveis com a solução do problema elástico. Os resultados obtidos demonstram que o VEM apresenta um melhor desempenho computacional quando comparado ao FEM e n-SFEM.

3.4 Convergência com elementos não convexos

Uma das vantagens dos métodos VEM e n-SFEM é que eles dependem unicamente da geometria e não de funções de forma e suas condições de estabilidade, uma vez que tais funções não são computadas explicitamente. Para exemplificar esta característica, apresenta-se uma malha de elementos não

convexos, utilizando o gerador de malha proposto por Carvalho & Valério 2012, em um modelo estudado por Paulino & Gain 2015, conforme ilustrado na Figura 18.

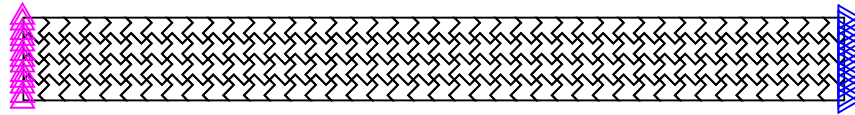


Figura 18. Malha de elementos não convexos

Vale ressaltar que, para elementos não convexos, o método generalizado a n -arestas do SFEM usado neste trabalho (denominado de n -SFEM pelo autor) apresenta problemas de convergência em função do processo de triangulação interna que cria triângulos com área nula, o que implica diretamente na singularidade da matriz de rigidez. Por esta razão, não foi possível a obtenção da solução numérica, utilizando o n -SFEM, para problemas com elementos não convexos. Por outro lado, os elementos finitos poligonais não convexos também apresentam problemas na formação de suas funções de base, como por exemplo a não negatividade no domínio do elemento. Consequentemente, para elementos não convexos, são apresentados os resultados apenas para o VEM.

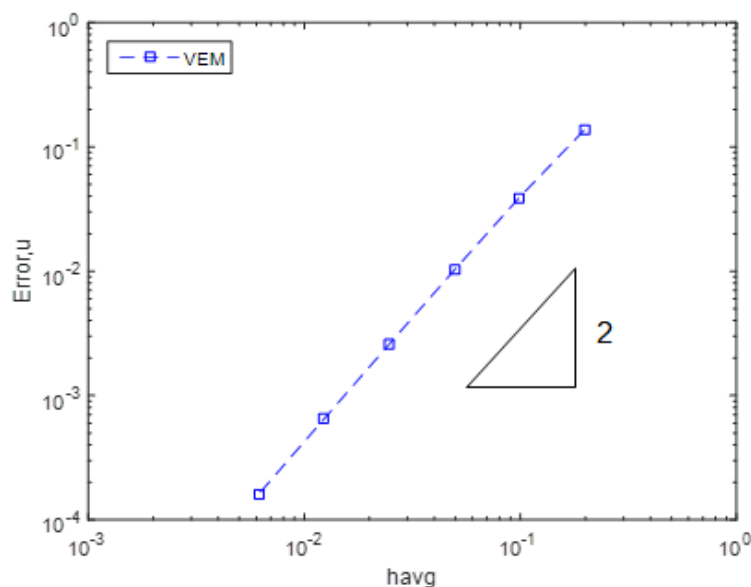


Figura 19. Análise de convergência em malhas não convexas

A partir do estudo apresentado com elementos não convexos, é possível concluir que o VEM é capaz de solucionar problemas elásticos independentemente da geometria de seus elementos. Esta característica o torna extremamente atraente para problemas com geometrias complexas e também problemas que apresentam grandes deformações, cujos elementos podem, eventualmente, se tornar não convexos ao longo da análise.

3.5 Otimização topológica

Nesta seção apresentamos um estudo comparativo da eficiência computacional dos códigos desenvolvidos para cada um dos métodos numéricos utilizados neste trabalho. Para efeitos de comparação, foi utilizado o problema de otimização topológica MBB (ver Figura 20), discretizado por meio de elementos poligonais. Este problema, que também foi estudado por Talischi *et al.* 2012a, apresenta as dimensões $L = 3$ e $h = 1$, está submetida a uma carga aplicada $F = 1$, um fator de penalidade fixo e igual a 3 e um número máximo de iterações de 100.



Figura 20. Geometria e condições de contorno do problema MBB

Tamanho da malha	2700	7500	30000	120000
(# elementos)				

PolyTop FEM	37,27	104,74	471,86	2883,91
PolyTop VEM	32,51	93,25	415,33	2688,36
PolyTop SFEM	38,99	107,54	501,06	3089,51

Tabela 2. Desempenho dos métodos numéricos no processo de otimização topológica

Observa-se um melhor desempenho da versão do PolyTop que utiliza o método dos elementos virtuais na solução dos problemas da elasticidade. É importante ressaltar que, para malhas não estruturadas, não se pode tirar proveito dos elementos regulares no pré-processamento das matrizes de rigidez elementares usadas no PolyTop, para uma comparação com o código 88-linhas de otimização topológica (Andreassen *et al.* 2011). O resultado da otimização com 30000 elementos é apresentado Figura 21.

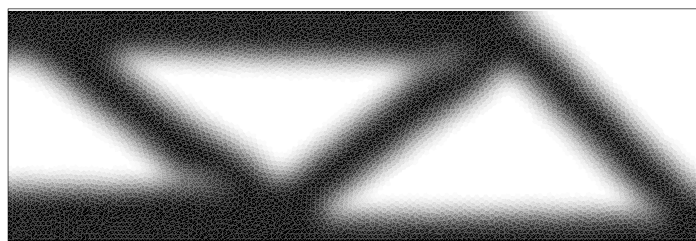


Figura 21. Ótima topologia para o problema MBB com $R = 0,12$ e fração de volume = 0,5

Adicionalmente, este problema foi resolvido utilizando-se elementos não convexos e tendo o VEM como o módulo de solução das equações governantes. É importante ressaltar que, de acordo com Paulino & Gain 2015 as tesselações com elementos não convexos podem representar o futuro da otimização topológica.

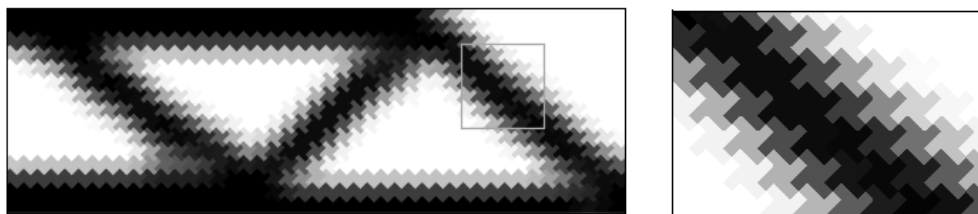


Figura 22. Ótima topologia para o problema MBB com elementos não convexos

Conforme ilustrado nas Figura 21 e Figura 22, os resultados obtidos, i.e. as topologias ótimas, foram muito semelhantes. Observa-se também que, dentre os métodos numéricos estudados neste trabalho, o VEM se mostrou mais preciso e eficiente além de ser capaz de resolver problemas com elementos não convexos.

Na Figura 23 apresentamos a geometria com dimensões $L = 4$ e $h = 3$, condições de contorno, força $F=1$ e os resultados da otimização topológica obtidos com o VEM e com a utilização de malhas poligonais. Este modelo apresenta os seguintes dados numéricos: parâmetro $\varepsilon = 10^{-4}$, módulo de Young $E^0 = 1$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, redução de volume de 45%, raio do filtro igual a 3% da menor dimensão do domínio, modelo SIMP, fator de penalização variando de 1 até 4 e 50000 elementos poligonais.

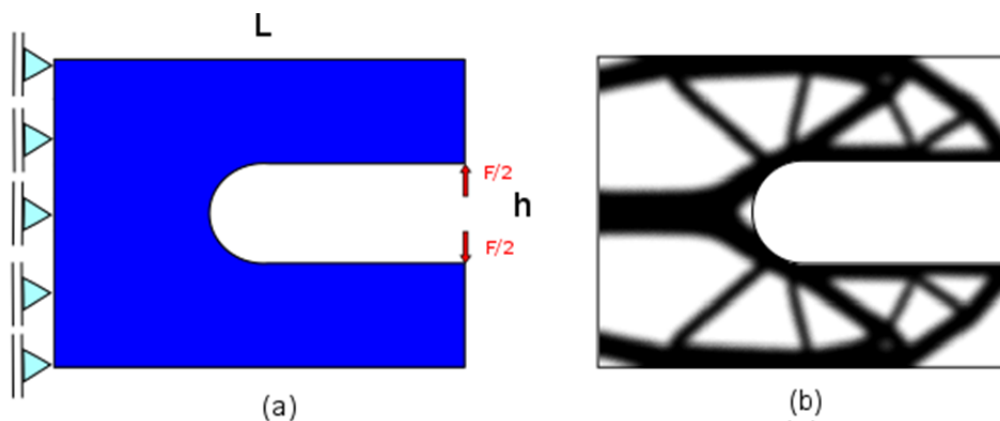


Figura 23. (a) Problema do domínio clipe. (b) topologia final para o domínio clipe com $R = 0,09$ e fração de volume = 0,45

4

Conclusões e sugestões

Neste trabalho foi realizado um estudo comparativo entre diferentes métodos numéricos, especificamente o VEM, n-SFEM e FEM, para solução dos problemas da elasticidade no contexto da otimização topológica. Para tanto, foi implementado um framework em MATLAB para análises em diferentes tipos de malhas, considerando elementos convencionais e poligonais, convexos e não convexos.

As principais conclusões desde trabalho são:

- Foi desenvolvida uma rotina eficiente para solução do problema de elasticidade considerando diferentes tipos de métodos numéricos baseados em discretização do domínio. Para esta análise cada método constrói uma matriz de rigidez representando as características do domínio e seu material. Medindo o tempo da montagem desta matriz observou-se que o VEM tem o melhor desempenho frente aos outros métodos. O desempenho desta implementação foi avaliado usando diferentes tipos de malha, obtendo-se assim, um tempo menor no VEM em todas as análises. Consequentemente o VEM se mostrou bastante eficiente para ser utilizado em problemas de otimização topológica;
- O método dos elementos virtuais se mostrou convergente para o problema de elasticidade linear, inclusive para malhas não convexas, sendo assim uma solução viável em problemas onde malhas triangulares/quadrangulares são difíceis de serem obtidas;
- Os elementos virtuais, se mostraram bastante eficientes na solução do problema de elasticidade utilizando malhas com elementos não convexos. Esta característica oferece uma grande flexibilidade na solução de problemas em domínios complexos, de difícil geração de malha.

Para trabalhos futuros, propomos as seguintes tarefas:

- A extensão da implementação realizada para problemas tridimensionais, ou seja, estender para elementos poliédricos onde as funções de forma para o FEM não podem ser obtidas facilmente;
- A implementação do VEM para os problemas de elasticidade não linear com o objetivo de obtenção de um maior conjunto de materiais a serem simulados;
- A reformulação do método n-SFEM para elementos não convexos, de tal forma que a triangulação em sub-células não dependa do centro geométrico do elemento e, com isso, sejamos capazes de utilizar geometrias não convexas em problemas de elasticidade.

- Ahmad, B. *et al.*, 2013. **Equivalent projectors for virtual element methods.** *Computers & Mathematics with Applications*, 66(3), pp.376–391.
<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0898122113003179>.
- Andreassen, E. *et al.*, 2011. **Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code.** *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(1), pp.1-16.
- Barber, J.R., 2009. **Elasticity**, <http://books.google.de/books?id=5M9j319PbKMC>.
- Beirão da Veiga, L., Brezzi, F., Cangiani, A., 2013a. **Basic Principles of Virtual Element Methods.** *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(1), pp.199–214.
<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218202512500492>.
- Beirão da Veiga, L., Brezzi, F., 2014. **The Hitchhiker's Guide to the Virtual Element Method.** *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 24(8), pp.1541–1573.
<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S021820251440003X>.
- Beirão da Veiga, L., Brezzi, F. & Marini, L., 2013b. **Virtual Elements for linear elasticity problems.** *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2), pp.794–812. <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/120874746>.
- Beirão da Veiga, L., Lipnikov, K. & Manzini, G., 2014. **The Mimetic Finite Difference Method for Elliptic Problems.** Springer.
<http://www.springer.com/us/book/9783319026626>.
- Bendsøe, M.P. & Sigmund, O., 1999. **Material interpolation schemes in topology optimization.** *Archive of Applied Mechanics*, 69(9–10), pp.635–654.
<http://www.springerlink.com/index/A0X3MX3W4RKALQDV.pdf>
<http://www.springerlink.com/content/a0x3mx3w4rkalqdv/nhttp://link.springer.com/10.1007/s004190050248>.
- Bendsøe, M.P. & Sigmund, O., 2003. **Topology optimization: theory, methods, and applications.** <http://www.amazon.fr/Topology-Optimization-Theory-Methods-Applications/dp/3540429921>.
- Carvalho, M. da S. & Valério, J.V., 2012. **Introdução ao Método de Elementos Finitos.** In *Notas em matemática aplicada*.
http://www.sbmec.org.br/arquivos/notas/livro_61.pdf.
- Cook, R.D., Malkus, D.S & Plesha, M.E., 2002. **Concept and Applications of Finite Element Analysis.** Wiley.
- Dai, K.Y., Liu, G.R. & Nguyen, T.T., 2007. **An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics.** *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(11–12), pp.847–860.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X07000686>.

- Fish, J. & Belytschko, T., 2007. **A first course in finite elements**. LTC.
- Gain, A., Talischi, C. & Paulino, G., 2013. **On the Virtual Element Method for Three-Dimensional Elasticity Problems on Arbitrary Polyhedral Meshes**. *arXiv preprint arXiv:1311.0932*, pp.1–35. <http://arxiv.org/abs/1311.0932>.
- Liu, G.R., Dai, K.Y. & Nguyen, T.T., 2007. **A Smoothed Finite Element Method for Mechanics Problems**. *Computational Mechanics*, 39(6), pp.859–877. Available at: <http://link.springer.com/10.1007/s00466-006-0075-4>.
- Liu, G.R. & Nguyen, T.T., 2010. **Smoothed Finite Element Methods**. <http://books.google.com/books?id=mtub8EjxcsgC>.
- Liu, G.R. & Nguyen, T.T., 2010. **Smoothed Finite Element Methods**: G.R. Liu, Nguyen Thoi Trung: 9781439820278: Amazon.com: Books. <http://www.amazon.com/Smoothed-Finite-Element-Methods-G-R/dp/1439820279> [Accessed November 19, 2015].
- Natarajan, S. *et al.*, 2014. **Convergence and accuracy of displacement based finite element formulations over arbitrary polygons: Laplace interpolants, strain smoothing and scaled boundary polygon formulation**. *Finite Elements in Analysis and Design*, 85(0), pp.101–122. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X14000407>.
- Natarajan, S., Bordas, S.P. & Ooi, E.T., 2015. **Virtual and smoothed finite elements: A connection and its application to polygonal/polyhedral finite element methods**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, p.n/a-n/a. <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.4965>.
- Paulino, G.H. & Gain, A.L., 2015. **Bridging art and engineering using Escher-based virtual elements**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(4), pp.867–883. <http://link.springer.com/10.1007/s00158-014-1179-7>.
- Sukumar, N. & Tabarraei, A., 2004. **Conforming polygonal finite elements**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(12), pp.2045–2066. <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1141>.
- Talischi, C. *et al.*, 2015. **Gradient correction for polygonal and polyhedral finite elements**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(3–4), pp.728–747. <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.4851> [Accessed December 8, 2015].
- Talischi, C. *et al.*, 2014. **Polygonal finite elements for incompressible fluid flow**. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 74(2), pp.134–151. <http://doi.wiley.com/10.1002/flid.3843>.
- Talischi, C. *et al.*, 2009. **Polygonal finite elements for topology optimization: A unifying paradigm**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, p.n/a-n/a. <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.2763>.
- Talischi, C. *et al.*, 2012a. **PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 45(3), pp.309–328. <http://link.springer.com/10.1007/s00158-011-0706-z>.
- Talischi, C. *et al.*, 2012b. **PolyTop: a Matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes**. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 45(3), pp.329–357. <http://link.springer.com/10.1007/s00158-011-0696-x>.

Zhu, J.-H., Zhang, W.-H. & Xia, L., 2015. **Topology Optimization in Aircraft and Aerospace Structures Design**. *Archives of Computational Methods in Engineering*, pp.1–28. <http://link.springer.com/10.1007/s11831-015-9151-2>
<http://dx.doi.org/10.1007/s11831-015-9151-2>.