



Lisbeth Saavedra Patiño

**Síntese de refletores omnidirecionais alimentados
por lentes dielétricas associadas à corneta coaxial**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC–Rio.

Orientador: Prof. José Ricardo Bergmann

Rio de Janeiro
Maio 2016



Lisseth Saavedra Patiño

**Síntese de refletores omnidirecionais alimentados
por lentes dielétricas associadas à corneta coaxial**

Dissertação de Mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. José Ricardo Bergmann, Orientador

Centro de Estudos em Telecomunicações – PUC-Rio

Prof. Rafael Abrantes Penchel

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Flavio Jose Vieira Hasselmann

Centro de Estudos em Telecomunicações – PUC-Rio

Prof. Márcio de Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de maio de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Liseth Saavedra Patiño

Graduada de engenharia eletrônica na Universidad de Nariño (Colômbia). Atualmente é aluna de doutorado na área de Eletromagnetismo Aplicado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Saavedra Patiño, Liseth

Síntese de refletores omnidirecionais alimentados por lentes dielétricas associadas à corneta coaxial / Liseth Saavedra Patiño ; orientador: José Ricardo Bergmann. – 2016.
99 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2016.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Lente dielétrica. 3. Refletor. 4. Ótica geométrica. 5. Ótica física. I. Bergmann, José Ricardo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 621.3

Agradecimentos

Ao meu orientador, José Ricardo Bergmann, por todos os ensinamentos, o suporte oferecido, a paciência, pelas valiosas sugestões, críticas e correções durante o período de elaboração desta dissertação. Foi uma grande experiência ter tido a oportunidade de trabalhar com o Professor Bergmann, tanto no campo profissional por seu enorme conhecimento como por suas atitudes pessoais.

Aos meus pais, Gladis e Wilfredo, minhas avós, Maria e Blanca, meu irmão Sebastian por todo o apoio, por ter acreditado em mim, pelo incentivo durante estes anos e pelas palavras de conforto nos momentos difíceis. Dedico este trabalho a eles que são minha principal motivação e inspiração.

Aos meus amigos, da sala 3 Teddy, Carlos e Marcelo, ao Uwe, Fati, Ariel e Keyla que me acolheram no CETUC desde o primeiro momento. Aos meus amigos da casa São Conrado com quem passei momentos inesquecíveis Jose, Lili, Guille, Cami, Dani, Cris, Himer, Andy, Luis, Javi, Oscar e Evelina e a todo o CETUC, obrigada pelo apoio, amizade e pelo grande carinho. Ao Álan por estar comigo em todos os momentos, pelas palavras de incentivo, por ter acreditado em mim e por todo o carinho.

À CAPES e CNPq pelo apoio financeiro oferecido durante toda esta etapa.

Ao Brasil por ser um país maravilhoso e a sua gente por toda a hospitalidade e felicidade.

Resumo

Saavedra Patiño, Lisseth; Bergmann, José Ricardo. **Síntese de refletores omnidirecionais alimentados por lentes dielétricas associadas à corneta coaxial**. Rio de Janeiro, 2016. 99p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Antenas refletoras para cobertura omnidirecional vêm sendo utilizadas em diversos estudos de micro-ondas e ondas milimétricas. A principal motivação para trabalhar nestas bandas, entre outras aplicações, é o desenvolvimento de sistemas de comunicação sem fio de banda larga. O presente trabalho utiliza uma lente dielétrica na abertura do alimentador da antena refletora para reduzir a largura do feixe e, simultaneamente, evitar a presença de lóbulos laterais na região de cobertura. Uma apropriada modelagem da lente reduz o tamanho da antena sem degradar as características de radiação. O trabalho é dividido em duas partes: a modelagem de lentes dielétricas; e a modelagem de refletores. A modelagem de lentes dielétricas circularmente simétricas utilizando os princípios da Óptica Geométrica para controlar a largura de feixe do diagrama de radiação transmitido pela lente. O modelo é feito a partir do deslocamento do foco da geratriz da lente, o novo foco virtual é o ponto geométrico onde convergem os raios emergentes da lente. A rotação da geratriz da superfície refletora faz que este ponto se torne um anel cáustico virtual. As lentes modeladas têm como alimentador uma corneta coaxial que fornece um diagrama de radiação circularmente simétrico. O diagrama de radiação transmitido pela lente é calculado usando as aproximações da ótica geométrica e ótica física em campo distante e próximo. Os resultados são comparados com os resultados simulados em um software especializado de simulação eletromagnética. A modelagem de refletores baseada nas propriedades da Ótica Geométrica. O refletor é uma superfície de revolução obtida através da rotação de uma geratriz em torno ao eixo de simetria. Neste trabalho, a geratriz é descrita por uma sucessão de seções de cônicas concatenadas, esta metodologia utiliza o diagrama de radiação transmitido da lente para obter uma distribuição de campo no plano vertical previamente especificada, que nosso caso é uma distribuição constante. O diagrama de radiação em campo distante radiado pelo refletor é calculado usando as aproximações da física ótica, estes resultados são

comparados com os resultados simulados em um software especializado em simulação eletromagnética.

Palavras-chave

Lente dielétrica; Refletor; Ótica Geométrica; Ótica Física

Abstract

Saavedra Patiño, Lisseth; Bergmann, José Ricardo (advisor). **Synthesis of omnidirectional reflector fed by dielectric lens associated with a coaxial feed horn.** Rio de Janeiro, 2016. 99p. MSc. Dissertation– Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Reflector antennas for omnidirectional coverage have been considered in several studies of microwave and millimeter wave. The main motivation to work in these bands, among other applications, is the development of wireless broadband communication systems. This work uses a dielectric lens in the aperture of the reflector antenna feeder to reduce the beamwidth and simultaneously avoid the presence of side lobes in the coverage area. An appropriate lens modeling reduces the antenna size without degrading the radiation characteristics. The work is divided into two parts: the modeling of lens and modeling of reflector. The modeling of lens using the principles of the Geometrical Optics to control the radiation pattern transmitted by the lens. The modeling depends on the lens focus displacement, which is the geometric point of convergence of the rays emerging from the lens. The rotation of the lens generatrix causes this point to become a virtual caustic ring. The lens has a coaxial feed horn that provides a circularly symmetrical radiation pattern. The radiation pattern transmitted by the lens is calculated using the approximation of Geometric Optics and Physical Optics in the near and far field; these results are compared with the simulated results in a specialized electromagnetic simulation software. The reflector modeling is based on the properties of Geometric Optics. The reflector is a revolution surface obtained by rotating a generatrix around the symmetry axis. In this work, the generatrix is described by a sequence of concatenated conical sections. This method uses the transmitted radiation pattern of the lens to obtain a previously specified field distribution in the vertical plane, which is a constant distribution in the present case. The far field radiation pattern of the reflector is calculated using the Physical Optics approximation. These results are compared with the simulated results in a specialized electromagnetic simulation software.

Keywords

Dielectric lens; Reflector; Geometric Optics; Physical Optics.

Sumário

1	Introdução	15
2	Modelamento de lente circularmente simétrica	18
2.1.	Introdução	18
2.2.	Modelagem da lente	19
2.2.1.	Princípio de Fermat	19
2.2.2.	Modelagem da geratriz da lente	20
2.2.3.	Vetor normal à interface da lente	25
2.2.4.	Cálculo do ângulo crítico de incidência sobre a lente	26
2.2.5.	Dimensionamento da espessura da lente	30
2.2.6.	Caracterização da forma da lente	32
2.3.	Determinação do campo radiado pela lente	38
2.3.1.	Modelo de alimentador	38
2.3.2.	Polarização dos campos incidente e refletido na interface dos meios	40
2.3.3.	Campo radiado pela lente segundo as aproximações da Ótica Geométrica	43
2.3.4.	Exemplos de análise via aproximações da Ótica Geométrica	47
2.3.5.	Campo Radiado segundo as Aproximações da Ótica Física	51
2.3.6.	Comparação da GO com a PO	58
2.3.7.	Comparação da PO com técnicas rigorosas	61
3	Modelagem do refletor	64
3.1.	Introdução	64
3.2.	Concatenação de seções cônicas	65
3.2.1.	Conservação de energia e mapeamento $\beta\alpha$	71
3.2.2.	Algoritmo numérico para o cálculo de β	72
3.3.	Estudo de Casos	75
3.3.1.	Avaliação de convergências para seções cônicas	85
3.4.	Comparação dos resultados	86
4	Conclusões	92

5 Referências bibliográficas	94
A Cálculo do ângulo crítico θ_c	97
B Intensidade de radiação, diretividade e potência	99

Lista de figuras

Figura 1.1: Antena refletora com lente dielétrica.....	16
Figura 2.1: Alimentador mais lente	19
Figura 2.2: Geometria da lente com foco virtual no ponto $P(\rho_0, Z_0)$	21
Figura 2.3: Anel virtual	23
Figura 2.4: Ângulo inicial dos problemas de reflexão.....	27
Figura 2.5: ZA, ponto inicial da lente	31
Figura 2.6: Exemplos de geratrizes das lentes para foco virtual ao longo do eixo de simetria, conforme os dados da Tabela 2.1.....	33
Figura 2.7: Lente com índice de refração 1.6, fonte virtual no ponto ($Z_0 = -2.5 \lambda, \rho_0 = 0 \lambda$).	34
Figura 2.8: Exemplos de geometria de lentes.....	35
Figura 2.9: Distribuição raios refratados por lente com fonte virtual no ponto ($Z_0 = -2.5 \lambda, \rho_0 = 1 \lambda$).	36
Figura 2.10: Distribuição raios refratados por lente com fonte virtual no ponto ($Z_0 = -2.5 \lambda, \rho_0 = -1 \lambda$).	36
Figura 2.11: Exemplos de geometria de lentes para diferentes índices de refração da lente.....	37
Figura 2.12: Corneta coaxial TEM.....	39
Figura 2.13: Diagrama de radiação do modo TEM de uma antena coaxial com $a = 0.28\lambda$ e $b = 0.56, \epsilon = 2.56$	40
Figura 2.14: Lei de Snell	41
Figura 2.15: Raios ortogonais às superfícies de caminho ótico constante	44
Figura 2.16: Diagrama GO de lente com fonte virtual $\rho_0 = 0 \lambda, Z_0 = -2.5\lambda$, espessura $Z_A = 4.17 \lambda$ e coeficiente de refração da lente de 1.6.....	47
Figura 2.17: Diagrama GO de lente com fonte virtual $\rho_0 = -1\lambda, Z_0 = -2.5\lambda$, espessura $Z_A = 1.7 \lambda$ e coeficiente de refração do material da lente de 1.6.	48
Figura 2.18: Diagrama GO de lente com fonte virtual $\rho_0 = 1 \lambda, Z_0 = -2.5 \lambda$, espessura $Z_A = 6.92 \lambda$ e coeficiente de refração do material da lente 1.6.	49
Figura 2.19: Diagrama para três lentes com foco virtual colocado sobre o eixo de simetria no mesmo ponto $Z_0 = -2.5 \lambda$	50

Figura 2.20: Diagrama de radiação GO de lentes onde Z_A e Z_0 são ajustadas para manter o mesmo diagrama de radiação da lente	51
Figura 2.21: Distribuição de correntes sobre a lente	52
Figura 2.22: Vetor u_0	54
Figura 2.23: PO e GO para a lente $\rho_0 = 0 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 4.17 \lambda$	58
Figura 2.24: PO e GO para a lente $\rho_0 = 1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 6.92 \lambda$	59
Figura 2.25: PO e GO para lente $\rho_0 = -1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 1.7 \lambda$	60
Figura 2.26: PO e GO para Lente $\rho_0 = -1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 6.92 \lambda$	61
Figura 2.27: Diagramas fornecidos pelas duas técnicas (PO-CST) na análise da lente $\rho_0 = 0 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 4.17 \lambda$	62
Figura 2.28: Diagramas fornecidos pelas duas técnicas (PO-CST) na análise da lente $\rho_0 = 1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 6.92 \lambda$	63
Figura 2.29: Diagramas fornecidos pelas duas técnicas (PO-CST) na análise da lente $\rho_0 = -1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 1.7 \lambda$	63
Figura 3.1: Configuração da antena: alimentador, lente e refletor	64
Figura 3.2: Refletor com foco posicionado na frente da cônica	66
Figura 3.3: Refletor com foco posicionado atrás da cônica	66
Figura 3.4: Geratriz do refletor representada por uma combinação de seções cônicas	67
Figura 3.5: Parâmetros de uma cônica	68
Figura 3.6: Seção cônica	70
Figura 3.7: Princípio da conservação de energia no refletor	72
Figura 3.8: Cobertura especificada: constante entre 120 e 130 graus	76
Figura 3.9: Mapeamento para refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$	78
Figura 3.10: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$	78
Figura 3.11: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$, Faixa reduzida	79
Figura 3.12: Mapeamento para refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 120^\circ$	80
Figura 3.13: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 120^\circ$	80

Figura 3.14: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ, \beta_f = 130^\circ$, Faixa reduzida	81
Figura 3.15: Mapeamento para refletor $Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ, \beta_f = 130^\circ$	82
Figura 3.16: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ, \beta_f = 130^\circ$	83
Figura 3.17: Mapeamento para refletor $Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ, \beta_f = 120^\circ$	84
Figura 3.18: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ, \beta_f = 140^\circ$	84
Figura 3.19: Refletores caso 1 ($Z_{0R} = 50 \lambda, \beta_0 = 120^\circ, \beta_f = 130^\circ$)	87
Figura 3.20: Diagrama de radiação caso 1 ($Z_{0R} = 50 \lambda, \beta_0 = 120^\circ, \beta_f = 130^\circ$)	87
Figura 3.21: Refletores caso 2 ($Z_{0R} = 50 \lambda, \beta_0 = 130^\circ, \beta_f = 120^\circ$)	88
Figura 3.22: Diagrama de radiação caso 2 ($Z_{0R} = 50 \lambda, \beta_0 = 130^\circ, \beta_f = 120^\circ$)	88
Figura 3.23: Refletores caso 3 ($Z_{0R} = 10 \lambda, \beta_0 = 120^\circ, \beta_f = 130^\circ$)	89
Figura 3.24: Diagrama de radiação caso 3 ($Z_{0R} = 10 \lambda, \beta_0 = 120^\circ, \beta_f = 130^\circ$)	89
Figura 3.25: Refletores caso 4 ($Z_{0R} = 10 \lambda, \beta_0 = 130^\circ, \beta_f = 120^\circ$)	90
Figura 3.26: Diagrama de radiação caso 4 ($Z_{0R} = 10 \lambda, \beta_0 = 130^\circ, \beta_f = 120^\circ$)	90

Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Exemplos de lentes para cada posição Z_0	32
Tabela 2.2: Exemplos para lentes modeladas para $\rho_0 \neq 0$	34
Tabela 2.3: Lentes para diferentes índices de refração.....	37
Tabela 2.4: Características de lentes onde Z_A e Z_0 são ajustadas para manter, o mesmo diagrama de radiação da lente	50
Tabela 3.1: Erro obtido considerando como referência uma geratriz com 1000 pontos	85
Tabela 3.2: Parâmetros comparativos dos refletores sintetizados com e sem lente	86

1

Introdução

Antenas refletoras para cobertura omnidirecional vêm sendo utilizadas em diversos estudos para micro-ondas e ondas milimétricas. A principal motivação para trabalhar nestas bandas é o desenvolvimento de sistemas de comunicação sem fio de banda larga, pois a alta atenuação faz com que o reuso de frequências seja muito eficiente. Tais antenas possuem superfícies refletoras circularmente simétricas (corpos de revolução) que podem ser geradas a partir de cônicas ou geratrizes modeladas. Junto com as características de radiação do alimentador, podemos controlar o diagrama de radiação no plano de elevação da antena [1].

As antenas omnidirecionais de único refletor possuem refletores com diâmetros muito grandes, quando comparados aos das geometrias de duplo refletores [2], [3], [4]. O presente trabalho utiliza uma lente dielétrica na abertura do alimentador [5] como ilustrado na Figura 1.1, para reduzir a largura do feixe e, simultaneamente, evitar a presença de lóbulos laterais na região de cobertura. Uma apropriada modelagem da lente reduz o tamanho da antena sem degradar as características de radiação.

Diversas técnicas de síntese têm sido utilizadas para o modelamento de lentes baseadas nos princípios da Ótica Geométrica ou, alternativamente, baseadas nas aproximações da Ótica Física (PO) associadas a métodos de otimização [6], [7], [8]. As técnicas de síntese utilizando a GO envolvem duas principais condições: a lei da conservação da energia e a lei de refração de Snell. Para validação dos resultados, técnicas de análise baseadas nas aproximações da GO e da PO têm sido utilizadas para determinar os campos radiados pelos dispositivos.

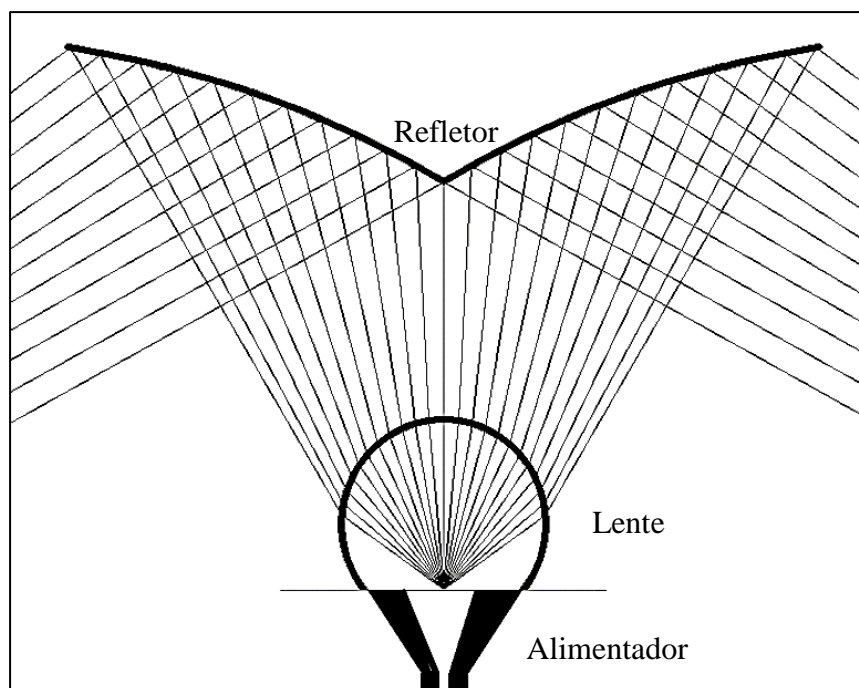


Figura 1.1: Antena refletora com lente dielétrica.

As lentes dielétricas apresentam a vantagem de uma boa tolerância na fabricação e os materiais dielétricos comerciais apresentarem perdas de dissipação desprezíveis. Entretanto o seu desempenho pode ser limitado pelas reflexões internas, especialmente quando o índice de refração do material é grande, ou pelas dimensões da lente pois a efetividade de seu desempenho e as técnicas de síntese são válidas para lentes maiores do que vários comprimentos de onda.

Múltiplos trabalhos [6], [7], [9-15] têm sido desenvolvidos sobre lentes integradas as antenas, utilizando diferentes tipos de alimentadores, diversas estratégias de otimização da lente e correções dos problemas geométricos que aparecem nas lentes, especialmente para aplicações na faixa milimétrica e sub-milimétrica.

Este trabalho tem como primeiro objetivo desenvolver técnicas de modelagem de lentes dielétricas circularmente simétricas, associadas a uma corneta coaxial excitada pelo modo TEM. A corneta apresenta um diagrama circularmente simétrico, com polarização vertical e com nulo sobre o eixo de simetria [5], [9]. A forma da lente será utilizada para controlar o diagrama de radiação no plano vertical, alterando, essencialmente, a largura de feixe do lobo principal. Para análise, são apresentadas técnicas baseadas nas aproximações da GO e da PO e os

resultados comparados com uma análise eletromagnética rigorosa dos campos radiados fornecido pela plataforma Computer Simulation Technology (CST).

O segundo objetivo deste trabalho é a modelagem de um refletor utilizando os campos transmitidos pela lente para obter uma distribuição de campo no plano vertical previamente especificada. O procedimento é baseado na metodologia definida por [2], [3], [4], [10], [11], que utiliza concatenação de seções de elipses e hipérboles para calcular a geratriz do refletor utilizando a lei da conservação da energia e um algoritmo numérico para fazer um mapeamento angular. Os cálculos dos campos obtidos utilizam aproximações da GO e PO.

2

Modelamento de lente circularmente simétrica

2.1.

Introdução

As dimensões dos refletores das antenas omnidirecionais alimentadas por uma corneta coaxial podem ser drasticamente afetadas pelo diagrama da fonte primária, pois o diâmetro do refletor depende da largura do lobo principal. Entretanto, a diminuição da largura do lobo principal, com a consequente redução do diâmetro, traz a presença de lóbulos secundários mais intensos no diagrama do alimentador, aumentando o transbordamento. A utilização de um alimentador formado por uma corneta coaxial associada à lente, como ilustrado na Figura 2.1, permite reduzir a largura do lobo principal e, consequentemente, o diâmetro do refletor, e controlar a presença dos lóbulos laterais radiados pela fonte [1], [12].

A lente é um dispositivo óptico que, através da refração dos raios ou das ondas eletromagnéticas na interface entre dois meios, é capaz de alterar a trajetória dos raios incidentes e, consequentemente, a trajetória do fluxo de energia. Logo, o diagrama de radiação é modificado após atravessar a lente. Quando as dimensões de uma lente são maiores que o comprimento de onda, de modo que os campos eletromagnéticos possam ser tratados aproximadamente como raios, é possível utilizar os princípios da ótica geométrica. Estes princípios podem explicar, aproximadamente, o comportamento da lente e assim modelá-la.

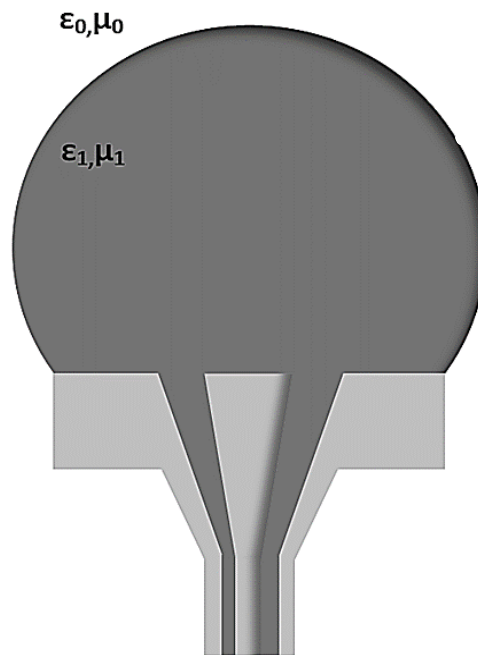


Figura 2.1: Alimentador mais lente.

O restante deste capítulo está dividido em duas partes. A Seção 2.2 apresenta as técnicas modelamento da lente segundo as aproximações da Ótica Geométrica [13], [14] assim como diversas propriedades do dispositivo. A Seção 2.3 apresenta técnicas de análise eletromagnética das lentes baseadas nas aproximações da Ótica Física e da Ótica Geométrica [15].

2.2. Modelagem da lente

2.2.1. Princípio de Fermat

A Ótica Geométrica se baseia no Princípio de Fermat aplicado ao caminho percorrido por raios associados à direção do fluxo de energia ao longo do espaço. O Princípio de Fermat estabelece que a trajetória percorrida por um raio ótico, a partir de uma fonte até um ponto de observação, será uma curva onde o comprimento ótico é mínimo. Ou seja, o comprimento ótico terá um valor mínimo em relação a todas as outras trajetórias adjacentes possíveis.

Para uma curva C passando em um meio qualquer com índice de refração $n(\vec{r})$, o comprimento do caminho ótico ΔL é dado pela equação:

$$\Delta L = \int_C n(\vec{r}) dl. \quad (2.1)$$

Para um meio homogêneo, o índice de refração n é constante e o caminho ótico entre dois pontos p_1 e p_2 é expresso pela equação (2.2):

$$\Delta L = n \int_{p_1}^{p_2} dl. \quad (2.2)$$

Resolvendo a integral da equação (2.2) concluímos que o caminho ótico descrito por um raio em um meio homogêneo será uma reta. Logo, esta função terá o valor mínimo para esta trajetória. Portanto

$$\Delta L = n(p_2 - p_1). \quad (2.3)$$

2.2.2.

Modelagem da geratriz da lente

A lente é iluminada por uma fonte pontual coincidente com a origem. A superfície da lente é circularmente simétrica, sendo obtida pela rotação de uma geratriz ao redor do eixo Z , eixo de simetria do dispositivo. Desta forma, o vetor normal à interface, e os raios incidente e refletido sobre a interface dos meios estarão contidos em um plano ϕ .

O modelamento da geratriz da lente sobre o plano ϕ será determinado impondo a condição que os raios refratados tenham um foco virtual situado no ponto $P(\rho_0, Z_0)$. Conforme ilustrado na Figura 2.2, os raios emergem de O em uma direção θ em relação ao eixo Z . Os raios incidem sobre a interface dielétrico-ar no ponto (ρ_L, Z_L) e se propagam ao longo de uma direção que faz um ângulo α com eixo Z . Considerando o vetor unitário \hat{n} a normal à interface S da lente, a direção do raio incidente em S e no interior do dielétrico faz um ângulo θ_i com a normal e o raio refratado faz um ângulo θ_t com a normal.

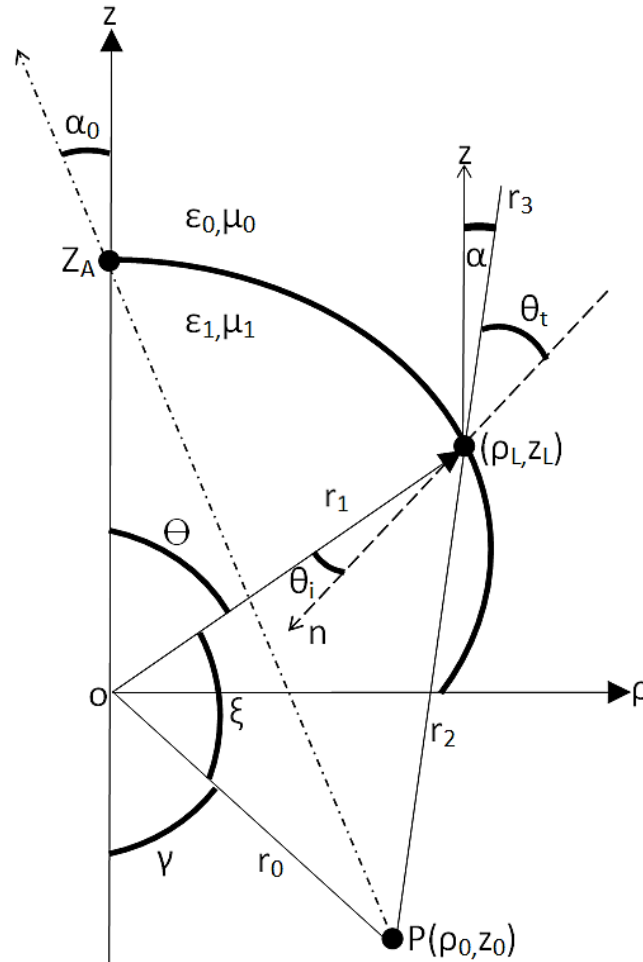


Figura 2.2: Geometria da lente com foco virtual no ponto $P(\rho_0, Z_0)$.

Para que o feixe de raios transmitidos tenha um foco virtual em $P(\rho_0, Z_0)$, o caminho óptico percorrido da fonte pontual em O até um ponto em campo distante deve diferir de uma constante do caminho óptico. Isto pode ser expressado pela seguinte relação entre estas distâncias:

$$r_1 n_1 + r_3 = r_2 + r_3 + c, \quad (2.4)$$

onde r_1 é a distância entre a fonte (a origem) até a superfície da lente (ρ_L, Z_L) , r_2 é a distância desde o foco virtual (ρ_0, Z_0) até a superfície da lente, r_3 é a distância de um ponto sobre a lente até um ponto em campo distante, e c é uma constante associada à espessura da lente. O índice n_1 de refração do material da lente é dado pela equação (2.5)

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}, \quad (2.5)$$

onde ε_r é a permissividade relativa, isto é a permissividade de um material com relação à do vácuo e μ_r é a permeabilidade relativa.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \quad e \quad \mu_r = \frac{\mu_1}{\mu_0}, \quad (2.6)$$

em que ε_1 e μ_1 são respectivamente a permissividade e permeabilidade do material dielétrico que compõe a lente. Já ε_0 e μ_0 são respectivamente a permissividade do ar (aproximada pelas constantes do vácuo).

A Equação (2.4) pode ser simplificada. Logo, a condição para as distâncias pode ser expressa por:

$$r_2 = r_1 n_1 - c. \quad (2.7)$$

A relação geométrica entre os lados r_0 , r_1 , r_2 do triângulo ilustrado na Figura 2.2 pode ser expressada por:

$$r_2^2 = r_1^2 + r_0^2 + 2r_0 r_1 \cos(\theta + \gamma), \quad (2.8)$$

onde r_0 é a distância entre o foco virtual e a origem, $r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}$, γ é o ângulo entre o lado r_0 e o eixo Z negativo contado na direção horária, sendo expresso por $\tan(\gamma) = \rho_0/Z_0$, conforme ilustrado na Figura 2.2.

A substituição de (2.7) em (2.8) resulta na seguinte expressão:

$$(r_1 n - c)^2 = r_1^2 + r_0^2 + 2r_0 r_1 \cos(\theta + \gamma). \quad (2.9)$$

A solução de (2.9) para r_1 resulta na expressão que define a geratriz da lente em termos das especificações da lente r_0 , c , θ e γ .

$$r_1(\theta) = \frac{nc + r_0 \cos(\theta + \gamma)}{n^2 - 1} \pm \frac{\sqrt{c^2 + r_0^2(n^2 - 1) + 2r_0nc \cos(\theta + \gamma) + r_0^2(\cos(\theta + \gamma))^2}}{n^2 - 1}. \quad (2.10)$$

A partir da expressão para $r_1(\theta)$ podemos obter as coordenadas da geratriz da interface da lente na direção do raio incidente θ :

$$\rho_L(\theta) = r_1(\theta) \sin \theta, \quad (2.11)$$

$$Z_L(\theta) = r_1(\theta) \cos \theta. \quad (2.12)$$

Anel cáustico virtual

A modelagem da geratriz da lente é realizada de modo que os raios transmitidos através da lente tenham um foco virtual no plano ϕ . A rotação desta geratriz e do conjunto de raios contidos no plano ϕ em torno do eixo de simetria faz com que os raios transmitidos através da lente tenham um anel cáustico de raio ρ_0 situado no plano $Z = Z_0$, como ilustrado na Figura 2.3. Para o caso $\rho_0 = 0$, o anel virtual se torna um foco virtual situado sobre o eixo de simetria em $Z = Z_0$.

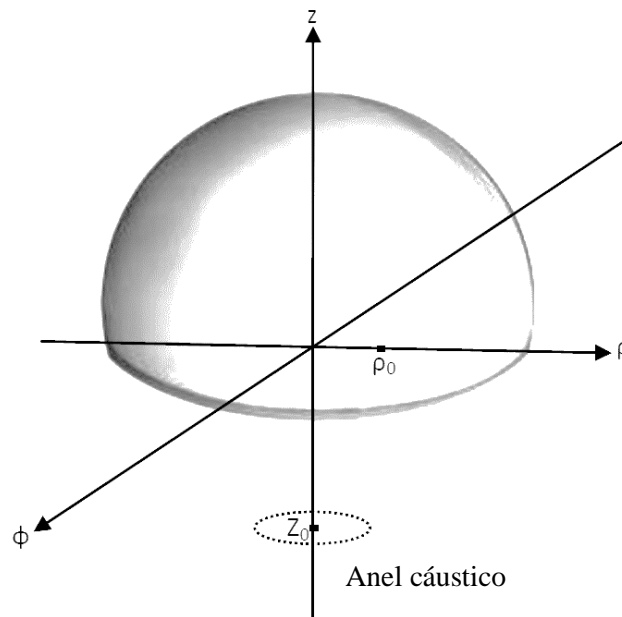


Figura 2.3: Anel virtual.

Como mencionado anteriormente e ilustrado na Figura 2.2, a fonte pontual na origem emite raios na direção (θ, ϕ) que irão incidir sobre a interface da lente e serão refratados na direção (α, ϕ) . Devido à simetria circular da lente, os raios incidente e transmitido estão contidos em um mesmo plano ϕ .

Mapeamento $\alpha(\theta)$

Com o auxílio da Figura 2.2, podemos estabelecer a relação entre a direção (θ) do raio incidente e a direção (α) do raio transmitido através da interface:

$$\rho_L(\theta) - \rho_0 = r_2(\alpha(\theta)) \operatorname{sen} \alpha(\theta), \quad (2.13)$$

$$Z_L(\theta) - Z_0 = r_2(\alpha(\theta)) \cos \alpha(\theta). \quad (2.14)$$

A combinação destas expressões permite resultar em:

$$\tan [\alpha(\theta)] = \frac{r_1(\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \rho_0}{r_1(\theta) \cos(\theta) - Z_0}, \quad (2.15)$$

ou,

$$\alpha(\theta) = \arctan \left[\frac{r_1(\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \rho_0}{r_1(\theta) \cos(\theta) - Z_0} \right]. \quad (2.16)$$

Fora da lente dielétrica, os raios transmitidos têm um vértice virtual em (r_0, Z_0) e ficam confinados entre os ângulos α_{min} e α_{max} . O limite inferior está associado a $\theta = 0^\circ$ e dado por:

$$\alpha_{min} = \arctan \left[\frac{-\rho_0}{r_1(0) - Z_0} \right], \quad (2.17)$$

onde

$$r_1(0) = \frac{nc + r_0 \cos(\gamma)}{n^2 - 1} \pm \frac{\sqrt{c^2 + r_0^2(n^2 - 1) + 2r_0nc \cos(\gamma) + r_0^2(\cos(\gamma))^2}}{n^2 - 1}. \quad (2.18)$$

Levando em conta que $r_0 \cos(\gamma) = Z_0$ a equação (2.18) é reduzida a

$$r_1(0) = \frac{nc + Z_0}{n^2 - 1} \pm \frac{\sqrt{c^2 + r_0^2(n^2 - 1) + 2ncZ_0 + Z_0^2}}{n^2 - 1}. \quad (2.19)$$

Para $\rho_0 > 0$, observamos que $\alpha_{min} < 0$ e parte dos raios que emergem da lente cruzam o eixo de simetria, eixo Z. Por outro lado, o ângulo máximo de cobertura será dado por:

$$\alpha_{max} = \arctan \left[\frac{r_1(\pi/2) - \rho_0}{-Z_0} \right], \quad (2.20)$$

onde

$$r_1(\pi/2) = \frac{nc - r_0 \sin(\gamma)}{n^2 - 1} \pm \frac{\sqrt{c^2 + r_0^2(n^2 - 1) - 2r_0nc \sin(\gamma) + r_0^2(\sin(\gamma))^2}}{n^2 - 1}. \quad (2.21)$$

Levando em conta que $r_0 \sin(\gamma) = \rho_0$ a equação (2.21) fica:

$$r_1(\pi/2) = \frac{nc - \rho_0}{n^2 - 1} \pm \frac{\sqrt{c^2 + r_0^2(n^2 - 1) - 2nc\rho_0 + \rho_0^2}}{n^2 - 1}. \quad (2.22)$$

2.2.3.

Vetor normal à interface da lente

O vetor \vec{N} normal à superfície da lente, pode ser obtido através do gradiente da função r_1 , Equação (2.10), que descreve a superfície da lente:

$$\vec{N} = \nabla r_1 = \frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \frac{\partial r_1}{\partial r_1} \hat{i}_r, \quad (2.23)$$

resulta em:

$$\left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \hat{i}_r \right] \cdot \hat{i}_r r_1 = r_1. \quad (2.24)$$

Substituindo a equação (2.24) em (2.23)

$$\vec{N} = \left(-\cot(\theta + \gamma) - \frac{r_1}{r_0 \sin(\theta + \gamma)} \right) \hat{i}_\theta + \hat{i}_r. \quad (2.25)$$

O vetor normal \vec{N} pode também ser expressado em termos de uma base de vetores em coordenadas cilíndricas. Para isto, utilizamos as expressões dos vetores unitários \hat{i}_θ e \hat{i}_r , descritos como

$$\hat{i}_\theta = \cos \theta \hat{i}_\rho - \sin \theta \hat{i}_z, \quad (2.26)$$

$$\hat{i}_r = \sin \theta \hat{i}_\rho + \cos \theta \hat{i}_z, \quad (2.27)$$

que, quando substituídas em (2.25), permitem escrever o vetor normal como:

$$\begin{aligned} \vec{N} = & \left(-\cot(\theta + \gamma) \cos \theta + \frac{r_1 \cos \theta}{r_0 \sin(\theta + \gamma)} + \sin \theta \right) \hat{i}_\rho \\ & + \left(\cot(\theta + \gamma) \sin \theta + \frac{r_1 \sin \theta}{r_0 \sin(\theta + \gamma)} + \cos \theta \right) \hat{i}_z. \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.2.4.

Cálculo do ângulo crítico de incidência sobre a lente

A Equação (2.8) estabelece uma relação entre as distâncias percorridas pelos raios, sem considerar a trajetória após a interface da lente. A Figura 2.4 ilustra que alguns raios permanecem dentro do dielétrico. Isto ocorre devido à curvatura da lente, apesar de os raios satisfazerem a Lei de Snell para refração.

Para o tipo de lente considerado neste trabalho, este tipo de comportamento ocorre para ângulos de incidência maiores do que θ_c , onde θ_c é chamado ângulo crítico, e depende da posição do foco virtual (ρ_0, Z_0) e da constante c . Note que, para este ângulo θ_c o vetor normal à interface da lente é perpendicular à direção do raio refratado, como ilustrado na Figura 2.4.

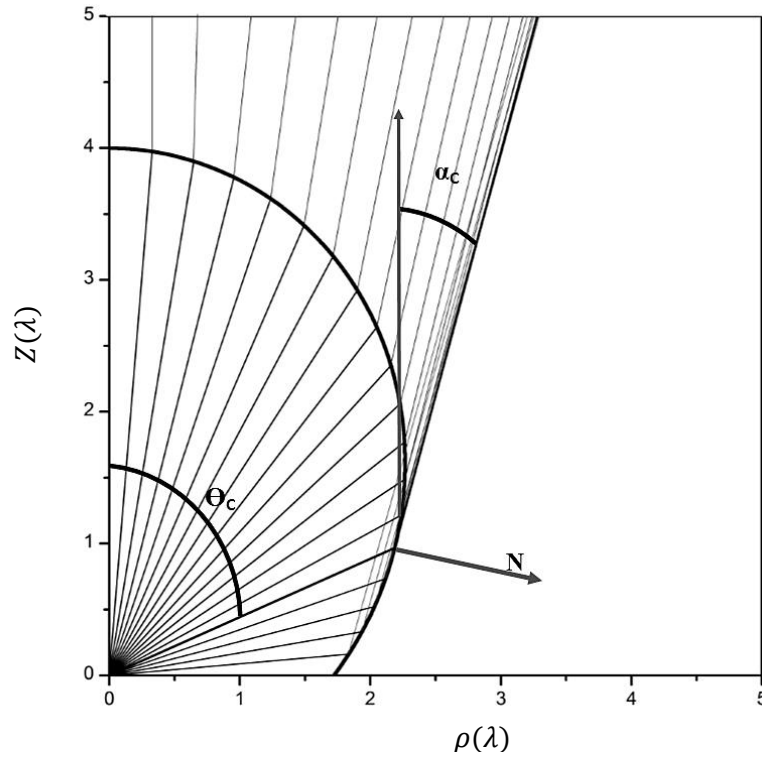


Figura 2.4: Ângulo inicial dos problemas de reflexão.

A relação entre as variáveis ρ_0 , Z_0 , c e o ângulo θ_c pode ser obtida a partir da condição de ortogonalidade entre a normal e a direção do raio. Para isto, consideramos que a direção do raio \vec{r}_2 que emergente da lente pode ser expressa em função de \vec{r}_1 na forma

$$\vec{r}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0). \quad (2.29)$$

Levando em conta que o raio emergente da lente \vec{r}_2 e o vetor unitário normal \hat{n} são ortogonais:

$$\hat{n} \cdot \vec{r}_2 = \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \hat{i}_r \right] \cdot \vec{r}_2 = 0. \quad (2.30)$$

A equação (2.29) substituída em (2.30) resulta em:

$$\hat{n} \cdot \vec{r}_2 = \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \hat{i}_r \right] \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = 0. \quad (2.31)$$

Substituindo a equação (2.24) na equação (2.31) obtemos:

$$\left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \hat{i}_r \right] \cdot \vec{r}_0 = r_0 \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \hat{i}_0 \cdot \hat{i}_\theta + \hat{i}_0 \cdot \hat{i}_r \right], \quad (2.32)$$

onde \hat{i}_0 é o vetor unitário desde o foco virtual até a origem e pode ser expresso em termos das suas componentes como segue:

$$\hat{i}_0 = \frac{\rho_0}{r_0} \hat{i}_\rho + \frac{Z_0}{r_0} \hat{i}_z = \text{sen}(\gamma) \hat{i}_\rho - \text{cos}(\gamma) \hat{i}_z. \quad (2.33)$$

O cálculo do produto escalar $\hat{i}_0 \cdot \hat{i}_r$ leva em conta que:

$$\begin{aligned} \hat{i}_\rho \cdot \hat{i}_r &= \text{sen}(\theta) \text{ e } \hat{i}_z \cdot \hat{i}_r = \text{cos}(\theta), \\ \hat{i}_0 \cdot \hat{i}_r &= \text{sen}(\gamma) \text{sen}(\theta) - \text{cos}(\gamma) \text{cos}(\theta) = -\text{cos}(\theta + \gamma). \end{aligned} \quad (2.34)$$

O cálculo produto escalar $\hat{i}_0 \cdot \hat{i}_\theta$ resulta em

$$\hat{i}_0 \cdot \hat{i}_\theta = \text{sen}(\gamma) \text{cos}(\theta) - \text{cos}(\gamma) \text{sen}(\theta) = \text{sen}(\theta + \gamma). \quad (2.35)$$

Substituindo as equações (2.34) e (2.35) na equação (2.32), escrevemos

$$\left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \hat{i}_r \right] \cdot \vec{r}_0 = r_0 \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \text{sen}(\theta + \gamma) - \text{cos}(\theta + \gamma) \right]. \quad (2.36)$$

A parte esquerda da anterior equação corresponde segundo a equação (2.24) a r_1 , por tanto podemos escrever:

$$r_1 = r_0 \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \text{sen}(\theta + \gamma) - \text{cos}(\theta + \gamma) \right]. \quad (2.37)$$

Da derivação da equação (2.10) é obtida a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} &= -\frac{1}{n^2 - 1} [r_0 \text{sen}(\theta + \gamma) \mp \\ &\frac{r_0^2 \text{cos}(\theta + \gamma) \text{sen}(\theta + \gamma) - nr_0 c \text{sen}(\theta + \gamma)}{\sqrt{r_0^2 (\text{cos}(\theta + \gamma))^2 + 2r_0 n c \text{cos}(\theta + \gamma) + r_0^2 (n^2 - 1) + c^2}}] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para simplificação, utilizamos A como segue:

$$A = \sqrt{r_0^2(\cos(\theta + \gamma))^2 + 2r_0nc \cos(\theta + \gamma) + r_0^2(n^2 - 1) + c^2}, \quad (2.39)$$

substituindo (2.39) em (2.38) e manipulando algebricamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} &= \left[\frac{r_0 \sin(\theta + \gamma)}{n^2 - 1} \right] \left[1 \pm \frac{nc + r_0 \cos(\theta + \gamma)}{A} \right] = \\ &\pm \left[\frac{r_0 \sin(\theta + \gamma)}{A} \right] \left[\frac{nc + r_0 \cos(\theta + \gamma) \pm A}{n^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Usando a equação (2.10), a equação (2.40) é reescrita como

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta} = \pm \left[\frac{r_0 \sin(\theta + \gamma)}{A} \right] r_1. \quad (2.41)$$

Conforme o Anexo A, a solução de (2.41) é dada por:

$$\cos(\theta_c + \gamma) = -\frac{c}{nr_0}, \quad (2.42)$$

ou

$$\theta_c = -\gamma + \arccos\left(-\frac{c}{nr_0}\right). \quad (2.43)$$

Os raios que incidirem sobre a interface da lente com um ângulo $\theta > \theta_c$ satisfazem a condição matemática imposta para as distâncias r_1 e r_2 para uma constante n . Mas para $\theta > \theta_c$, os raios transmitidos permanecem dentro do dielétrico e a lente não é fisicamente realizável.

Como ilustrado na Figura 2.4, a partir do ângulo de incidência θ_c , o ângulo α começa a diminuir, estabelecendo um limite de cobertura para a lente em campo distante e um limite para a validade das aproximações da síntese baseada na ótica geométrica, que exige a existência de um único raio em cada direção α do espaço.

$$\text{sen}(\alpha_c) = \frac{r_1(\theta_c) \text{sen}(\theta_c) - \rho_0}{r_2(\theta_c)}. \quad (2.44)$$

A condição (2.44) para θ_c pode ser, também, utilizada para previamente dimensionar a espessura mínima da lente. Isto permite controlar o ângulo de cobertura da lente em campo distante, como será apresentado a seguir.

2.2.5. Dimensionamento da espessura da lente

Neste trabalho denominamos de espessura da lente (Z_A) a distância $r_1(0)$ ao longo do eixo de simetria, como definido na Figura 2.5. A espessura da lente é diretamente proporcional à constante c . Assim, podemos controlar a presença de raios com incidência crítica sobre a superfície da lente, fazendo que $\theta_c > 90^\circ$ através do controle de c . Por outro lado, c pode ser vista como a forma de determinar a espessura mínima para que não exista incidência crítica sobre a superfície da lente. Da geometria ilustrada na Figura 2.2 obtemos que $\pi = \theta + \xi + \gamma$ e, portanto, para os ângulos críticos $\theta_c > \frac{\pi}{2} \rightarrow \xi_c + \gamma < \frac{\pi}{2}$.

No limite:

$$\xi_c + \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad (2.45)$$

$$\text{sen } \gamma = \cos \xi_c, \quad (2.46)$$

$$\cos \xi_c = \frac{c}{nr_0} \rightarrow \text{sen } \gamma = \frac{\rho_0}{r_0} \rightarrow n\rho_0 = c.$$

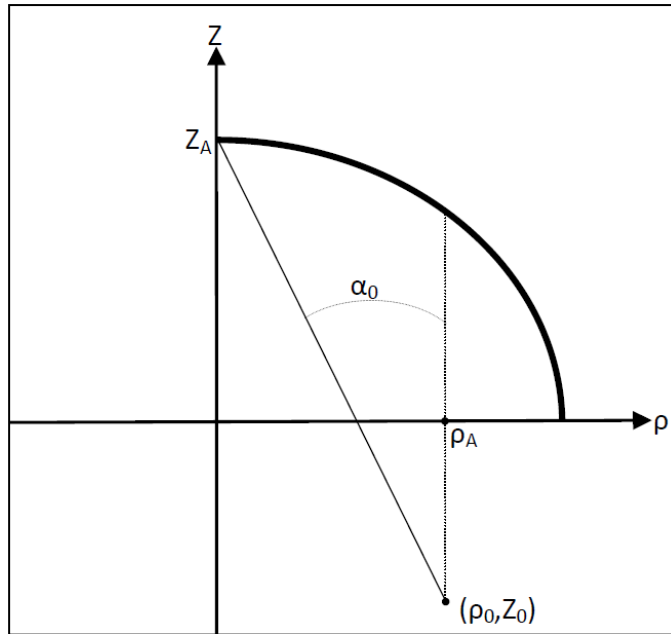


Figura 2.5: Z_A , ponto inicial da lente.

Substituindo a expressão (2.46) em (2.7)

$$nr_1 - r_2 = c = n\rho_0, \quad (2.47)$$

$$r_1 = Z_A, \quad (2.48)$$

$$r_2 = \sqrt{(Z_A - Z_0)^2 + \rho_0^2}. \quad (2.49)$$

A combinação das equações (2.47) e (2.49) permite estabelecer a seguinte relação para Z_A :

$$nZ_A - \sqrt{(Z_A - Z_0)^2 + \rho_0^2} = n\rho_0. \quad (2.50)$$

A solução de (2.50) para Z_A é dada pela seguinte expressão:

$$Z_A = \frac{(Z_0 - n^2\rho_0) \pm \sqrt{(Z_0 - n^2\rho_0)^2 - [Z_0^2 + \rho_0^2(1 - n^2)](1 - n^2)}}{(1 - n^2)}. \quad (2.51)$$

Para o caso em que o foco virtual está sobre o eixo de simetria, $\rho_0 = 0$, a expressão (2.51) é simplificada em:

$$Z_A = \frac{Z_0 \pm \sqrt{Z_0^2 n^2}}{(1 - n^2)} = \frac{Z_0(1 \pm n)}{(1 - n^2)} = \frac{Z_0}{1 \mp n}, \quad (2.52)$$

onde a opção positiva do sinal é desconsiderada tendo em vista que Z_A deve ser maior que zero.

2.2.6. Caracterização da forma da lente

2.2.6.1. Forma da lente segundo a posição do foco virtual

A posição do foco virtual P altera a forma da lente. A Figura 2.6 ilustra este comportamento com quatro exemplos de lentes com foco virtual ao longo do eixo de simetria $\rho_0 = 0$, o índice de refração do material da lente é de 1.6. A espessura de $Z_A = 4 \lambda$ para garantir que em nenhum dos exemplos existisse raios críticos sobre a interface da lente. A nomenclatura dos exemplos de lentes para cada posição Z_0 é descrita na Tabela 2.1, assim como os limites de cobertura, α_{min} e α_{max} , associados a cada um dos exemplos.

Tabela 2.1: Exemplos de lentes para cada posição Z_0 .

Nome	Z_0 (λ)	α_{min} (graus)	α_{max} (graus)
Lente 1.1	-1.5	0	56.3
Lente 1.2	-3	0	31.2
Lente 1.3	-4.5	0	20.6
Lente 1.4	-15	0	5.9

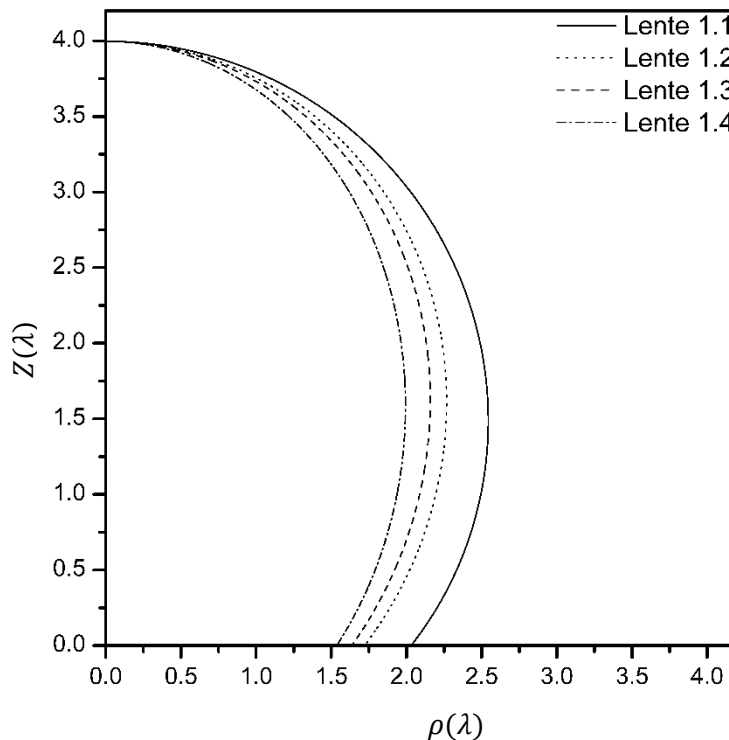


Figura 2.6: Exemplos de geratrizes das lentes para foco virtual ao longo do eixo de simetria, conforme os dados da Tabela 2.1.

Ao longo do eixo de simetria, a normal à superfície é paralela ao eixo Z e a superfície é suave nesta região. Observe-se que, à medida que o foco virtual se afasta da origem, a geometria da lente muda, torna-se mais alongada na direção Z , diminuindo a espessura na direção ρ , assim como largura do feixe de cobertura da lente diminui (α_{max}).

A Figura 2.7 ilustra a distribuição dos raios refratados por uma lente com índice de refração $n = 1.6$, modelada para evitar os ângulos críticos. O foco virtual foi colocado no ponto $(Z_0 = -2.5 \lambda, \rho_0 = 0 \lambda)$ e conforme a expressão (2.52) a espessura mínima da lente é $Z_A = 4.17 \lambda$.

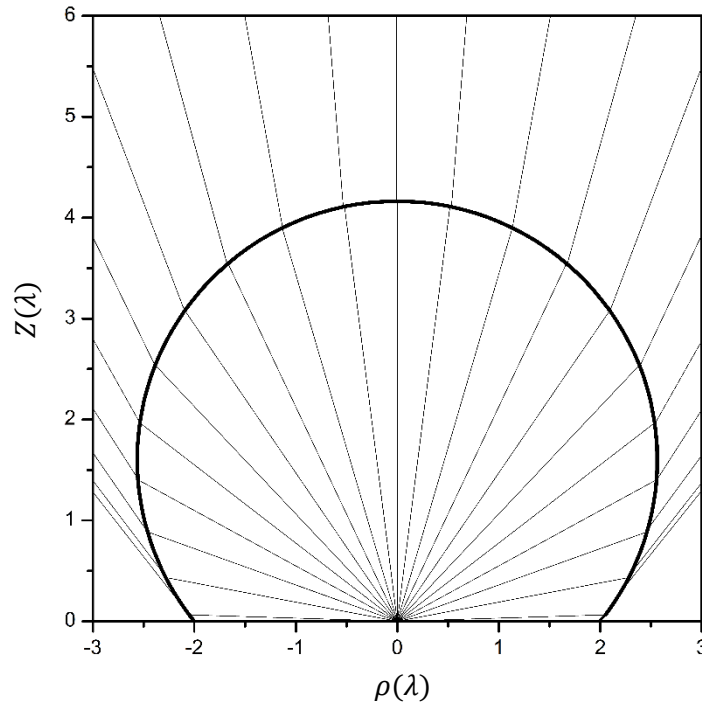


Figura 2.7: Lente com índice de refração 1.6, foco virtual no ponto ($Z_0 = -2.5 \lambda, \rho_0 = 0 \lambda$).

Para os casos em que $\rho_0 \neq 0$, como comentado anteriormente, os raios transmitidos pela lente definem um anel cáustico virtual de raio ρ_0 ao longo do plano Z_0 . A Figura 2.8 apresenta exemplos de geratrizes para lentes geradas para produzir anéis cáusticos com diferentes raios ρ_0 ao longo do mesmo plano $Z_0 = -2.5 \lambda$. Para cada exemplo foi utilizado a espessura Z_A mínima para evitar a existência de raios que incidam sobre a interface em ângulos críticos, conforme a equação (2.51). A nomenclatura dos casos é listada na Tabela 2.2 para as diferentes posições do foco virtual.

Tabela 2.2: Exemplos para lentes modeladas para $\rho_0 \neq 0$.

Nome	$\rho_0 (\lambda)$	$Z_0 (\lambda)$	$\alpha_{\min}(\text{graus})$	$\alpha_{\max}(\text{graus})$	$Z_A (\lambda)$
Lente 2.1	-1	-2.5	13.40	38.68	1.70
Lente 2.2	-0.5	-2.5	5.32	38.68	2.87
Lente 2.3	0.5	-2.5	-3.56	38.68	5.53
Lente 2.4	1	-2.5	-6.06	38.68	6.92

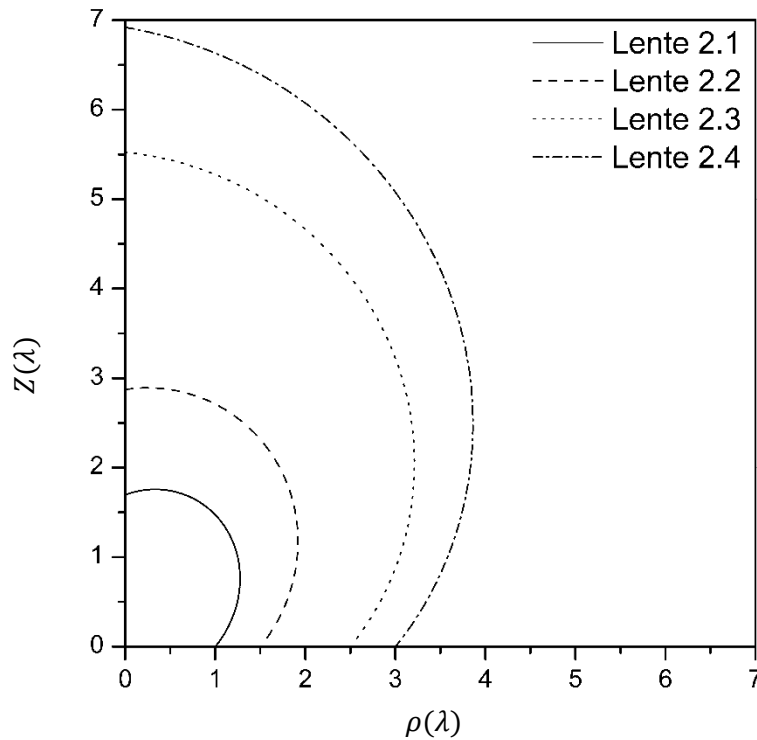


Figura 2.8: Exemplos de geometria de lentes.

Como observado na Figura 2.8, quando ρ_0 é diferente de zero, a normal à geratriz sobre o eixo Z é oblíqua em relação ao eixo de rotação. Isto faz que a superfície da lente tenha derivadas descontínuas neste ponto. Para este conjunto de lentes o ângulo máximo de cobertura α_{\max} é idêntico dependendo do plano Z_0 e da espessura mínima utilizada para dimensionar as lentes.

Para $\rho_0 > 0$, a superfície será pontiaguda sobre o eixo de simetria fazendo com que parte dos raios refratados cruze o eixo Z e produzam uma superfície cáustica real, fora da lente. A Figura 2.9 ilustra a distribuição raios refratada pela lente 2.4 com parâmetros definidos na Tabela 2.2. Observamos, também, que é necessário aumentar a espessura da lente à medida que ρ_0 cresce.

Para $\rho_0 < 0$, a superfície apresentará uma reentrância na região próxima ao eixo de simetria, e não haverá raio refratado na região próxima ao eixo de simetria, como indicado na Figura 2.10, que ilustra a distribuição raios refratados pela lente 2.1 com parâmetros definidos na Tabela 2.2.

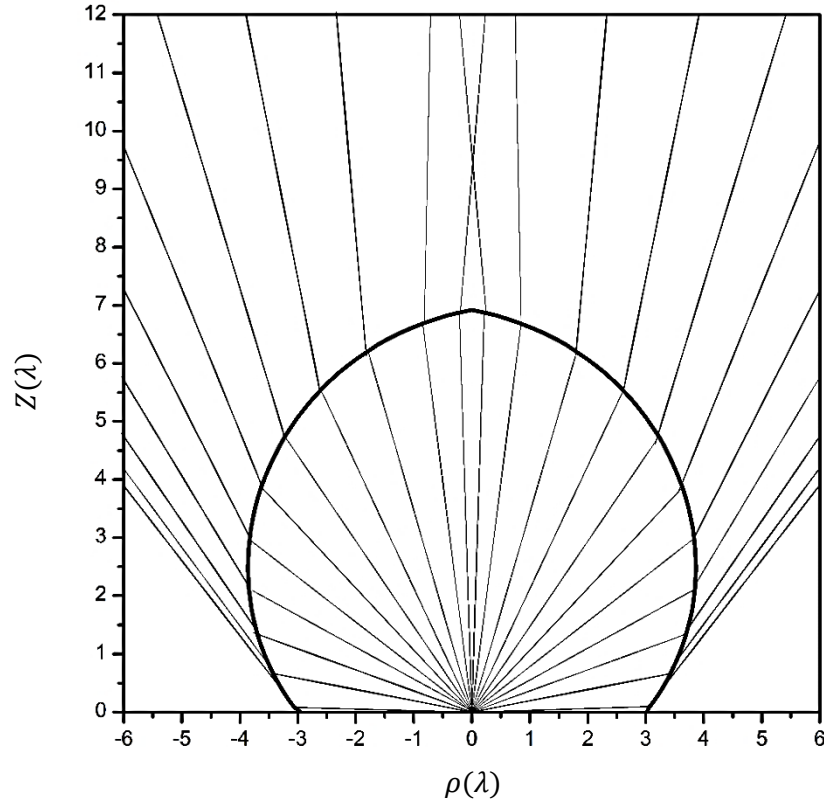


Figura 2.9: Distribuição raios refratados por lente com foco virtual no ponto $(Z_0 = -2.5 \lambda, \rho_0 = 1 \lambda)$.

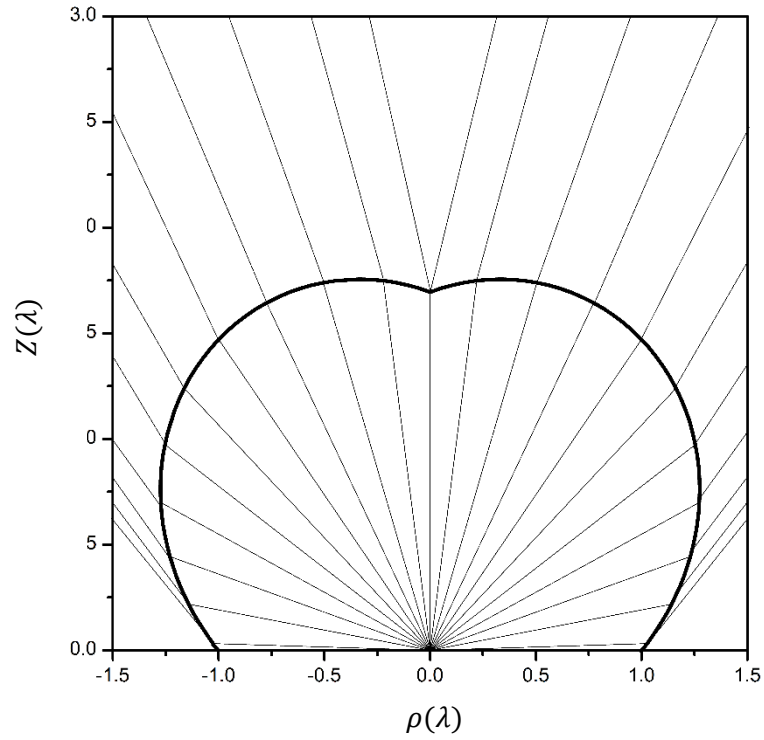


Figura 2.10: Distribuição raios refratados por lente com foco virtual no ponto $(Z_0 = -2.5 \lambda, \rho_0 = -1 \lambda)$.

2.2.6.2.

Forma da lente segundo o índice de refração do material dielétrico

O material do qual é feita a lente altera a espessura da mesma. Para determinar Z_A foi utilizada a expressão (2.51) para evitar os ângulos críticos. Para demonstrar este comportamento, a Figura 2.11 ilustra quatro lentes com o mesmo foco virtual ao longo do eixo de simetria $\rho_0 = 0$, $Z_0 = -2.5 \lambda$ e são variados os índices de refração os quais são apresentados na Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Lentes para diferentes índices de refração.

Nome	n	α_{\min} (graus)	α_{\max} (graus)	Z_A (λ)
Lente 3.1	1.3	0	50.3	8.33
Lente 3.2	1.6	0	38.7	4.17
Lente 3.3	1.9	0	31.8	2.78
Lente 3.4	2.2	0	27.0	2.08

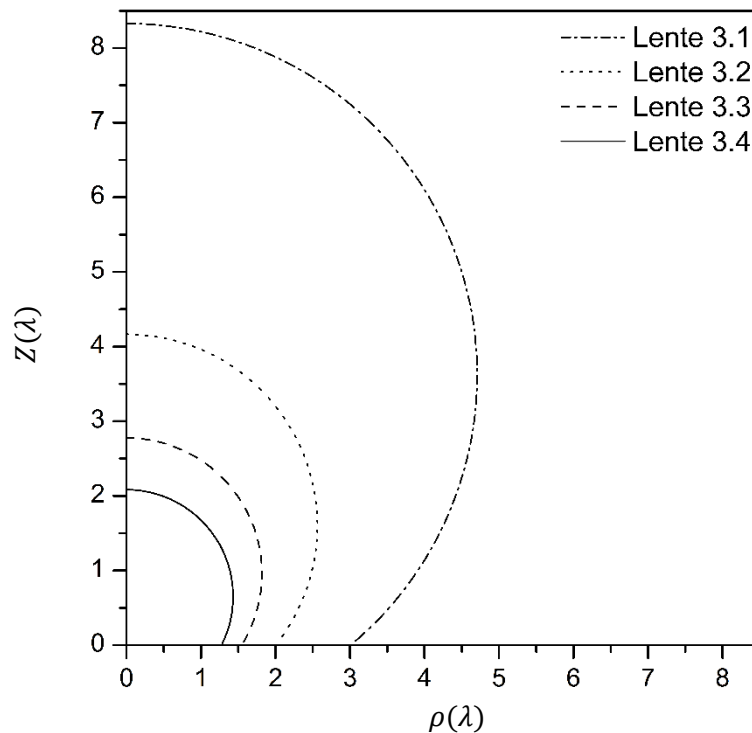


Figura 2.11: Exemplos de geometria de lentes para diferentes índices de refração da lente.

Se o índice de refração aumenta, é necessário utilizar uma lente menor para evitar os ângulos críticos, isto pode trazer alguns problemas no modelamento da lente, pois para lentes pequenas a óptica geométrica não descreve adequadamente os campos radiados, já que esta técnica desconsidera os efeitos de reflexão que são produzidos quando o índice de refração é maior.

Por outro lado, se o índice de refração é menor, a liberdade para modelar a lente diminui, pois, a distância de deslocamento do foco virtual diminui. Por exemplo, para uma espessura de 4λ e um índice de refração de 1.3 apenas é possível deslocar o foco virtual a través do eixo de simetria 1.2λ , e para a mesma espessura com um índice de refração de 2.1 é possível deslocar a fonte 4.8λ .

2.3.

Determinação do campo radiado pela lente

2.3.1.

Modelo de alimentador

O alimentador utilizado neste trabalho é uma corneta coaxial TEM ilustrada na Figura 2.12. A corneta fornece um diagrama de radiação circularmente simétrico, polarizado verticalmente (polarização na direção θ), e com um nulo sobre o eixo de simetria. Os campos radiados foram obtidos considerando a distribuição de campo do modo TEM de um guia coaxial com fase constante sobre a abertura, com dimensões idênticas à da abertura da corneta. No semiespaço $0^\circ < \theta < 90^\circ$, os campos radiados são descritos por [16]:

$$\vec{E}_i = E_0 \left[\frac{J_0(ka \sin \theta) - J_0(kb \sin \theta)}{\sin \theta} \right] \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \right] \hat{i}_\theta, \quad (2.53)$$

$$\vec{H}_i = \frac{E_0}{\eta} \left[\frac{J_0(ka \sin \theta) - J_0(kb \sin \theta)}{\sin \theta} \right] \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \right] \hat{i}_\phi, \quad (2.54)$$

onde $J_0(v)$ é a função de Bessel de ordem zero, E_0 é uma constante que determina a potência radiada, a e b são, respectivamente, o raio interno e externo da abertura corneta, r é a distância da fonte até o ponto de observação e η e k são,

respectivamente a impedância e a constante de fase no meio dielétrico. As dimensões do alimentador utilizado são $a = 0.4 \lambda_{diel}$ e $b = 0.9 \lambda_{diel}$ como ilustrado na Figura 2.12.

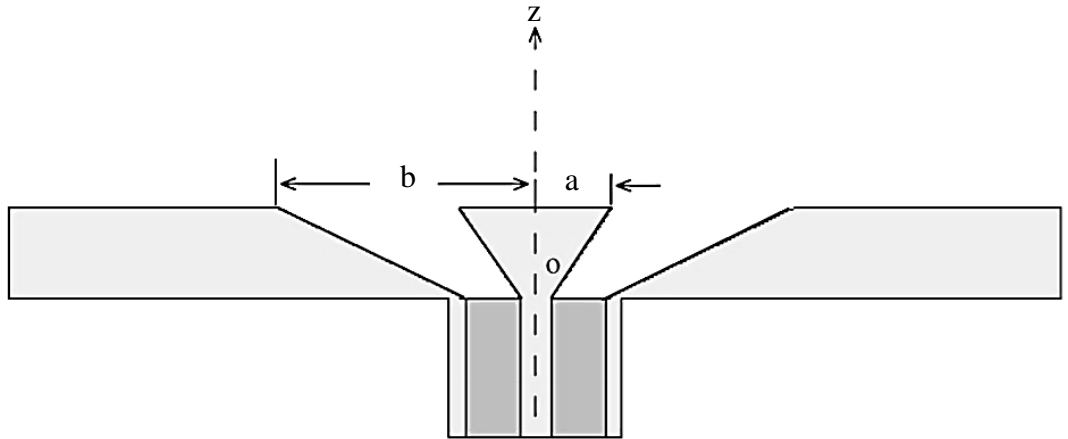


Figura 2.12: Corneta coaxial TEM.

O diagrama de radiação do alimentador é descrito por:

$$G(\theta) = G_0 \left[\frac{J_0(ka \sin \theta) - J_0(kb \sin \theta)}{\sin \theta} \right]^2, \quad (2.55)$$

onde G_0 é um parâmetro de normalização para que a potência total radiada pelo alimentador seja unitária.

A Figura 2.13 ilustra o diagrama de radiação da corneta coaxial TEM utilizada neste trabalho. Neste dimensionamento foi utilizado o comprimento de onda no meio dielétrico.

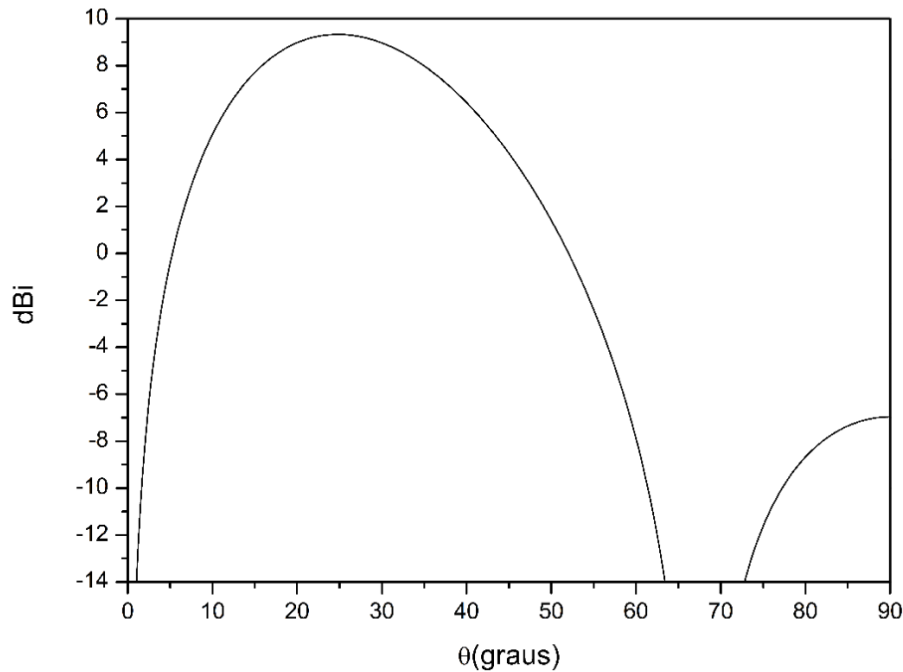


Figura 2.13: Diagrama de radiação do modo TEM de uma antena coaxial com $a = 0.4 \lambda_{diel}$ e $b = 0.9 \lambda_{diel}$, $\epsilon = 2.56$.

2.3.2.

Polarização dos campos incidente e refletido na interface dos meios

Como mencionado, para validade das lentes supõe-se que as dimensões e o raio de curvatura da interface da lente sejam muito maiores que um comprimento de onda. A partir destas suposições, podemos utilizar as aproximações da Ótica Física, considerar que localmente os campos na interface da lente se comportam como os campos de uma onda plana incidindo sobre uma interface plana infinita.

A lente e os campos radiados pela fonte apresentam simetria circular. Estes últimos apresentam a polarização do campo magnético incidente H_i ortogonal ao plano de incidência e tangente à superfície da lente, enquanto que o campo elétrico é paralelo ao plano de incidência. Como observado nas aproximações da Ótica Geométrica, as direções das ondas incidente, transmitida e refletida, e a normal ao plano são coplanares.

A relação entre as direções das ondas incidente e transmitida pode ser obtida a partir da imposição da continuidade dos campos sobre a interface plana e é expressada por:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t, \quad (2.56)$$

onde θ_i é o ângulo da onda incidente em relação ao vetor normal e θ_t o ângulo da onda transmitida em relação à normal. O ângulo θ_r que a onda refletida faz com a normal é idêntico ao ângulo θ_i da onda incidente. A relação entre as direções dos raios incidente e transmitido pode ser obtida a partir da Lei de Snell para a refração na interface dos meios, que depende dos índices de refração dos meios 1 e 2 como ilustrado na Figura 2.14.

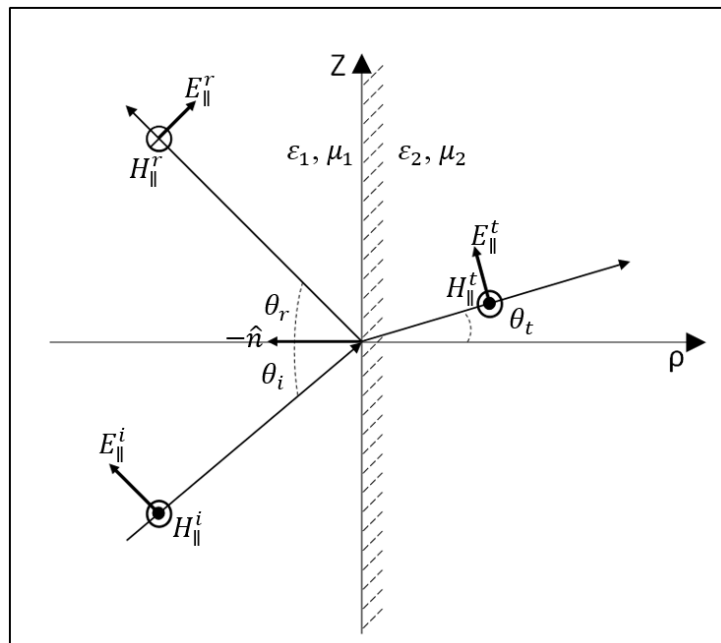


Figura 2.14: Lei de Snell.

Por outro lado, a continuidade dos campos tangenciais sobre a interface permite estabelecer uma relação entre a amplitude do campo elétrico da onda plana incidente com o campo elétrico da onda transmitida através do coeficiente de transmissão T_{\parallel} e com o campo elétrico da onda refletida através do coeficiente de reflexão Γ_{\parallel} . Estes coeficientes são descritos por [16]:

$$T_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_1 + \eta_t \cos \theta_t}, \quad (2.57)$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}, \quad (2.58)$$

onde η_2 é a impedância intrínseca do meio 2, neste caso a impedância do espaço livre e η_1 é a impedância intrínseca do meio 1, ou seja, da lente, dados por:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \quad \eta_2 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (2.59)$$

A partir dos campos radiados pela corneta coaxial, o campo elétrico no lado interno da interface da lente na direção θ pode ser expresso por:

$$\vec{E}_i(\theta) = E_0 \left[\frac{J_0(k_1 a \sin \theta) - J_0(k_1 b \sin \theta)}{\sin \theta} \right] \left[\frac{e^{ik_1 r_1(\theta)}}{r_1(\theta)} \right] \hat{i}_\theta, \quad (2.60)$$

e o campo magnético por

$$\vec{H}_i(\theta) = \frac{E_0}{\eta_1} \left[\frac{J_0(k_1 a \sin \theta) - J_0(k_1 b \sin \theta)}{\sin \theta} \right] \left[\frac{e^{-ik_1 r_1(\theta)}}{r_1(\theta)} \right] \hat{i}_\phi, \quad (2.61)$$

onde $r_1(\theta)$ é a distância da origem até um ponto sobre a interface da lente na direção e dado pela Equação (2.10). A onda incidente sobre a superfície interna da lente pode ser aproximada por uma onda plana incidindo sobre uma interface plana. Logo o coeficiente de transmissão descrito pela equação (2.57) pode ser utilizado para expressar o campo elétrico transmitido através da interface, sendo este dado por:

$$\vec{E}_t = T_{\parallel} E_0 \left[\frac{J_0(k_1 a \sin \theta) - J_0(k_1 b \sin \theta)}{\sin \theta} \right] \left[\frac{e^{-ik_1 r_1}}{r_1} \right] \hat{i}_\alpha, \quad (2.62)$$

onde o vetor unitário \hat{i}_α é descrito pela equação (2.65), e o campo magnético dado por:

$$\vec{H}_t = \frac{T_{\parallel} E_0}{\eta_0} \left[\frac{J_0(k_1 a \sin \theta) - J_0(k_1 b \sin \theta)}{\sin \theta} \right] \left[\frac{e^{-ik_1 r_1}}{r_1} \right] \hat{i}_{\phi}. \quad (2.63)$$

A polarização \hat{i}_{α} campo elétrico pode ser obtida pelo produto $\hat{i}_{\alpha} = \hat{i}_{\phi} \times \hat{i}_S$, onde \hat{i}_S é o vetor unitário na direção de propagação do raio transmitido pela lente.

O vetor \hat{i}_S é dado por:

$$\hat{i}_S = \sin(\alpha) \cos(\varphi) \hat{i}_x + \sin(\alpha) \sin(\varphi) \hat{i}_y + \cos(\alpha) \hat{i}_z. \quad (2.64)$$

O vetor polarização do campo elétrico é dado:

$$\hat{i}_{\alpha} = \cos(\alpha) \cos(\varphi) \hat{i}_x + \cos(\alpha) \sin(\varphi) \hat{i}_y - \sin(\alpha) \hat{i}_z. \quad (2.65)$$

2.3.3.

Campo radiado pela lente segundo as aproximações da Ótica Geométrica

A lente foi sintetizada segundo as aproximações da Ótica Geométrica (GO), impondo a condição de caminho ótico para os raios que emergem do dielétrico. A validade destas aproximações requer que a superfície da lente seja suave, ou seja, com curvatura e dimensões muito maiores que um comprimento de onda. Seguindo as etapas apresentadas em [17], estas aproximações podem ser também utilizadas para estimar o campo radiado pela lente no espaço livre.

Como mencionado anteriormente e ilustrado na Figura 2.2, a fonte pontual na origem emite raios na direção (θ, ϕ) que irão incidir sobre a interface da lente e serão refratados na direção (α, ϕ) . Devido à simetria circular da lente, os raios incidente e transmitido estão contidos em um mesmo plano ϕ .

Fora da lente os raios transmitidos definem superfícies de caminho ótico constante S , circularmente simétricas, e que são descritas pelos pontos ρ, ϕ, z que satisfazem a seguinte condição:

$$S(\rho, \phi, z) = r_2 + c, \quad (2.65)$$

$$S(\rho, \phi, z) = \sqrt{[\rho \cos(\phi) - \rho_0 \cos(\phi)]^2 - [\rho \sin(\phi) - \rho_0 \sin(\phi)]^2}, \quad (2.66)$$

$$S(\rho, \phi, z) = \sqrt{[\rho - \rho_0]^2 - [Z - Z_0]^2} + c = cte. \quad (2.67)$$

Ao longo de sua trajetória, os raios são ortogonais às superfícies de caminho ótico constante $S(r)$. Como ilustrado na Figura 2.15, nas vizinhanças da trajetória descrita pelo eixo v o comportamento da função $S(r)$ pode ser aproximado por uma equação do segundo grau:

$$v = -\frac{1}{2}u \cdot Q_u, \quad (2.68)$$

onde $S(r_0)$ é o valor de S em um ponto p_0 ao longo da trajetória do raio, \hat{u} representa as coordenadas de uma base de vetores ortogonais e Q é a matriz de curvatura da superfície de caminho ótico constante que passa por p_0 .

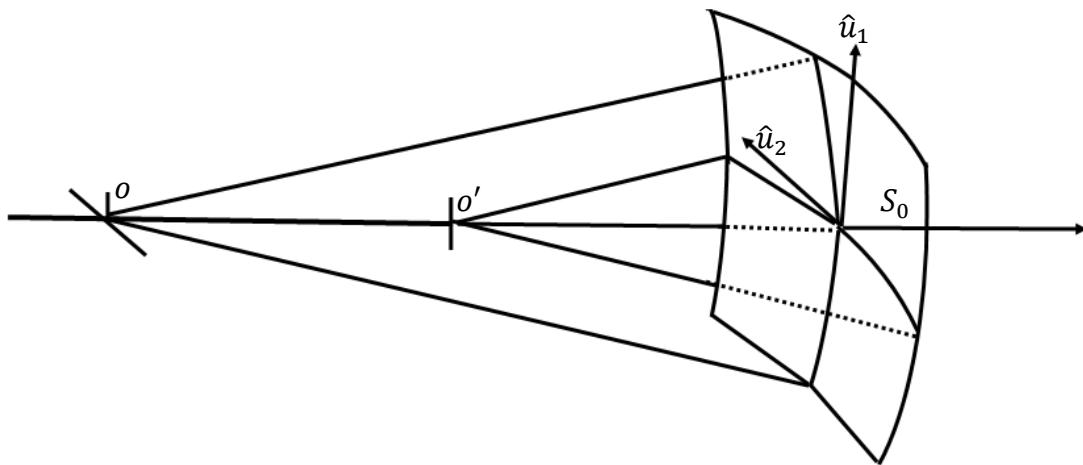


Figura 2.15: Raios ortogonais às superfícies de caminho ótico constante.

A matriz de curvatura da superfície de caminho ótico constante é dada por:

$$Q(\vec{r}) = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

onde σ_1 e σ_2 são os raios principais de curvatura da superfície S em cada ponto do espaço. Para determinar a matriz de curvatura de uma superfície de caminho ótico constante S_0 , pode-se utilizar a Equação (2.67) e reorganizá-la como

$$\sqrt{[\rho - \rho_0]^2 - [Z - Z_0]^2} = S_0, \quad (2.70)$$

onde

$$Z = Z_0 + \sqrt{S_0^2 - [\rho - \rho_0]^2}. \quad (2.71)$$

Derivando Z e seguindo o procedimento [18] obtém-se:

$$Z_x = -\frac{x \Delta \rho}{S \rho}, \quad (2.72)$$

$$Z_y = -\frac{y \Delta \rho}{S \rho}, \quad (2.73)$$

$$Z_{xx} = -\left[\frac{y^2 \Delta \rho}{S \rho^3} + \frac{x^2 S_0^2}{S^3 \rho^2} \right], \quad (2.74)$$

$$Z_{yy} = -\frac{1}{S \rho^2} \left[\frac{x^2 \Delta \rho}{\rho} + \frac{y^2 S_0^2}{S^2} \right], \quad (2.75)$$

$$Z_{xy} = -\frac{xy}{S \rho^2} \left[1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \rho^2}{S^2} \right]. \quad (2.76)$$

Seguindo os passos apresentados em [17], a matriz pode ser expressa por

$$Q(\vec{r}) = \Delta^2 \begin{bmatrix} (E_2 G_1 - F_2 F_1) & (F_2 E_1 - E_2 F_1) \\ (F_2 G_1 - G_2 F_1) & (G_2 E_1 - F_2 F_1) \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

Onde

$$E_1 = 1 + Z_x^2, \quad G_1 = 1 + Z_y^2, \quad F_1 = Z_y Z_x, \quad G_2 = \Delta Z_{yy}, \quad E_2 = \Delta Z_{xx},$$

$$F_2 = \Delta Z_{xy}, \Delta = [1 + Z_x^2 + Z_y^2]^{-1/2}.$$

Utilizando os campos sobre a superfície da lente como referência, a intensidade de campo $u(\vec{r})$ em um ponto de observação \vec{r} é dado por:

$$u(\vec{r}) = u(\vec{r}_1) \left[\frac{\det Q(\vec{r})}{\det Q(\vec{r}_1)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{ikS(\vec{r})}, \quad (2.78)$$

onde $u(\vec{r}_1)$ é a intensidade de campo sobre a superfície externa da lente, $\det Q(\vec{r}_1)$ é o determinante da matriz de curvatura de $S(\vec{r})$ sobre a superfície da lente e $\det Q(\vec{r})$ é o determinante da matriz de curvatura de $S(\vec{r})$ no ponto de observação.

Supondo que a onda seja TEM, a função $u(\vec{r})$ descreve o comportamento dos campos elétrico e magnético cujas amplitudes se relacionam pela impedância intrínica do espaço livre.

$$\vec{E}(\vec{r}) = u(\vec{r}_1) \left[\frac{\det Q(\vec{r})}{\det Q(\vec{r}_1)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{ikS(\vec{r})} \hat{i}_\alpha, \quad (2.79)$$

e

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta} u(\vec{r}_1) \left[\frac{\det Q(\vec{r})}{\det Q(\vec{r}_1)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{ikS(\vec{r})} \hat{i}_\varphi, \quad (2.80)$$

onde

$$u(\vec{r}_1) = \frac{T_{\parallel} E_0}{r_1} \left[\frac{J_0(k_1 a \sin \theta) - J_0(k_1 b \sin \theta)}{\sin \theta} \right]. \quad (2.81)$$

A expressão (2.76) assegura a continuidade dos campos sobre a interface. Estas aproximações descrevem os campos no interior do cone $\alpha < \alpha_{Max}$. Na região fora deste cone, $\alpha > \alpha_{Max}$, os campos são nulos.

2.3.4.

Exemplos de análise via aproximações da Ótica Geométrica

Para ilustrar a aplicação das aproximações da Ótica Geométrica serão apresentados três grupos de lentes. O primeiro grupo corresponde as lentes apresentadas na Seção 2.2.6.1. As lentes desse grupo foram modeladas para gerar feixes com foco virtual, anéis cáusticos virtuais, sobre o plano $Z_0 = -2.5\lambda$, e sua espessura Z_A ajustada para ser mínima. O segundo grupo corresponde a lentes modeladas para produzir um foco virtual sobre o eixo de simetria $Z_0 = -2.5\lambda$, mas com diferentes espessuras Z_A . O terceiro grupo de lentes corresponde a lentes onde os parâmetros ρ_0 e Z_A foram justados para produzir diagramas semelhantes.

Para os casos primeiro grupo, a Figura 2.16 ilustra o diagrama de radiação obtido para a lente ilustrada na Figura 2.7, com espessura $Z_A = 4.1666\lambda$ e que foi projetada para gerar um feixe de raios com um foco virtual no ponto ($\rho_0 = 0\lambda$, $Z_0 = -2.5\lambda$). O foco virtual colocado sobre o eixo de simetria faz com que a cobertura da lente se estenda entre $0 < \alpha < \alpha_{max}$, para $\alpha_{max} = 38.68^\circ$. Fora desta região, $\alpha > \alpha_{max}$, os campos para as aproximações da Ótica Geométrica são considerados nulos.

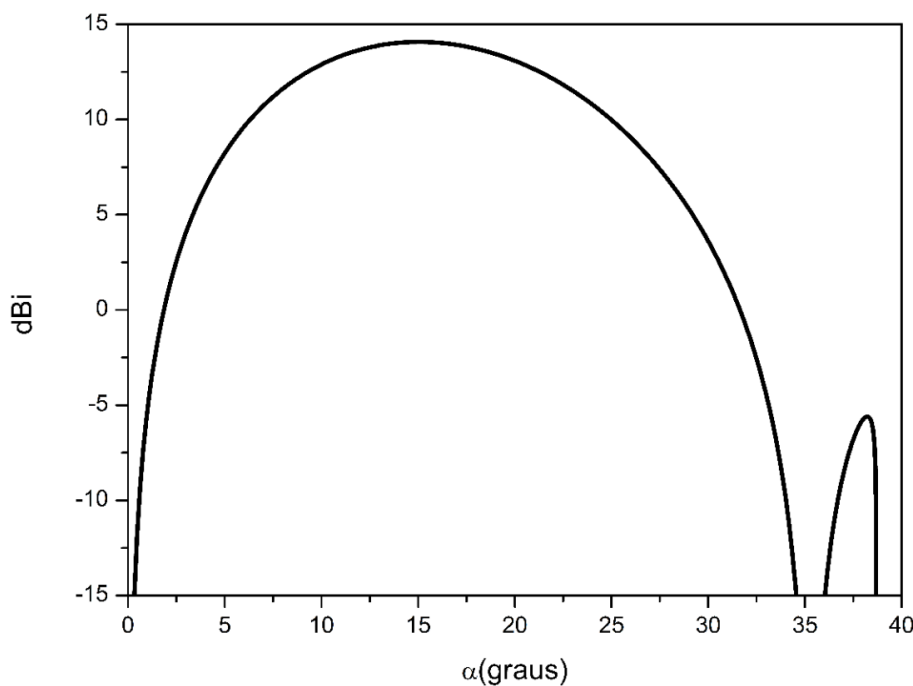


Figura 2.16: Diagrama GO de lente com foco virtual ($\rho_0 = 0\lambda$, $Z_0 = -2.5\lambda$), espessura $Z_A = 4.17\lambda$ e coeficiente de refração da lente de 1.6.

A Figura 2.17 ilustra o diagrama de radiação obtido para a lente ilustrada na Figura 2.10. Esta lente foi projetada para gerar um feixe de raios com um foco virtual no ponto ($\rho_0 = -1\lambda$, $Z_0 = -2.5\lambda$) e apresenta uma espessura, $Z_A = 1.70\lambda$, dimensionada para que não exista a incidência de raios críticos sobre a interface da lente. O foco virtual colocado em $\rho_0 = -1\lambda$ faz que não existam raios transmitidos nas regiões próximas ao eixo de simetria, e o campo seja nulo nos cones $\alpha < \alpha_{min}$, assim como no cone $\alpha > \alpha_{max}$. Para este caso temos $\alpha_{min} = 13.4^\circ$ e $\alpha_{max} = 38.68^\circ$.

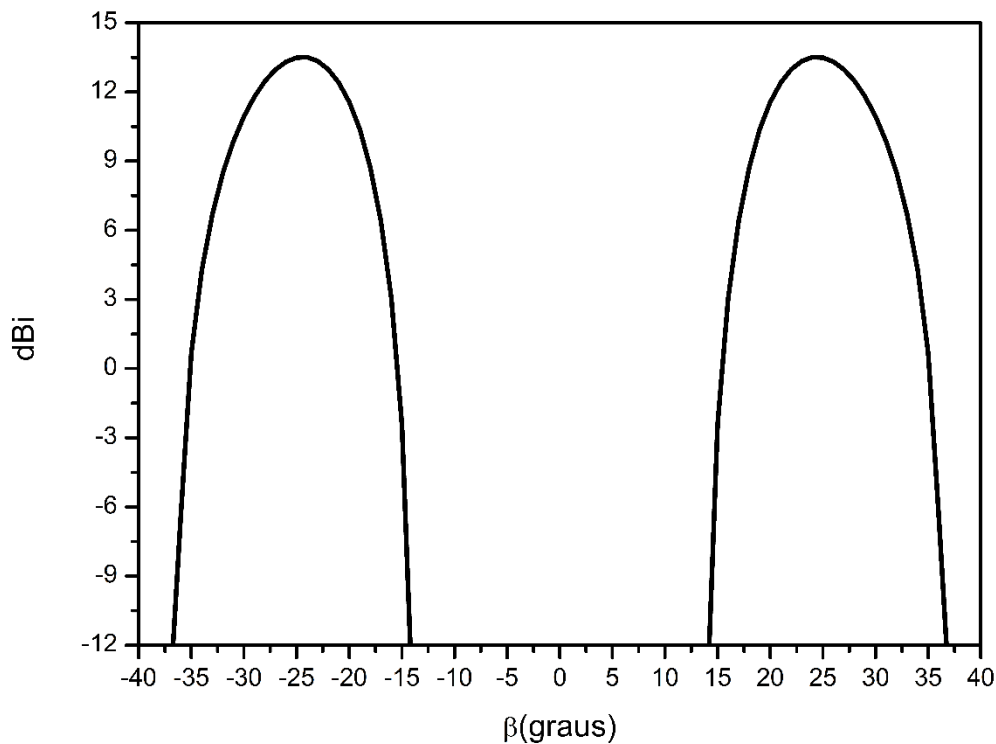


Figura 2.17: Diagrama GO de lente com foco virtual ($\rho_0 = -1\lambda$, $Z_0 = -2.5\lambda$), espessura $Z_A = 1.7\lambda$ e coeficiente de refração do material da lente de 1.6.

Quando o foco virtual é colocado em um ponto ρ_0 positivo, a lente produz uma superfície cáustica real fora dela. O limite inferior da cobertura da lente é negativo, $\alpha_{min} < 0$, fazendo com que no cone $\alpha < |\alpha_{min}|$ exista a presença de dois raios, cada um emitido de um lado da lente como ilustrado na Figura 2.9. Para determinar o campo total radiado, os campos associados a cada par de raios devem ser somados, considerando as diferenças de amplitude e fase devido à diferença de percurso. Para $\alpha = 0^\circ$ o campo radiado é nulo, pois a amplitude dos dois raios é

idêntica, não apresentam desfasamento, pois percorrem o mesmo caminho ótico, mas a polarização do campo é oposta, fazendo com que as contribuições se anulem.

A Figura 2.18 ilustra o diagrama de radiação para a lente da Figura 2.9, para $Z_0 = -2.5 \lambda$, $\rho_0 = 1 \lambda$ e $Z_A = 6.92 \lambda$. Para esta lente $\alpha_{min} = -5.97^\circ$ e $\alpha_{max} = 38.68^\circ$. Assim, segundo as aproximações da Ótica Geométrica diferentemente das lentes com foco virtual sobre o eixo, o diagrama previsto pela Ótica Geométrica na região junto ao eixo de simetria, $\alpha = 0^\circ$, apresenta forte variação.

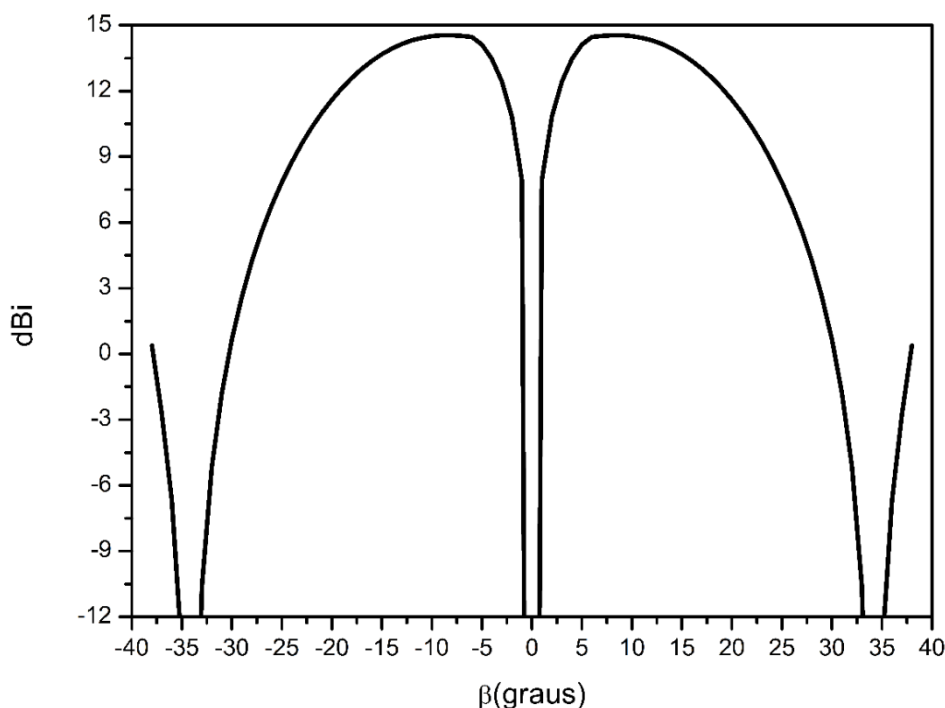


Figura 2.18: Diagrama GO de lente com foco virtual ($\rho_0 = 1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$), espessura $Z_A = 6.92 \lambda$ e coeficiente de refração do material da lente 1.6.

Influência da espessura da lente no diagrama de radiação

Outro aspecto interessante a ser observado no comportamento das lentes é a influência da espessura no diagrama de radiação da lente. A Figura 2.19 ilustra o diagrama para três lentes modeladas para gerar um feixe com foco virtual colocado sobre o eixo de simetria no ponto $Z_0 = -2.5 \lambda$. Observamos que o aumento da espessura Z_A da lente alarga o diagrama de radiação. Logo o diagrama de radiação tende para o diagrama de radiação da corneta coaxial.

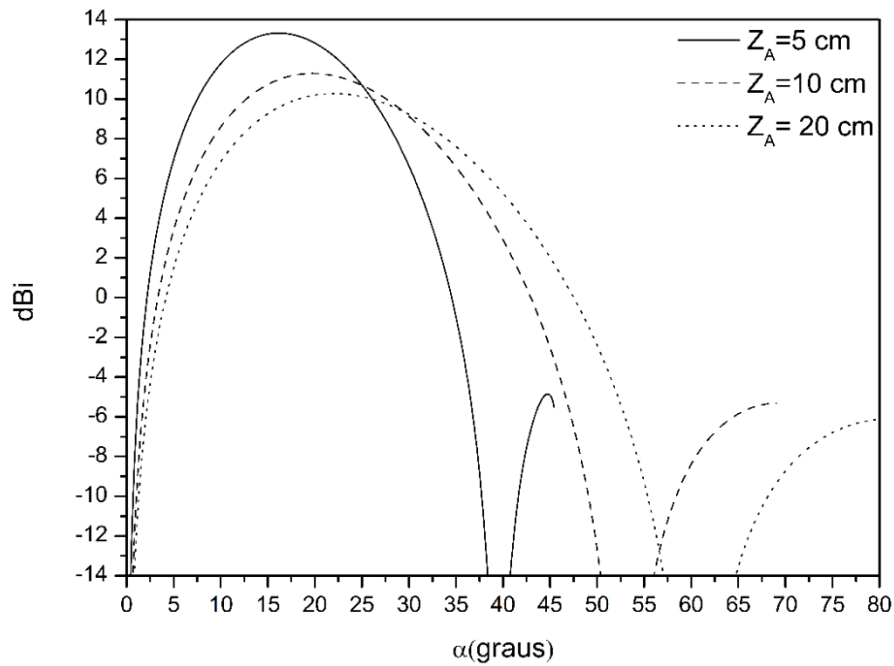


Figura 2.19: Diagrama para três lentes com foco virtual colocado sobre o eixo de simetria no mesmo ponto $Z_0 = -2.5 \lambda$.

A Figura 2.20 ilustra três exemplos de diagramas de lentes onde a espessura Z_A e a posição do foco virtual Z_0 são ajustadas para manter, aproximadamente, o mesmo diagrama de radiação da lente. As características destas lentes são apresentadas na Tabela 2.4. Observamos que existe, aproximadamente, uma relação linear entre estes dois parâmetros.

Tabela 2.4: Características de lentes onde Z_A e Z_0 são ajustadas para manter, o mesmo diagrama de radiação da lente.

Nome	$Z_0 (\lambda)$	$Z_A (\lambda)$	$\alpha_{\max} (\text{graus})$
Lente 4.1	-2	3.33	38.8
Lente 4.2	-3	5	38.8
Lente 4.3	-4	6.66	38.8

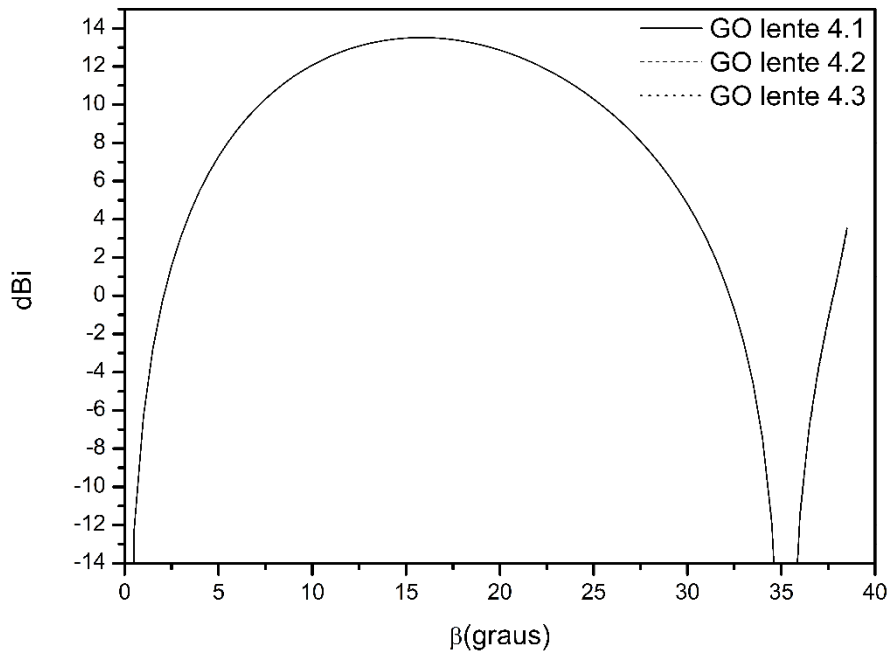


Figura 2.20: Diagrama de radiação GO de lentes onde Z_A e Z_0 são ajustadas para manter o mesmo diagrama de radiação da lente.

2.3.5.

Campo Radiado segundo as Aproximações da Ótica Física

As aproximações da Ótica Geométrica não permitem avaliar os efeitos difrativos, em especial os lóbulos laterais do diagrama de radiação. Para estimar o comportamento dos campos radiados pela lente nesta região, utilizamos um método baseado na combinação das aproximações da Ótica Geométrica e da Ótica Física.

Para sua aplicação, supõe-se que as dimensões da lente e da curvatura da interface sejam muito maiores que um comprimento de onda no espaço livre e obtêm-se as correntes elétrica \vec{J}_S e magnética \vec{M}_S equivalentes ilustradas na Figura 2.21 a partir dos campos magnético e elétricos sobre a parte externa da interface da lente, e descritos pelas Equações (2.62) e (2.63). Estas aproximações não consideram os efeitos de múltiplas reflexões no interior da lente que introduzem oscilações no lobo principal e aumentam os lóbulos laterais do diagrama de radiação da lente. Os campos radiados pela lente serão obtidos pela integração destas correntes Elétrica e Magnéticas equivalentes sobre a interface da lente.

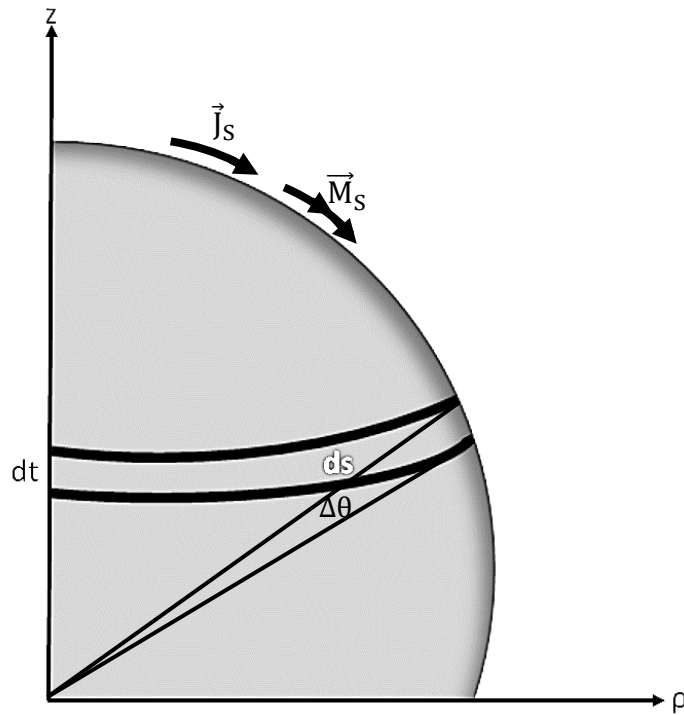


Figura 2.21: Distribuição de correntes sobre a lente.

2.3.5.1.

Correntes Equivalentes sobre Interface e Campo radiado em campo distante

Considerando o princípio de equivalência, podemos calcular as correntes magnética e elétrica equivalentes na superfície externa da lente. A corrente elétrica é expressada por

$$\vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H}_t = \begin{bmatrix} \hat{l}_\rho & \hat{l}_\phi & \hat{l}_z \\ n_\rho & 0 & n_z \\ 0 & H_\phi & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

onde \vec{H}_t é o campo magnético na parte externa da interface da lente e determinado utilizando a Equação (2.63)

$$\vec{J}_S = H_\phi [n_\rho \hat{l}_z - n_z \hat{l}_\rho]. \quad (2.83)$$

A corrente magnética é calculada com a seguinte expressão:

$$\vec{M}_S = -\hat{n} \times \vec{E}_t = \begin{bmatrix} \hat{l}_\rho & \hat{l}_\varphi & \hat{l}_z \\ n_\rho & 0 & n_z \\ E_\rho & 0 & E_z \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

onde \vec{E}_t é o campo elétrico na parte externa da interface da lente e determinado utilizando a Equação (2.62)

$$\vec{M}_S = -\eta H_\varphi [n_z t_z + n_\rho t_\rho] \hat{l}_\varphi. \quad (2.85)$$

Em coordenadas retangulares

$$\vec{J} = H_\varphi [-n_z \cos(\varphi) \hat{l}_x - n_z \sin(\varphi) \hat{l}_y + n_\rho \hat{l}_z]. \quad (2.86)$$

Como $\varphi = 0$ então $\hat{l}_\varphi = \hat{l}_y$

$$\vec{M} = -\eta H_\varphi [n_z t_z + n_\rho t_\rho] [\hat{l}_y]. \quad (2.87)$$

O campo elétrico em campo distante é dado por [6]:

$$\vec{E}_{CD} = \frac{j e^{-jk_0 r'}}{\pi \lambda_0 r'} \int_S [\eta_0 \vec{J}_s \times \hat{u}_0 - \vec{M}_s] \times \hat{u}_0 e^{i\delta k_0} ds, \quad (2.88)$$

onde \hat{u}_0 representa o vetor unitário, na direção do ponto de observação como se observa na Figura 2.22.

$$\hat{u}_0 = \sin(\theta') \hat{l}_x + \cos(\theta') \hat{l}_z. \quad (2.89)$$

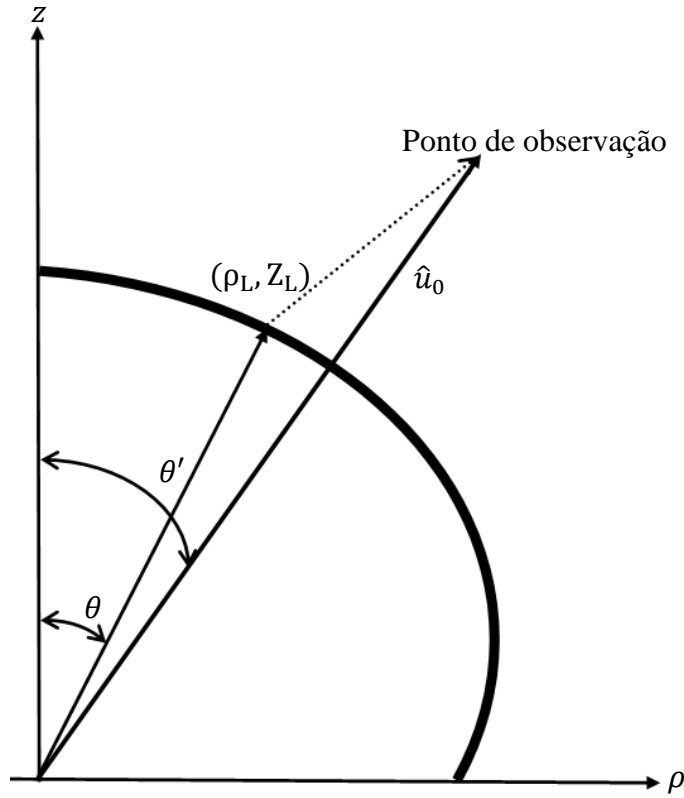


Figura 2.22: Vetor \hat{u}_0 .

A diferença de percurso δ é descrita por:

$$\delta = x \sin(\theta') \cos(\varphi') + y \sin(\theta') \sin(\varphi') + z \cos(\theta'). \quad (2.90)$$

As integrais da corrente elétrica por componente são:

$$I_{Jx} = - \int_S H_\varphi n_z \cos(\varphi) e^{i\delta k_0} ds, \quad (2.91)$$

$$I_{Jy} = - \int_S H_\varphi n_z \sin(\varphi) e^{i\delta k_0} ds, \quad (2.92)$$

$$I_{Jz} = \int_S H_\varphi n_\rho e^{i\delta k_0} ds. \quad (2.93)$$

Como o diagrama de radiação é circularmente simétrico, por simplicidade calcula-se o ponto de observação no plano xy , ou seja, $\varphi' = 0$.

$$\delta = x \operatorname{sen}(\theta') + z \cos(\theta'), \quad (2.94)$$

$$\delta = \rho \operatorname{sen}(\theta') + z \cos(\theta'), \quad (2.95)$$

$$dt = \sqrt{\Delta \rho^2 + \Delta z^2}. \quad (2.96)$$

O diferencial de superfície ds e de linha dt são indicados na Figura 2.21. Cálculo dos diferenciais:

$$n_z ds = \rho d\varphi n_z dt = \rho d\varphi d\rho, \quad (2.97)$$

$$n_\rho ds = \rho d\varphi n_\rho dt = \rho d\varphi dz. \quad (2.98)$$

Então as correntes elétricas ficam assim expressas:

$$I_{Jx} = - \int_{\varphi} \int_{\rho} H_{\varphi} \cos(\varphi) e^{ik_0[\rho \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta') + z \cos(\theta')]} \rho d\varphi d\rho, \quad (2.99)$$

$$I_{Jx} = - \int_{\rho} H_{\varphi} e^{ik_0 z \cos(\theta')} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) e^{ik_0 \rho \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta')} d\varphi, \quad (2.100)$$

$$I_{Jx} = 2\pi i \int_0^{\pi/2} H_{\varphi} e^{ik_0 z \cos(\theta')} J_1(k_0 \rho \operatorname{sen}(\theta')) \rho d\rho, \quad (2.101)$$

$$I_{Jy} = 0, \quad (2.102)$$

$$I_{Jz} = \int_S H_{\varphi} e^{i\delta k_0} \rho d\varphi dz, \quad (2.103)$$

$$I_{Jz} = \int_{\rho} H_{\varphi} e^{ik_0 z \cos(\theta)} \rho dz \int_0^{2\pi} e^{ik_0 \rho \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta')} d\varphi, \quad (2.104)$$

$$I_{Jz} = 2\pi \int_0^{\pi/2} H_{\varphi} e^{ik_0 z \cos(\theta')} J_0(k_0 \rho \operatorname{sen}(\theta')) \rho dz. \quad (2.105)$$

As integrais da corrente magnética são expressadas como:

$$I_M = \int_S \vec{M} e^{i\delta k_0} dS, \quad (2.106)$$

$$I_{My} = \int_t M_\varphi e^{ik_0 z \cos(\theta')} \rho dz \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) e^{ik_0 \rho \cos(\varphi) \sin(\theta')} d\varphi, \quad (2.107)$$

$$I_{My} = -2\pi i \int_0^{\pi/2} M_\varphi e^{ik_0 z \cos(\theta')} J_1(k_0 \rho \sin(\theta')) \rho dt. \quad (2.108)$$

Em campo distante, a onda radiada corresponde a uma onda TEM e o campo magnético radiado pela lente pode ser descrito por:

$$\vec{H}_{CD} = \frac{1}{\eta} \vec{E}_{CD} \times \hat{u}_0, \quad (2.109)$$

onde η é a impedância do espaço livre, $\eta = 120\pi$.

2.3.5.2.

Cálculo do campo magnético radiado pela lente em campo próximo

O campo magnético radiado é dado pela equação [17]:

$$\vec{H}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\vec{J} \times \vec{v} \psi - i\omega \varepsilon \vec{M} \psi + \frac{1}{i\omega \mu} (\vec{M} \cdot \vec{v}) \vec{v} \psi \right) dS. \quad (2.110)$$

Resolvendo a operação $(\vec{M} \cdot \vec{v}) \vec{v} \psi$

$$(\vec{M} \cdot \vec{v}) \vec{v} \psi = \left[-k^2 (\vec{M} \cdot \hat{i}_R) + \frac{3}{R} \left(ik + \frac{1}{R} \right) (\vec{M} \cdot \hat{i}_R) \hat{i}_R - \frac{\vec{M}}{R} \left(ik + \frac{1}{R} \right) \right] \psi, \quad (2.111)$$

onde:

$$\psi = \frac{e^{-ikR}}{R}. \quad (2.112)$$

R é definido do seguinte modo:

$$R = \sqrt{(Z_R - Z_L)^2 + (X_R - X_L)^2 + (Y_R - Y_L)^2}. \quad (2.113)$$

E o vetor unitário \hat{i}_R :

$$\hat{i}_R = \frac{1}{R} [(\rho - \rho' \cos(\phi')) \hat{i}_x - \rho' \sin(\phi') \hat{i}_y + \Delta z \hat{i}_z]. \quad (2.114)$$

Resolvendo a operação $\vec{J} \times \nabla \psi$

$$\vec{J} \times \nabla \psi \approx ik\psi(\vec{J} \times \hat{i}_R). \quad (2.115)$$

A equação (2.115) fica:

$$\vec{H}(\rho) = \frac{ik}{4\pi} \int_S \psi \left\{ (\vec{J} \times \hat{i}_R) - \frac{1}{\eta} [\vec{M} - (\vec{M} \cdot \hat{i}_R) \hat{i}_R] \right\} dS. \quad (2.116)$$

Onde

$$\vec{J} = \hat{n} \times \vec{H} = -\vec{H}_\phi [n_z \cos(\phi') \hat{i}_x + n_z \sin(\phi') \hat{i}_y - n_\rho \hat{i}_z], \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \vec{J} \times \hat{i}_R = & -\frac{\vec{H}_\phi}{R} \{ -\hat{i}_y [n_z \Delta z \cos(\phi') + n_\rho (\rho - \rho' \cos(\phi'))] \} \\ & - \frac{\vec{H}_\phi}{R} \sin(\phi') [\hat{i}_x (n_z \Delta z - n_\rho \rho') - \hat{i}_z \rho n_z], \end{aligned} \quad (2.118)$$

$$\vec{M} = \hat{n} \times \vec{E} = \vec{M}_{\phi'} (-\sin(\phi') \hat{i}_x + \cos(\phi') \hat{i}_y) = \vec{M}_{\phi'} \hat{i}_{\phi'}. \quad (2.119)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \vec{H}(\rho) = & \frac{ik}{4\pi} \int_S \psi \left\{ -\hat{i}_y [n_z \Delta z \cos(\phi') + n_\rho (\rho - \rho' \cos(\phi'))] \frac{\vec{H}_\phi}{R} \right\} dS \\ & - \frac{ik}{4\pi} \int_S \psi \left\{ \frac{\vec{M}_{\phi'}}{\eta} \left[\cos(\phi') - \left(\frac{\rho'}{R} \right)^2 (\sin(\phi'))^2 \right] \hat{i}_y \right\} dS. \end{aligned} \quad (2.120)$$

2.3.6.

Comparação da GO com a PO

Para comparar os resultados das técnicas de baseadas nas aproximações da Ótica Geométrica e da Ótica Física, serão utilizados exemplos do primeiro grupo de lentes apresentados na Seção 2.3.

A Figura 2.23 ilustra os resultados para a lente com parâmetros ($\rho_0 = 0 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 4.17 \lambda$). Os diagramas apresentam concordância para o centro do lobo principal, com o diagrama da PO oscilando no entorno do diagrama da GO, com diferenças menores que 2 db entre $7.4^\circ < \alpha < 32^\circ$ e menores que 3.5 db para $\alpha < 7.4^\circ$, junto ao eixo de simetria. Para os ângulos $\alpha > 32^\circ$, fora do centro do lobo principal, as discrepâncias são acentuadas devido aos efeitos difrativos não contabilizados nas aproximações da Ótica Geométrica.

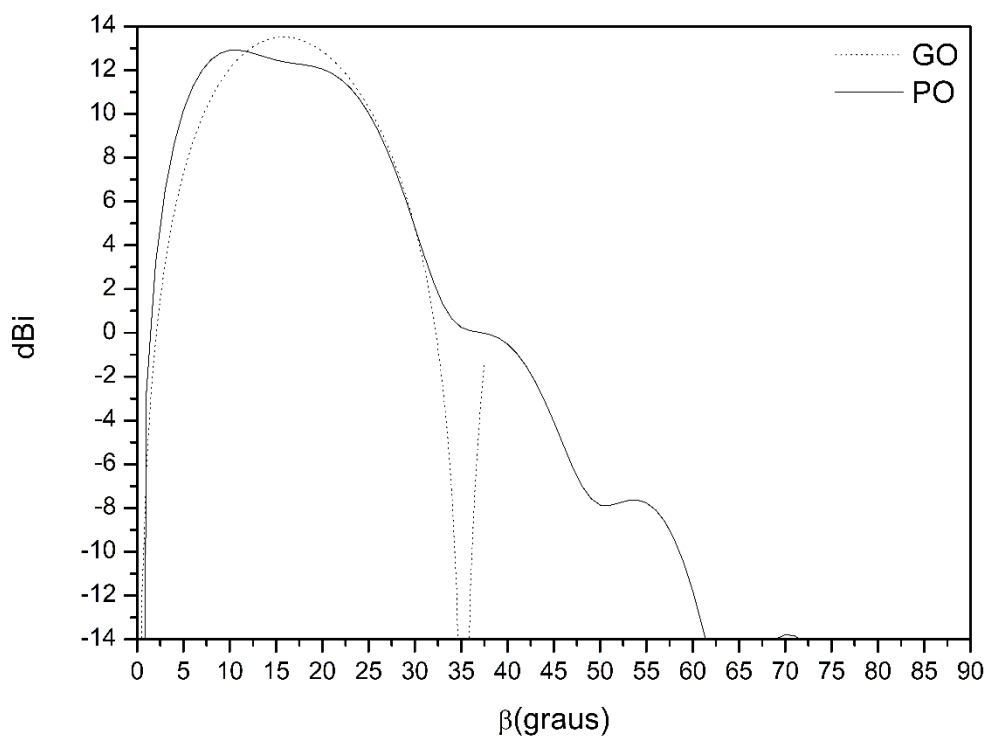


Figura 2.23: PO e GO para a lente ($\rho_0 = 0 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 4.17 \lambda$).

Para o caso em que o foco virtual, anel cáustico, está fora do eixo de simetria ($\rho_0 = 1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 6.92 \lambda$), a Figura 2.24 ilustra os resultados para as técnicas GO e PO. Os diagramas apresentam concordância para o lobo principal, com o diagrama da PO oscilando no entorno do diagrama da GO, com diferenças

menores que 2 db entre $4^\circ < \alpha < 31^\circ$ e tornando-se acentuadas junto ao eixo de simetria, onde o diagrama apresenta grande variação. Para os ângulos $\alpha > 31^\circ$, fora do centro do lobo principal, as discrepâncias são acentuadas devido aos efeitos difrativos não contabilizados nas aproximações da Ótica Geométrica.

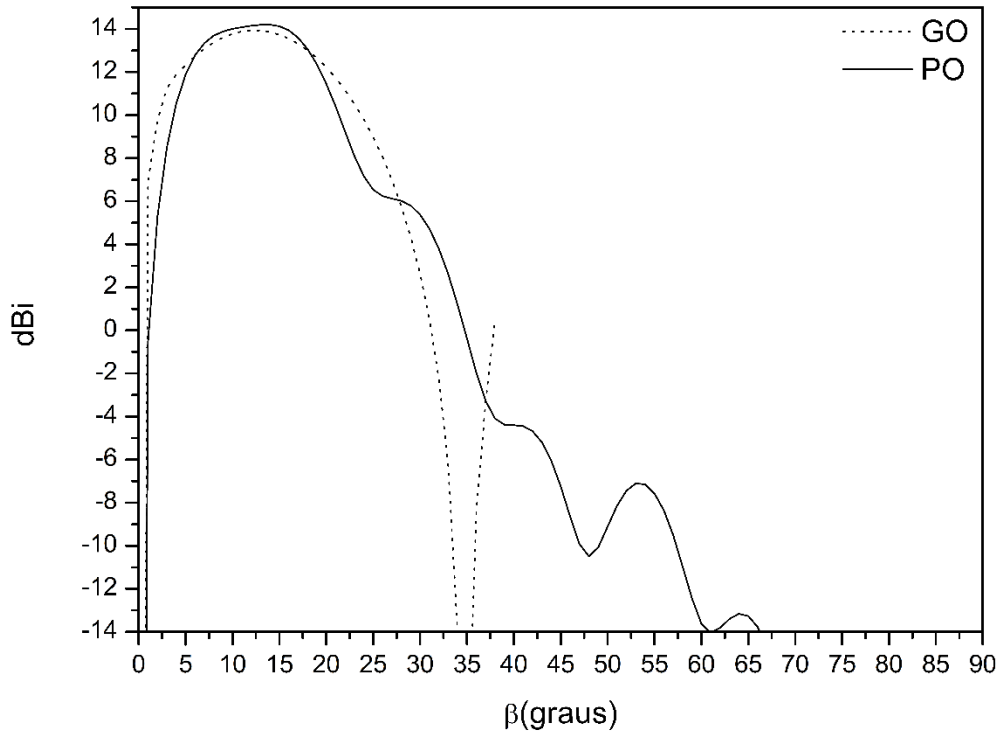


Figura 2.24: PO e GO para a lente ($\rho_0 = 1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 6.92 \lambda$).

Para o caso em que o foco virtual está em ($\rho_0 = -1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 1.7 \lambda$), existe uma região junto ao eixo de simetria sem cobertura ótica. A Figura 2.25 compara os resultados para as técnicas GO e PO. Os diagramas apresentam grande discordância para o lobo principal, onde o lobo principal do diagrama da PO é muito mais largo que o lobo principal do diagrama previsto pela GO. Estas discrepâncias são devidas às dimensões reduzidas da lente quando comparada às lentes dos dois casos anteriores. A superfície de fase constante da onda esférica incidente sobre a interface tem curvatura menor que 1.7λ e raio de curvatura menor que 2.5λ , limitando aplicação das aproximações da Ótica Física para determinar as correntes equivalentes sobre a interface da lente.

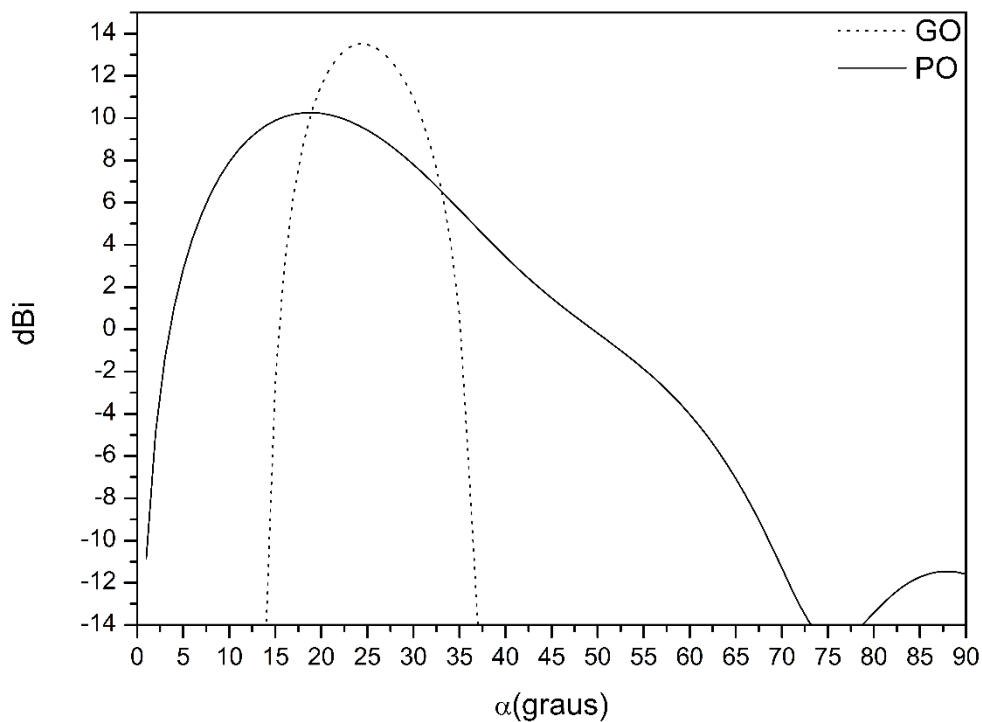


Figura 2.25: PO e GO para lente ($\rho_0 = -1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 1.7 \lambda$).

Para avaliar o efeito das dimensões da lente comparação entre as técnicas, a Figura 2.26 ilustra os resultados obtidos para a lente com foco em ($\rho_0 = -1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$), como a anterior, mas com espessura $Z_A = 6.92 \lambda$. Para esta lente os diagramas, agora, apresentam concordância para o lobo principal, com o diagrama da PO oscilando no entorno do diagrama da GO, com diferenças menores que 2 db entre $11^\circ < \alpha < 48^\circ$. Junto ao eixo de simetria, entre $0^\circ < \alpha < 80^\circ$, as aproximações da GO não preveem a incidência de raios e as diferenças entre as técnicas se tornam acentuadas. Para os ângulos $\alpha > 48^\circ$, fora do centro do lobo principal, as discrepâncias voltam a crescer devido aos efeitos difrativos não contabilizados nas aproximações da Ótica Geométrica.

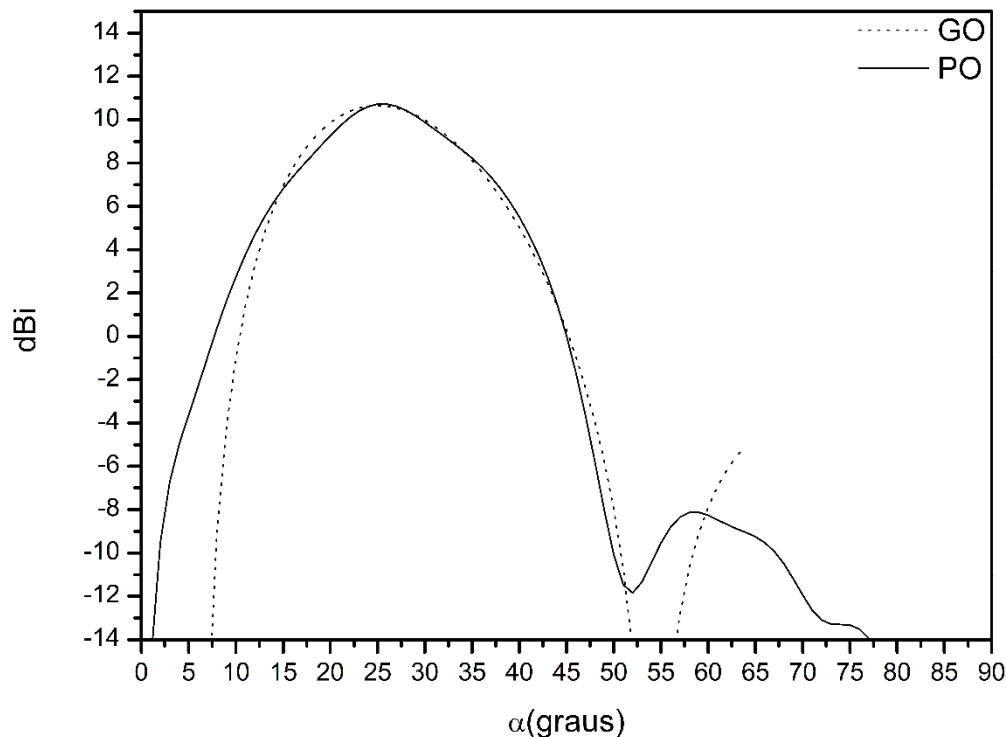


Figura 2.26: PO e GO para Lente ($\rho_0 = -1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 6.92 \lambda$).

2.3.7. Comparação da PO com técnicas rigorosas

Para uma avaliação das técnicas de análise baseada nas aproximações da Ótica Física, os resultados produzidos na análise de exemplos de cornetas coaxiais e lentes serão comparados aos obtidos através de método de análise eletromagnética rigorosa disponível na plataforma CST (CST STUDIO SUITE). A plataforma CST utiliza o método de FDTD (Finite-Difference Time-Domain Method) e incorpora os efeitos difrativos, os campos refletidos na interface e na cadeia de alimentação representada pela corneta coaxial TEM e cabo coaxial. Além disto, incorpora os efeitos eletromagnéticos devido à presença de um suporte metálico para a lente e corneta coaxial TEM, como ilustrado na Figura 2.12.

A Figura 2.27 ilustra os diagramas fornecidos pelas duas técnicas (PO-FDTD) na análise da lente ($\rho_0 = 0 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 4.17 \lambda$). Essas técnicas foram ilustradas na Figura 2.7. Os diagramas mostram concordância para a região do lobo principal com diferenças menores que 1 dB. Para ângulos maiores que $\alpha > 35^\circ$ as diferenças entre as técnicas crescem, devido aos efeitos não contabilizados nas

aproximações da Ótica Física, principalmente na região acima de $\alpha > 90^\circ$, devido comprimento finito do suporte metálico e a indução de correntes na sua parte traseira.

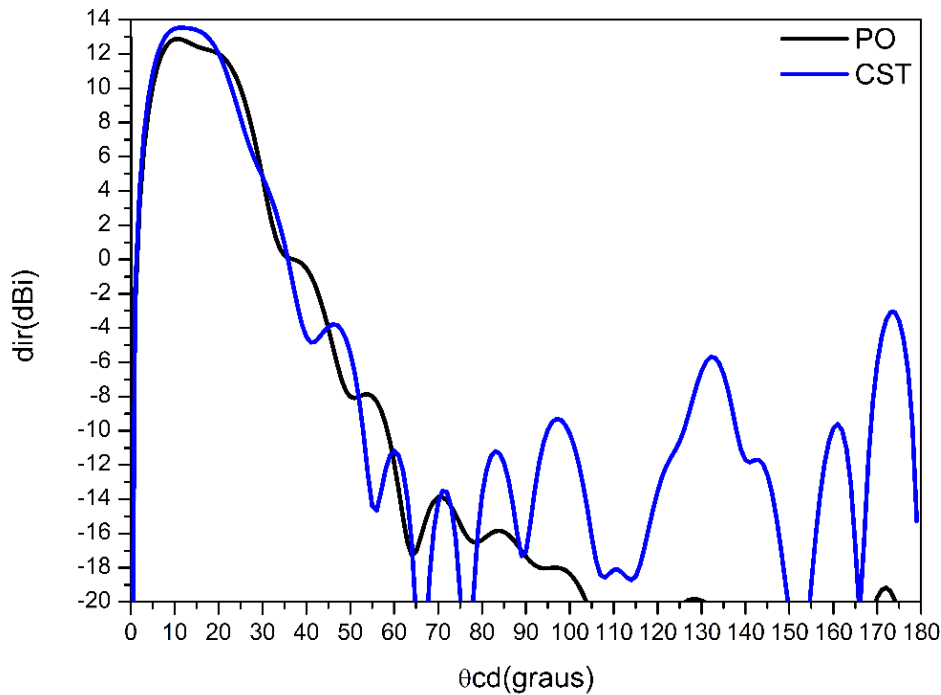


Figura 2.27: Diagramas fornecidos pelas duas técnicas (PO- FDTD) na análise da lente ($\rho_0 = 0 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 4.17 \lambda$).

Como segundo exemplo, a Figura 2.28 ilustra os diagramas fornecidos pelas duas técnicas (PO-FDTD) na análise da lente ($\rho_0 = 1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 6.92 \lambda$). Os diagramas demonstram concordância para a região do lobo principal com diferenças menores que 0,2 dB na região entre $0^\circ < \alpha < 25^\circ$. A Figura 2.29 ilustra os diagramas fornecidos pelas duas técnicas (PO-FDTD) na análise da lente ($\rho_0 = -1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 1.7 \lambda$). Os diagramas demonstram a concordância para a região do lobo principal com diferenças menores que 1,5 dB na região entre $15^\circ < \alpha < 40^\circ$. Quando comparado ao caso anterior, as diferenças menores são devidas principalmente as dimensões da lente maiores.

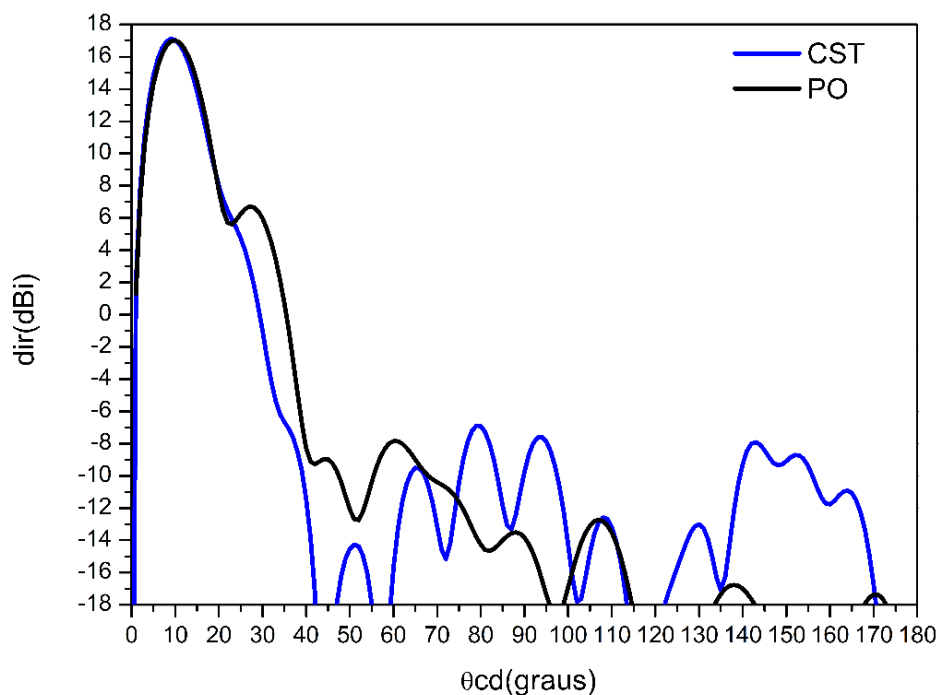


Figura 2.28: Diagramas fornecidos pelas duas técnicas (PO- FDTD) na análise da lente ($\rho_0 = 1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 6.92 \lambda$).

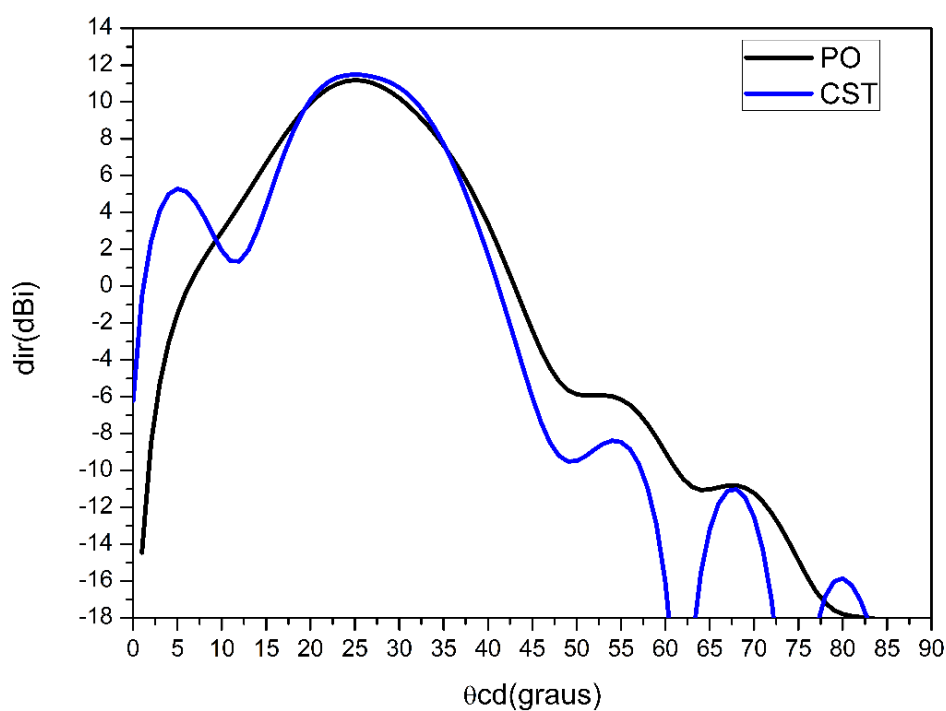


Figura 2.29: Diagramas fornecidos pelas duas técnicas (PO- FDTD) na análise da lente ($\rho_0 = -1 \lambda$, $Z_0 = -2.5 \lambda$, $Z_A = 1.7 \lambda$).

3

Modelagem do refletor

3.1.

Introdução

As antenas propostas neste trabalho estão compostas por: um alimentador; uma lente dielétrica, estudada no capítulo anterior; e um refletor, o qual é o tema do presente capítulo. O conjunto destes três elementos é ilustrado na Figura 3.1.

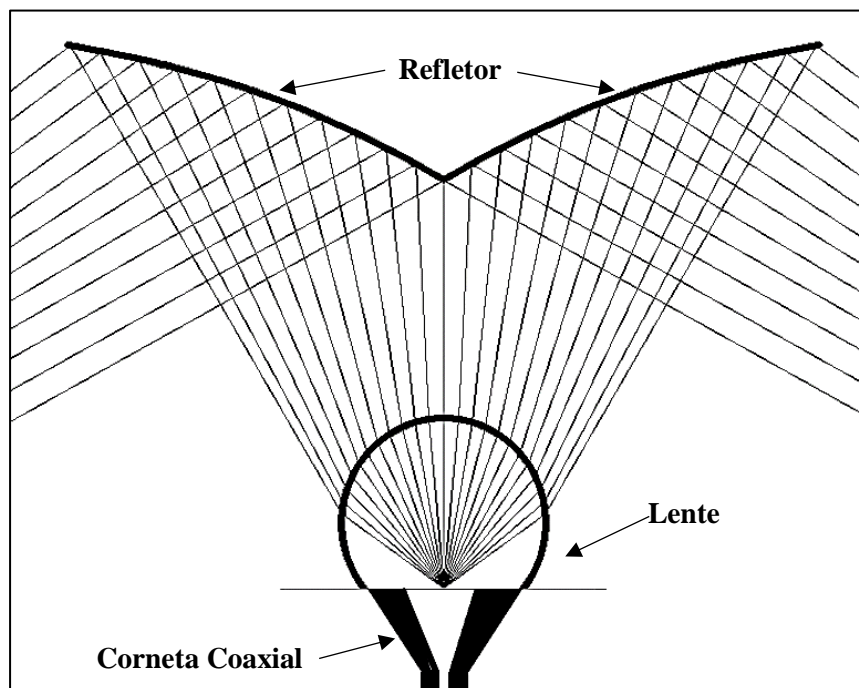


Figura 3.1: Configuração da antena: alimentador, lente e refletor.

Como visto no Capítulo 2, a lente é iluminada por uma corneta coaxial excitada pelo modo TEM radiando campos com centro de fase coincidente com o centro da abertura situado sobre a origem. Este campo apresenta um diagrama circularmente simétrico com um nulo sobre o eixo de simetria. Seguindo as aproximações da Ótica Geométrica e supondo que os raios emitidos de uma fonte pontual coincidente com a origem, a lente é modelada para que estes raios apresentem um anel cáustico virtual após serem refratados na sua interface com o espaço livre. Como visto na

Seção 2.3.2, o diagrama da lente é circularmente simétrico e possui um nulo sobre o eixo de simetria.

Para redistribuir a energia ao longo plano vertical, é colocado um refletor circularmente simétrico acima da lente. Este refletor é modelado segundo as aproximações da GO, considerando que os raios sejam emitidos de foco, coincidente com o foco virtual dos raios emitidos pela lente. Neste Capítulo será apresentada uma técnica de modelamento da geratriz do refletor, na qual são utilizados o princípio de conservação de energia no interior de um tubo de raios e a lei de Snell de reflexão sobre o refletor, associados a técnica de concatenação de seções de elipse e hipérboles, conforme apresentado em [2].

Para avaliar as aproximações utilizadas no processo de modelamento do refletor, serão empregadas aproximações da Ótica Física, onde as correntes induzidas sobre o refletor serão integradas para determinar o diagrama de radiação da antena.

3.2. Concatenação de seções cônicas

O refletor é uma superfície de revolução obtida através da rotação de uma geratriz em torno ao eixo de simetria Z. Neste trabalho, a geratriz será descrita por uma sucessão de seções de cônicas concatenadas [2]. Cada uma destas seções cônicas é parte de uma curva que tem dois focos localizados nos pontos P e Q, onde o ponto P é o foco coincidente com o foco virtual dos raios emitidos pela lente no plano da geratriz. A posição do ponto Q da seção dependerá do tubo de raios emergentes da região do refletor: se for convergente, Q será um foco real em frente ao refletor, se for divergente, Q será um foco virtual situado atrás do refletor.

Conforme ilustrados nas Figuras 3.2 e 3.3, estes dois tipos de estruturas de raios estão associados às seções de elipse ou hipérboles e os pontos P e Q correspondem aos focos, colocados sobre o eixo maior das curvas. O eixo da cônica passa pelos dois focos, o ângulo de elevação que faz este eixo com o eixo de simetria Z é chamado γ , como ilustrado nas Figuras 3.2 e 3.3. A parábola também se inclui neste conjunto de curvas, correspondendo ao caso em que um dos focos está situado no infinito e os raios refletidos são paralelos.

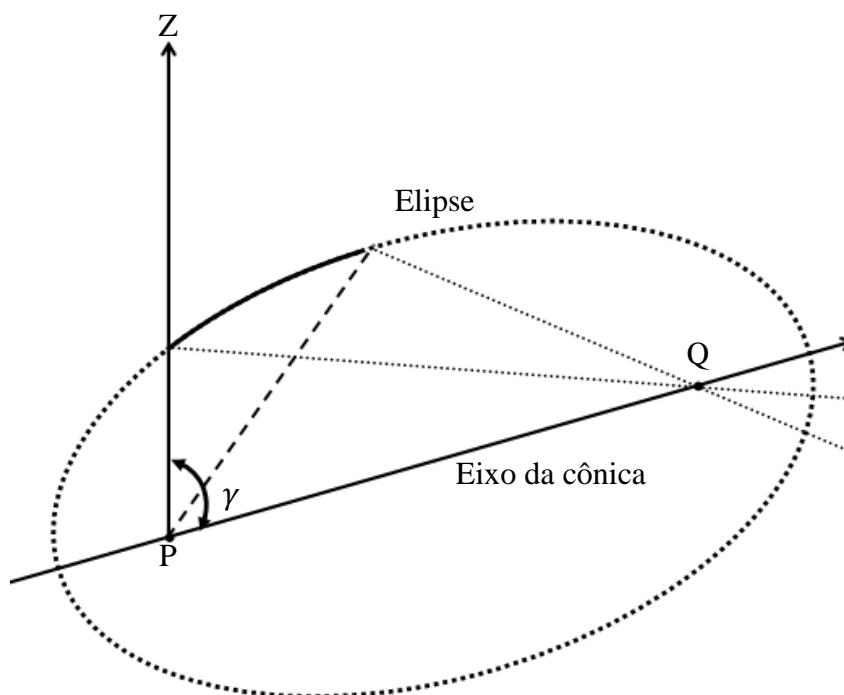


Figura 3.2: Refletor com foco posicionado na frente da cônica.

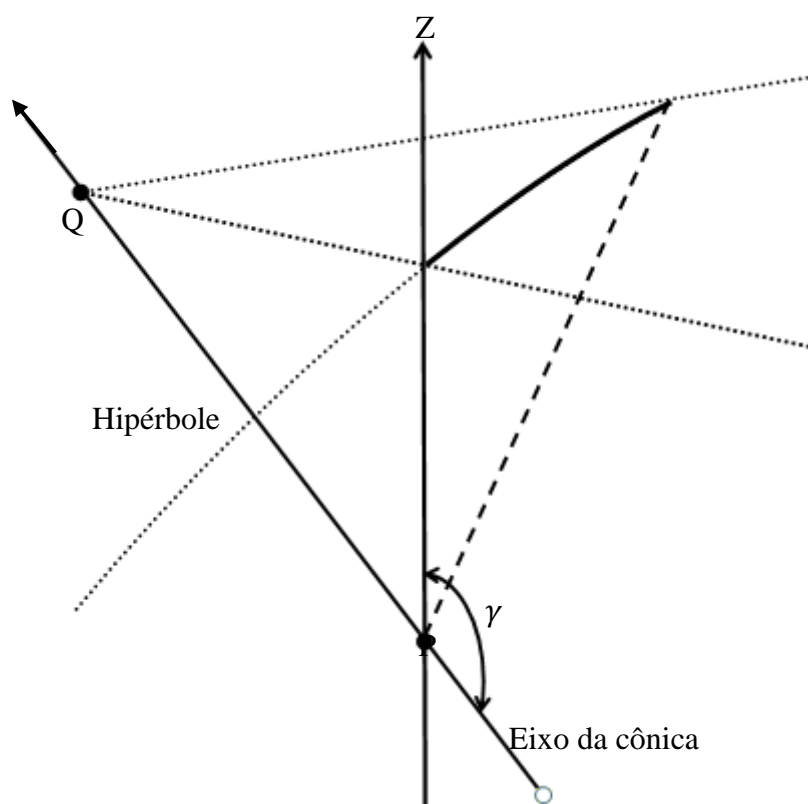


Figura 3.3: Refletor com foco posicionado atrás da cônica.

A técnica apresentada em [2], requer que seja estabelecida *a priori* a relação entre a direção do raio incidente sobre o refletor, descrita pelo ângulo α , e a direção dos raios refletidos, descrita pelo ângulo β . Esta relação é obtida aplicando o Princípio Conservação de Energia no interior de um tubo de raios que relaciona a densidade de potência radiada pela lente dielétrica e a densidade de potência especificada em campo distante. A técnica de solução para este mapeamento $\alpha \Rightarrow \beta$ será apresentada na Seção 3.3.

A geratriz do refletor é representada por uma combinação de seções cônicas locais $M_m (m = 1, 2, \dots, m)$ sequencialmente concatenadas, a seção cônica M_m é limitada pelos raios emitidos com trajetória definida pelos ângulos α_{m-1} e α_m , como ilustrado na Figura 3.4

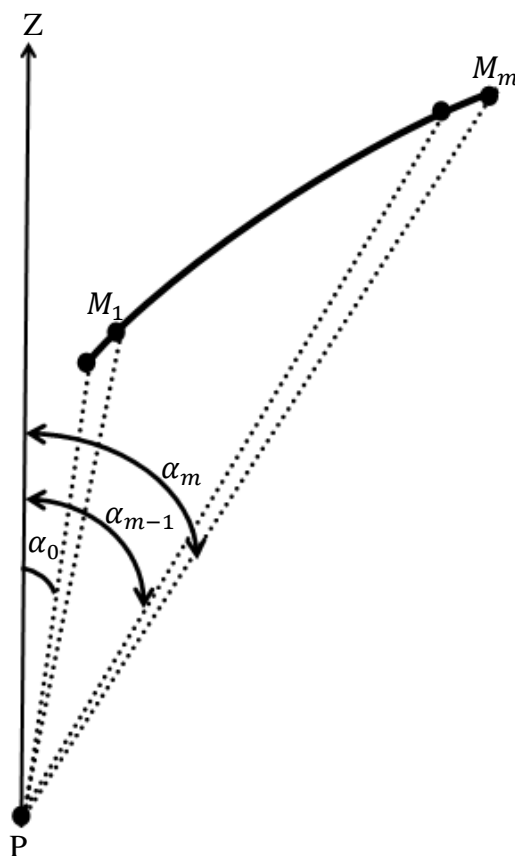


Figura 3.4: Geratriz do refletor representada por uma combinação de seções cônicas.

Todas estas seções cônicas têm um foco em comum situado sobre o ponto P coincidente com o ponto do anel cáustico da lente no plano de incidência. Cada uma destas seções cônicas M_m é descrita pela equação polar:

$$r_F = \frac{a}{e \cos \Upsilon - 1}, \quad (3.1)$$

onde r_F é a distância entre o ponto P e um ponto qualquer da cônica como ilustrado na figura 3.5, a é o *semi-latus rectum*, definido pela relação:

$$a = f(e - 1/e), \quad (3.2)$$

$2f$ é a distância interfocal, e é a excentricidade e Υ é o ângulo entre o eixo da cônica e um ponto qualquer da cônica, conforme a Figura 3.5. Percebe-se que Υ é a diferença entre o ângulo de elevação do eixo de simetria γ e o ângulo β , logo a equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$r_F = \frac{a}{e \cos(\alpha - \gamma) - 1}. \quad (3.3)$$

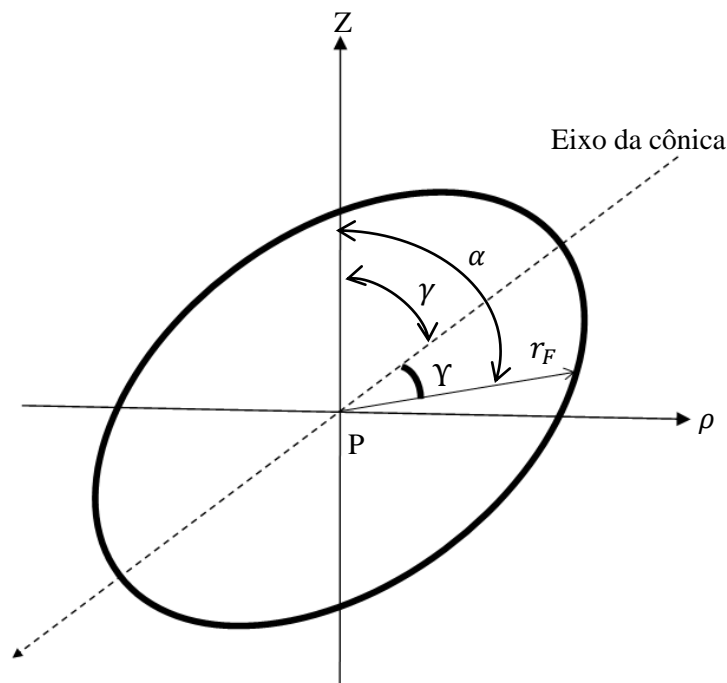


Figura 3.5: Parâmetros de uma cônica.

Expandindo (3.3) obtém-se:

$$r_F = \frac{a}{e \sen \gamma \sen \alpha + e \cos \gamma \cos \alpha - 1}. \quad (3.4)$$

A seção cônica M_m é limitada pelos ângulos α_{m-1} e α_m e seu eixo de simetria faz um ângulo γ_m com o eixo Z da equação anterior tem-se que para a direção α_m :

$$r_{Sm} = \frac{a_m}{b_m \sen(\alpha_m) + d_m \cos(\alpha_m) - 1}, \quad (3.5)$$

Onde r_{Sm} representa a distância entre o foco P e a extremidade na direção α_m da seção cônica como ilustrado na Figura 3.6, a_m é o semi-latus rectum da cônica e os coeficientes a_m , b_m e d_m estão dados por:

$$a_m = c_m(e_m - 1/e_m), \quad (3.6)$$

$$b_m = e_m \sen(\gamma_m), \quad (3.7)$$

$$d_m = e_m \cos(\gamma_m), \quad (3.8)$$

onde e_m representa a excentricidade da cônica.

Para a direção α_{m-1} associada à outra extremidade da seção cônica reescreve-se a equação (3.5) como:

$$a_m = r_{Sm-1}[b_m \sen(\alpha_{m-1}) + d_m \cos(\alpha_{m-1}) - 1]. \quad (3.9)$$

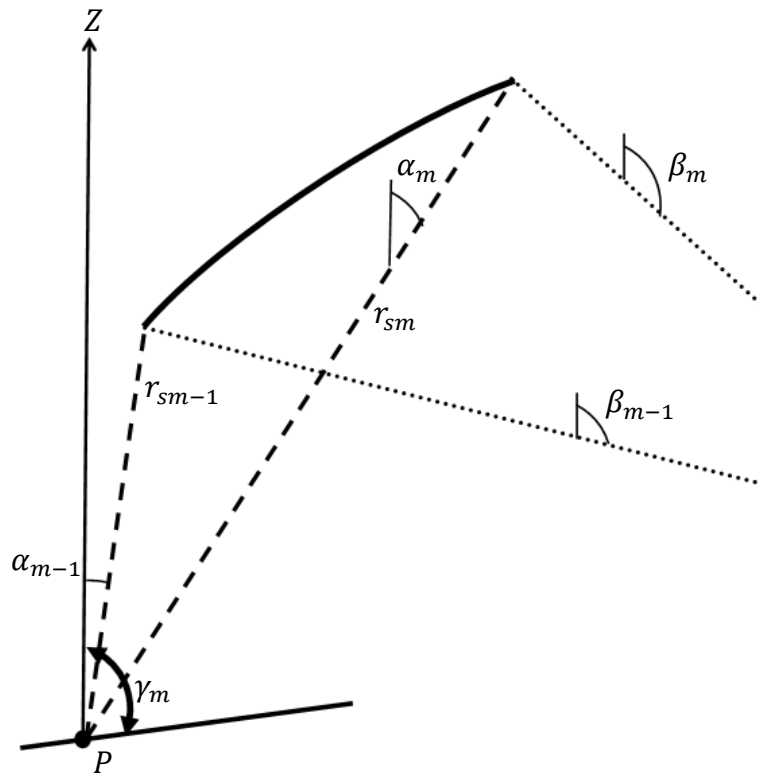


Figura 3.6: Seção cônica.

Assim a equação (3.9) indica que definindo a primeira distância r_{s0} pode-se calcular a distância r_{s1} e do mesmo modo conhecendo r_{sm-1} poderá ser calculado r_{sm} . O processo iterativo de síntese tem início com $m = 0$, correspondendo a α_0 .

Os parâmetros a_m , b_m e d_m não são conhecidos. Desenvolvendo o método apresentado em [2] são calculados b_m e d_m através de um sistema de equações lineares em coordenadas esféricas apresentadas em (3.10) e (3.11) e a_m pode ser obtido através da equação 3.5:

$$\begin{aligned} & \left[\cot\left(\frac{\alpha_m}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta_m}{2}\right) \right] b_m + \left[\cot\left(\frac{\alpha_m}{2}\right) \cot\left(\frac{\beta_m}{2}\right) - 1 \right] d_m \\ & = \cot\left(\frac{\alpha_m}{2}\right) \cot\left(\frac{\beta_m}{2}\right) + 1, \end{aligned}$$

(3.10)

$$\begin{aligned}
& \left[\cot\left(\frac{\alpha_{m-1}}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta_{m-1}}{2}\right) \right] b_m + \left[\cot\left(\frac{\alpha_{m-1}}{2}\right) \cot\left(\frac{\beta_{m-1}}{2}\right) - 1 \right] d_m \\
& = \cot\left(\frac{\alpha_{m-1}}{2}\right) \cot\left(\frac{\beta_{m-1}}{2}\right) + 1.
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

3.2.1.

Conservação de energia e mapeamento $\beta(\alpha)$

Como discutido na anterior seção, a técnica de modelamento do refletor requer o prévio conhecimento do mapeamento $\beta(\alpha)$ para utilizar o método de concatenação de seções cônicas para determinar a geratriz que descreve a superfície da lente. Para determinar este mapeamento será utilizada o Princípio de Conservação de Energia no interior de um tubo de raios através de um algoritmo numérico que será apresentado a seguir.

O objetivo do modelamento do refletor é transformar a densidade de potência por ângulo sólido radiada pela lente $G_L(\alpha)$ na cobertura em campo distante definida pela densidade de potência por ângulo sólido $G_\beta(\beta)$, entre os ângulos β_0 e β_f ao longo do plano vertical, como ilustrado na Figura 3.6. A densidade $G_\beta(\beta)$ é descrita pela seguinte expressão:

$$G_\beta(\beta) = G_0 F(\beta), \tag{3.12}$$

onde $F(\beta)$ descreve a forma da cobertura especificada e G_0 é uma constante de normalização para que toda a potência que incide na superfície refletora esteja contida na região de cobertura entre os ângulos β_0 e β_f .

Considerando que o diagrama de radiação do alimentador e o diagrama de campo distante especificado são circularmente simétricos, conservação de energia implica que as funções $G_L(\alpha)$ e $G_\beta(\beta)$ deverão satisfazer a seguinte condição:

$$\int_{\beta_0}^{\beta_f} G_\beta(\beta) \sin\beta \, d\beta = \int_{\alpha_0}^{\alpha_f} G_L(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha, \tag{3.13}$$

onde α_0 e α_f indicam as direções dos raios emitidos pela lente e que incidem nos extremos do refletor, como ilustrado na Figura 3.7. Como $G_L(\alpha)$, $F(\beta)$ e seus respectivos limites (α_0, α_f) e (β_0, β_f) são conhecidos, a substituição de (3.13) em (3.12) permite determinar a constante de normalização G_0 :

$$G_0 = \frac{\int_{\alpha_0}^{\alpha_f} G_L(\alpha) \sin \alpha d\alpha}{\int_{\beta_0}^{\beta_f} F(\beta) \sin \beta d\beta}. \quad (3.14)$$

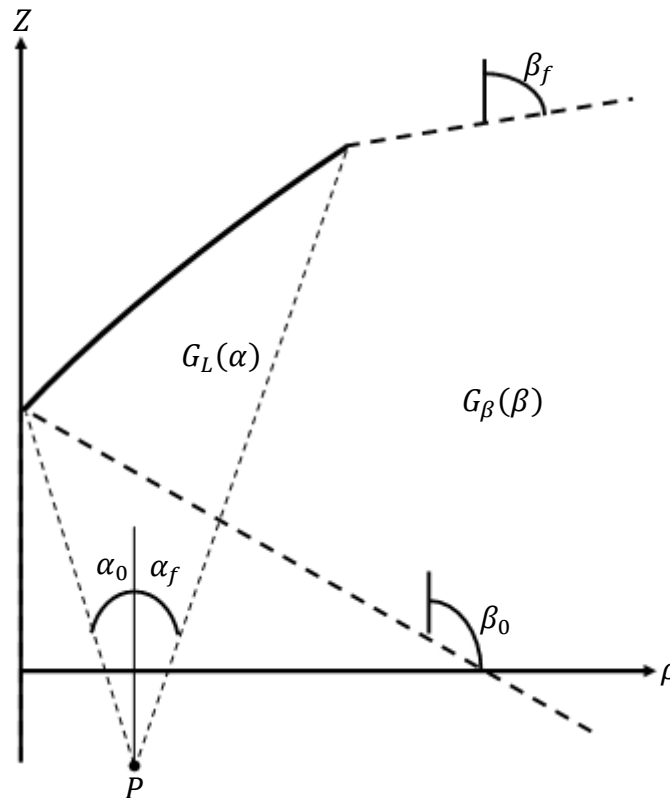


Figura 3.7: Princípio da conservação de energia no refletor.

3.2.2.

Algoritmo numérico para o cálculo de β

A condição expressa por (3.13) pode ser utilizada para determinar o mapeamento $\beta_m(\alpha_m)$, impondo que a potência contida no tubo de raios definido pelos limites (α_0, α_m) seja idêntica à contida no tubo de raios definido pelos limites (β_0, β_m) :

$$2\pi \int_{\beta_0}^{\beta_m} G_0 F(\beta) \sin \beta \, d\beta = 2\pi \int_{\alpha_0}^{\alpha_m} G_L(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha. \quad (3.15)$$

Entretanto o limite β_m é desconhecido e deve ser obtido pela solução numérica da equação acima. Para isto será utilizado o algoritmo iterativo descrito a seguir.

A potência radiada pela lente para qualquer intervalo pode ser determinada, pois o integrando e os limites são conhecidos.

$$P_L(\alpha_m) = 2\pi \int_{\alpha_0}^{\alpha_m} G_L(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha. \quad (3.16)$$

Para o cálculo do primeiro β_1 , utiliza-se uma primeira aproximação $(\beta_1^{(0)})$ onde o sobrescrito $n = 0$ indica que é a primeira aproximação para a sequência iterativa para obter β_1 . Assim, assume-se que:

$$\beta_1 \approx \beta_1^{(0)}. \quad (3.17)$$

E a potência na região de cobertura é calculada para a primeira aproximação

$$\begin{aligned} P_\beta(\beta_1^{(0)}) &= 2\pi \int_{\beta_0}^{\beta_1^{(0)}} G_\beta(\beta) \sin \beta \, d\beta \\ &\approx 2\pi G_\beta(\beta_1^{(0)}) \sin \beta_1^{(0)} \Delta \beta_1^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde

$$\Delta \beta_1^{(0)} = \beta_1^{(0)} - \beta_0. \quad (3.19)$$

Para calcular o próximo valor de β_1 , o qual está mais perto do valor real, é feita a expansão em série de Taylor em torno ao ponto $\beta_1^{(0)}$

$$P_L(\alpha_1) = P_\beta(\beta_1) \cong P_\beta(\beta_1^{(0)}) + P'_\beta(\beta_1^{(0)}) \delta \beta_1^{(0)}, \quad (3.20)$$

onde P_β' é a derivada de P_β , que é, numericamente aproximada por

$$P_\beta'(\beta_1^{(0)}) = \frac{P_\beta(\beta_1^{(0)} + \delta) - P_\beta(\beta_1^{(0)})}{\delta}, \quad (3.21)$$

$\delta\beta_1^{(0)}$ é a diferença do primeiro valor e o seguinte que está mais perto do valor real de β .

$$\delta\beta_1^0 = \frac{P_L(\alpha_1) - P_\beta(\beta_1^{(0)})}{P_\beta'(\beta_1^{(0)})} = \beta_1^{(1)} - \beta_1^{(0)}. \quad (3.22)$$

A solução desta equação para $\beta_1^{(1)}$ resulta em

$$\beta_1^{(1)} \cong \beta_1^{(0)} + \frac{P_L(\alpha_1) - P_\beta(\beta_1^{(0)})}{2\pi G_\beta(\beta_1^{(0)}) \operatorname{sen} \beta_1^{(0)}}. \quad (3.23)$$

Está aproximação pode ser repetida iterativamente até a diferença $P_L(\alpha_1) - P_{CD}(\beta_1^{(n)}) < \epsilon$ ser menor que um valor ϵ especificado para a convergência.

$$\beta_1^{(n)} \cong \beta_1^{(n-1)} + \frac{P_L(\alpha_1) - P_\beta(\beta_1^{(n-1)})}{2\pi G_\beta(\beta_1^{(n-1)}) \operatorname{sen} \beta_1^{(n-1)}}. \quad (3.24)$$

Este procedimento pode ser utilizado para determinar o mapeamento $\beta_m(\alpha_m)$ da m -ésima seção cônica e expressão para a n -ésima iteração é expressa por:

$$P_L(\alpha_m) = P_\beta(\beta_m) \cong P_\beta(\beta_m^{(n)}) + P_\beta'(\beta_m^{(n)})\delta\beta_m^{(n)} \quad (3.25)$$

Onde $\delta\beta_m^{(n)}$ é a diferença do valor $n + 1$ e n de β na seção cônica m

$$\delta\beta_m^{(n)} = \frac{P_L(\alpha_m) - P_{CD}(\beta_m^{(n)})}{P_{CD}'(\beta_m^{(n)})} = \beta_m^{(n+1)} - \beta_m^{(n)}. \quad (3.26)$$

A potência na região de cobertura radiada desde a cônica $m = 1$ até m é dada por:

$$P_\beta(\beta_m^{(n)}) \approx 2\pi \sum_{m=1}^m G_\beta(\beta_m^{(n)}) \sin \beta_m^{(n)} \Delta\beta_m^{(n)}, \quad (3.27)$$

onde

$$\Delta\beta_m^{(n)} = \beta_m^{(n)} - \beta_{m-1}, \quad (3.28)$$

$P_\beta'(\beta_m^{(n)})$ é a derivada de $P_\beta(\beta_m^{(n)})$, que é, numericamente aproximada por

$$P_\beta'(\beta_m^{(n)}) \approx \frac{P_\beta(\beta_m^{(n)} + \delta) - P_\beta(\beta_m^{(n)})}{\delta}. \quad (3.29)$$

E finalmente temos a solução genérica para $\beta_m^{(n+1)}$

$$\beta_m^{(n+1)} \cong \beta_1^{(n)} + \frac{P_L(\alpha_m) - P_\beta(\beta_m^{(n)})}{2\pi G_\beta(\beta_m^{(n)}) \sin \beta_m^{(n)}}. \quad (3.30)$$

O esquema iterativo para quando $P_L(\alpha_1) - P_{CD}(\beta_m^{(n)}) < \epsilon$, onde ϵ é um valor especificado para a convergência.

3.3. Estudo de Casos

Para avaliar os procedimentos descritos nas seções anteriores, diversos casos foram analisados, considerando diferentes dimensões de refletores, assim como também diferentes formas de mapeamento dos raios na frente do refletor.

Para estes casos, os refletores deverão ser sintetizados para obter uma iluminação constante entre 120° até 130° , conforme ilustrado na Figura 3.8. Para este objetivo, a densidade de potência por ângulo sólido $G(\beta)$ é analiticamente descrita por:

$$G(\beta) = \frac{P_R}{2\pi[\cos(130^\circ) - \cos(120^\circ)]}, \quad (3.31)$$

onde P_R é a potência total incidente no refletor.

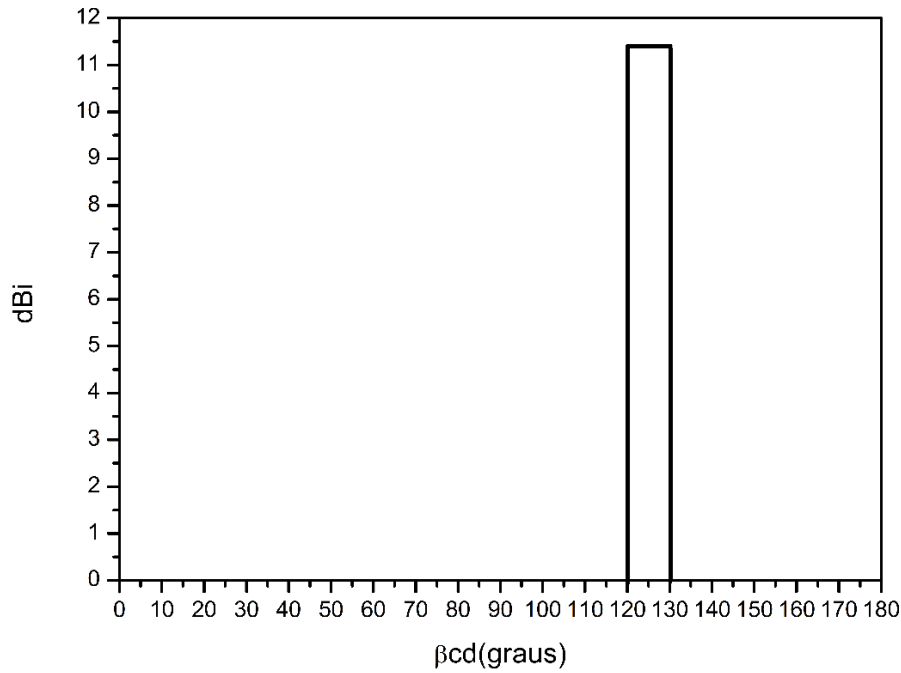


Figura 3.8: Cobertura especificada: constante entre 120 e 130 graus.

A corneta coaxial utilizada como alimentador está descrita na Seção 2.3.1, e o seu diagrama de radiação é ilustrado na Figura 2.13. Para a síntese do refletor, será considerada somente a região do diagrama da corneta entre $0^\circ < \theta < 55^\circ$, que concentra a maior parte da energia radiada e evita a presença de lóbulos laterais na iluminação de refletor e consequentemente evita perda eficiência no projeto. Por outro lado, a presença da lente faz com que o diagrama da fonte primária (corneta mais lente) seja estreitado.

Para os exemplos de síntese de refletor a serem apresentados neste trabalho, a lente será modelada para produzir um diagrama com centro de fase no ponto P ($\rho_0 = 0$, $Z_0 = -2.5 \lambda$), ou, segundo a Ótica Geométrica, uma distribuição de raios com foco virtual neste mesmo ponto. Para evitar que alguns raios fiquem

presos no dielétrico, a espessura da lente foi ajustada para ($Z_A = 4.166 \lambda$), e o diagrama de radiação deste conjunto está ilustrado na Figura 2.16. Para a síntese ótica do refletor, será considerada região do diagrama para $0^\circ < \alpha < 30.8^\circ$, e que está associada aos raios emitidos pela fonte pontual entre $0^\circ < \theta < 55^\circ$.

Caso 1

Como descrito na Seção 3.2, na síntese ótica do refletor será utilizado o diagrama da lente dielétrica baseado nas aproximações da ótica Geométrica, descritas na Seção 2.3.3. Além destas aproximações, é importante ressaltar que nesta síntese não são considerados os efeitos difrativos no refletor. Esses efeitos se tornam mais intensos quando configurações compactas são desenhadas.

O ajuste das dimensões do refletor é feito pela escolha do ponto inicial da síntese Z_{0R} , vértice do refletor sobre o eixo de simetria, eixo Z. Para minimizar os efeitos difrativos e avaliar o algoritmo de síntese, para o primeiro exemplo será utilizado um refletor onde a distância desde a origem até o primeiro ponto do refletor é de $Z_{0R} = 50 \lambda$. A região a ser iluminada é definida por $\beta_0 = 120^\circ$ e o ângulo final de cobertura $\beta_f = 130^\circ$, definindo uma distribuição de raios com foco real na frente do refletor, como ilustrado na Figura 3.9. O refletor foi inicialmente sintetizado com 100 seções de cônicas concatenadas, e apresenta um diâmetro de aproximadamente $79,2 \lambda$, como pode ser observado na Figura 3.9 que mostra a geratriz resultante.

A Figura 3.10 ilustra o diagrama de radiação da antena determinado a partir das aproximações da Ótica Física, o qual é comparado com o diagrama especificado. Além disso, Figura 3.11 que ilustra o diagrama no entorno da região de cobertura, o diagrama da PO oscila no entorno das especificações da região central da área de cobertura e decai rapidamente nas bordas da mesma, variando entre 3.4 e 12.3 dBi na região de cobertura. Na região de lóbulos laterais, o pico na região observado na região próxima de 33° corresponde ao transbordamento do diagrama da lente no refletor e está associado ao ângulo do raio incidente na borda do refletor.

Como pode ser observado na Figura 3.9, os raios que emergem do refletor formam um feixe de raios quase paralelos, apontando no centro da cobertura (aproximadamente 125°). Isto permite aproximar o comportamento da antena por uma abertura cônica, com largura de aproximadamente 30λ e iluminação

equifásica. Esta dimensão define a capacidade de resolução do refletor e está associada à taxa de decaimento nas bordas da cobertura.

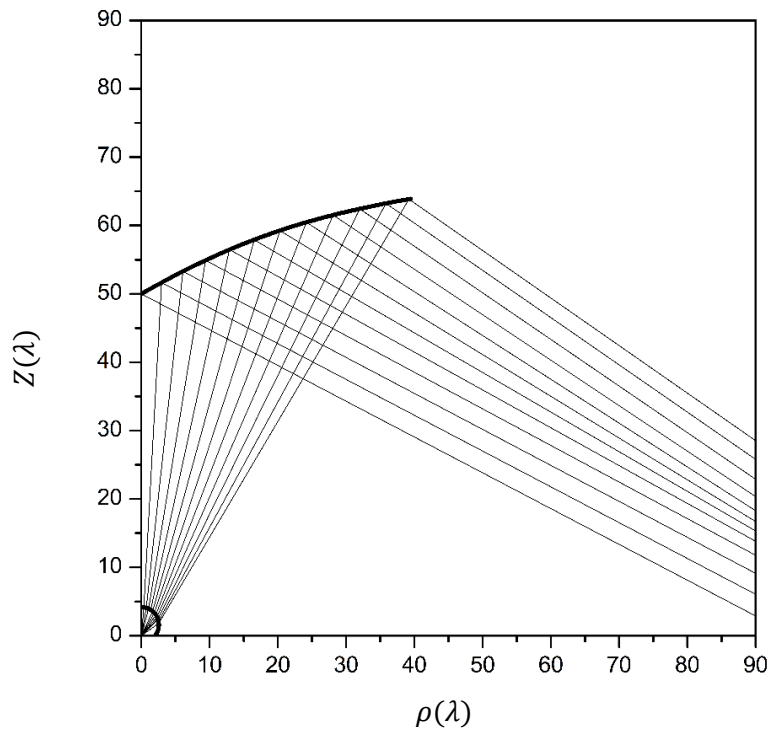


Figura 3.9: Mapeamento para refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$.

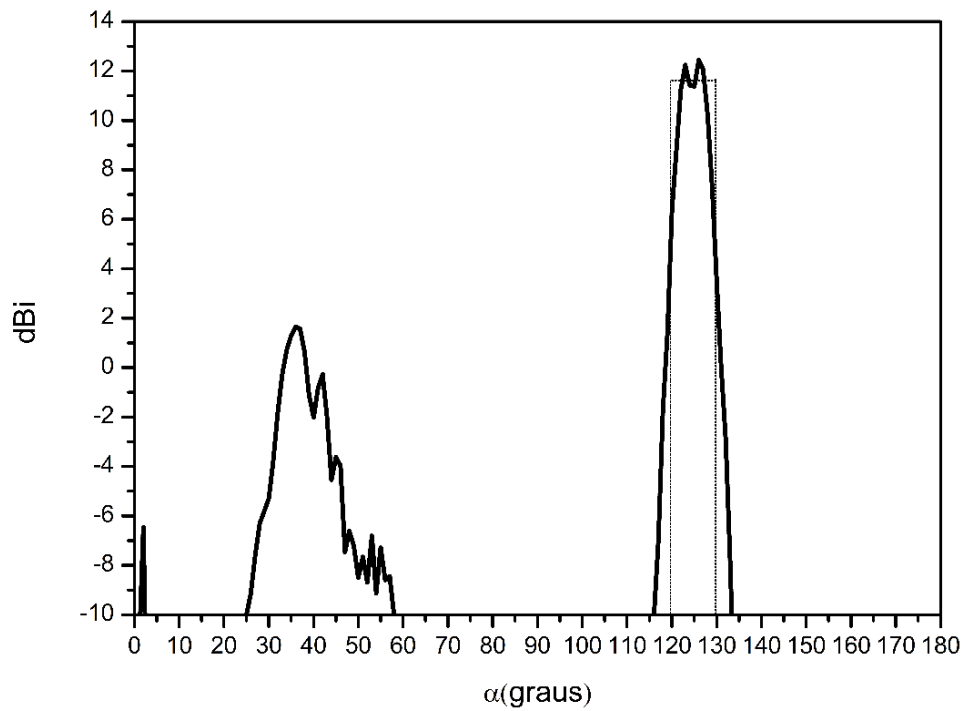


Figura 3.10: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$.

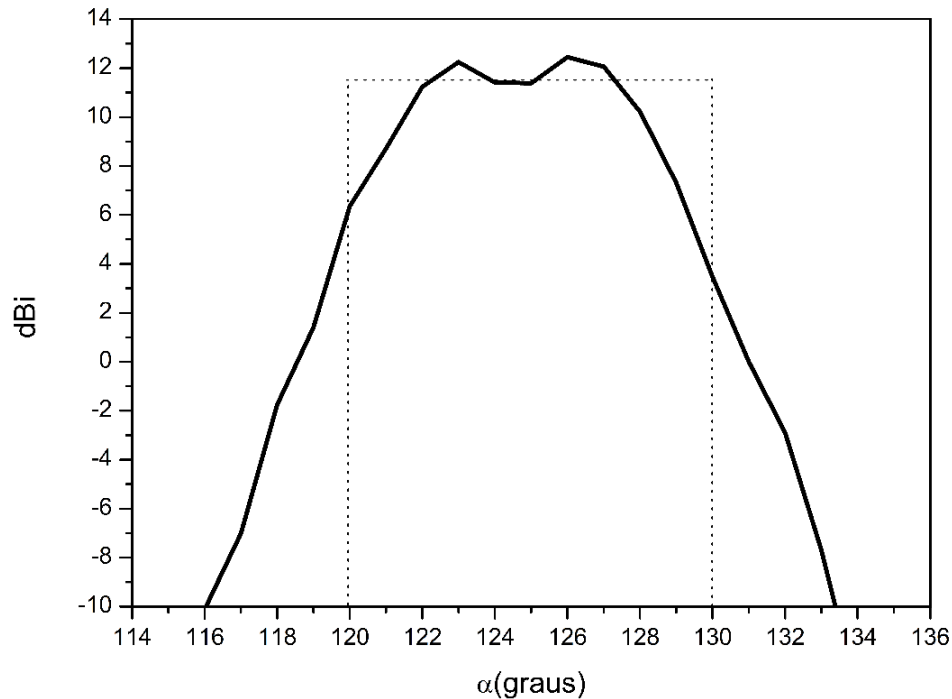


Figura 3.11: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$, faixa reduzida.

Caso 2

Para o Caso 2 foi utilizado o mesmo ponto inicial da síntese Z_{0R} utilizado no Caso 1, $Z_{0R} = 50 \lambda$. A região a ser iluminada é definida por $\beta_0 = 130^\circ$ e o ângulo final de cobertura $\beta_f = 120^\circ$, definindo uma distribuição de raios com foco virtual atrás do refletor, como ilustrado na Figura 3.12. O refletor foi inicialmente sintetizado com 100 seções cônicas concatenadas, e apresenta um diâmetro de aproximadamente $78,5 \lambda$, como pode ser observado na Figura 3.12 que ilustra a geratriz resultante.

A Figura 3.13 ilustra o diagrama de radiação da antena determinado a partir das aproximações da Ótica Física, o qual é comparado com o diagrama especificado. Como observado na Figura 3.14 que ilustra o diagrama no entorno da região de cobertura, o diagrama da PO oscila no entorno das especificações da região central da área de cobertura e decai rapidamente nas bordas da mesma, mas, quando comparado ao produzido no Caso 1, apresenta uma cobertura mais uniforme da região de cobertura, variando entre 7 e 11.3 dBi. Na região lóbulos laterais o comportamento é semelhante ao observado no Caso 1.

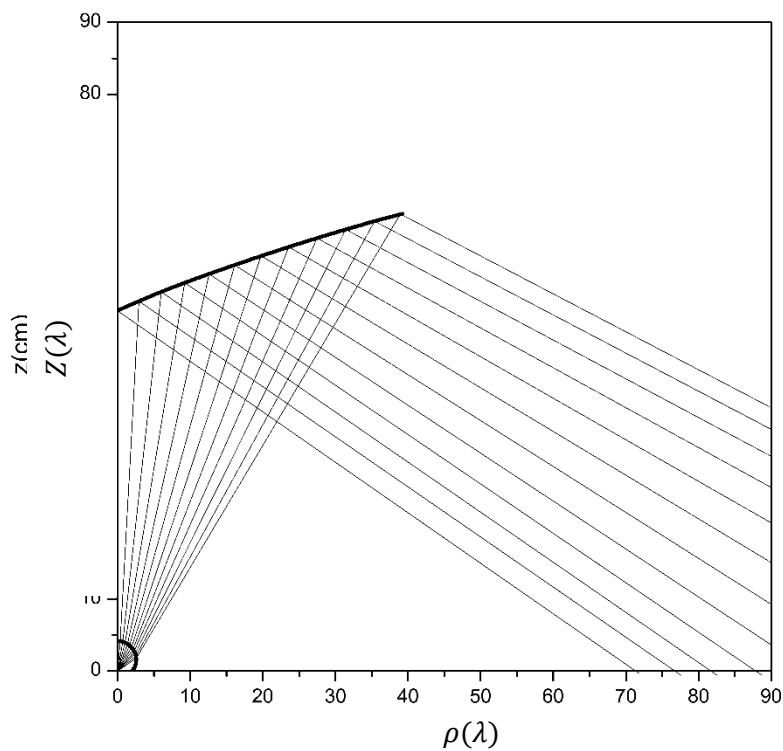


Figura 3.12: Mapeamento para refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 120^\circ$.

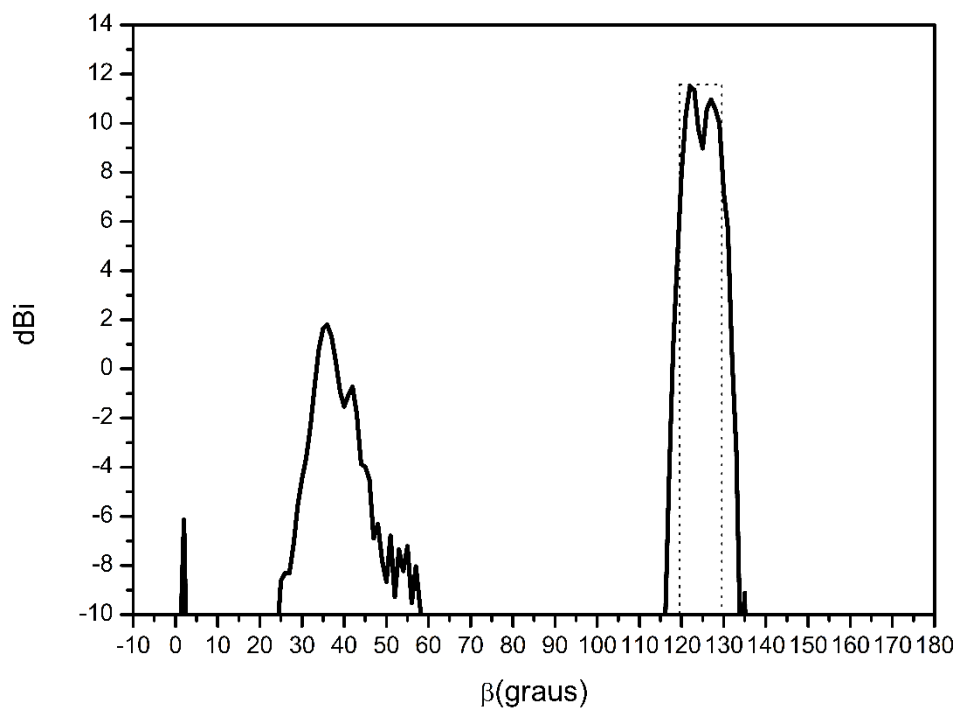


Figura 3.13: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 120^\circ$.

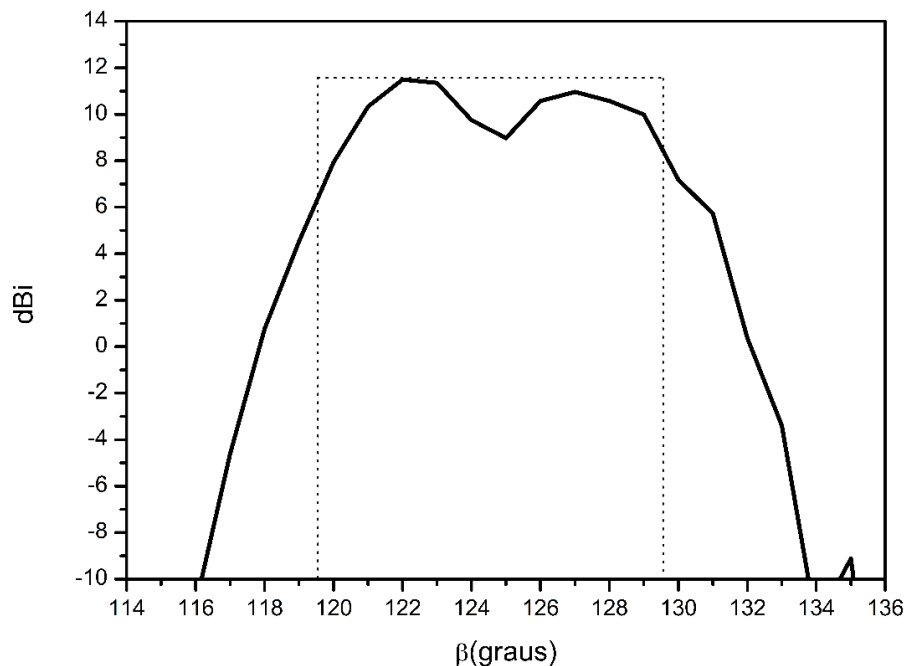


Figura 3.14: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$, faixa reduzida.

Como pode ser observado na Figura 3.13, novamente, na frente do refletor os raios formam um feixe quase paralelo, apontando no centro da cobertura (aproximadamente 125°). Isto permite aproximar o comportamento da antena por uma abertura cônica, com largura de aproximadamente 34λ e iluminação equifásica. Quando comparada ao Caso 1, esta abertura é ligeiramente maior.

Caso 3

No Caso 3 as dimensões do refletor serão reduzidas, através do ajuste da posição do ponto inicial da síntese, considerando $Z_{0R} = 10 \lambda$. Como mencionado anteriormente, o mesmo conjunto corneta coaxial e lente utilizado nos exemplos anteriores será empregado neste caso. Para o Caso 3 a região a ser iluminada é definida por $\beta_0 = 120^\circ$ e o ângulo final de cobertura $\beta_f = 130^\circ$, definindo uma distribuição de raios com foco real na frente do refletor, como ilustrado na Figura 3.15. O refletor foi inicialmente sintetizado com 100 seções de cônicas concatenadas, e apresenta um diâmetro de aproximadamente $18,8 \lambda$, como pode ser observado na Figura 3.16 que ilustra a geratriz resultante. A Figura 3.16 ilustra o diagrama de radiação da antena determinado a partir das aproximações da Ótica Física, o qual é comparado com o diagrama especificado.

Como pode ser observado na Figura 3.15, novamente, na frente do refletor os raios formam um feixe quase paralelo, e definem uma abertura cônica, com largura de aproximadamente 7λ e iluminação equifásica. Quando comparada aos Casos 1 e 2, esta redução no tamanho da abertura afeta a capacidade de atingir a cobertura especificada, como observado na Figura 3.16 que ilustra o diagrama da PO. Ele apresenta um único lobo na região de cobertura, com um máximo de 11.4 dBi. Esse lobo decai continuamente em direção as bordas em 120° e 130° , com um mínimo de 7 dBi. Quando comparado aos Casos 1 e 2, fora da região de cobertura o diagrama apresenta uma taxa de decaimento menor. Isso resulta em níveis de iluminação no interior da região da especificação. Na região lóbulos laterais o comportamento é semelhante ao observado nos casos anteriores.

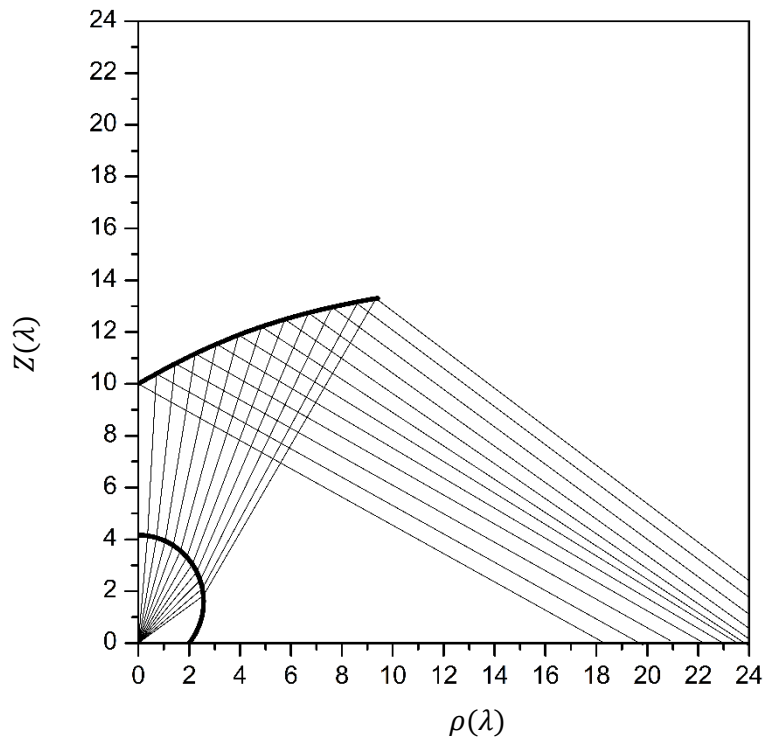


Figura 3.15: Mapeamento para refletor $Z_{0R} = 10\lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$.

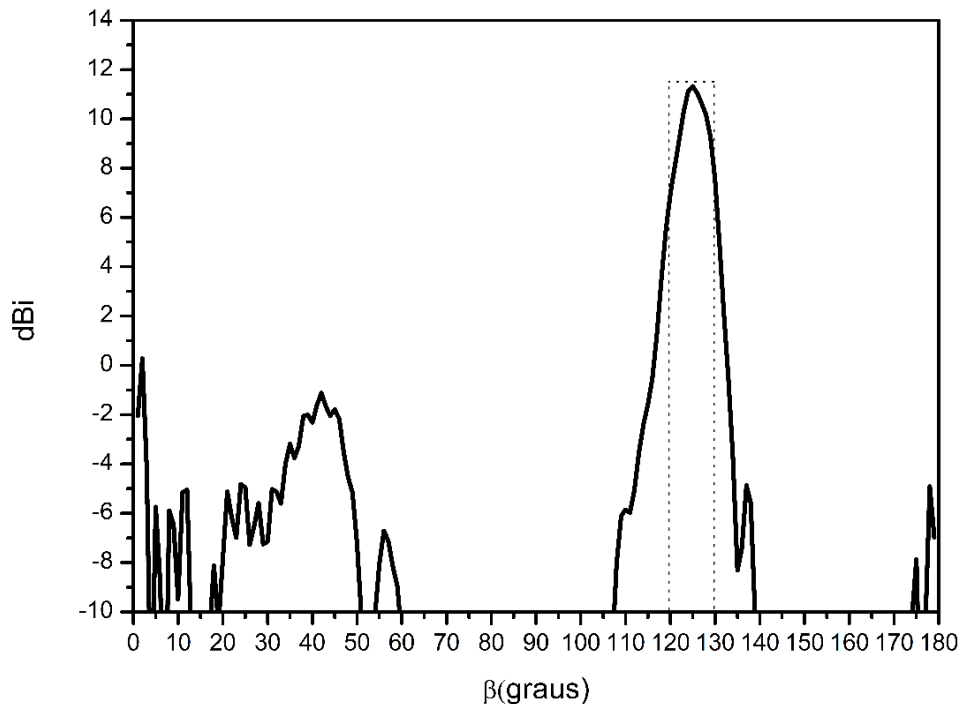


Figura 3.16: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$.

Caso 4

No Caso 4 as dimensões do refletor são semelhantes ao caso 3, considerando $Z_{0R} = 10 \lambda$. Como mencionado anteriormente, o mesmo conjunto corneta coaxial e lente utilizado nos exemplos anteriores será empregado neste caso. Para o Caso 3 a região a ser iluminada é definida por $\beta_0 = 130^\circ$ e o ângulo final de cobertura $\beta_f = 120^\circ$, definindo uma distribuição de raios com foco virtual atrás do refletor, como ilustrado na Figura 3.17. O refletor foi inicialmente sintetizado com 100 seções de cônicas concatenadas, e apresenta um diâmetro de aproximadamente $18,7 \lambda$, como pode ser observado na Figura 3.17 que ilustra a geratriz resultante. A Figura 3.18 ilustra o diagrama de radiação da antenna determinado a partir das aproximações da Ótica Física, o qual é comparado com o diagrama especificado.

Como pode ser observado na Figura 3.17, novamente, na frente do refletor os raios formam um feixe quase paralelo, e definem uma abertura cônica, com largura de aproximadamente 7λ e iluminação equifásica. Como observado na Figura 3.19, o diagrama de radiação apresenta um único lobo na região de cobertura, com um máximo de 10.6 dBi, decaindo continuamente em direção as bordas em 120° e 130° , com um mínimo de 7 dBi. Quando comparado aos Casos 1 e 2, fora da região de

cobertura o diagrama apresenta uma taxa de decaimento menor, resultando em níveis de iluminação no interior da região da especificação. Na região lóbulos laterais o comportamento é semelhante ao observado nos casos anteriores.

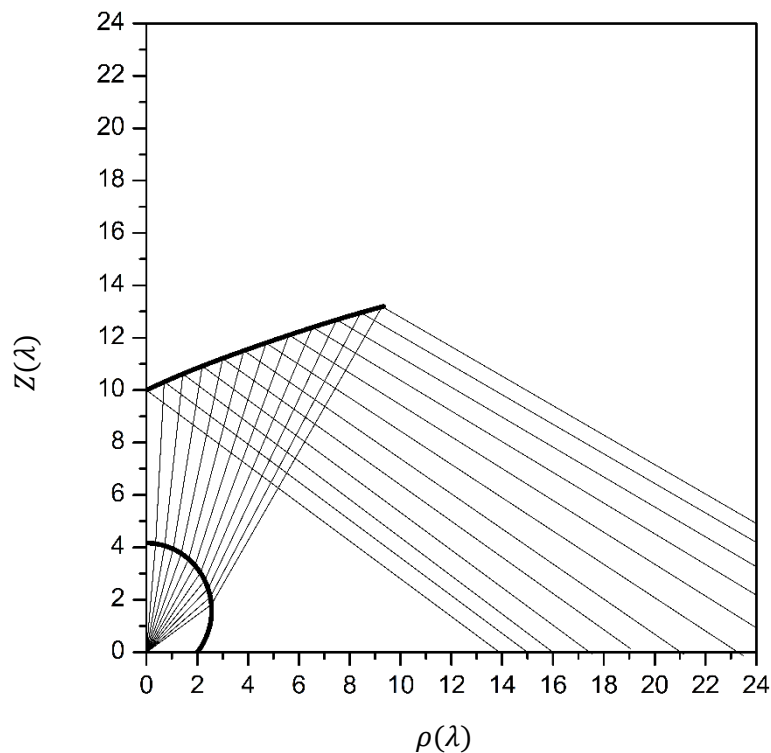


Figura 3.17: Mapeamento para refletor $Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 120^\circ$.

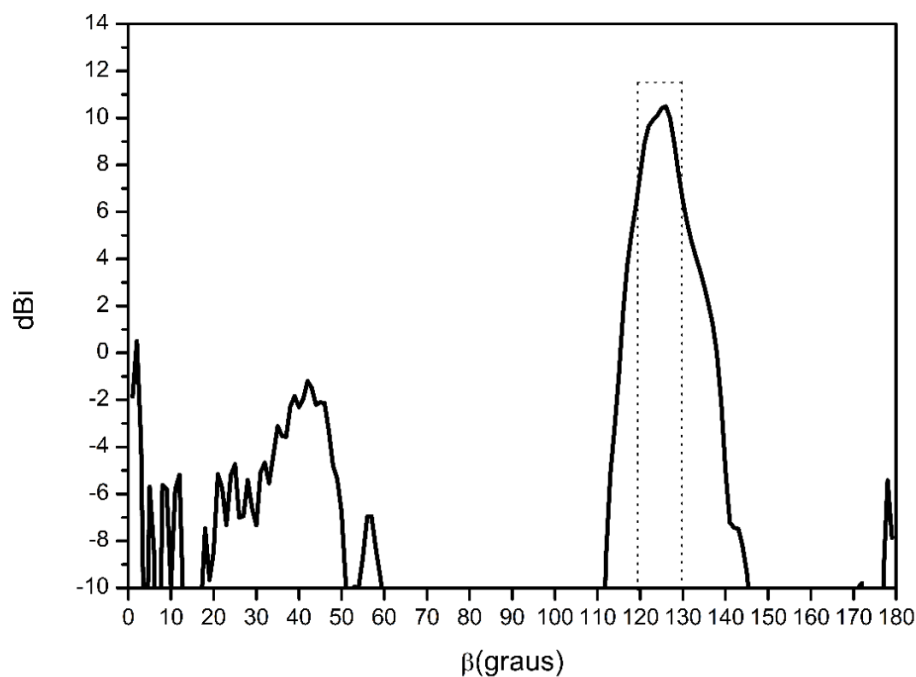


Figura 3.18: Diagrama de radiação do refletor $Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 140^\circ$.

3.3.1.

Avaliação de convergências para seções cónicas

Para avaliar a convergência da solução do método de concatenação de seções cónicas, utilizado para modelar o refletor, verifica-se o comportamento do erro, o qual é definido como a diferença entre a geratriz do refletor modelada com um número cónicas grande e a gerada por um número de cónicas menor. Para quantificar o erro em cada síntese, definiu-se um erro rsm (root mean square) da seguinte forma:

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (r_{Sn}^{ref} - r_{Sn})^2}, \quad (3.32)$$

onde r_{Sn}^{ref} é a distância do ponto P à geratriz de referência e N o número de pontos utilizados, a Tabela 3.1 apresenta o erro obtido considerando como referência uma geratriz com M=1000 cónicas e N=1000 pontos para os dois tipos de mapeamento dos casos de estudo da seção anterior onde $Z_{0R} = 10 \lambda$. O número de pontos ficou constante e apenas foi variado o número de cónicas utilizadas.

Tabela 3.1: Erro obtido considerando como referência uma geratriz com 1000 pontos.

M	$E_{rms}(\lambda), ref\ 130$ – 120	$E_{rms}(\lambda), ref\ 120$ – 130
100	5.94×10^{-5}	6.18×10^{-5}
50	1.25×10^{-4}	1.24×10^{-4}
25	2.53×10^{-4}	2.26×10^{-4}
10	6.20×10^{-4}	6.43×10^{-4}
5	3.14×10^{-3}	3.15×10^{-3}

Comparando os dois casos de mapeamento a configuração com cáustica real apresentou um erro rms menor que a configuração com cáustica virtual.

3.4. Comparação dos resultados

Para fazer uma avaliação quantitativa do efeito do uso da lente no tamanho do refletor sintetizado, vamos comparar os diâmetros dos refletores dos estudos de caso propostos na Seção 3.3 com refletores sintetizados sem lente.

Os parâmetros constantes nos dois casos de síntese (com e sem lente) serão: a largura de feixe da corneta utilizada na síntese que vai de 0 até 55 graus; a distância do vértice do refletor ao centro de abertura da corneta (Z_{0R}); e o mapeamento em campo distante que pode ser através de feixe de raios convergentes ou divergentes.

A Tabela 3.2 apresenta os diâmetros dos refletores sintetizados com e sem a lente e a razão destes diâmetros.

Tabela 3.2: Parâmetros comparativos dos refletores sintetizados com e sem lente.

Estudos de caso Seção 3.3.1	Diâmetro Refletor com lente (λ)	Diâmetro refletor sem lente (λ)	Razão ($D_{sem\ lente} / D_{com\ lente}$)
Caso 1	79.2	166	2.1
Caso 2	78.5	157	2
Caso 3	18.8	36	1.9
Caso 4	18.7	34	1.8

Observamos que o uso da lente na frente do alimentador reduz a largura do feixe emitido pela fonte primária e, conseqüentemente, diminui o diâmetro do refletor aproximadamente à metade na medida que a distância da origem ao vértice do refletor é mantido. Entretanto, os resultados variam dependendo da distância do vértice do refletor ao centro de abertura da corneta e do modo de mapeamento de raios. Obtendo uma maior diminuição do diâmetro com distâncias Z_{0R} maiores e com um mapeamento de raios convergente.

Os refletores sintetizados e os seus diagramas de radiação com e sem lente são ilustrados nas Figuras (3.19-3.26).

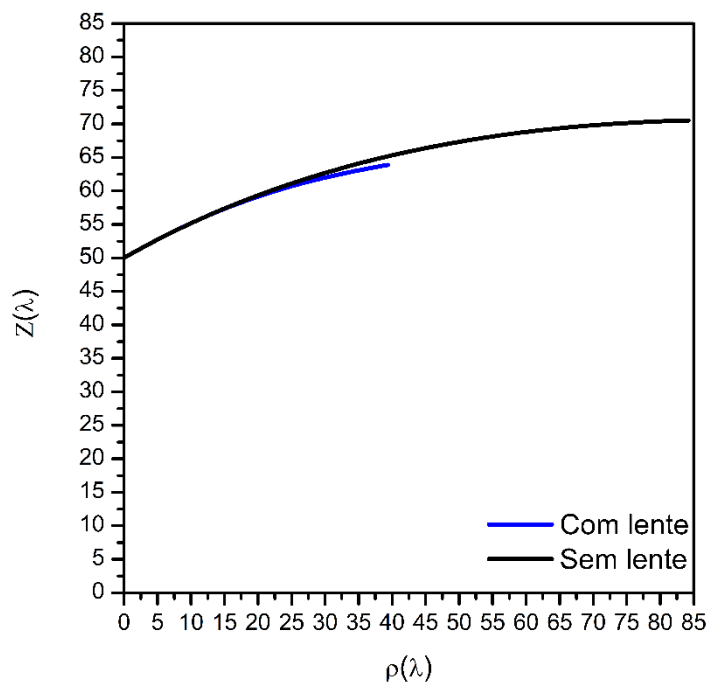


Figura 3.19: Refletores caso 1 ($Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$).

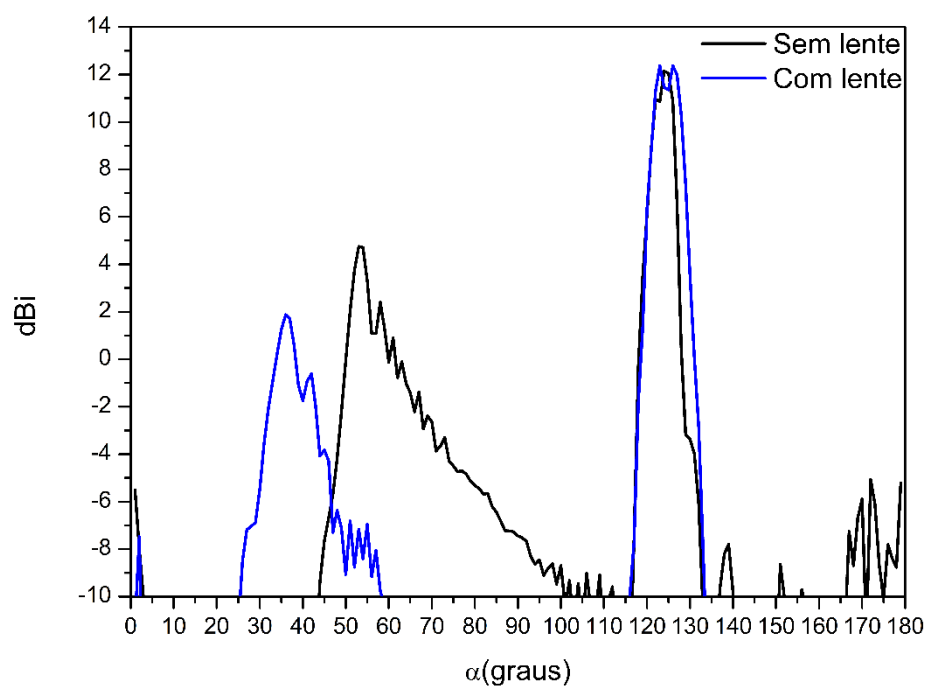


Figura 3.20: Diagrama de radiação caso 1 ($Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$).

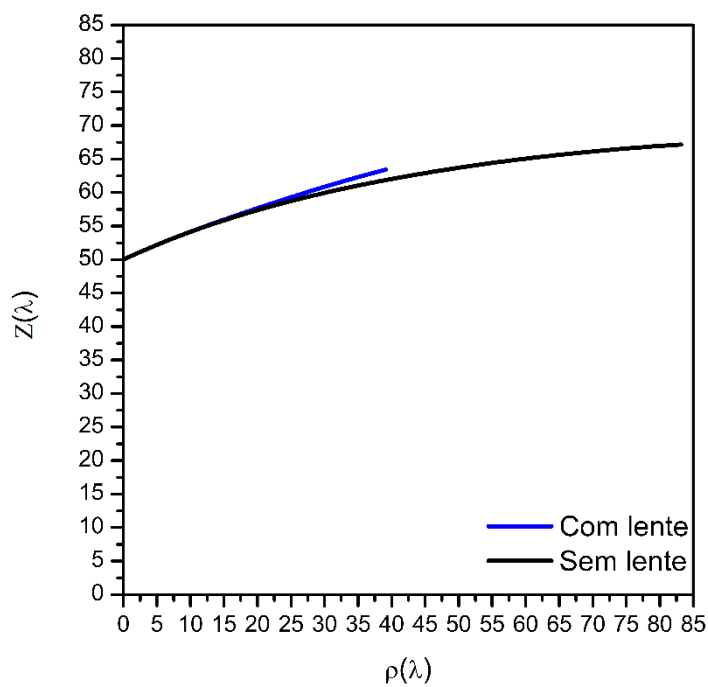


Figura 3.21: Refletores caso 2 ($Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 120^\circ$).

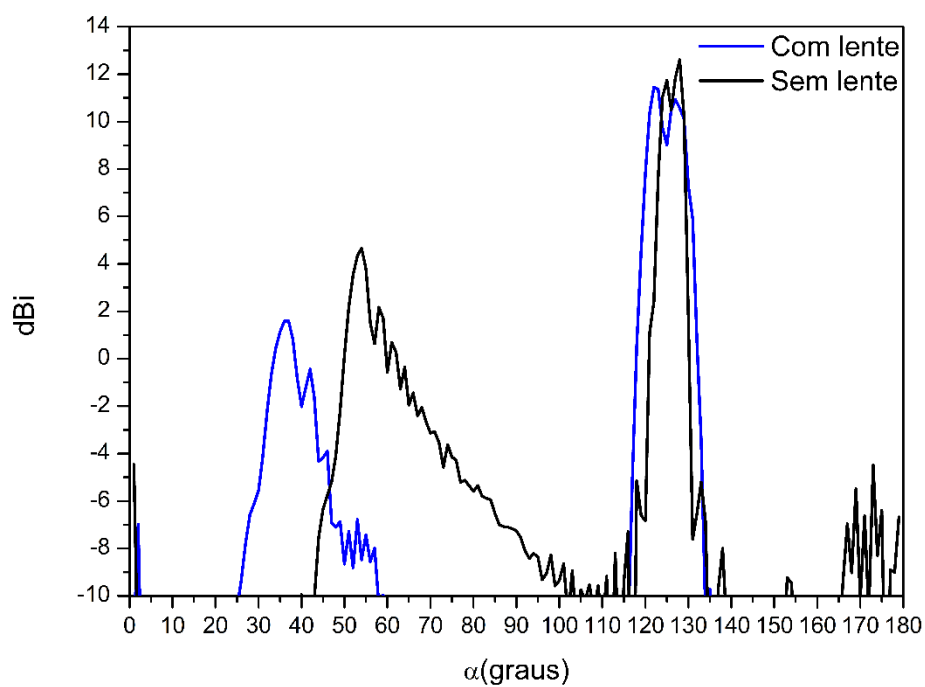


Figura 3.22: Diagrama de radiação caso 2 ($Z_{0R} = 50 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 120^\circ$).

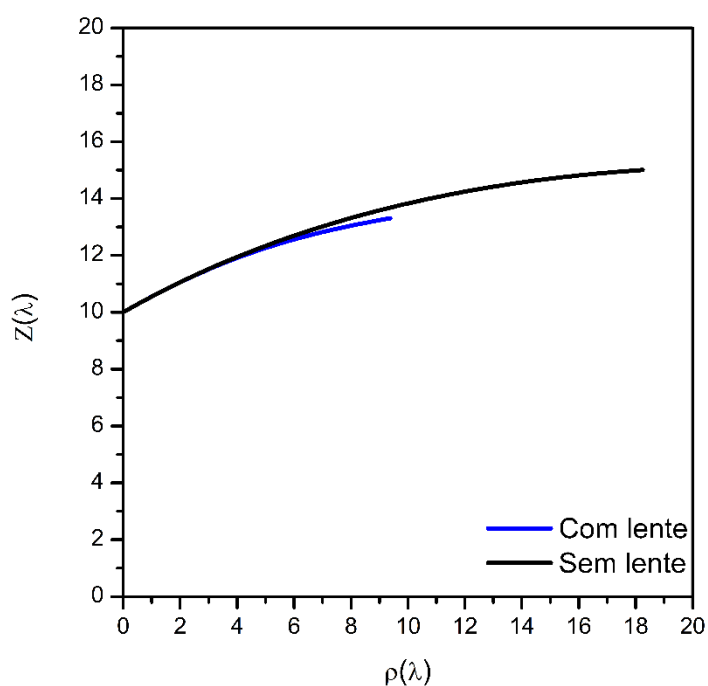


Figura 3.23: Refletores caso 3 ($Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$).

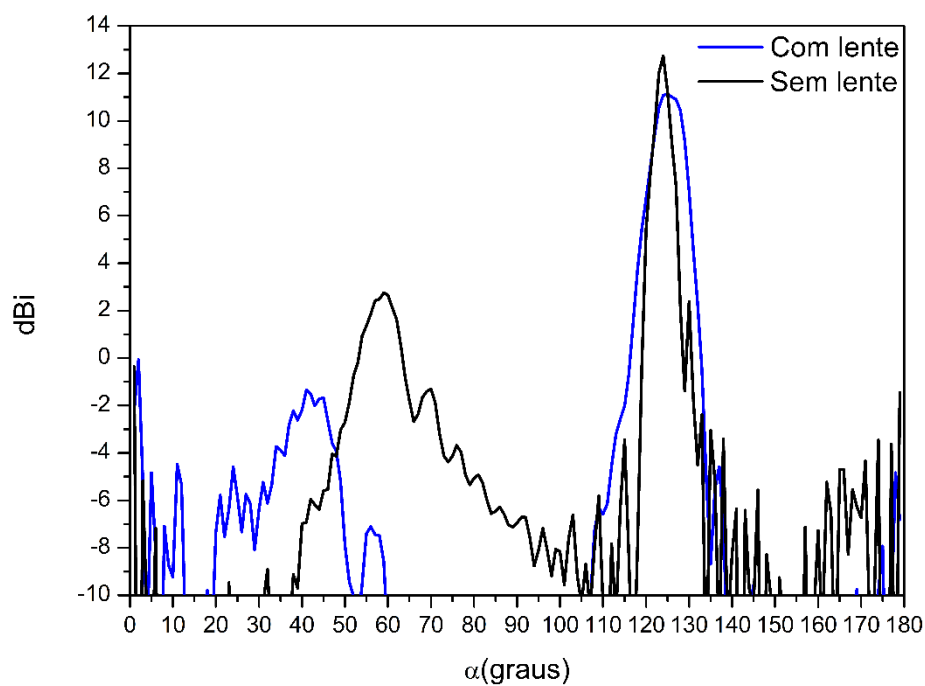


Figura 3.24: Diagrama de radiação caso 3 ($Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 120^\circ$, $\beta_f = 130^\circ$).

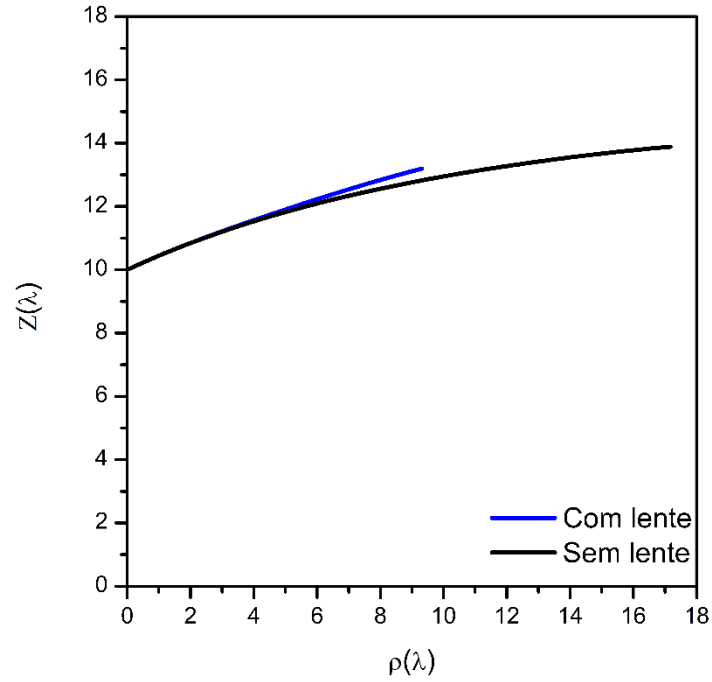


Figura 3.25: Refletores caso 4 ($Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 120^\circ$).

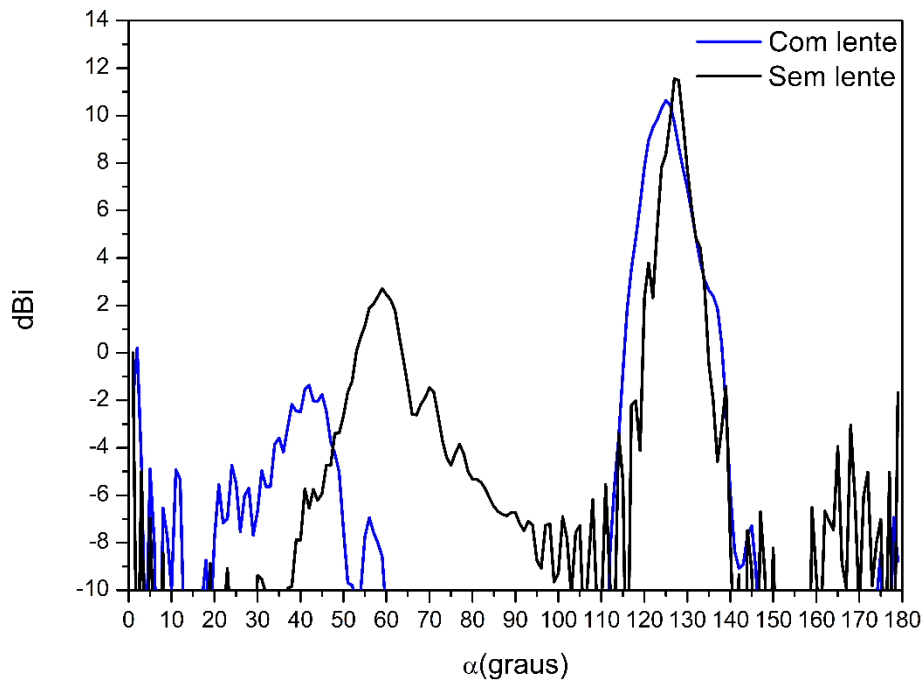


Figura 3.26: Diagrama de radiação caso 4 ($Z_{0R} = 10 \lambda$, $\beta_0 = 130^\circ$, $\beta_f = 120^\circ$).

Nos diagramas de radiação observamos diferenças nos lóbulos secundários, principalmente, no posicionamento da região de transbordamento principalmente

na posição e amplitude. No caso dos refletores sintetizados com a lente, o transbordamento aparece próximo a 31 graus, enquanto que, para o caso sem lente, o transbordamento é próximo a 55°, e a amplitude do lóbulo da configuração com lente é da ordem de 4 dB abaixo da configuração sem lente.

Também aparecem diferenças na faixa de interesse de 120 até 130 graus, isto se deve as dimensões do refletor. Se o refletor possui dimensões maiores apresenta-se uma queda mais rápida do diagrama de radiação nos limites da faixa de interesse. Obtendo um diagrama mais estreito e maior.

4 Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma modelagem de lentes circularmente simétricas com foco deslocado, juntamente com suas características de radiação aproximadas pela PO e a GO. Estas lentes foram desenhadas para serem alimentadores de antenas refletoras, também apresentamos a modelagem do refletor a partir da concatenação de seções cônicas e as suas características de radiação.

Ao modelar as lentes circularmente simétricas, observamos que ao deslocar o foco da lente conseguimos aumentar a flexibilidade de modelamento e produzimos diagramas de radiação com diferentes características. Um diagrama importante é obtido deslocando o foco para a direita pois é possível concentrar a energia radiada em um feixe mais estreito. Deste modo, é possível compactar o refletor de uma antena refletora tendo um bom desempenho eletromagnético sem degradar as características de radiação. Essa compactação é vantajosa, pois diminui o volume total da antena e os custos de produção desta.

As aproximações utilizadas para calcular o diagrama de radiação da lente têm um comportamento que vão de acordo com as simulações feitas em CST, principalmente no ganho e lobo principal. É interessante notar que na faixa de interesse no caso onde o foco é deslocado para a direita, a simulação em CST e o cálculo utilizando a PO são muito próximos. Se as dimensões da lente aumentar, a congruência dos diagramas de radiação calculados com a simulação em CST é maior. Tanto utilizando as aproximações da PO quanto da GO.

Em relação ao refletor, observamos que a precisão do diagrama de radiação objetivo em campo distante radiado está profundamente relacionado com o tamanho da superfície refletora. Logo é necessário contrapesar a precisão e o tamanho da antena para obter o desenho desejado. O método de concatenação de seções cônicas utilizado na modelagem do refletor apresentou um erro de síntese muito baixo. Portanto não é necessário utilizar muitos pontos para descrever a geratriz da

superfície pois inclusive com um número de pontos pequeno a solução fica bem precisa.

O programa desenvolvido é muito rápido computacionalmente em comparação aos programas comerciais que demoram horas inclusive com modelos simples. A convergência do algoritmo numérico ocorre com um número muito pequeno de iterações.

Dentre os trabalhos futuros, seria interessante fazer experimentos com diferentes diagramas de radiação objetivo em campo distante. Esse tipo de experimentos é importante porque apenas foram sintetizados refletores para o caso no qual o diagrama desejado era constante. Também apenas foi considerado um tipo de alimentador, pode se testar com outros e comparar os resultados com os obtidos no presente trabalho.

5

Referências bibliográficas

- [1] J. R. Bergmann e F. Moreira, “Antena Duplo-Refletora Omnidirecional ADE Modelada para Cobertura Uniforme,” em **MOMAG**, 2008.
- [2] R. Abrantes Penchel, **Síntese de Antennas Refletores Utilizando Seções Cônicas e Superfícies Quádricas Confocais**, Rio de Janeiro, Dezembro 2014.
- [3] F. Moreira e J. Bergmann, “Omnidirectional axis-symmetric dual-reflector antennas by combining conic sections,” **IEEE Transactions on Antennas and propagation** , vol. 59, pp. 1042-1046, 2011.
- [4] F. Moreira e J. Bergmann, “Shaping axis-symmetric dual-reflector antennas by consecutively concatenating conic sections,” em **Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)**, Belém, PA, Brasil, 2009.
- [5] S. Zhongxiang, W. Jianpeng e L. Kian, “Open-ended Coaxial Waveguide for Conical-Beam Radiatio,” **Transactions on Antennas and Propagation**, 17 april 2011.
- [6] B. Chantraine-Barès e R. Sauleau, “A New Accurate Design Method for Millimeter-Wave Homogeneous Dielectric Substrate Lens Antennas of Arbitrry Shape,” **IEEE Transaction on Antennas and Propagation**, vol. 53, nº 3, 2005.
- [7] A. V. Boriskin e R. Sauleau, “Dielectric Lens Antenna Size Reduction Due to the Shape Optimization with Genetic Algorithm and Muller Boundary Integral Equations,” em **36th European Microwave Conference**.
- [8] J. J. Lee, “Dielectric Lenses Shaping and Coma-Correction Zoning, Part I Analysis,” **IEEE TRANSACTION ON ANTENNAS AND PROPAGATION** , Vol.31, nº 1, pp. 211-216, 1983.

- [9] M. Orefice e P. Pirinoli, "Dual Reflector antenna with broadside beam for omnidirectional coverage," **Electronics Letters**, vol. 29, pp. 2158-2159, 1993.
- [10] J. Bergmann e F. Moreira, "Omnidirectional antenna with a go-shaped main reflector for an arbitrary far-field pattern in the elevation plane," **Microwaves, Antennas Propagation, IET**, vol 3, pp. 1028-1035, October 2009.
- [11] C. cutler, "Parabolic-Antenna Design for Microwaves," **PROCEEDING OF THE I.R.E.**, vol. 35, n° 11, pp. 1284-1294, 1947.
- [12] P. Saha e P. Clarricoats, "Radiation Pattern of a Lens-Corrected Conical Scalar Horn," **Electronics Letters**, vol. 5, pp. 592-593, 1969.
- [13] D. Lemaire, C. Fernandes, P. Sobieski e A. Barbosa, "A method to overcome the limitations of G.O in axis-symmetric lens," **Infrared and Millimetric Waves**, vol. 17, No 8, pp. 1377-1390, Aug. 1996.
- [14] L. Shung-Wu e M. Sheshadri, "Wave Transmission through a Spherical Dielectric Shell," **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, vol. 3, pp. 372-380, 1982.
- [15] S. Silver, **Microwave Antenna Theory and Design**, McGraw-Hill Book Company, Inc, 1949.
- [16] C. Balanis, **Advanced Engineering Electromagnetics**, John Wiley & Sons, Inc, 1989.
- [17] G. A. Deschamps, "Ray Techniques in Electromagnetics," **IEEE**, vol. 60, n° 9, 1972.
- [18] F. J. Vieira Hasselmann, "Ótica de lentes dielétricas," **CETUC-PAA-07/91**, Novembro, 1991.
- [19] B. Barès e R. Sauleau, "Design and optimisation of axisymmetric millimetre-wave shaped lens antennas with directive, secant-squared and conical beams," **IET Microw. Antennas Propag**, vol. 1, n° 2, 2007.
- [20] C. Fernandes, "Shaped Dielectric Lenses for Wireless Millimeter-Wave Communications," **IEEE Antennas and Propagation Magazine**, vol. 41, n° 5, 1999.

- [21] A. Rolland e R. Sauleau, “Synthesis of Small Axis-Symmetrical Shaped Integrated Lens Antennas: Comparison between Full-wave and High-frequency Optimization Strategies”, **Antennas and Propagation Society International Symposium**, 2008.
- [22] B. Westcott, “General dielectric-lens shaping using complex co-ordinates,” **IEEE PROCEEDINGS**, vol. 133, nº 2, 1986.
- [23] J. Lee, “Dielectric Lens Shaping and Coma-Correction Zoning, Part I: Analysis,” **IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION**, Vol. 31, 1983.

A

Cálculo do ângulo crítico θ_c

Segundo a equação (2.41)

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta} = \pm \left[\frac{r_0 \operatorname{sen}(\theta + \gamma)}{A} \right] r_1. \quad (\text{A. 1})$$

Calculando $r_0 \cos(\theta + \gamma)$ da equação (2.37)

$$\begin{aligned} -r_0 \cos(\theta + \gamma) &= r_0 \frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \operatorname{sen}(\theta + \gamma) \\ &+ r_1. \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

Substituindo (2.41) na equação (A.2):

$$\begin{aligned} -r_0 \cos(\theta + \gamma) &= \mp \left[\frac{r_0^2 [\operatorname{sen}(\theta + \gamma)]^2}{A} \right] \\ &+ \left[\frac{nc + r_0 \cos(\theta + \gamma) \pm A}{n^2 - 1} \right], \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

operando algebricamente

$$\begin{aligned} -A(n^2 - 1)r_0 \cos(\theta + \gamma) \\ = \mp (n^2 - 1)r_0^2 [\operatorname{sen}(\theta + \gamma)]^2 \\ + A(nc + r_0 \cos(\theta + \gamma) \pm A), \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

$$\begin{aligned} [r_0^2 [\cos(\theta + \gamma)]^2 + 2nr_0 c \cos(\theta + \gamma) + r_0^2 (n^2 - 1) + c^2] \\ \mp (n^2 - 1)r_0^2 [\operatorname{sen}(\theta + \gamma)]^2 \\ = -A[(n^2 - 1)r_0 \cos(\theta + \gamma) - (nc + r_0 \cos(\theta + \gamma))], \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

$$\begin{aligned} \pm [r_0^2 [\cos(\theta + \gamma)]^2 + 2nr_0 c \cos(\theta + \gamma) + r_0^2 (n^2 - 1) \cos(\theta + \gamma)^2 + c^2] \\ = -A[(n^2 - 1)r_0 \cos(\theta + \gamma) + (nc + r_0 \cos(\theta + \gamma))], \end{aligned} \quad (\text{A. 6})$$

$$\pm[r_0^2 n^2 \cos(\theta + \gamma)^2 + 2nr_0 c \cos(\theta + \gamma) + c^2] = An[-nr_0 \cos(\theta + \gamma) - c], \quad (\text{A. 7})$$

A anterior igualdade se cumpre se os términos são 0, e como A é sempre diferente de 0 então:

$$\cos(\theta + \gamma) = -\frac{c}{nr_0}. \quad (\text{A. 8})$$

B

Intensidade de radiação, diretividade e potência

A intensidade de radiação é definida como o valor do fluxo de energia por unidade de área, dada por:

$$G = r^2 \langle |S| \rangle \cos \vartheta, \quad (\text{B. 1})$$

Onde ϑ é o ângulo feito com a normal e S o vetor de poynting, resolvendo a equação (B.1) para os campos elétricos incidente, transmitido e refletido são obtidas respectivamente as seguintes expressões:

$$G_A = \frac{|\vec{E}_i|^2}{2\eta_1} r_1^2 \cos \theta_i, \quad (\text{B.2})$$

$$G_L = \frac{|\vec{E}_t|^2}{2\eta_0} r_2^2 \cos \theta_t, \quad (\text{B.3})$$

$$G_r = \frac{|\vec{E}_r|^2}{2\eta_1} r_1^2 \cos \theta_i. \quad (\text{B.4})$$

A diretividade do campo elétrico transmitido é dada por:

$$D_L = 4\pi \frac{G_L}{P_{\text{rad}}}, \quad (\text{B.5})$$

onde P_{rad} é a potência radiada depois da lente e é calculada com a seguinte equação:

$$P_L(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_f} G_L(\alpha) \sin \alpha d\alpha, \quad (\text{B.6})$$

e α_0 é o ângulo α calculado para o primeiro valor de θ e α_f é o α calculado para o último valor de θ .