

### 3 Referencial teórico

#### 3.1. Teoria das Opções Reais

As opções reais propiciam uma análise das flexibilidades características de determinado projeto para que, conforme esta análise, um gerente tenha um instrumento de tomada de decisões a respeito dos seus ativos reais. Assim, com o surgimento de novas informações, as incertezas sobre os fluxos de caixa vão sendo reduzidas, pois poderão ser modeladas através de processos estocásticos<sup>1</sup> e, portanto, os administradores poderão tomar decisões que impactem positivamente no valor final de um projeto.

Há de se destacar que, cada vez mais, os negócios globais incorporam diversos fatores de risco, sejam eles variáveis macroeconômicas, sejam ainda aqueles relativos às incertezas do empreendimento e/ou do seu setor, tais como as variações de demanda e as flutuações nos preços das *commodities*. Nestes ambientes de negócios, desenham-se, portanto, uma gama de situações relativas a diversos cenários, os quais deverão ser modelados e tratados. Neste sentido, busca-se um critério de escolha para se tomar a melhor decisão com base nas características dos empreendimentos.

Conforme Dias (2014):

*“Opção real é o direito, mas não a obrigação, que um agente possui quando toma decisões sobre um ativo real. Ou seja, opção é o oposto de obrigação, opção é liberdade de escolha, ter opção é ter flexibilidade de escolha na tomada de decisão”.*

A Teoria das Opções Reais (TOR) objetiva, através de metodologias que envolvem processos determinísticos e/ou estocásticos, a mensuração do valor agregado proveniente das flexibilidades para exercício ou não, decorrentes dos movimentos e/ou oscilações que ocorrem em relação aos ativos reais das organizações. A avaliação pela TOR surge da necessidade de as empresas terem

---

<sup>1</sup>Processo estocástico é o que, no decorrer do tempo, segue um caminho aleatório, de acordo com as suas distribuições de probabilidades.

uma ferramenta de avaliação mais robusta para modelagem das incertezas dos negócios (com a utilização de processos estocásticos e simulações), sendo esta uma alternativa mais apropriada em relação aos modelos determinísticos tradicionais de desconto de fluxos de caixa. A TOR é especialmente importante para análise econômica de projetos e decisões de investimento sob incerteza.

Trigeorgis (1996) afirma que, geralmente, os modelos determinísticos tradicionais desconsideram as flexibilidades gerenciais, sendo, portanto, modelos estáticos, pois as escolhas gerenciais associadas aos projetos avaliados por estas metodologias limitam-se às variáveis iniciais, ou seja, não há qualquer simulação de dados e análise das incertezas intrínsecas aos projetos.

Os modelos estocásticos, presentes nas Opções Reais, inferem sobre os fatores estruturais e/ou conjunturais de determinados eventos do mercado, os quais podem, conforme uma distribuição de probabilidades, alterar o valor de um projeto no decorrer do tempo. Assim, a TOR oferece um tratamento apropriado para flexibilidades de expansão, contração, abandono ou adiamento de um projeto de investimento.

De acordo com a TOR, deve-se, primeiramente, verificar a questão da reversibilidade dos investimentos, ou seja, se ele é reversível em outro tipo de investimento ou se é completamente irreversível. Uma questão que se faz sempre presente na TOR é a escolha do melhor momento para realização de um investimento, cuja opção pode ser agora exercida ou ainda adiada por um certo período.

No plano de negócios de uma empresa, a aplicação da TOR apresenta um caráter estratégico, na medida em que as opções estratégicas e o conjunto de suas flexibilidades são avaliados com simulações a partir de diversos cenários. Desta forma, evidencia-se que a estratégia<sup>2</sup> empresarial, por estar inserida em um ambiente de negócios dinâmico e não estático, deve utilizar, o quanto possível, das ferramentas da TOR para definição dos seus principais pontos (TRIGEORGIS, 1996).

---

<sup>2</sup> Conforme Neto e Bekman (2009), estratégia, sob a ótica quantitativa, pode ser vista como “um conjunto de regras de procedimento a serem adotadas em cada uma das situações possíveis de ocorrer durante um processo decisório qualquer”. As estratégias podem considerar análises determinísticas e/ou estocásticas.

Segundo Copeland & Antikarov (2001), uma Opção Real tem mais valor quanto maior a incerteza (probabilidade de receber nova informação relevante) e quanto maior a flexibilidade (capacidade de reagir às mudanças de cenários). A Figura 3, baseada em Copeland & Antikarov (2001), ilustra essa colocação.

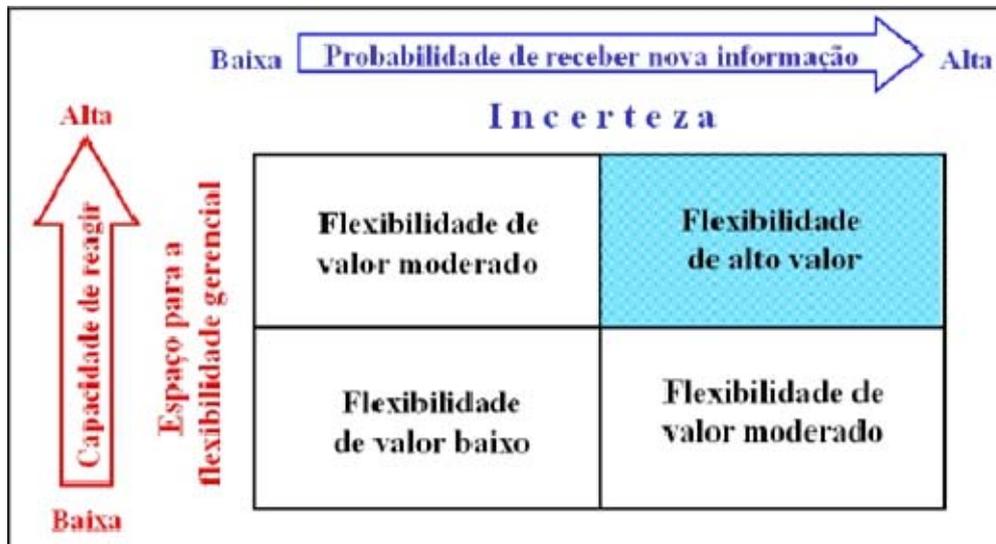


Figura 3 - Valor da Flexibilidade: Incerteza e Capacidade de Reagir  
Fonte: Copeland & Antikarov (2001).

### 3.1.1. Tipos de opções

As Opções subdividem-se em Reais ou Financeiras. O tratamento das Opções Reais deriva-se dos tratamentos desenvolvidos para avaliar as Opções Financeiras, pois o conceito de Opções desenvolveu-se primeiramente no mercado financeiro. Posteriormente, utilizou-se este conceito para avaliação de ativos fixos e/ou projetos empresariais.

Conforme Dias (2014), levando-se em conta a vasta literatura atual de Opções Reais, pode-se dizer que os seus tipos mais analisados são:

- Opção de espera: aguarda melhores condições de mercado ou novas informações e aprende para depois investir;
- Opção de expansão ou de crescimento: mensura os componentes estratégicos do projeto com uma abordagem quantitativa; e
- Opções de parada temporária e de abandono: corresponde a não obrigatoriedade de se seguir um plano de negócios (no todo ou em parte), caso ele deixe de ser lucrativo.

Dias (2014) propõe uma versão mais abrangente dos tipos de Opções Reais, explicitada na Figura 4.

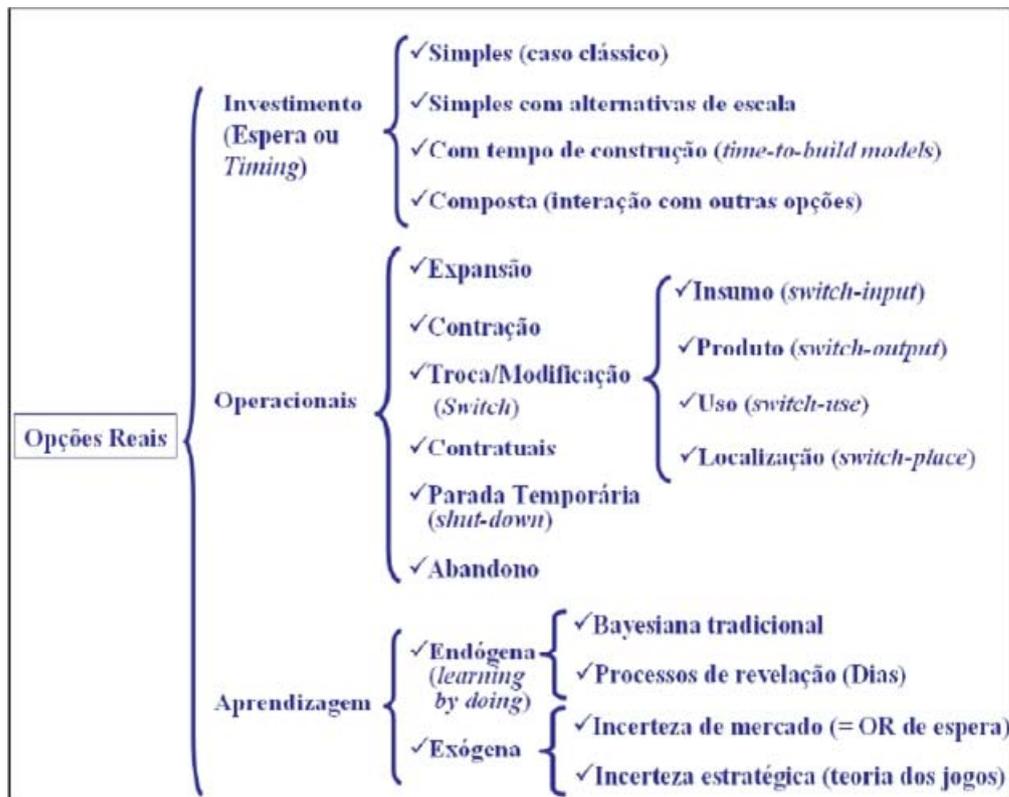


Figura 4 - Classificação dos Tipos de Opções Reais  
Fonte: Dias (2014).

Embora conceitualmente parecidas, as principais diferenças entre as Opções Financeiras e Reais são:

- As Opções Financeiras são negociadas no mercado financeiro e são, geralmente, de curto prazo, nunca apresentando valores negativos, enquanto as Opções Reais podem até serem perpétuas e apresentarem valores negativos.
- As Opções Reais apresentam maior complexidade que as Opções Financeiras, pois apresentam uma maior quantidade de variáveis de incerteza. Além disso, não são negociadas diretamente no mercado financeiro, relacionando-se muitas vezes à avaliação de projetos de investimento de capital.

Uma Opção Financeira define-se com um derivativo, ou seja, é um ativo cujo valor depende de um outro ativo, denominado ativo básico ou subjacente. Uma Opção Financeira é um contrato que dá ao seu titular o direito de exercer ou não o direito de comprar (vender) o ativo subjacente, podendo ser ela de compra (*call option*) ou de venda (*put option*).

Na opção de compra do tipo europeu é concedido o direito de comprar o ativo subjacente em uma certa data, por determinado preço. Na opção de venda do tipo europeu é dado o direito de vender o o ativo subjacente em uma certa data, por um determinado preço.

O preço do contrato é chamado “preço de exercício”, que pode ser exercido de duas formas: a) somente na data de expiração (opção europeia); e b) em qualquer data até a expiração (opção americana), ou seja, nesta modalidade existe a opção de exercício antecipado, que a opção europeia não apresenta. As opções também se subdividem em dois grandes grupos: a) opções em tempo discreto para as variáveis discretas (contáveis); e b) opções em tempo contínuo para as variáveis contínuas (incontáveis).

Para determinação do valor, tanto de opções de compra como de venda, as seguintes variáveis básicas devem ser estabelecidas:

- Preço do ativo básico ou subjacente (S): é o preço de mercado, em um dado momento, em relação ao ativo da opção de compra ou venda;
- Preço de exercício (K): é o preço pelo qual tem-se o direito de comprar (no caso de um opção de compra) ou de vender (no caso de uma opção de venda) o ativo objeto da opção.

Assim, considerando  $C_T$  o valor de compra de uma opção na data de vencimento  $T$ , e  $S_T$  o preço do ativo objeto nessa data, a opção de compra apresenta a seguinte função de remuneração:  $C_T = \text{Max}(S_T - K; 0)$ . Esta opção só tem valor quando  $S_T > K$ .

Analogamente, tem-se que, para uma opção de venda, com  $P_T$  como o valor de venda da opção na data de vencimento  $T$ , verifica-se a seguinte função de remuneração:  $P_T = \text{Max}(K - S_T; 0)$ . Neste caso, a opção tem valor apenas quando  $S_T < K$ .

A opção de compra é muito usada na analogia de uma Opção Real de investir em um ativo, ressalvado o fato de que os ativos subjacentes a estas opções seguem determinados processos estocásticos.

Segundo Trigeorgis (1996), a flexibilidade de produção de um insumo passa a ter um valor agregado mais significativo, conforme os *inputs* e/ou *outputs* sejam incertos, no âmbito de simulações estocásticas.

Na análise pela TOR, destaca-se ainda que um ativo com volatilidade muito baixa não deverá sofrer grandes alterações no seu preço futuro, o que significa um pequeno risco na negociação deste ativo. Assim, um ativo com grande volatilidade deverá sofrer significativas mudanças no seu preço ao longo do tempo. A volatilidade é uma medida das oscilações pelas quais passa um ativo subjacente no decorrer do tempo e pode ser definida como o desvio padrão dos retornos dos logaritmos naturais destes ativos.

Para melhor entendimento das formas de precificação das opções e modelagem do comportamento estocástico das variáveis incertas, serão apresentados, no item 3.2, os principais processos estocásticos utilizados em finanças.

Conforme Dias (2014), a Figura 5 a seguir resume os diversos Métodos de Solução de Opções Reais, dentre os quais este trabalho utilizará o da Simulação de Monte Carlo para Opções Reais (OR) Europeias e o Modelo Binomial.

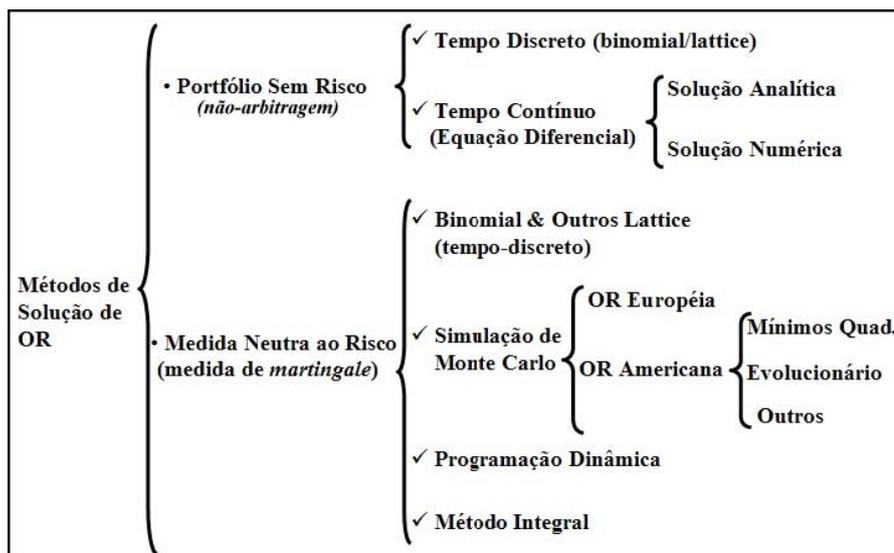


Figura 5 - Métodos de Resolução de OR  
Fonte: Dias (2014).

Outro aspecto que merece destaque em Opções Reais é que há uma relação intrínseca entre o valor de uma opção e o “gatilho” ou regra de decisão, que explicita o valor crítico da opção ( $V^*$ ), ou seja, o valor a partir do qual se deve exercer uma opção. Graficamente, é um valor que se encontra acima do “*break-even*” ( $VPL=0$ ) e abaixo do ponto máximo do VPL. Quando uma opção de valor  $V$  está “*deep-in the money*”, então seu valor é igual ao VPL decorrente do exercício imediato ( $V \geq V^*$ ). Caso contrário, deve-se esperar.

Conforme Dias (2014), “a TOR considera as incertezas e as opções (flexibilidades gerenciais) relevantes, respondendo a duas questões estratégicas para as empresas: a) o valor da oportunidade de investimento (valor da opção); e b) a regra de decisão ótima (gatilho).”

As Opções Reais ensinam escolhas típicas de problemas de otimização, como, por exemplo, a maximização da função objetivo VPL, calculada através de escolhas aderentes a um gerenciamento ótimo das flexibilidades gerenciais, sujeitas a restrições gerenciais ou legais e a incertezas técnicas e de mercado.

No escopo da análise tradicional, recorre-se frequentemente à metodologia do FCD (Fluxo de Caixa Descontado), a qual estabelece procedimentos para o cálculo do VPL através do desconto dos fluxos de caixa esperados a uma taxa ajustada ao risco de mercado do projeto ( $\mu$ ). Em tempo discreto, tem-se a seguinte relação, sob a ótica da expectativa:

$$VPL = \sum_{K=0}^N \frac{E[FC_K]}{(1 + \mu)^K},$$

sendo:  $N$  o número de períodos e  $E[FC_K]$  o valor esperado do fluxo de caixa líquido em cada período  $K$ . Em tempo contínuo utiliza-se  $e^{-\mu k}$  como fator de desconto.

### 3.2. Processos estocásticos

Processo estocástico é o que, no decorrer do tempo, segue um caminho aleatório, de acordo com as suas distribuições de probabilidades (leis com propriedades probabilísticas). Consiste em uma sequência de eventos regidos por estas distribuições.

As variáveis estocásticas são, normalmente, denotadas com  $(\sim)$  para se destacar que não seguem processos determinísticos, tal como denotado pela seguinte variável:  $\tilde{X}_t$ , definida por sua distribuição de probabilidades no decorrer de um tempo ( $t$ ). Um processo estocástico  $Y$ , a partir de uma variável  $\tilde{X}_t$ , pode ser assim denotado:  $Y = \{\tilde{X}_t, t \in T\}$ , representando, assim, um conjunto de variáveis aleatórias definidas para um mesmo espaço de probabilidade.

As variáveis estocásticas possuem um termo que representa uma média esperada (termo *drift*) e um termo aleatório ou variável (termo de volatilidade).

Um processo estocástico pode ser em tempo discreto ou em tempo contínuo, conforme apresente variável discreta ( $T$  conjunto contável) ou contínua ( $T$  conjunto incontável), respectivamente.

Em relação aos seus parâmetros, os processos estocásticos podem ser ainda classificados como:

- Estacionários – quando as propriedades estatísticas (média e variância) das variáveis são constantes ao longo do tempo;
- Não-estacionários – quando o valor esperado pode crescer indefinidamente.

A maioria dos problemas reais modelam-se através de processos estocásticos em tempo contínuo. Contudo, os processos em tempo contínuo, que demandam de técnicas de resolução mais avançadas, podem ser aproximados através de modelos discretos, tais como o modelo binomial.

Como exemplos de variáveis estocásticas temos os preços e as quantidades demandadas de certas *commodities*, como o petróleo e a celulose. Considerando a avaliação por Opções Reais, objetiva-se a correta modelagem das variáveis estocásticas e fatores de risco envolvidos na avaliação.

Conforme Dias (2014), os processos estocásticos mais relevantes para aplicações às finanças são: Movimento Geométrico Browniano (MGB); o Movimento de Reversão à Média (MRM); e o Movimento de Saltos ou Processo de Poisson. Segundo Bastian-Pinto (2009), os processos de reversão à média são utilizados, geralmente, para modelagem do comportamento de *commodities*, tais como a celulose, objeto deste trabalho.

Ressalta-se que, ao contrário do MGB, o MRM é um processo que não apresenta uma taxa de crescimento constante, tendo em vista o seu comportamento reversivo em direção à média.

Nas seções a seguir serão apresentados os Processos de *Markov*, de *Wiener* e de Itô, pois estes contêm premissas necessárias ao entendimento dos processos estocásticos mais relevantes em finanças, e o utilizado nesta dissertação (MRM).

### 3.2.1. Processo de *Markov*

Processo de *Markov* é um tipo de processo estocástico no qual apenas o valor corrente de uma variável é relevante para prever seu valor futuro (“processo sem memória”). Portanto, a estimativa para o instante seguinte é feita unicamente com base na última informação disponível, e não no histórico (*Dixit&Pindyck*, 1994).

Assim, por exemplo, de acordo com este processo, o preço atual de uma ação pode sintetizar todo o seu histórico de preços. Neste sentido, o caminho seguido por uma variável estocástica  $\tilde{X}_t$  não apresenta nenhuma relevância, de maneira que este conceito pode ser expresso, em termos probabilísticos, através da seguinte relação matemática:

$$\text{Prob}(\tilde{X}_{t+1} | \tilde{X}_0 = x_0, \tilde{X}_1 = x_1, \tilde{X}_2 = x_2, \dots, \tilde{X}_t = x_t) = \text{Prob}(\tilde{X}_{t+1} | \tilde{X}_t = x_t)$$

### 3.2.2. Processo de *Wiener*

O processo de *Wiener* ou Movimento *Browniano*, um dos processos estocásticos mais utilizados em Finanças, é um caso particular do processo de *Markov*. É um processo em tempo contínuo e possui três propriedades básicas:

- Tratando-se de um processo “markoviano”, necessita, para previsão do valor futuro de uma dada variável, apenas da distribuição de probabilidades do valor atual desta variável;
- As variações dos intervalos de tempo são independentes entre si, ou seja, este processo possui incrementos independentes;

- Estando em tempo contínuo e em um intervalo de tempo finito, segue uma Distribuição Normal com parâmetros dependentes apenas do intervalo de tempo considerado.

Considerando  $z(t)$  segue um Processo de *Wiener*, então qualquer variação de  $z$  ( $\Delta z$ ) em um dado intervalo  $\Delta t$ , obedece às seguintes condições:

- $\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$ , onde  $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0,1)$ ; e
- $E[\varepsilon_t, \varepsilon_s] = 0$ , para todo  $t \neq s$ .

Portanto, como  $\Delta z$  segue uma Distribuição Normal, temos:

- Média:  $E(\Delta z) = E(\varepsilon_t \sqrt{\Delta t}) = \sqrt{\Delta t} \cdot E(\varepsilon_t) = 0$ ; e
- Variância:  $\text{Var}(\Delta z) = \text{Var}(\varepsilon_t \sqrt{\Delta t}) = \Delta t \cdot \text{Var}(\varepsilon_t) = \Delta t \cdot 1 = \Delta t$ .

Um Processo de Wiener Generalizado (Movimento Browniano com *drift*) apresenta a seguinte equação estocástica em tempo contínuo, conforme *Dixit & Pindyck* (1994):

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad (1),$$

onde  $\alpha$  é o *drift*,  $\sigma$  é a volatilidade e  $dz \sim N(0,1)$ .

Portanto, como  $\alpha$  e  $\sigma$  são constantes e  $dx$  segue uma distribuição normal, temos os seguintes parâmetros:

- Média:  $E[dx] = E[\alpha dt + \sigma dz] = E[\alpha dt] + E[\sigma dz] = \alpha \cdot E[dt] + \sigma \cdot E[dz] = \alpha dt + \sigma \cdot 0 = \alpha dt$
- Variância:  $\text{Var}[dx] = E[(dx - E(dx))^2] = E[(dx - \alpha dt)^2] = E[(\alpha dt + \sigma dz - \alpha dt)^2] = E[(\sigma dz)^2] = \sigma^2 dz^2 = \sigma^2 dt$ .

Dias (2014), denomina ainda este processo como Movimento Aritmético Browniano (MAB).

### 3.2.3. Processo de Itô

Segundo *Dixit & Pindyck* (1994), o processo de Itô, conhecido como Movimento Browniano Generalizado, possui a seguinte equação estocástica em tempo contínuo, análoga à Equação 1:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (2), \text{ onde:}$$

$x$  = valor da variável aleatória no instante  $t$ ;

$dt$  = variação instantânea do tempo;

$a(x, t)$  = tendência instantânea do Processo de Itô;

$b(x, t)$  = volatilidade para  $dx$  no instante  $t$ ;

$dz$  = incremento de *Wiener*, com média zero e variância  $dt$ .

O processo de Itô possui as seguintes propriedades estatísticas, com demonstrações análogas às da seção 3.2.2, como segue:

- $E[dx] = a(x, t)dt$
- $\text{Var}[dx] = b^2(x, t)dt$

### 3.2.4. Movimento Geométrico Browniano (MGB)

O Movimento Geométrico Browniano (MGB) é um caso particular do processo de Itô. Normalmente, é utilizado para modelar preços de ações, e alguns preços de produtos e ativos financeiros em geral. No MGB, verifica-se uma tendência de distanciamento do seu ponto de partida original, não sendo esta uma característica desejável para os preços de *commodities* em geral.

A sua equação estocástica para uma variável  $X$  em um dado intervalo de tempo contínuo,  $dt$ , é representada por:

$$dX = \alpha X dt + \sigma X dz \text{ ou } \frac{dX}{X} = \alpha dt + \sigma dz \quad (3), \text{ onde:}$$

$X$  = valor da variável aleatória no instante  $t$ ;

$\alpha$  = *drift*;

$dt$  = variação instantânea do tempo;

$\sigma$  = volatilidade;

$dz$  = incremento de *Wiener*.

O MGB é um processo conveniente para variáveis com crescimento exponencial, taxa média  $\alpha$  e volatilidade  $\sigma$  constante.

Possui as seguintes propriedades estatísticas:

- $E[ X (t) ] = X_0 e^{\alpha t}$
- $\text{Var}[ X (t) ] = X_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$

A Figura 6 apresenta uma visão intuitiva sobre o MGB:

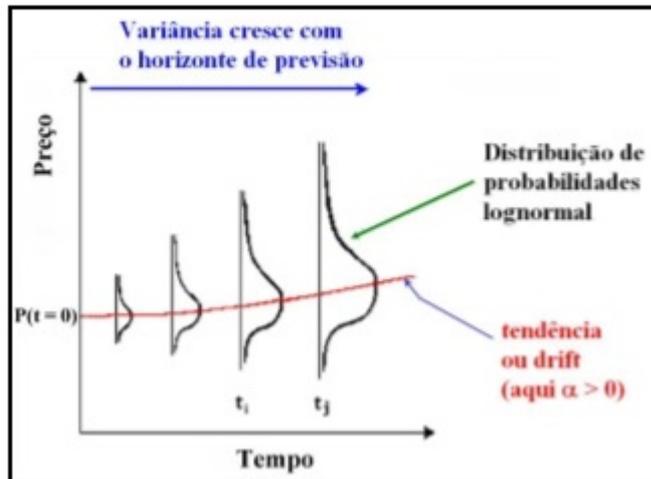


Figura 6 - Gráfico Intuitivo sobre o MGB  
Fonte: Dias (2014).

No MGB pode-se verificar uma tendência de crescimento ou de queda exponencial. Conforme a Figura 6, os preços seguem, no decorrer do tempo, uma Distribuição Lognormal.

Segundo Bastian-Pinto (2009), o MGB não é o método mais conveniente para projetos que dependam de preços geralmente situados em torno de uma média de longo prazo (para a maioria das *commodities* não financeiras o MGB não é o método mais adequado), pois o MGB pode resultar, nestes casos, em valores demasiadamente elevados.

O primeiro passo para se proceder à simulação de um processo estocástico consiste em se obter uma equação discretizada, a qual é representativa do processo estocástico em questão, escrevendo-se  $X_t$  em função de  $X_{t-1}$ , dado um  $\Delta t$  (intervalo de tempo entre as observações do processo estocástico).

No caso particular do MGB, a equação discretizada é, conforme Dias (2014):

$$X_t = X_{t-1} \exp \left[ \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot N(0,1) \sqrt{\Delta t} \right] \quad (4)$$

Considerando um processo neutro ao risco<sup>3</sup>, subtrai-se o valor do prêmio de risco ( $\pi$ ) do valor do *drift*  $\alpha$  (Dias, 2014):

$$X_t = X_{t-1} \exp \left[ \left( \alpha - \pi - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot N(0,1) \sqrt{\Delta t} \right] \quad (5)$$

É importante ressaltar que, para simulação dos preços futuros de  $X$ , deve-se buscar uma fórmula recursiva para o MGB. Dias (2014), sugere a utilização de logaritmos neperianos para melhor se analisar o comportamento de uma série de preços a serem simulados.

Assim, considerando  $X_t = \ln(x_t)$  e ainda aplicando esta relação na Equação (4) para fins de parametrização da equação estocástica discretizada, verifica-se a seguinte igualdade:

$$\ln(x_t) - \ln(x_{t-1}) = \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot N(0,1) \sqrt{\Delta t} \quad (6)$$

Neste processo estocástico, temos:

- A variância pode ser medida através da seguinte relação matemática:

$$\text{Var}[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})] = \text{Var}[\sigma \cdot N(0,1) \sqrt{\Delta t}] = \sigma^2 \Delta t$$

- Com a relação anterior, tem-se que a volatilidade obedece a seguinte relação:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{Var}[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})]}{\Delta t}}$$

- $E[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})] = E\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t\right] = \alpha \Delta t - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t$

- O *drift* é  $\alpha = \frac{E[\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})]}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}$

<sup>3</sup> Um processo é neutralizado ao risco, alterando-se a sua tendência através da utilização de um *drift* neutro ao risco.

### 3.2.5. Movimento de Reversão à Média (MRM)

O Movimento de Reversão à Média (MRM), em linhas gerais, é um processo markoviano no qual a direção, a intensidade e a volatilidade de uma variável estocástica dependem, basicamente, do seu ponto atual em uma série de dados. No caso das *commodities* aderentes ao modelo MRM, observa-se, no longo prazo, que o seu preço atual deve reverter a uma média de equilíbrio de mercado (preço médio de longo prazo).

Conforme o MRM, se o preço da celulose, por exemplo, estiver em um ponto superior ou inferior ao ponto de equilíbrio (preço médio de longo prazo), as forças de mercado agirão para que os preços retornem ao seu nível de equilíbrio. Este raciocínio apresenta bastante similaridade ao da lógica microeconômica, presente no balanço da lei de oferta e demanda. Dias (2014), ressalta, ainda, que os mecanismos de mercado possuem uma força de reversão análoga à verificada em uma mola: “a força de reversão é mais forte quanto mais longe estiver um determinado preço do seu nível de equilíbrio.”

O MRM é um caso particular do Processo de Itô. Conforme desenvolvido por *Dixit&Pindyck* (1994), tem-se a seguinte equação do MRM (Equação 7) para o processo de fator único de *Ornstein-Uhlenbeck*<sup>4</sup>(MRM de O-U):

$$dX = \eta(\bar{X} - X)dt + \sigma dz \quad (7), \text{ onde:}$$

$X$  = logaritmo neperiano (ln) da variável estocástica  $x$  ( $X = \ln(x)$ )

$\eta$  = velocidade de reversão à média de longo prazo da variável estocástica  $x$

$\bar{X}$  = ln da média de longo prazo da variável estocástica  $x$

$$\left( \bar{X} = \ln(\bar{x}) \right)$$

$\sigma$  = volatilidade da variável estocástica  $x$ ;

$dz$  = incremento de *Wiener*(possui média zero e variância  $dt$ ).

<sup>4</sup> Este modelo é o mais simples dentre os modelos de MRM, pois facilita o entendimento do comportamento da variável estocástica ao se analisar, como uma nova variável estocástica, o seu logaritmo neperiano. Também é conhecido como Movimento Aritmético de Reversão à Média.

A maior parte dos especialistas argumenta que, para a grande maioria das *commodities*, é melhor utilizar modelos de MRM do que MGB para simular os seus preços. Contudo, muitas vezes a velocidade de reversão é baixa e a identificação de modelos aderentes ao MRM em séries temporais apresenta algumas dificuldades. Portanto, conforme os testes estatísticos que serão vistos posteriormente, não é trivial a rejeição da hipótese de que os preços seguem um MGB.

A Figura 7 apresenta uma visualização da ideia geral do MRM, anteriormente discutida, mostrando as propriedades deste processo estocástico, considerando que, para uma série de preços, cuja variável estocástica é  $P$  ( $x = \ln[P]$ ), verifica-se um modelo de MRM de O-U com as seguintes distribuições de probabilidade:  $x \sim \text{Normal}$  e  $P \sim \text{Lognormal}$ .

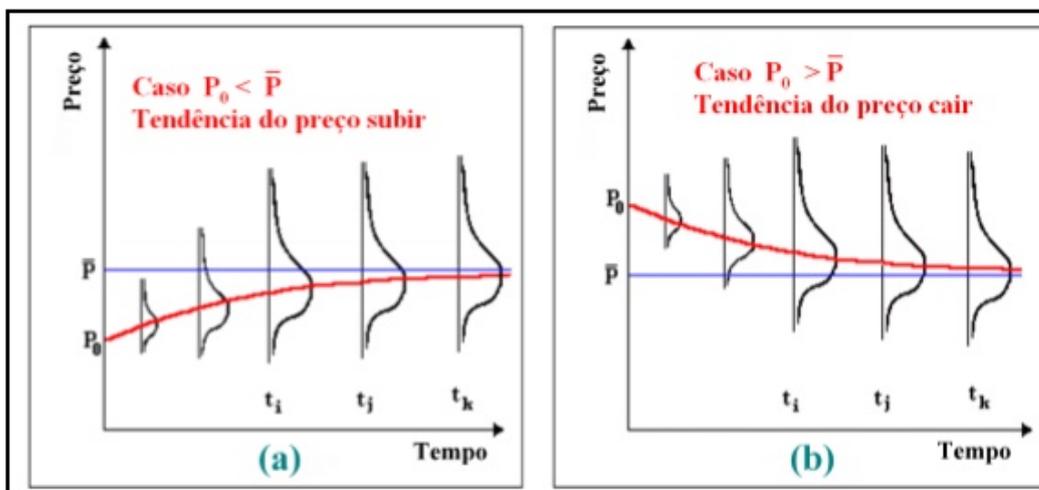


Figura 7 - Gráfico Intuitivo sobre o MRM.  
Fonte: Dias (2014).

Como verificado na Figura 7, para se atingir o nível de equilíbrio ( $\bar{P}$ ), as curvas de preços podem ser crescentes ou decrescentes, dependendo apenas do fato de o preço corrente ( $P_0$ ) estar abaixo ou acima de ( $\bar{P}$ ). Verifica-se também que os preços seguem uma Distribuição Lognormal e possuem comportamento assintótico. Portanto,  $x = \ln[P] \Rightarrow P = e^x$ , o que garante preços sempre com valores positivos.

No MRM, quanto maior a distância da variável estocástica  $X$  do seu valor esperado  $\bar{X}$ , mais provável é que ela retorne a este nível ( $\bar{X}$ ).

Segundo *Dixit & Pindyck* (1994), para o MRM, no instante  $T$  verificam-se as seguintes relações para os parâmetros:

- $E[X] = \bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\eta T}$
- $Var[X] = (1 - e^{-2\eta T})\sigma^2 / 2\eta$

Com base nestas propriedades e para valores muito elevados de  $T$  ( $T \rightarrow \infty$ ), observa-se que o valor esperado converge para a média de longo prazo ( $\bar{X}$ ), e a variância para  $\sigma^2 / 2\eta$ . Ressalta-se que a variância do MRM difere daquela do MGB, pelo fato desta última ser ilimitada.

Merece destaque ainda o conceito de *half-life* (meia vida da reversão), utilizado para mensuração da lentidão de um processo estocástico em um modelo de MRM. Sejam  $H$  a meia vida, objeto da avaliação gerencial, e  $\eta$  a velocidade de reversão, temos a seguinte relação (DIAS, 2014):

$$H = \frac{\ln(2)}{\eta}$$

Para simulação do MRM, considerando um  $\Delta t$  estipulado, deve-se obter a equação discretizada, a qual sempre apresenta, no modelo estocástico, uma relação recursiva, ou seja, é uma relação que traduz  $X_t$  em função de  $X_{t-1}$ .

Considerando a seguinte relação entre as Distribuições de Probabilidade das variáveis estocásticas  $x(x \geq 0)$  e  $X: x \sim \text{Lognormal} \Leftrightarrow X = \ln(x) \sim \text{Normal}$ , tem-se a Equação (8), que segue o MRM para  $X$  em tempo discreto (Dias, 2014):

$$X_t = X_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \bar{X}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1) \quad (8)$$

Para simulação de uma variável estocástica  $x_t \sim \text{Lognormal}$ , considerando  $E(x_t) = \exp[E(X_t)]$  e também a combinação da Equação 8 com a relação  $x_t = \exp[X_t - 0,5 \cdot \text{Var}(X_t)]$ , obtém-se, portanto, a seguinte equação discretizada:

$$x_t = \exp \left\{ \begin{array}{l} \ln[x_{t-1}]e^{-\eta\Delta t} + \ln[\bar{x}](1 - e^{-\eta\Delta t}) \\ - \left[ (1 - e^{-2\eta\Delta t}) \frac{\sigma^2}{4\eta} \right] + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1) \end{array} \right\} \quad (9)$$

As discretizações, presentes nas Equações (8 e 9), são independentes do intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) considerado.

Na equação (9), o primeiro e o segundo termos demonstram a tendência, por exemplo, de uma série de preços ( $x_t$ ), sendo estes termos, respectivamente, o valor inicial ( $x_{t-1}$ ) e a média de longo prazo ( $\bar{x}$ ). O terceiro termo representa o ajuste do nível de convexidade (ou de não linearidade) de uma série histórica de preços, para capturar os efeitos não lineares desta série na variável estocástica ( $x_t$ ). Estas três primeiras parcelas são determinísticas, contudo, a quarta é estocástica, caracterizada pela Distribuição Normal Padrão, através da qual podem ser realizadas as simulações estocásticas, como a de Monte Carlo.

Esta interpretação dos termos da Equação (9) é análoga à interpretação dos termos da Equação (8), ressalvado o fato de que esta última não apresenta a parcela relativa ao ajuste de convexidade.

Ambas as Equações (8 e 9) podem ser reescritas, considerando-se um ambiente “neutro ao risco”. Levando-se em conta este ambiente e, conforme Dias (2014), das médias de longo prazo ( $\bar{X}$  e  $\ln[\bar{x}]$ , respectivamente), subtrae-se um “prêmio normalizado”  $\frac{(\mu-r)}{\eta}$ , sendo  $\mu$  a taxa ajustada ao risco e  $r$  a taxa livre de risco.

Assim, em uma abordagem neutra ao risco<sup>5</sup>, temos as equações (10 e 11) a seguir, obtidas através do ajuste já descrito, realizado, respectivamente, nas Equações anteriores (8 e 9):

$$X_t = X_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \left[ \bar{X} - \frac{(\mu-r)}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \quad (10)$$

$$x_t = \exp \left\{ \begin{array}{l} \ln[x_{t-1}]e^{-\eta\Delta t} + \left[ \ln[\bar{x}] - \frac{(\mu-r)}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta\Delta t}) \\ - \left[ (1 - e^{-2\eta\Delta t}) \frac{\sigma^2}{4\eta} \right] + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \end{array} \right\} \quad (11)$$

<sup>5</sup> Neutralidade ao risco não pode ser entendida como risco ignorado. Contrariamente ao conceito de aversão ao risco, segue um modelo que tem como premissa básica a ausência de arbitragem. Trata-se de um artifício matemático que permite usar a taxa livre de risco como taxa de desconto.

Para discretização no MRM, primeiramente devem ser calculados os parâmetros da Equação 7: volatilidade ( $\sigma$ ), velocidade de reversão à média ( $\eta$ ) e média de longo prazo ( $\bar{X} = \ln(\bar{x})$ ), valores estes que deverão ser aplicados nas Equações (8, 9, 10 e 11), de modo que as equações estocásticas estejam prontas para serem objetos de simulações estocásticas.

Quando, por exemplo, considera-se uma série histórica de preços e deseja-se estimar os parâmetros:  $\sigma$ ,  $\eta$  e  $\bar{X}$ , geralmente, utiliza-se a regressão linear sobre esta série, pois, com este ferramental estatístico, reduz-se o erro quadrático médio.

Conforme Bastian-Pinto (2009) e Dias (2014), e considerando que, no instante  $T$ ,  $E[X] = \bar{X} + (X_0 - \bar{X})e^{-\eta T}$ , e que determinada trajetória segue um MRM em tempo discreto, verifica-se, portanto, a seguinte relação:

$$X_t = \bar{X} + (X_{t-1} - \bar{X})e^{-\eta\Delta t} = \bar{X}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + X_{t-1}e^{-\eta\Delta t}$$

Para realização da regressão linear, considera-se o erro da série e subtrai-se de  $X_{t-1}$  os dois membros da relação anterior. Assim, esta relação fica reescrita através da seguinte da Equação (12) a seguir:

$$X_t - X_{t-1} = \bar{X}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + X_{t-1}(e^{-\eta\Delta t} - 1) + \varepsilon_t \quad (12)$$

Ressalta-se que a Equação (8) nos fornece uma medida para tempo discreto de um processo auto-regressivo de ordem 1 (AR(1)<sup>6</sup>) da equação (12).

Substituindo  $X_t = \ln(x_t)$  e  $\bar{X} = \ln(\bar{x})$  na equação (12), tem-se:

$$\ln(x_t) - \ln(x_{t-1}) = \ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) = \ln(\bar{x})(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \ln(x_{t-1})(e^{-\eta\Delta t} - 1) + \varepsilon_t \quad (13)$$

<sup>6</sup> Se  $X_t$ ,  $t \in Z$ , é um processo auto-regressivo de ordem  $p$ , então  $X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$ , onde  $X_t$  é o valor a ser previsto;  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p$  são os coeficientes; e  $E(\varepsilon_t) = 0$  e  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ . Um caso particular de grande relevância é o do processo auto-regressivo de ordem 1:  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ .

Considerando a Equação 13, e que  $a$  e  $b$  são constantes que satisfazem a seguinte igualdade:  $\ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) = a + (b-1) \cdot \ln(x_{t-1}) + \varepsilon_t$ , então a velocidade de reversão à média é dada por  $\eta = -\ln(b)/\Delta t$  e a média de longo prazo por  $\bar{x} = \exp\left(-\frac{a}{(b-1)}\right)$ .

A volatilidade ( $\sigma$ ), obtém-se, considerando a variância dos erros da regressão ( $\sigma_\varepsilon^2$ ) e  $Var[X] = (1 - e^{-2\eta T})\sigma^2/2\eta$ , no instante  $T$ .

$$\text{Portanto, } \sigma_\varepsilon^2 = (1 - e^{-2\eta\Delta t})\sigma^2/2\eta \Rightarrow \sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2 \ln(b)}{(b^2 - 1)\Delta t}}.$$

A Figura 8 apresenta um resumo das equações para estimar os parâmetros:

Parâmetro estimado	Fórmula
Velocidade de reversão	$\eta = -\ln(b)/\Delta t$
Volatilidade	$\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2 \ln(b)}{(b^2 - 1)\Delta t}}$
Média de longo prazo	$\bar{x} = \exp\left(-\frac{a}{(b-1)}\right)$

Figura 8 - Quadro resumo para estimação de parâmetros do MRM.  
Fonte: Nascimento (2012).

### 3.2.6. Validação dos Processos Estocásticos

A aplicação da Teoria das Opções Reais depende fortemente do processo estocástico que seguem as séries de preços estudadas.

Em linhas gerais, pode-se dizer que o MGB difere do MRM quanto à dependência dos valores observados em relação a períodos anteriores ao atual, no qual o MGB apresenta-se como um modelo com pouca dependência dos valores passados. Já o MRM depende, para determinação de valores atuais, daqueles observados em períodos anteriores.

Para se avaliar qual dos dois processos encontra maior aderência em relação a um determinado conjunto de dados, devem ser utilizados testes de análise de estacionariedade.

Um processo é dito estacionário (com covariância estacionária) se as suas média e variância forem constantes ao longo do tempo, e o valor da covariância entre dois momentos no tempo depender unicamente da distância entre estes dois períodos. Assim, em uma série estacionária, observa-se que tenderá sempre à sua média de reversão, bem como a sua variância apresentará a mesma amplitude.

As suposições de estacionariedade são as seguintes:

- $E(Y_t)$  é independente do tempo.
- $\text{Var}(Y_t)$  é finita, positiva e constante independentemente do momento do tempo.
- $\text{Cov}(Y_t, Y_s)$  é infinita e depende apenas de  $|t-s|$ .

Nesta dissertação, dois testes poderão ser utilizados no Capítulo 4 para a avaliação da estacionariedade da série ln de preços da celulose de fibra curta: o Teste de Raiz Unitária de Dickey-Fuller (pode ser o aumentado) e o Teste da Razão de Variâncias.

### 3.2.6.1. Teste de Raiz Unitária (Dickey-Fuller)

Para entender melhor o uso do teste de raiz unitária para verificação da estacionariedade de um processo estocásticos, serão utilizados dois exemplos clássicos de processos auto-regressivos de ordem 1 (AR(1)), ou seja, processos em que o valor em  $t$  depende do valor em  $t-1$ . Os exemplos serão do modelo “sem” e “com” deslocamento, definido como uma constante adicionada a cada momento do processo.

#### Exemplo 1:

Seja o processo estocástico sem deslocamento  $Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$  em que  $Y_t$  é o valor da série no momento  $t$  e  $u_t$  é ruído branco<sup>7</sup>. Caso  $\rho = 1$ , então  $E(Y_t) = Y_0$  e  $\text{Var}(Y_t) = t\sigma^2$ . Caso  $|\rho| < 1$  então pode-se provar que a série é estacionária.

<sup>7</sup> Normalmente independente, com média 0 e variância  $\sigma^2$ .

**Exemplo 2:**

Seja o processo estocástico com deslocamento  $Y_t = \beta + \rho Y_{t-1}$ , em que  $\beta$  é o deslocamento do processo. Caso  $\rho = 1$ , então  $E(Y_t) = Y_t$  e  $Var(Y_t) = \beta$ . Caso  $|\rho| < 1$  então pode-se provar que a série é estacionária.

Portanto, através destes exemplos, verifica-se que a estacionariedade pode ser testada quando obtêm-se valores para  $\rho$ , como o realizado no teste de raiz unitária. O teste de raiz unitária é um dos testes de estacionariedade mais conhecidos e aplicados atualmente.

Neste caso, as hipóteses a serem testadas são:

$H_0: |\rho| = 1$ , a série tem raiz unitária e, portanto, é não estacionária.

$H_1: |\rho| < 1$ , a série não tem raiz unitária e, portanto, é estacionária.

A estatística é dada pelo Teste de Dickey-Fuller (DF):

$$DF = \frac{\hat{\rho} - 1}{EP(\hat{\rho})}$$

No Teste de DF, realiza-se uma regressão através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), modelo em que subtraímos  $Y_{t-1}$  dos dois lados da equação. Neste caso, o parâmetro para  $Y_t$  seria dado por  $(\rho - 1)$  ao invés de  $\rho$ .

Segue a demonstração no caso do modelo sem AR(1) sem deslocamento:

$$Y_t - Y_{t-1} = \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = (\rho - 1)Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \beta Y_{t-1} + u_t$$

Apesar de a estatística do teste poder ser obtida através do método de mínimos quadrados, o p-valor que avalia o teste de que  $\beta = 0$  (o mesmo que testar se  $\rho = 1$ ) não pode ser utilizado. No entanto, sob a hipótese nula, o estimador não segue a estatística t, mesmo em grandes amostras, ou seja, pode-se utilizar o valor da estatística, contudo, o valor da distribuição de comparação para o cálculo do p-valor é outro.

Dickey e Fuller geraram tabelas para a comparação da estatística do teste para os diferentes processos a serem considerados: processo auto-regressivo sem deslocamento e sem tendência, processo auto-regressivo com deslocamento e sem tendência e processo auto-regressivo com deslocamento e com tendência.

O teste de raiz unitária utilizado nesta dissertação foi o teste de Dickey-Fuller aumentado, pois este modelo, ao ser testado, assume maior flexibilidade por permitir que os erros da série sejam correlacionados, adicionando termos de *lags* (defasagens) à variável resposta ( $\Delta Y_t$ ).

Gujarati (2004) define, por exemplo, uma série de preços como estacionária, se “a variância e a auto-covariância (em vários *lags*) são invariantes com o tempo. Esse tipo de série tenderá a retornar para a sua média (reversão à média) e terá uma amplitude praticamente constante.”

A principal vantagem do teste de Dickey-Fuller aumentado em relação ao teste original é que, ao introduzir um número suficiente de defasagens, garante-se que os resíduos não apresentem auto-correlação podendo, assim, acomodar um maior número de processos estocásticos além do AR(1).

Assim, o processo estocástico considerado tem a sua forma geral dada por:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 t + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta Y_{t-i},$$

sendo  $t$  o tempo,  $u_t$  o ruído branco,  $\Delta Y_{t-1} = (Y_{t-1} - Y_{t-2})$ ,  $\Delta Y_{t-2} = (Y_{t-2} - Y_{t-3})$  e, assim, por diante. A estatística do teste aumentado é a mesma do teste  $t$  da regressão e a distribuição é a mesma tabelada para os valores críticos definidos por Dickey e Fuller e que podem ser encontrados em Gujarati (2004).

A definição do *lag* ( $m$ ) é, geralmente, realizada pelos *softwares* estatísticos, que, a partir de um critério de *lag*, normalmente buscam a seguinte minimização:

$$\left(\frac{2k}{n}\right) + \ln\left(\frac{RSS}{n}\right),$$

onde RSS é a soma de quadrados dos resíduos e  $k$  é o número de regressores, incluindo o intercepto.

Como mencionado, nesta dissertação, será utilizado o Teste de Dickey-Fuller aumentado. Para tanto, considera-se a seguinte série, modelo AR(1):

$$x_t - x_{t-1} = a + (b-1)x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

sendo  $\varepsilon_t$  um ruído branco. A partir desta série, são levantadas as seguintes hipóteses (nula e alternativa) para aplicação de um teste de hipóteses, utilizado no Teste de Dickey-Fuller aumentado:

$$H_0 : b - 1 = 0$$

$$H_1 : b < 1$$

O Teste da Raiz Unitária de Dickey-Fuller é utilizado para verificação da rejeição da hipótese de um modelo de MGB.

A hipótese nula verifica a presença de alguma raiz unitária em uma série, de forma a não ser estacionária. Já a hipótese alternativa verifica se esta série é estacionária. Para aplicação deste teste e também do Teste da Raiz Unitária, considera-se uma regressão linear por mínimos quadrados para a série que deu origem ao teste de hipóteses, buscando-se a obtenção de uma estatística  $\tau$ . A partir do valor desta estatística, deve-se observar a seguinte relação:

✓ Se  $\tau < \text{valor crítico}$ , então  $H_0$  é rejeitada.

Os valores críticos assintóticos do teste  $\tau$  da Raiz Unitária de Dickey-Fuller com uma constante e tanto os sem como os com tendência temporal podem ser consultados em Gujarati (2004) em tabelas que relacionam os tamanhos da amostra com os níveis de confiança. Estes valores críticos também podem ser obtidos quando os dados são trabalhados por *softwares* estatísticos.

### 3.2.6.2. Teste da Razão de Variância

Segundo Pindyck (1999), o Teste de Razão de Variância é uma metodologia alternativa na investigação de uma série de dados, avaliando-se se ela é aderente ao MGB ou ao MRM.

Conforme visto no Teste da Raiz Unitária de Dickey-Fuller, se uma série é não estacionária, então a variância aumenta com o passar do tempo. Utilizando este argumento como indicador do nível de estacionariedade de um processo estocástico, aplica-se uma metodologia que considera como parâmetro a ser avaliado a estatística ( $RV_k$ ) da razão de variâncias, dada por:

$$RV_k = \frac{1 \text{Var}(Y_{t+k} - Y_t)}{k \text{Var}(Y_{t+1} - Y_t)}$$

Sendo  $k$  o *lag* avaliado.

Se um processo estocástico  $Y_t$  for não estacionário, então  $RV_k$  aumentará linearmente, de acordo com o aumento de  $k$ , chegando próximo ao valor de 1; caso contrário, se o processo for estacionário, ou seja, se os valores reverttem-se

para o equilíbrio de longo prazo, então esta razão tenderá a cair chegando a valores próximos de zero.

A aplicação deste teste pode ser dispensada, caso confirme-se, pelo Teste da Raiz Unitária de Dickey-Fuller, que um modelo é aderente ao MRM.

### **3.2.7. Modelos de Precificação das Opções**

A valoração das Opções Financeiras tem se mostrado como um desafio bastante complexo no que tange à aplicação das metodologias mais adequadas, considerando as inúmeras variáveis de incerteza que, atualmente, abrangem a avaliação por Opções. Objetivando uma abordagem mais conceitual, alguns modelos serão apresentados, de forma simplificada, sem grandes formalismos do ponto de vista matemático.

A seguir, será apresentado o Modelo Analítico de Black e Scholes, bem como serão ainda apresentados os Modelos Numéricos<sup>8</sup> Binomial e de Monte Carlo.

#### **3.2.7.1. Modelo de Black e Scholes**

Nos anos 70, Fischer Black e Myron Scholes desenvolveram uma fórmula analítica para precificação de Opções Financeiras do tipo europeu. Esta fórmula foi fundamental no campo das finanças, no que se refere às teorias relacionadas à precificação de ativos.

No modelo de Black & Scholes, consideram-se as seguintes premissas:

- Os preços dos ativos envolvidos seguem uma distribuição lognormal;
- A negociação dos títulos pode ser realizada de forma contínua, podendo estes ainda serem subdivididos;
- Neste modelo não há oportunidade de arbitragem<sup>9</sup>;
- A volatilidade do ativo em questão é constante;

---

<sup>8</sup> São modelos dinâmicos, que não podem ser representados por fórmulas matemáticas e, portanto, não possuem soluções analíticas. São modelos que apresentam soluções numéricas, ou seja, soluções obtidas por aproximações. Exemplos: resoluções de equações diferenciais ordinárias e parciais para descrição do comportamento dinâmico de sistemas físicos através de famílias de curvas obtidas através destas equações.

<sup>9</sup> Arbitragem consiste na possibilidade de se obter lucro no mercado sem risco e sem investimento líquido (sem ter dinheiro), conforme Dias (2014).

- Os investidores podem realizar captação à taxa de juros livre de risco;
- A taxa de juros de curto prazo é a taxa livre de risco.

A fórmula de Black & Scholes depende das seguintes variáveis básicas:

- Preço do ativo básico ou subjacente ( $S$ );
- Preço de exercício da opção ( $X$ );
- Volatilidade do ativo básico ou subjacente (desvio padrão da taxa de retorno ( $\sigma$ ));
- Prazo ao vencimento da opção ( $T-t$ );
- Taxa de juros livre de risco ( $r$ );

As Equações de Black & Scholes sem considerar o pagamento de dividendos ( $\delta = 0$ ), são:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$P = Xe^{-r(T-t)} N(-d_2) - SN(d_1)$$

Sendo:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

$N(x) \Rightarrow$  representa a função de probabilidade acumulada para uma variável normal padronizada.

Utilizando um modelo que inclui o pagamento de dividendos ( $\delta \neq 0$ ), tem-se a seguinte fórmula para uma opção de compra (C) europeia:

$$C = Se^{-\delta(T-t)} N(h) - Xe^{-r(T-t)} N\left(h - \sigma\sqrt{(T-t)}\right), \text{ onde :}$$

$$h = \frac{\ln(S/X) + (r - \delta + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

A determinação da volatilidade não é um procedimento trivial, pois é difícil se chegar a um valor exato deste parâmetro, que deve ser estimado entre a data de negociação de uma opção e a do seu vencimento. De acordo com Hull (2002), existem, basicamente, dois métodos para estimação da volatilidade:

- Volatilidade Histórica – são analisadas amostras de dados do passado (séries históricas) e supõe-se que o comportamento dos dados no futuro seguirão estas tendências históricas; e
- Volatilidade Implícita das opções do mercado – considera-se a taxa de variação verificada no mercado em relação ao ativo básico ( $S$ ).

As críticas mais comuns ao Modelo de Black & Scholes são:

- a sua não adequação à realidade em alguns casos, pois as premissas deste modelo analítico devem ser simplificadas para a sua aplicação;
- foi desenvolvido apenas para utilização em opções europeias.

Apesar das simplificações existentes no modelo de Black & Scholes, em parte significativa dos casos, obtém-se um valor próximo ao valor real da opção.

Opções também podem ser resolvidas por Métodos Numéricos, como a Simulação de Monte Carlo (SMC), o Modelo Binomial e por Diferenças Finitas implícitas e explícitas. Já as opções americanas devem ser calculadas através de resoluções numéricas, seja através de equações diferenciais parciais (EDP's) ou por aproximações analíticas que, por exemplo, considerem uma relação tal como: “Opção Americana = Opção Europeia + Prêmio pelo Exercício Antecipado”, relação esta que corrobora o fato de que uma opção americana apresenta mais valor do que uma europeia. Como mencionado, destaca-se que as opções americanas necessitam de instrumentos matemáticos mais sofisticados.

### **3.2.7.2. Modelo Binomial**

Conforme Copeland e Antikarov (2002), o Modelo Binomial recorre à Teoria das Probabilidades para desenvolvimento de uma abordagem com árvores binomiais que objetivam explicitar o apreçamento das opções, empregando técnicas matemáticas mais simples do que as utilizadas na fórmula de Black & Scholes, ou em resoluções numéricas através da discretização das equações diferenciais parciais (EDP's).

Esta abordagem binomial das Opções, utilizando técnicas de matemática discreta, torna mais fáceis e práticas as soluções de problemas de Opções Reais. Este modelo é o mais intuitivo dentre os métodos numéricos de valoração de ativos.

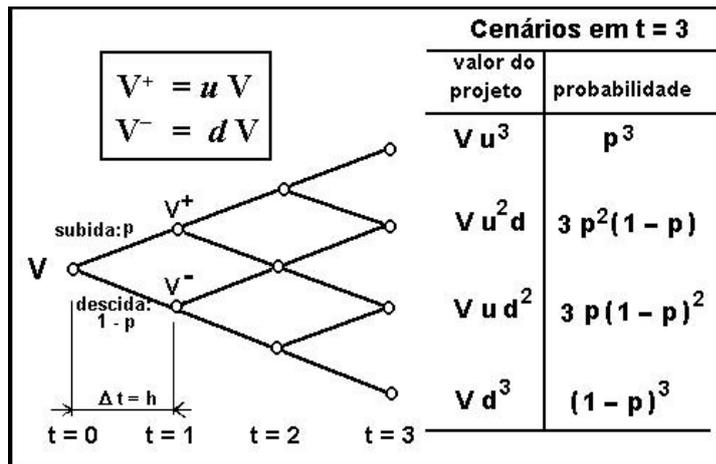
A Árvore Binomial é, basicamente, uma árvore de decisão que explicita diferentes trajetórias que poderão ser seguidas, como, por exemplo, pelo preço de um ativo ao longo do tempo, buscando, assim, capturar o valor desconhecido das flexibilidades intrínsecas ao processo de escolha.

Conforme Dias (2014), com a publicação do artigo de Cox & Ross & Rubinstein (1979), o Método Binomial tornou-se mais utilizado como ferramenta para o cálculo das Opções Reais do tipo americanas. Este método é o que melhor se aplica às opções americanas, sendo mais simples e intuitivo que o método das equações diferenciais, isso porque avalia todas as alterações possíveis através de análises por árvores e capta, de forma mais eficiente, as possibilidades de exercício antecipado.

O Modelo Binomial requer inicialmente a escolha de determinados critérios, denominados fatores de subida e de descida ( $u$  e  $d$ , respectivamente), para que a Árvore Binomial seja uma aproximação discreta de um processo estocástico em tempo contínuo – MGB ou MRM. Considerando  $r$  uma taxa de desconto livre de risco, deve-se observar a seguinte relação:  $d < 1+r < u$  para a não ocorrência de arbitragem.

Destaca-se que uma maneira prática é que  $u$  e  $d$  sejam escolhidos, de forma que suas árvores binomiais recombinem, ou seja, “com que os valores de um cenário após uma subida seguida de uma descida sejam iguais aos valores do cenário de uma descida seguida de uma subida” (Dias, 2014). A recombinação mostra-se eficaz a fim de se evitarem tempos computacionais demasiadamente elevados, os quais são observados nas árvores não-recombinantes.

A Figura 9, para o ativo  $V$ , mostra uma árvore recombinante de três períodos ( $n=3$ ), de maneira que os fatores multiplicativos apresentem a relação  $d = 1/u$ :



Árvore Binomial Recombinante com  $d = 1/u$

Figura 9 - Árvore Binomial Recombinante ( $n=3$ )

Fonte: Dias (2014).

Na Figura 9, tem-se:  $Vu - V$  em movimento de subida e  $Vd - V$  em movimento de descida, sendo  $u$  e  $v$  os fatores multiplicativos que introduzem as suas respectivas tendências. Após “ $n$ ” períodos, uma árvore recombinante apresentará  $n + 1$  cenários; contudo, não sendo recombinante, o número de cenários de uma árvore será igual a  $2n$ . Essa redução de cenários das árvores recombinantes implica na redução dos seus respectivos tempos computacionais.

Para fins de cálculo dos valores através de planilhas, as árvores podem ainda ser apresentadas no formato de tabelas, organizadas de forma decrescente, tendo nas suas primeiras linhas os cenários extremos superiores, como ilustra a Tabela 2, construída a partir da Árvore Binomial anterior (Figura 9):

$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$V$	$uV$	$u^2V$	$u^3V$
–	$dV$	$udV$	$u^2dV$
–	–	$d^2V$	$ud^2V$
–	–	–	$d^3V$

Tabela 2 - Tabela para Árvore Binomial Recombinante ( $n=3$ )

Fonte: Elaboração própria.

Garantida a condição de não arbitragem ( $d < 1+r < u$ ), as probabilidades neutras ao risco<sup>10</sup> de subida e de descida do valor do ativo básico ( $V$ ) são, respectivamente,  $p$  e  $(1-p)$ , probabilidades estas que obedecem à seguinte relação:  $pu + (1-p)d = 1+r$ . Assim, deduz-se que:

$$V = \frac{pVu + (1-p)Vd}{1+r}, \text{ sendo } p = \frac{1+r-d}{u-d}$$

Verificam-se ainda as seguintes relações para os valores da opção de compra nos dois cenários, de subida e de descida:

$$Cu = \left[ \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{ud}}{1+r} \right] \quad Cd = \left[ \frac{pC_{du} + (1-p)C_{dd}}{1+r} \right]$$

$$Cu = \text{Max}(0, Vu - K) \quad Cd = \text{Max}(0, Vd - K)$$

Em que  $K$  é o preço de exercício da opção, e  $Vu$  e de  $Vd$  são os valores do ativo subjacente nos cenários de subida e descida, respectivamente. Os parâmetros  $u$  e  $d$  podem ser calculados através das seguintes relações:  $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \therefore d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1/u$ , com  $\Delta t = T/n$ , sendo  $T$  a vida útil da opção e “ $n$ ” o número de períodos em que se deseja estudar os possíveis movimentos do ativo básico.

Nelson e Ramaswany (1990) apresentaram um procedimento metodológico para aproximação do modelo Ornstein-Uhlenbeck para Árvore Binomial recombinante. O modelo proposto por esses autores utiliza uma sequência binomial simples de duração  $\Delta t$  com  $n$  períodos e um horizonte de tempo  $T$ , sendo  $T = n.\Delta t$ .

Para modelagem binomial, segundo o MRM, devem ser estimados os seguintes parâmetros:  $u$ ,  $d$ ,  $p_t$  e  $1-p_t$ , que são, respectivamente, movimento de subida, movimento de descida, e probabilidades de subida e de descida em um período  $t$ :

$$u = x_t^+ \equiv x_{t-1} + \sigma\sqrt{\Delta t}; \quad d = x_t^- \equiv x_{t-1} - \sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$p_t \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta(\bar{x} - x)}{\sigma} \cdot \sqrt{\Delta t}; \quad 1 - p_t$$

<sup>10</sup> No Modelo Binomial, geralmente adota-se uma abordagem neutra ao risco para não haver necessidade de ajuste na taxa de desconto, pois o ajuste é feito nas probabilidades de acréscimo ( $u$ ) e de decréscimo ( $d$ ) através da aplicação da taxa livre de risco  $r$ .

As probabilidades de subida e de descida nas ramificações são obtidas igualando-se a média e a variância do nó binomial com aqueles parâmetros do processo estocástico contínuo, garantindo, assim, a convergência quando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Conforme Bastian Pinto (2009), no MRM, pode-se utilizar a seguinte equação para determinação das restrições nos nós binomiais, a fim de se construir árvores neutras ao risco:

$$p_{x_t} = \text{Max} \left( 0, \text{Min} \left( 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta \left[ \left( \bar{x} - \lambda_x / \eta \right) - x_t \right]}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right) \right) \quad (14), \text{ onde:}$$

- $p_{x_t}$  : conjunto de probabilidades que compõem uma Árvore Binomial e estão associadas a uma série preços  $x_t$  .
- $x_t$  : série de preços aderente ao MRM.
- $x_t^+$  e  $x_t^-$  : movimentos de subida e de descida da série de preços  $x_t$  , respectivamente.
- $p_t$  e  $1-p_t$  : probabilidades de subida e de descida da série de preços  $x_t$  , respectivamente.
- $\eta$  : velocidade de reversão à média de  $x_t$  .
- $\bar{x}$  : média de reversão de longo prazo de  $x_t$  .
- $\sigma$  : volatilidade de  $x_t$  .
- $\lambda_x$  : prêmio de risco de  $x_t$  .

### 3.2.7.3. Simulação de Monte Carlo (SMC)

A Simulação de Monte Carlo (SMC), criada durante a Segunda Guerra Mundial, consiste, basicamente, em um processo através do qual desenham-se os possíveis caminhos aleatórios percorridos por uma determinada amostra para modelagem das incertezas. As simulações, no âmbito da SMC para as opções europeias, consideram apenas as datas de expiração, enquanto, nas americanas, simula-se todo o caminho.

Trata-se de um método numérico computacional que utiliza técnicas de amostragem probabilística<sup>11</sup> das distribuições de probabilidade das variáveis de entrada (*inputs*) através de processos de simulação estocástica, gerando, assim, as variáveis de saída (*outputs*), sendo estas representadas por distribuições de probabilidades, como ilustra a Figura 10. Portanto, a SMC, enquanto metodologia estocástica, é bastante eficaz na valoração das incertezas intrínsecas aos processos estocásticos.

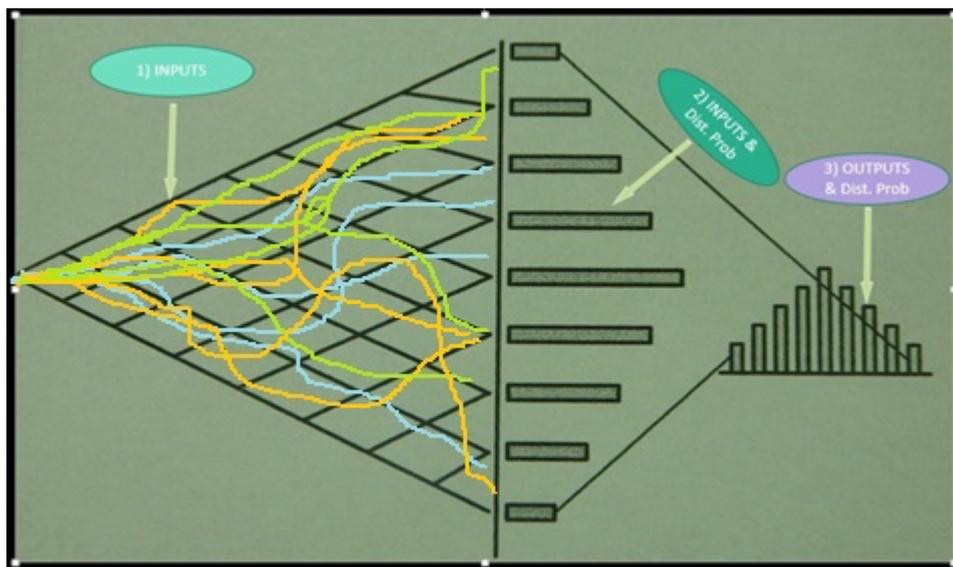


Figura 10 - Inputs, Outputs e Distribuições Probabilísticas.

Fonte: Kodukula e Papudesu (2006), Adaptado.

Existem dois tipos de simulação: a real e a neutra ao risco. Na real, considera-se o processo para, por exemplo, realizar-se estimativas reais de probabilidade para planejamento, enquanto que, para valoração de opções e derivativos, utiliza-se a simulação neutra ao risco (*drift* neutro ao risco = *drift* real – prêmio de risco). Métodos neutros ao risco, geralmente, combinam tanto incertezas técnicas como de mercado em modelos de Opções Reais e apresentam probabilidades teóricas ou artificiais (probabilidades neutras ao risco, que não são as reais, sendo utilizadas para poder se aplicar a taxa livre de risco como taxa de desconto). Neste trabalho, serão aplicadas tanto as simulações reais como as neutras ao risco.

<sup>11</sup>Procedimento em que todos os elementos da População têm uma probabilidade conhecida e superior a zero de integrar a Amostra.

Nesta dissertação e no contexto do MRM, será analisada uma sequência de Opções Reais europeias para avaliação dos melhores caminhos a fim de valorar as flexibilidades em cada data de decisão (todos os meses ao longo de 12 meses).

Para SMC podem ser utilizados *softwares* comerciais. Nesta dissertação, o *software* utilizado para a simulação do estudo de caso é o *@Risk*<sup>12</sup>.

O *@Risk* realiza simulações de forma integrada ao Excel, e possui funcionalidades para geração de números aleatórios, conforme as distribuições de probabilidades específicas a serem estabelecidas para os *inputs*, como mostra a Figura 11.

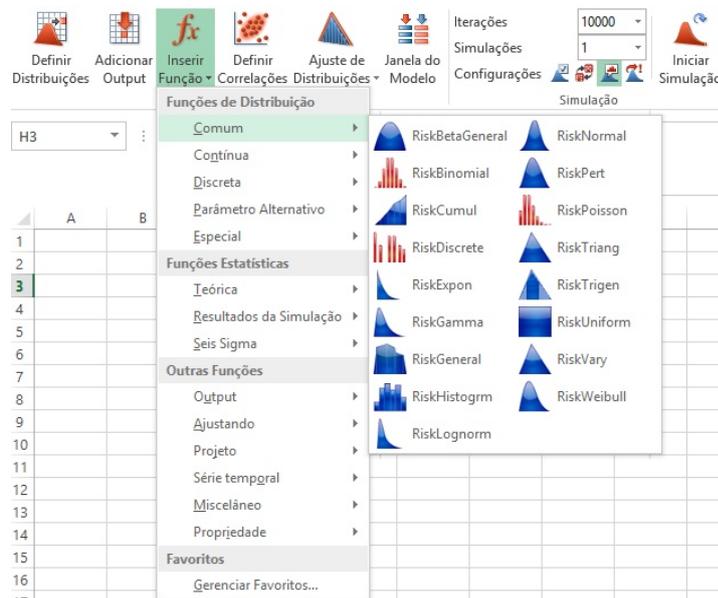


Figura 11 - Inputs e Distribuições Probabilísticas no *@Risk*  
Fonte: Simulador *@Risk* e Excel.

No *@Risk*, a partir da modelagem dos *inputs*, definem-se as fórmulas e as células para os *outputs* (Figura 12):

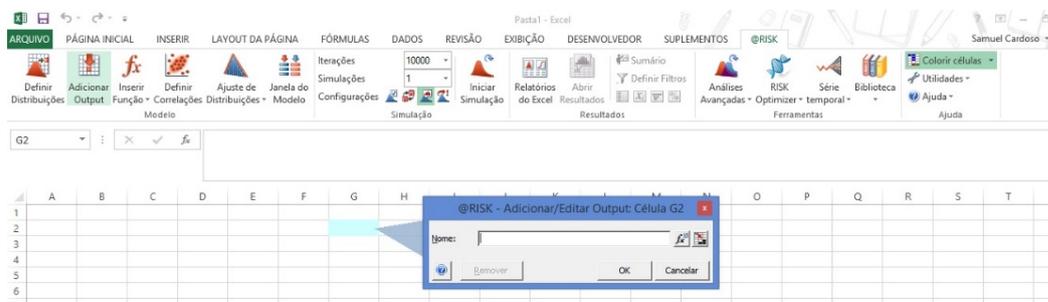


Figura 12 - Células para os Outputs no *@Risk*  
Fonte: Simulador *@Risk* e Excel.

<sup>12</sup> O *@Risk*, *software* produzido pela Palisade, é o *add-in* ou complemento para execução da Simulação de Monte Carlo com o Microsoft Excel.

Após as iterações solicitadas ao @Risk, obtém-se, realizada a simulação, uma distribuição de probabilidades para os *outputs*, como mostra a Figura 13:

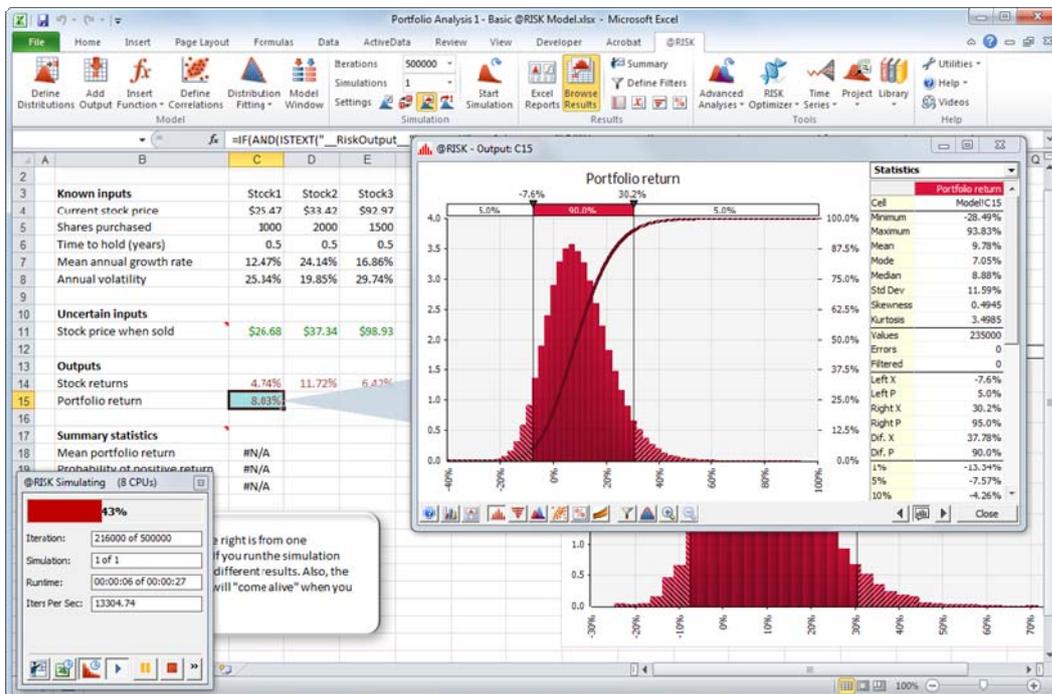


Figura 13 - Outputs e Distribuições Probabilísticas no @Risk

Fonte: <http://www.palisade.com/risk/default.asp>

As distribuições contínuas de probabilidade mais comuns na simulação com @Risk são:

- Distribuição Normal – conhecida também como “curva do sino”. O usuário simplesmente define a média (valor esperado) e um desvio padrão para descrever as variações em relação à média. Os valores no meio, perto da média, são os que apresentam maior probabilidade de ocorrência. A sua variabilidade é controlada pelo desvio padrão. Esta distribuição é simétrica e representa muitos fenômenos naturais. As taxas de inflação podem ser também representadas por este modelo de distribuição.
- Lognormal – nesta distribuição os valores são positivamente assimétricos ou distorcidos; não são simétricos como na distribuição normal. Ela é usada para representar valores que não passam abaixo de zero e que apresentam um potencial positivo ilimitado. É, na verdade, uma exponencial da Normal. Exemplos de variáveis representadas por Distribuições Lognormal: valores de imóveis, preços de ações e reservas petrolíferas.

- Uniforme – nesta distribuição todos os valores têm probabilidade igual de ocorrência; o usuário simplesmente define o mínimo e o máximo. Exemplos de variáveis que poderiam apresentar uma distribuição uniforme: custos de fabricação e receitas de vendas futuras de um novo produto.
- Triangular – o usuário define os valores mínimo, mais provável (moda) e máximo. Os valores ao redor do valor mais provável têm maior probabilidade de ocorrer. Variáveis que poderiam ser representadas por uma distribuição triangular: histórico de vendas passadas, por unidade de tempo, e níveis de estoque.

No *@Risk*, também podem ser utilizadas distribuições discretas de probabilidade. É importante destacar que, através do *@Risk*, é possível criar gráficos de diferentes resultados e suas respectivas probabilidades de ocorrência, comunicando, assim, mais facilmente às partes interessadas por meio de uma interface mais amigável. Pode-se fazer ainda uma correlação entre *inputs*, pois, na SMC com *@Risk*, as relações interdependentes entre as variáveis de *input* podem ser analisadas graficamente. Isto é importante para verificar que, quando determinados fatores sobem, outros também sobem ou caem, de acordo com cada caso.

Conforme Dias (2014), a SMC, aplicada às Opções Reais, apresenta as seguintes etapas:

- Especificação das distribuições de probabilidade dos *inputs*, bem como os seus próprios processos estocásticos;
- Geração de uma amostra aleatória com os *inputs*;
- Realização de operações matemáticas com as amostras dos *inputs* para o cálculo estocástico que irá gerar os *outputs*;
- Repetição dos passos anteriores  $n$  vezes ( $n$  iterações ou recálculos), gerando, assim,  $n$  *outputs*;
- Determinação de propriedades gerais, como a média ou outros parâmetros estocásticos, representativos da distribuição dos *outputs* gerados ao fim do processo de simulação.

Em síntese, as etapas da SMC podem ser esquematizadas na Figura 14, a seguir:

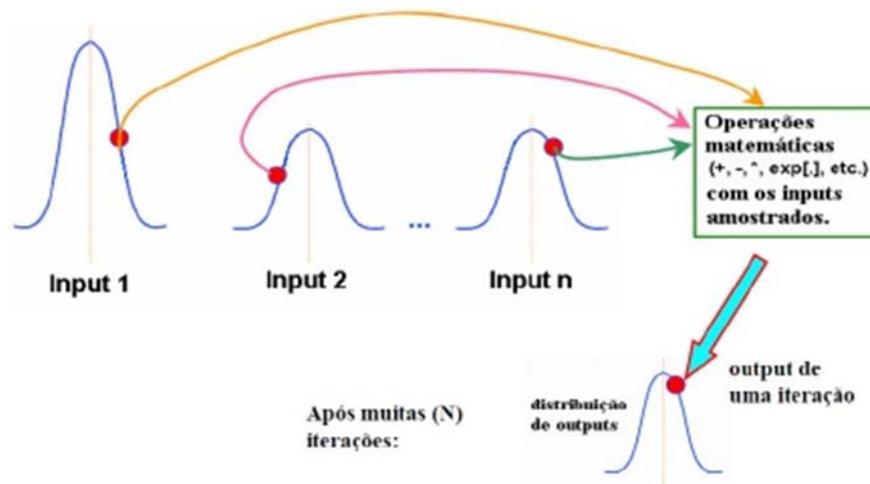


Figura 14 - Esquematização das etapas da SMC.  
Fonte: Dias (2014).

Destaca-se que para valorar as opções por meio da simulação, deve-se obter a equação discretizada do processo estocástico, haja vista que esta equação é representativa do processo e descreve a sua trajetória.

Nesta dissertação será aplicada a SMC para modelagem dos preços da celulose de fibra curta (*short-fiber*) – BHKP. Ressalta-se que as Equações (9 e 11), equações discretas do processo estocástico MRM, serão utilizadas para as simulações deste trabalho.