



**Otavio Kaminski de Oliveira**

**Inversão de perturbações não lineares do  
Laplaciano em domínios gerais com interação  
espectral finita.**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em  
Matemática Aplicada da PUC-Rio como requisito parcial  
para obtenção do grau de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Carlos Tomei

Rio de Janeiro  
Abril de 2016



**Otavio Kaminski de Oliveira**

**Inversão de perturbações não lineares do  
Laplaciano em domínios gerais com interação  
espectral finita.**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Carlos Tomei**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

**Prof. Ricardo José Alonso Plata**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

**Prof. Juliana Abrantes Freire**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

**Prof. José Teixeira Cal Neto**

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UNIRIO

**Prof. Francisco Duarte Moura Neto**

Universidade Estadual do Rio de Janeiro – UERJ

**Prof. Ricardo Soares Leite**

Universidade Estadual do Espírito Santo – UFES

**Prof. Marcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 4 de Abril de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Otavio Kaminski de Oliveira**

Bacharel e Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá-PR.

Ficha Catalográfica

Kaminski, Otavio

Inversão de perturbações não lineares do Laplaciano em domínios gerais com interação espectral finita. / Otavio Kaminski de Oliveira; orientador: Carlos Tomei. – Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2016.

v., 66 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Operadores elípticos semi-lineares. 3. Métodos de continuação. 4. Decomposição de Lyapunov-Schmidt. 5. Multiplicidade espectral. I. Tomei, Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Grau.

CDD: 510

## Agradecimentos

*“Eu tô do teu lado, bicho!”* – Carlos Tomei. Bem podia ser a epígrafe, mas faz mais sentido estar na página de agradecimentos. Não preciso me recordar quantas vezes o Tomei me disse isso pois o motivo de eu ter chegado aqui é justamente esse: ele sempre ficou no meu lado.

A convivência com o Tomei por esses anos todos, para além do aprendizado acadêmico, me foi uma referência em lealdade, generosidade, humanidade e, especialmente no meu caso, muita paciência! Razão pela qual a ele devo (no sentido de dívida) infinita gratidão.

Além do Tomei, algumas pessoas tornaram a vida no Rio de Janeiro possível. Em especial, meu colega de doutorado e irmão mais velho adotivo Alessandro Gaio. Companheiro de todas as horas, me deixou sempre seguro de ter com quem contar. Ainda, muitos outros amigos que o doutorado me deixou para a vida: Eduardo Antonio (Bruxão), o casal Lilian Brambila e Ricardo Paleari e Victor Goulart, amigo fundamental na reta final.

Agradeço o Prof. Ricardo Sá Earp, por ter plantado a ideia de fazer o doutorado na PUC, também os prestativos funcionários do Departamento de Matemática: Creuza, Kátia, Fernanda, Orlando e Otávio.

Também sou grato aos membros da minha banca examinadora, Prof. Nicolau Corção Saldanha, Prof. Ricardo José Alonso Plata, Profa. Juliana Abrantes Freire, Prof. José Teixeira Cal Neto, Prof. Francisco Duarte Moura Neto e Prof. Ricardo Soares Leite que, com muita paciência, comprometeram generosamente seu tempo e conhecimento para avaliar a minha tese.

À minha família em geral pela força e confiança.

Por último, agradeço o CNPq pelo apoio financeiro e à PUC-Rio pela bolsa de isenção de mensalidades do doutorado.



## Resumo

Kaminski, Otavio; Tomei, Carlos. **Inversão de perturbações não lineares do Laplaciano em domínios gerais com interação espectral finita..** Rio de Janeiro, 2016. 66p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Consideramos a análise numérica de perturbações não lineares do Laplaciano definido em regiões limitadas tratáveis pelo Método de Elementos Finitos. Supomos que as não linearidades interagem com  $k$  autovalores do Laplaciano livre. Apresentamos uma redução do problema à inversão de uma função de  $k$  variáveis e delineamos uma técnica para tal. O texto é uma extensão dos trabalhos de Cal Neto, Malta, Saldanha e Tomei.

## Palavras-chave

Operadores elípticos semi-lineares; Métodos de continuação; Decomposição de Lyapunov-Schmidt; Multiplicidade espectral;

## Abstract

Kaminski, Otavio; Tomei, Carlos (Advisor). **Inversion of nonlinear perturbations of the Laplacian in general domains with finite spectral interaction..** Rio de Janeiro, 2016. 66p. PhD Thesis – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We consider the numerical analysis of nonlinear perturbations of the Laplacian defined in limited regions amenable to the Finite Element Method. The nonlinearities are supposed to interact only with  $k$  eigenvalues of the free Laplacian. We present a reduction of the problem to the inversion of a function of  $k$  variables and indicate a technique to do so. The text extends the works by Cal Neto, Malta, Saldanha and Tomei.

## Keywords

Semi-linear elliptic operators; Continuation methods; Lyapunov-Schmidt decomposition; Spectral multiplicity;

# Sumário

1	Introdução	12
2	Geometria dos operadores Flat	16
2.1	Operadores Flat: lençóis e fibras	16
3	Exemplos de operadores Flat	20
3.1	Exemplos em dimensão dois	20
3.1.1	O caso Ambrosetti-Prodi	20
3.1.2	Ressonância: o fim da propriedade	24
3.1.3	Mais autovalores, uma visualização	26
3.2	Perturbações do Laplaciano	28
3.2.1	Fibras unidimensionais	29
3.2.2	Fibras bidimensionais	31
4	Abordagem numérica	34
4.1	A estrutura geral	34
4.2	Andando na horizontal	34
4.2.1	Invertendo $F_v$	35
4.2.2	Configuração dos Elementos Finitos	36
4.2.3	Discretização das projeções	38
4.2.4	Discretização do Operador Estendido	38
4.3	Andando em $V_X$ — invertendo a função altura	41
4.3.1	O inversor de segmentos	41
4.3.2	Estendendo o inversor: além do conjunto crítico	42
4.3.3	Usando o inversor de segmentos para encontrar soluções.	45
5	Simulações numéricas	53
5.1	Um exemplo ainda com oráculo: sementes escolhidas artificialmente	53
5.2	Mesmo exemplo: sementes escolhidas aleatoriamente	55
5.2.1	A primeira solução	55
5.2.2	Encontrando mais soluções: sorteando sementes	56
5.2.3	Variando as soluções-base	57
5.3	Um exemplo mais difícil	59
5.3.1	Interação de tamanho 3	60
5.3.2	Indo além: dimensão 11	63
	Referências bibliográficas	65

## Lista de figuras

2.1	Lençóis são gráficos de função de $W_Y$ em $V_Y$ .	17
2.2	Fibras são gráficos de uma função Lipschitz de $V_X$ em $W_X$ .	18
2.3	No caso Lipschitz, temos fibras como gráfico de função mesmo na decomposição aproximada.	18
2.4	Sem transversalidade, poderíamos ter casos como esse.	19
3.1	Domínio do operador $F$ com $a = 1/2$ e $b = 5/2$ .	21
3.2	Contradomínio do operador $F$ com $a = 1/2$ e $b = 5/2$ .	22
3.3	Fibras $\alpha_{g_1}$ (tracejada) e $\alpha_{g_2}$ (pontilhada) à esquerda. Subespaços verticais afins à direita.	23
3.4	Funções altura para $\alpha_{g_1}$ (tracejado) e $\alpha_{g_2}$ (pontilhado).	23
3.5	Domínio de $F$ com $a = \lambda_1 = 1$ e $b = 5/2$ .	24
3.6	O contra-domínio.	25
3.7	Funções altura para $\alpha_{g_1}$ (tracejado) e $\alpha_{g_2}$ (pontilhado). Pontos no contra-domínio com altura zero possuem uma infinidade de pré-imagens.	26
3.8	Domínio de $F$ com $a = 1/2 < \lambda_1$ e $b = 7/2 > \lambda_2$ .	27
3.9	Seu contradomínio.	27
3.10	Aberto $\Omega$ e sua aproximação por elementos triangulares.	28
3.11	Gráfico de $f'$ . A interação se dá com o terceiro autovalores de $-\Delta$ e nenhum outro.	29
3.12	Função altura $h$ (azul) e nível de $g$ (verde) revelando 3 soluções para $F(u) = g$ .	30
3.13	Em ordem, as soluções $u_1$ , $u_2$ e $u_3$ .	31
3.14	Gráfico de $f'$ e os 3 primeiros autovalores de $-\Delta$ .	32
3.15	Imagens (direita) pela função altura de circunferências concêntricas (esquerda).	32
3.16	Aproximação do conjunto crítico.	33
4.1	Procuramos a interseção do subespaço afim $W_X + v$ com a fibra $\alpha_g$ .	35
4.2	Invertendo dois segmentos: uma inversão completa, outra não.	42
4.3	Exemplo em $\mathbb{R}^2$ .	43
4.4	Inversão do segmento de $h(x_1)$ a $b$ se aproxima do conjunto crítico, encontra um ponto crítico (estrela) e um ponto além do crítico (losango), uma isca.	44
4.5	Outra inversão, outra pré-imagem $\tilde{x}_1$ de $h(x_1)$ .	45
4.6	A estrela à direita é imagem da curva maior do conjunto crítico.	46
4.7	Imagem da curva menor ampliada; ao centro, $b$ .	46
4.8	Inversão de $h(x_s) \mapsto b$ resultando numa primeira solução $b_1$ .	47
4.9	Apesar da inversão de $b \mapsto h(x_1)$ não ter tido o sucesso que esperávamos, pudemos usar $x_1$ como semente, encontrando mais uma solução.	47
4.10	Inversão de $h(x_2) \mapsto b$ resultando em nova solução $b_3$ .	48
4.11	Fluxograma do procedimento.	49
4.12	As nove pré-imagens de $b$ no domínio de $h$ .	50

4.13	Imagem de $h$ .	50
4.14	Detalhe no domínio.	51
4.15	Detalhe no imagem.	51
4.16	A flor $h^{-1}(h(C))$ .	52
5.1	Prospecção do conjunto crítico.	53
5.2	Quatro soluções encontradas com três dados iniciais.	54
5.3	Gráficos das soluções $b_1, b_2, b_3$ e $b_4$ (na ordem).	54
5.4	Como dado inicial aleatório (bolinha), encontramos a primeira solução (estrela).	56
5.5	Dados iniciais e suas imagens (bolinhas), encontramos mais duas soluções (estrelas) e um ponto crítico (losango)	57
5.6	<i>Nenhuma solução nova.</i>	58
5.7	Nova pré-imagem encontrada	58
5.8	Triangularização para $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ .	60
5.9	Gráfico de $\tilde{f}'$ . Interação acontece com os 3 primeiros autovalores de $-\Delta$ .	61
5.10	Gráficos das soluções $u_1, u_2, u_3$ e $u_4$ (estão nessa ordem).	62
5.11	Níveis das funções $u_1, u_2, u_3$ e $u_4$ (mesma ordem).	63
5.12	Gráfico de $\tilde{f}'$ . Interação acontece com os 3 primeiros autovalores de $-\Delta$ .	64

## Lista de tabelas

3.1	Dados do fsolve.	30
3.2	Erros relativos para cada solução na norma $L^2$ .	31
4.1	Sumário do processo.	52
5.1	Erros relativos para cada solução na norma $L^2$ .	55
5.2	Os doze primeiros autovalores de $-\Delta$ .	60
5.3	Erros relativos na norma $L^2$ com respeito a $\tilde{F}$ e a $F$ .	63
5.4	Erros relativos na norma $L^2$ com respeito a $\tilde{F}$ e a $F$ .	64

*Se o que deixar escrito no livro dos viajantes  
puder, relido um dia por outros, entretê-los  
também na passagem, será bem. Se não o  
lerem, nem se entretiverem, será bem também.*

**Fernando Pessoa**, *Livro do Desassossego*.

# 1

## Introdução

Nesse texto, consideramos um método numérico para uma equação diferencial parcial bastante especial. Como veremos, por outro lado, o método é bastante diferente das técnicas habituais, consistindo numa justaposição de ideias em (1) e (2) apropriadamente estendidas.

O conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto, conexo e limitado com fronteira suave, mas os argumentos se aplicam também para fronteiras suaves por partes, como caixas. No domínio, o operador Laplaciano  $-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  é bem definido (no sentido fraco), auto-adjunto com espectro pontual  $\sigma(-\Delta)$  dado pelos autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \rightarrow +\infty$$

associados a um sistema ortonormal completo  $\{\varphi_k\}$ . A escolha de domínio embute a condição de Dirichlet.

Para uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com hipóteses descritas abaixo, considere

$$\begin{aligned} F : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto -\Delta u - f(u). \end{aligned}$$

Estamos interessados em não linearidades  $f$  de *interação espectral finita*, isto é,  $\overline{f'(\mathbb{R})}$  só contém um número finito de autovalores de  $-\Delta$ . Queremos contar e aproximar as soluções do problema de Dirichlet não linear  $F(u) = g$ .

Vários resultados teóricos sobre esse operador são conhecidos para diferentes hipóteses sobre a função  $f$ . Para  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , Dolph (3) e Hammerstein (4) mostraram que  $F$  é um difeomorfismo caso  $\overline{f'(\mathbb{R})}$  não contenha qualquer autovalor de  $-\Delta$ . Com a convexidade estrita de  $f$  e supondo que  $f'(\mathbb{R})$  contém *apenas*  $\lambda_1$ , Ambrosetti e Prodi (5) mostraram que a equação  $F(u) = g$  admite 0, 1 ou 2 soluções. Sob essas hipóteses,  $F$  ganha o nome de operador de Ambrosetti-Prodi.

Berger e Podolak (6) apresentaram uma descrição geométrica do operador de Ambrosetti-Prodi. Para começar,  $F$  admite uma decomposição de Lyapunov-Schmidt global, aqui apresentada no Capítulo 2. De forma simplificada, é possível decompor domínio e contradomínio em um espaço de dimensão



1 (chamado vertical) e seus respectivos complementos ortogonais (horizontais) de tal maneira que a função  $F$  restrita a cada subespaço afim horizontal do domínio é inversível. Resta a análise do comportamento de  $F$  restrita às inversões dos subespaços verticais afins (as fibras), um problema unidimensional. Após mudanças globais de variáveis, tanto no domínio quanto no contradomínio, a função  $F$  ganha a forma  $(t, s) \mapsto (-t^2, s)$ , onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $s$  pertence a um espaço de Hilbert apropriado.

Tal apresentação geométrica permitiu avanços nas seguintes direções:

- O uso da técnica da decomposição para outros operadores não lineares, mas que compartilham uma mesma característica, que chamamos *flatness*, descrita no capítulo 2. No capítulo 3, consideramos vários exemplos em que  $F$  está definida em dimensão finita, bastante esclarecedores.
- Um método numérico que reduz a solução do problema original a um problema em dimensão finita, inicialmente esboçado em (7) e apropriadamente formulado e implementado parcialmente em (1).

O algoritmo apresentado em (1), um protótipo, considerava apenas regiões retangulares. O novo algoritmo foi expandido para levar em conta as seguintes possibilidades:

1. A região  $\Omega$  não precisa mais ser um retângulo em  $\mathbb{R}^2$ , mas qualquer região do  $\mathbb{R}^N$  no qual seja possível realizar análise numérica por Elementos Finitos;
2. O conjunto  $\overline{f'(\mathbb{R})}$  pode interceptar  $\sigma(-\Delta)$  em conjuntos finitos;
3. Para fibras de dimensão maior que um (o que ocorre quando  $\overline{f'(\mathbb{R})}$  contém mais de um  $\lambda_k$ ), é sugerida (implementada e testada) uma técnica para encontrar diversas soluções do problema original.

Apesar de termos à nossa disposição o algoritmo já desenvolvido em (1), toda a implementação foi feita a partir do zero, o que resultou em diferenças substanciais em quase todos os aspectos. Em particular, a construção das várias matrizes associadas à discretização de objetos importantes para a solução por elementos finitos foi redesenhada para permitir expansões e ganhar desempenho.

No nível teórico, a hipótese de suavidade foi removida por Zaccur, que supôs  $f$  apenas Lipschitz e obteve resultados semelhantes ao caso suave em (8). Não linearidades do tipo linear por partes agora podem ser consideradas também numericamente, com a implementação disponível: a única diferença

reside em trocar certos processos de continuação que empregam o método de Newton por métodos iterativos associados a contrações.

O trabalho de Malta, Saldanha e Tomei (7) deu origem a um robusto software para a inversão de funções do plano no plano, um programa chamado  $2 \times 2$  (acessível na página de Humberto Bortolossi, da UFF: <http://www.im-uff.mat.br/puc-rio/2x2>). Tal algoritmo, porém, exige a limitação do conjunto crítico, hipótese não presente no caso Ambrosetti-Prodi, além de aproveitar-se que, em dimensão dois o conjunto crítico é a união de curvas, que podem ser adequadamente representadas por listas de pontos. Algo assim não é permissível já em dimensão três. Mais ainda, em dimensão alta, o estudo detalhado das singularidades genéricas que se faz no  $2 \times 2$  é impensável. Em vez disso, nesse texto sugerimos uma alternativa humilde em comparação com o algoritmo em dimensão dois, mas que frequentemente obtém um conjunto satisfatório de soluções.

Em poucas palavras, o algoritmo usa uma técnica de inversão por continuação que leva em conta a eventual interação com pontos críticos. Se por um lado um evento desse tipo habitualmente interrompe a continuação por inversão, por outro, através de uma técnica local de continuação além do ponto crítico frequentemente encontramos outras soluções para o problema. A técnica é ilustrada em exemplos de dimensão dois, inicialmente, para os quais a visualização pode comparar resultados do programa  $2 \times 2$  com os obtidos pelo algoritmo desse texto.

É claro que o algoritmo não assegura a obtenção de todas as soluções. Mas frequentemente estamos interessados na possibilidade de superar um número mínimo de natureza especulativa. Em (12), os autores mostraram que certo problema no quadrado de fato tinha quatro soluções conjecturadas por argumentos teóricos. No Capítulo 5, o algoritmo reencontra essas quatro soluções.

A abordagem numérica sugere uma bifurcação conceitual. Seja  $p$  um polinômio real de grau seis — que hipóteses nos coeficientes garantem que ele tem todas as suas raízes reais, ou tem quatro raízes reais? A resposta de problemas desse tipo, quando existe de forma fechada, é dada por expressões simbólicas muito longas. Por outro lado, dado um polinômio, uma plotagem razoável de seu gráfico já oferece informação sobre o posicionamento das raízes. Mesmo se houvesse fórmulas para as raízes de um polinômio de grau 6, dificilmente um *software* se preocuparia em usá-las. Existem fórmulas para grau 4 e já não são usadas. Algo parecido acontece em relação aos operadores diferenciais sendo considerados: em vez de limitar-se a hipóteses estritas sobre as não linearidades — como é o caso do enunciado do teorema de Ambrosetti-

Prodi — a análise numérica sobre as fibras permite muitas vezes contar (e obter!) as soluções para uma equação diferencial parcial.

Todo material necessário para reprodução dos resultados obtidos nessa tese, incluindo códigos e documentação, está disponível em <https://goo.gl/m9Ic6S>.

## 2

## Geometria dos operadores Flat

Neste capítulo, vamos introduzir os elementos básicos que sustentam os resultados que seguirão: a decomposição de Lyapunov-Schmidt, da qual obtemos a existência de lençóis e fibras e *flatness*.

### 2.1

#### Operadores Flat: lençóis e fibras

No que segue,  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach com normas  $\|\cdot\|_X$  e  $\|\cdot\|_Y$  respectivamente. Considere uma decomposição dos espaços  $X$  e  $Y$  com as seguintes propriedades.

- $X = W_X \oplus V_X$  e  $Y = W_Y \oplus V_Y$ ;
- $\dim V_X = \dim V_Y = k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

Os subespaços fechados  $W_X$  e  $W_Y$  serão chamados de *horizontais* enquanto  $V_X$  e  $V_Y$  serão chamados de subespaços *verticais*.

Ficam definidos também os operadores de projeção, necessariamente contínuos pelo teorema do gráfico fechado:

$$\begin{array}{ccc} P_X : W_X \oplus V_X & \longrightarrow & W_X \\ w + v & \longmapsto & w \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P_Y : W_Y \oplus V_Y & \longrightarrow & W_Y \\ w + v & \longmapsto & w \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Q_X : W_X \oplus V_X & \longrightarrow & V_X \\ w + v & \longmapsto & v \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q_Y : W_Y \oplus V_Y & \longrightarrow & V_Y \\ w + v & \longmapsto & v \end{array}$$

Considere uma função  $F : X \longrightarrow Y$ , as respectivas decomposições para  $X$  e  $Y$ , e fixe  $v \in V_X$ . Definimos a *restrição projetada*

$$\begin{array}{ccc} F_v : W_X & \longrightarrow & W_Y \\ w & \longmapsto & P_Y F(w + v). \end{array}$$

**Definição 2.1 (Flatness)** *Seja  $F : X \longrightarrow Y$  uma função Lipschitz. Dizemos que  $F$  é flat se a restrição projetada  $F_v$  é um homeomorfismo bi-Lipschitz para toda escolha de  $v \in V_X$ .*

Por “bi-Lipschitz”, entendemos “Lipschitz com inversa também Lipschitz”.

Em (1), *flatness* é definida no contexto suave: o operador é *flat* se  $F$  é de classe  $C^1$  e  $F_v$  é um difeomorfismo para todo  $v \in V_X$ . A suavidade é explorada numericamente em métodos de continuação, através do método de Newton (um pouco arriscado, no sentido que convergência só é assegurada teoricamente na classe  $C^2$ ). O que nos motiva a definir de forma diferente é o trabalho de Zaccur (8), no qual o teorema de Ambrosetti-Prodi foi estudado no contexto Lipschitz. Embora o método de Newton não esteja disponível nesse caso, a dificuldade se contorna usando técnicas associadas a contrações de Banach. Ainda para o caso Ambrosetti-Prodi, o artigo (8) mostra que as constantes de Lipschitz independem de  $v \in V_X$ . Resultado análogo foi obtido em (1) para interação espectral finita (essencialmente, o fato que  $V_X$  e  $V_Y$  são de mesma dimensão finita): as derivadas  $F'_v$  são uniformemente limitadas inferiormente. Tais resultados, embora relevantes, não são uma necessidade do ponto de vista numérico, ainda que contribuem para a estabilidade dos métodos.

O fato de cada  $F_v$  ser um homeomorfismo implica que a imagem por  $F$  de um subespaço horizontal afim  $W_X + v$  é gráfico de uma função de  $W_Y$  em  $V_Y$ . A esse conjunto  $F(W_X + v)$  é dado o nome de *lençol*.

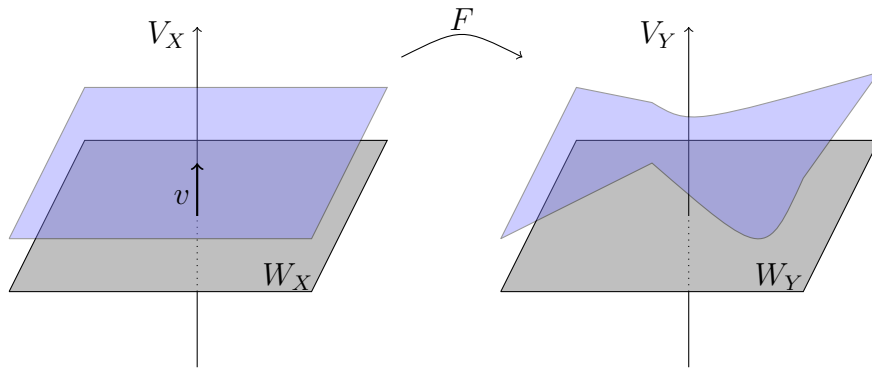


Figura 2.1: Lençóis são gráficos de função de  $W_Y$  em  $V_Y$ .

Dado  $g \in Y$ , ao conjunto  $\alpha_g = F^{-1}(g + V_Y)$  damos o nome de *fibra* associada a  $g$ . Note a fibra  $\alpha_g$  é igual à fibra  $\alpha_z$  para qualquer  $z \in g + V_Y$ . Numericamente, convém definir a fibra por  $g$  usando sua projeção  $g_W = P_Y(g)$ .

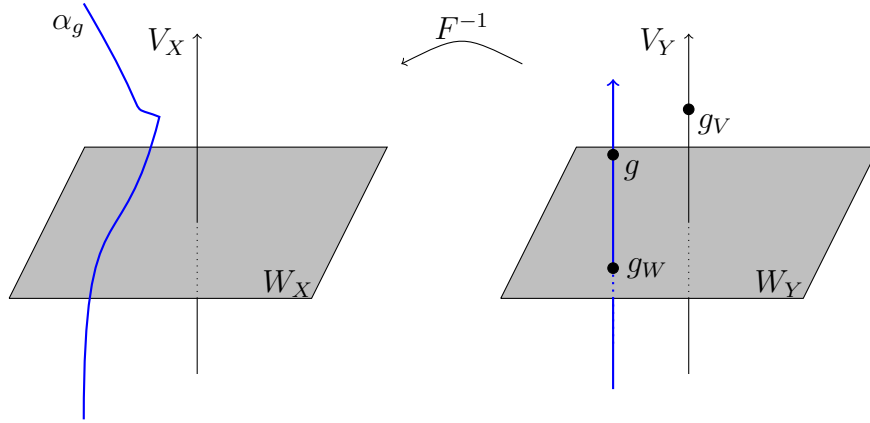


Figura 2.2: Fibras são gráficos de uma função Lipschitz de  $V_X$  em  $W_X$ .

Cada fibra intersecta cada subespaço horizontal afim apenas uma vez (caso contrário,  $F_v$  não seria injetiva). Mais, cada fibra é gráfico de uma função Lipschitz  $\alpha : V_X \rightarrow W_X$ , conforme mostrado em (8).

Fibras são transversais aos subespaços afins mesmo na falta de vetor tangente à fibra, de forma bastante forte: a hipótese Lipschitz ainda garante que a fibra está dentro de um cone de amplitude fixa em todo  $X$  com vértice na interseção. Essa transversalidade assegura a estabilidade do método numérico aqui apresentado. Afinal, trabalharemos sempre com decomposições aproximadas dos espaços  $X$  e  $Y$ , tracejado na figura 2.3, obtidas por aproximações com elementos finitos: na falta dessa propriedade, não poderíamos garantir que  $\alpha_g$  continua gráfico de uma função na decomposição aproximada. Na figura 2.4, a curva  $\alpha_g$  (vermelho) é gráfico de função para a decomposição teórica, mas deixa de ser na aproximada.

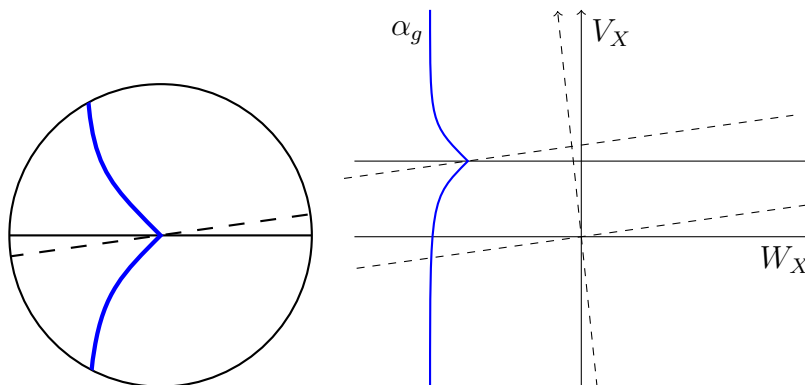


Figura 2.3: No caso Lipschitz, temos fibras como gráfico de função mesmo na decomposição aproximada.

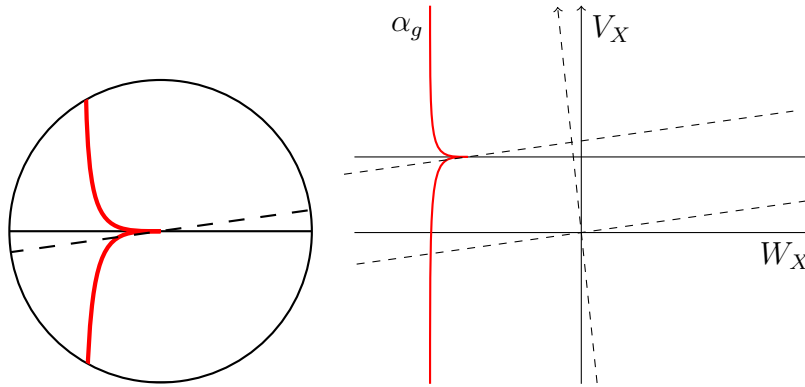


Figura 2.4: Sem transversalidade, poderíamos ter casos como esse.

Fixada uma fibra, fica bem definida a *função altura*

$$\begin{aligned} h : V_X &\longrightarrow V_Y \\ v &\longmapsto Q_Y F(\alpha(v) + v). \end{aligned}$$

O estudo dessas funções altura é o coração da análise numérica que será apresentada mais adiante.

A essa altura, é claro que  $F$  se restringe a cada fibra, mais precisamente,  $F$  é a justaposição de funções  $F_g : \alpha_g \sim \mathbb{R}^n \rightarrow V_Y + g \sim \mathbb{R}^n$ . O problema original de resolver  $F(u) = g$  em princípio se reduz à inversão de uma função entre espaços de dimensão finita. A análise numérica associada é descrita no Capítulo 4.

### 3

## Exemplos de operadores Flat

A maneira mais elementar de construir operadores *flat* é considerar um operador do tipo  $L + N$ , sendo  $L$  linear com espectro pontual e  $N$  não linear interagindo com uma quantidade finita de autovalores de  $L$ . As duas seções seguinte trazem exemplos disso, primeiro em dimensão dois, depois em dimensão infinita.

### 3.1

#### Exemplos em dimensão dois

Vamos apresentar um protótipo de operador *flat* com  $X = Y = \mathbb{R}^2$ . Considere o operador abaixo, que representa a discretização da segunda derivada por diferenças finitas,

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

Tal  $A$  é inversível, tem por autovalores  $\lambda_1 = 1$ , associado ao autoespaço  $\text{span}\{(1, 1)\}$ , e  $\lambda_2 = 3$ , associado ao autoespaço  $\text{span}\{(-1, 1)\}$ .

Considere também a função linear por partes

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} ax & \text{se } x \leq 0 \\ bx & \text{se } x \geq 0 \end{cases} .$$

#### 3.1.1

##### O caso Ambrosetti-Prodi

**Proposição 3.1** Considere  $a < \lambda_1 < b < \lambda_2$ . Para a decomposição  $V_X = V_Y = \text{span}\{(1, 1)\}$  e  $W_X = W_Y = \text{span}\{(-1, 1)\}$  o operador

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f(x) \\ f(y) \end{bmatrix}$$

é *flat*.



O resultado segue do argumento de contração apresentado para operadores do tipo de Ambrosetti-Prodi em (8).

Tal  $F$  é linear em cada quadrante do  $\mathbb{R}^2$  e a colagem ao longo dos eixos é contínua. Tomemos  $a = 1/2$  e  $b = 5/2$ . Representamos o domínio de  $F$  na figura 3.1. Temos a indicação do sinal do determinante de  $F$  em cada quadrante. Tais quadrantes estão caracterizados por uma cor diferente no disco unitário. Os semi-eixos que separam quadrantes de sinais diferentes (em preto) fazem o papel de conjunto crítico. Os demais semi-eixos estão também destacados (tracejado colorido).

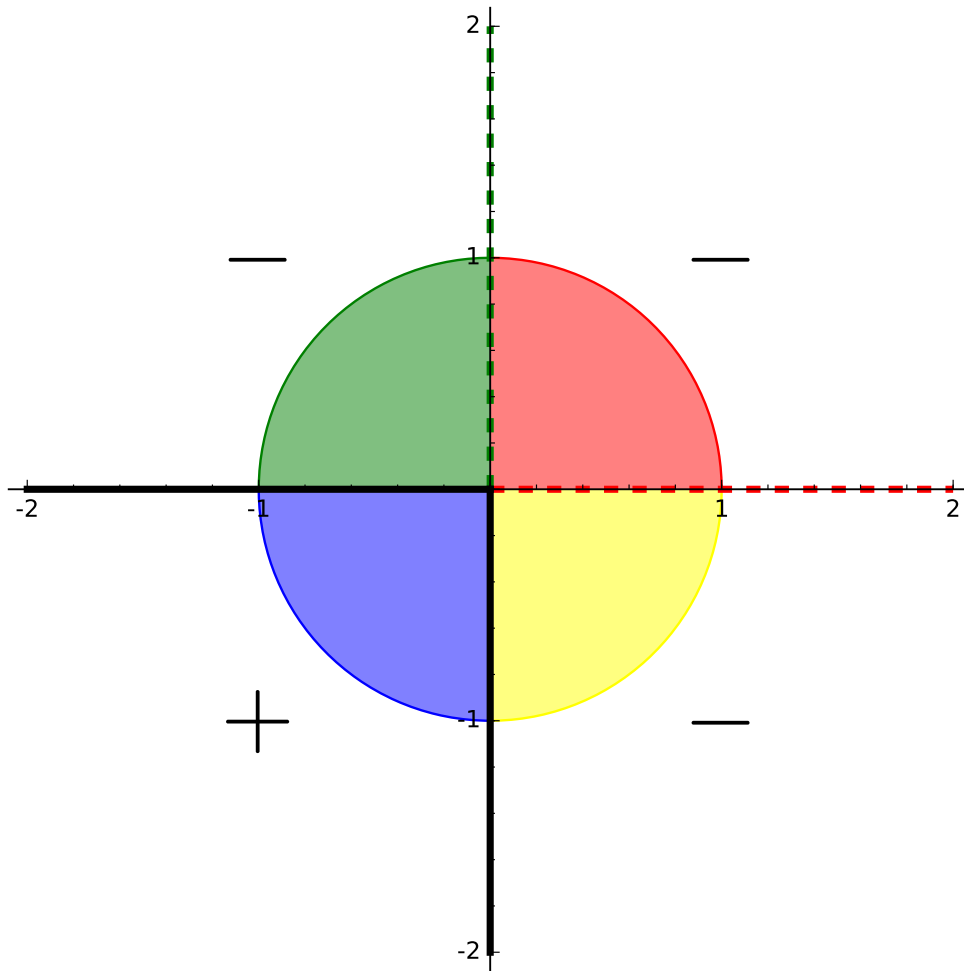


Figura 3.1: Domínio do operador  $F$  com  $a = 1/2$  e  $b = 5/2$ .

A figura que segue (fig. 3.2), traz as imagens por  $F$  dos elementos da figura anterior: os semi-eixos (críticos ou não) e, principalmente, as imagens dos setores circulares que representam cada quadrante.

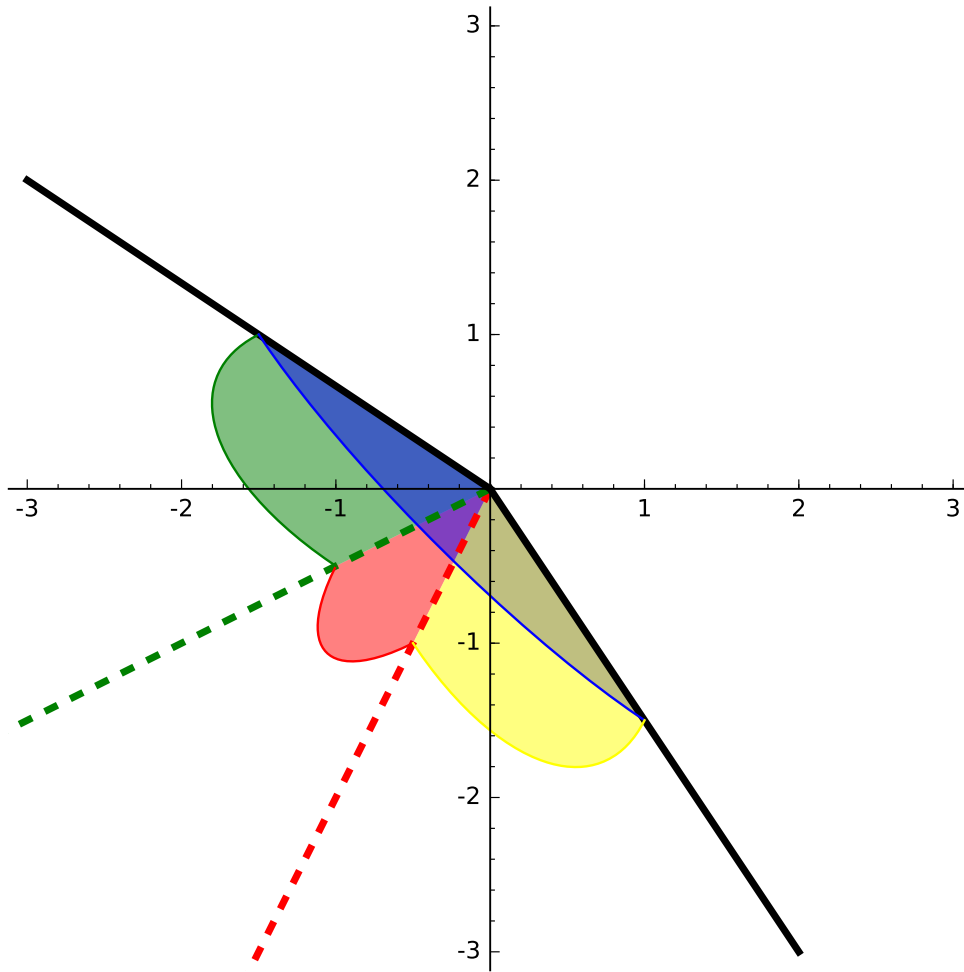


Figura 3.2: Contradomínio do operador  $F$  com  $a = 1/2$  e  $b = 5/2$ .

É possível deduzir pela sobreposição de cores na imagem (azul sobre as demais) a contagem de pré-imagens, que aliás é prevista pelo teorema de Ambrosetti-Prodi: zero para pontos acima dos raios pretos, uma para pontos sobre os raios e duas para pontos abaixo dos raios. Nesse último caso, é ainda possível identificar a quais quadrantes pertencem as duas pré-imagens.

Dados dois pontos  $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^2$ , temos representado na figura 3.3 (direita) os subespaços verticais afins passando por eles. As respectivas fibras  $\alpha_{g_1}$  (tracejada) e  $\alpha_{g_2}$  (pontilhada) aparecem à esquerda. O comportamento assintótico das fibras, paralelo ao autoespaço  $V_X$ , também é previsto pela teoria.

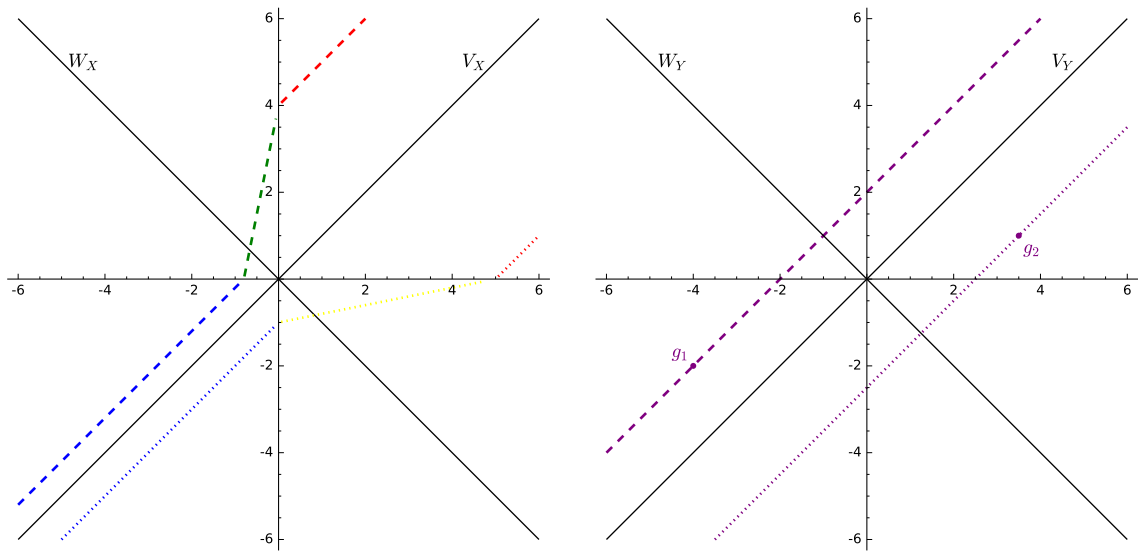


Figura 3.3: Fibras  $\alpha_{g_1}$  (tracejada) e  $\alpha_{g_2}$  (pontinhada) à esquerda. Subespaços verticais afins à direita.

As funções altura respectivas às fibras  $\alpha_{g_1}$  (tracejado) e  $\alpha_{g_2}$  (pontilhado; aliás ambas são muito parecidas) estão representadas na figura a seguir, junto com os níveis de  $g_1$  e  $g_2$ . Podemos ver que  $g_1$  tem duas pré-imagens por  $F$ , enquanto  $g_2$  não possui qualquer pré-imagem.

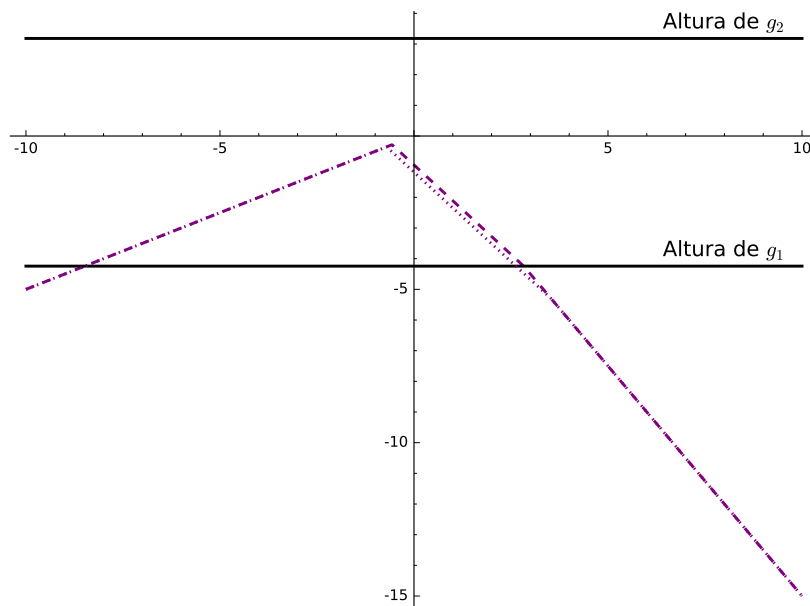


Figura 3.4: Funções altura para  $\alpha_{g_1}$  (tracejado) e  $\alpha_{g_2}$  (pontilhado).

## 3.1.2

**Ressonância: o fim da propriedade**

O exemplo seguinte tem os mesmos parâmetros do exemplo da subseção anterior exceto pelo valor de  $a = \lambda_1 = 1$ , que agora coincide com um autovalor de  $A$ . Isso faz com que o determinante de  $F$  no terceiro quadrante seja nulo:

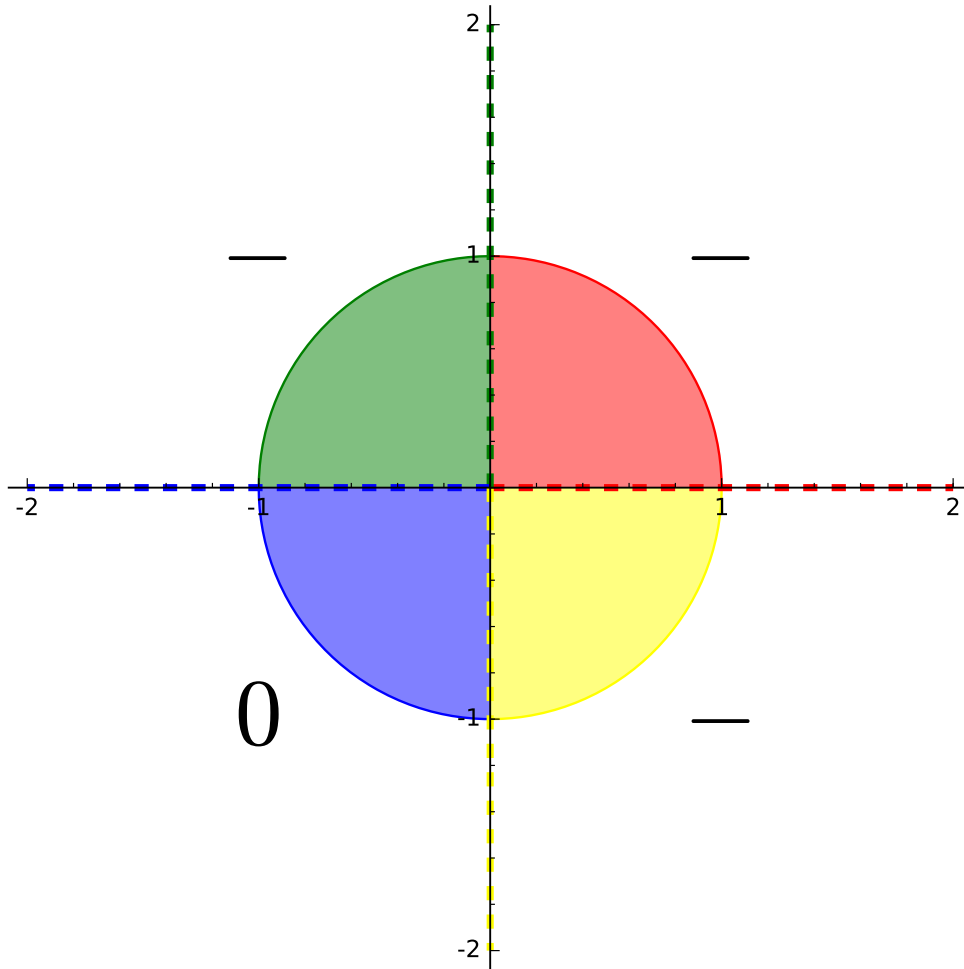


Figura 3.5: Domínio de  $F$  com  $a = \lambda_1 = 1$  e  $b = 5/2$ .

O operador  $F$  deixa de ser próprio: uma semi-reta do terceiro quadrante vai a zero.

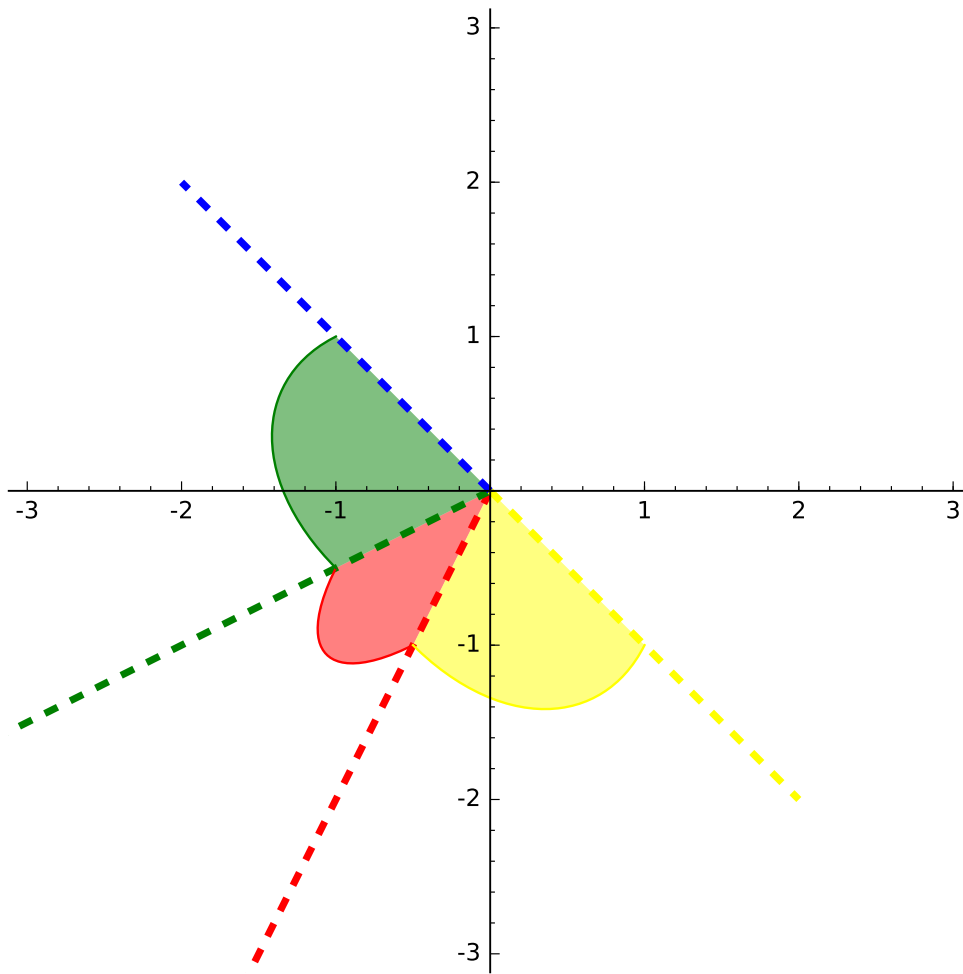


Figura 3.6: O contra-domínio.

A contagem agora é outra: os pontos nas semi-retas azul e amarela têm infinitas pré-imagens. Os restantes têm uma ou zero.

Para os mesmos  $g_1$  e  $g_2$  do exemplo anterior, as fibras são as mesmas. Agora, entretanto, os dois trechos das fibras próximos a infinito estão alinhados com vetores que vão a zero por  $F$  — isso faz cada trecho seja levado a um ponto só por  $F$ . A figura 3.7 mostra os gráficos das funções altura relativos aos mesmo pontos  $g_1$  (tracejado) e  $g_2$  (pontilhado) do exemplo anterior.

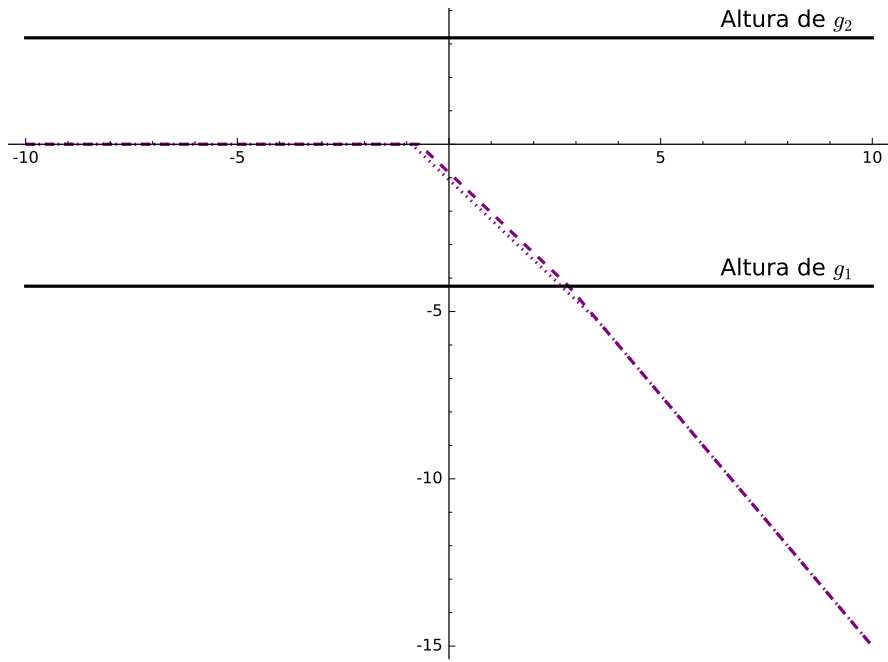


Figura 3.7: Funções altura para  $\alpha_{g_1}$  (tracejado) e  $\alpha_{g_2}$  (pontilhado). Pontos no contra-domínio com altura zero possuem uma infinidade de pré-imagens.

A imagem por  $F$  do terceiro quadrante é  $W_Y$ , que tem altura zero.

### 3.1.3

#### Mais autovalores, uma visualização

O que acontece se  $f$  interage com os dois autovalores de  $A$ ? Nesse caso, a decomposição de Lyapunov-Schmidt é trivial ( $\mathbb{R}^2 \oplus \{\mathbf{0}\}$ ) e não temos fibras. Ainda assim, é interessante observar o efeito de uma interação mais forte com o espectro. A figura 3.8 mostra, com a distribuição dos sinais dos determinantes de  $F$ , que todos os semi-eixos são críticos. O efeito disso fica claro na representação do contra-domínio na figura 3.9. Um movimento circular ao redor da origem no domínio troca de orientação na imagem cada vez que cruza um dos eixos. Assim, há uma região cujos pontos têm zero pré-imagens, duas regiões com duas pré-imagens e uma região com quatro pré-imagens. Naturalmente, pontos sobre os raios em preto têm uma ou três pré-imagens.

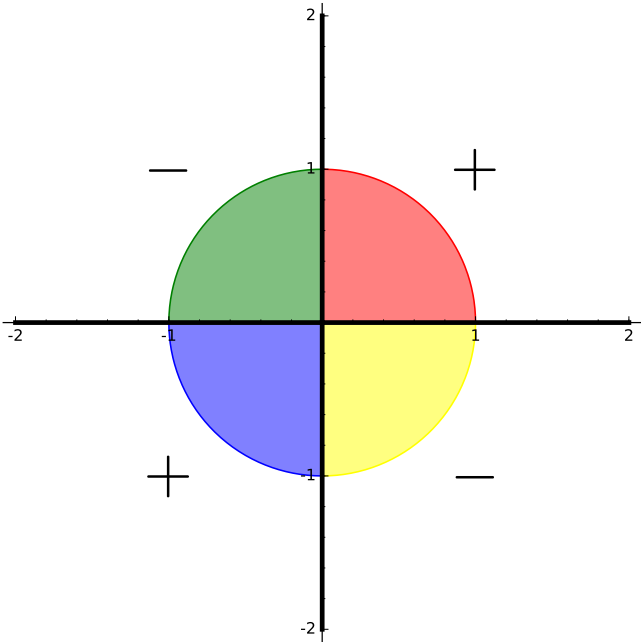


Figura 3.8: Domínio de  $F$  com  $a = 1/2 < \lambda_1$  e  $b = 7/2 > \lambda_2$ .

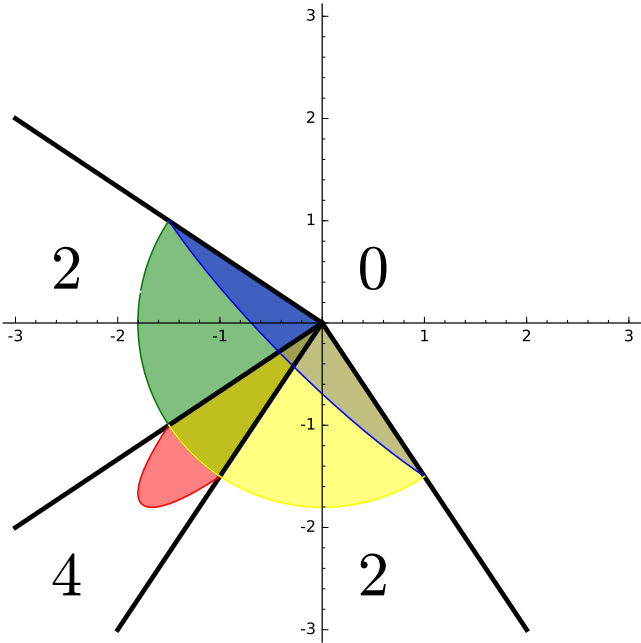


Figura 3.9: Seu contradomínio.

### 3.2

#### Perturbações do Laplaciano

Nessa seção, voltamos à situação descrita na Introdução. Tomamos  $X = H_0^1(\Omega)$  e  $Y = H^{-1}(\Omega)$ . O conjunto  $\Omega$  é um aberto limitado do  $\mathbb{R}^N$  tal que o operador Laplaciano  $-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  esteja bem definido (no sentido fraco), seja inversível e tenha espectro pontual com autovalores formando uma sequência  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \lambda_k \rightarrow \infty$ .

Considere a função

$$\begin{aligned} F : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto -\Delta u - f(u), \end{aligned}$$

no qual  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável e  $\overline{f'(\mathbb{R})}$  contém os autovalores  $\lambda_i \leq \lambda_{i+1} \leq \dots \leq \lambda_{i+k}$ . Denotando  $V_{\lambda_i} = \mathbf{Nuc}(-\Delta - \lambda_i \text{Id})$ , a função  $F$  é *flat* ((1)) tomando os subespaços verticais  $V_X = V_Y = V_{\lambda_i} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_{i+k}}$  e horizontais  $W_X = V_X^\perp$  e  $W_Y = V_Y^\perp$ . As funções altura estão definidas de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  com  $n = \dim(V_X)$ .

O aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é a elipse representada na figura 3.10. Os subespaços horizontais tem dimensão infinita e por isso, para tratamento numérico, serão emulados segundo o método de elementos finitos (detalhes em (9)). Para tanto, a região  $\Omega$  é aproximada por triângulos, como também ilustra a figura. Os quatro primeiros autovalores de  $-\Delta$  para essa região são simples. Daremos exemplos para  $n = 1$  e  $n = 2$ .

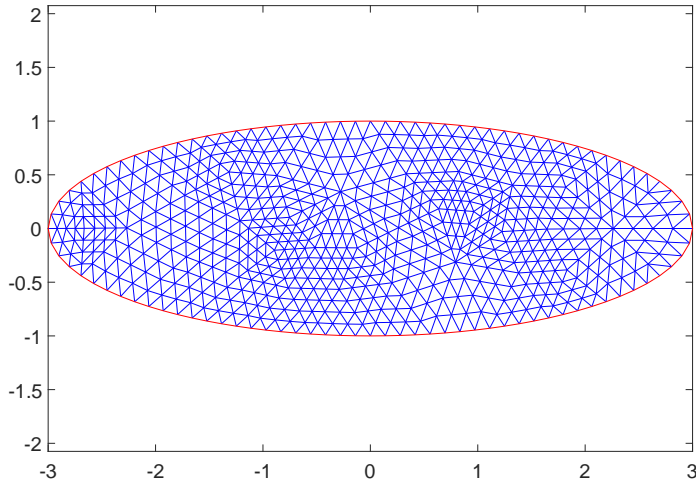


Figura 3.10: Aberto  $\Omega$  e sua aproximação por elementos triangulares.



### 3.2.1

#### Fibras unidimensionais

O operador é  $F(u) = -\Delta u - f(u)$  no qual  $\overline{f'(\mathbb{R})}$  contém o terceiro autovalor do Laplaciano negativo, conforme a figura 3.11. A função  $f'(x)$  é da forma  $f'(x) = c + d \arctan(x)$  para constantes  $c$  e  $d$  que ajustam os valores assintóticos desejados.

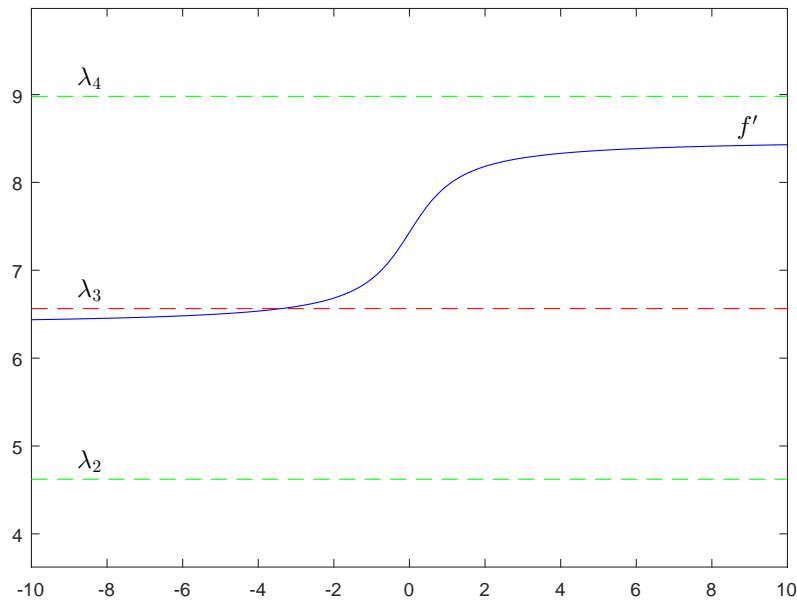


Figura 3.11: Gráfico de  $f'$ . A interação se dá com o terceiro autovalores de  $-\Delta$  e nenhum outro.

Considerando  $\varphi_i$  a autofunção (normalizada em  $Y$ ) de  $-\Delta$  associada ao autovalor  $\lambda_i$ , procuramos soluções de  $F(u) = g = 20\varphi_3 - 100\varphi_2 + 900\varphi_1$ . A função altura  $h$  associada a tal lado direito está representada na figura 3.12 junto com o nível de  $g$ , que é 20, revelando a existência de 3 soluções nesse intervalo.

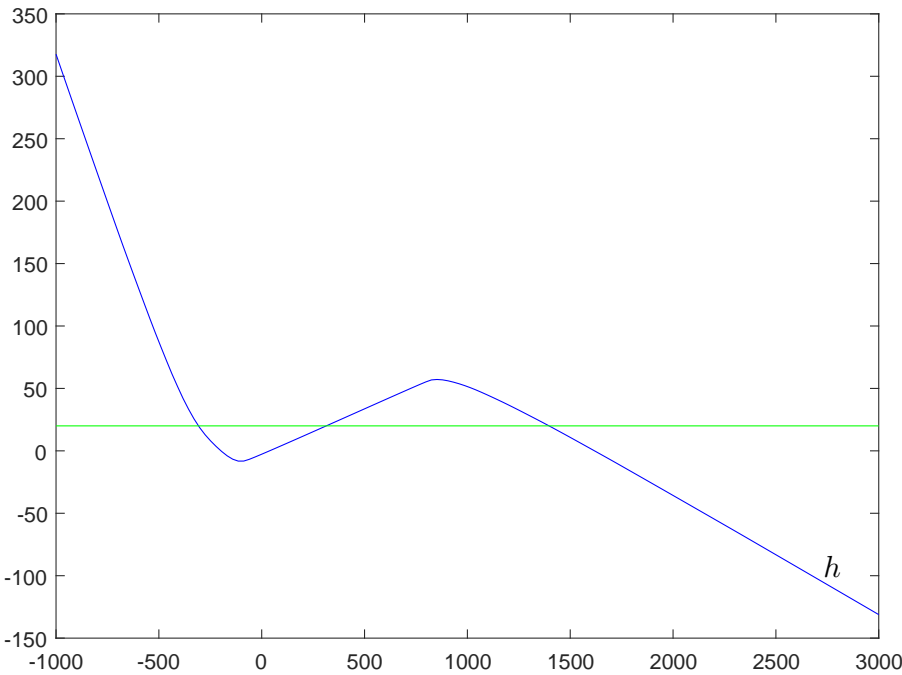


Figura 3.12: Função altura  $h$  (azul) e nível de  $g$  (verde) revelando 3 soluções para  $F(u) = g$ .

Nesse estágio, a simples aplicação de algum método para encontrar raízes (ao estilo *fsolve* ensinado no Cálculo) é suficiente para encontrar as soluções, desde que tenhamos implementada uma função que calcula a altura ao longo da fibra (esse é o tema-chave do próximo capítulo). Para esse exemplo, as soluções estão dadas abaixo.

Condição inicial para o fsolve	Solução
-500	$h_1 \cong -307,5444$
250	$h_2 \cong 313,8451$
1500	$h_3 \cong 1397,1376$

Tabela 3.1: Dados do fsolve.

As soluções do problema original, reconstruídas com  $u_i = h_i\varphi_3 + \alpha(h_i\varphi_3)$ , estão representadas na figura 3.13.

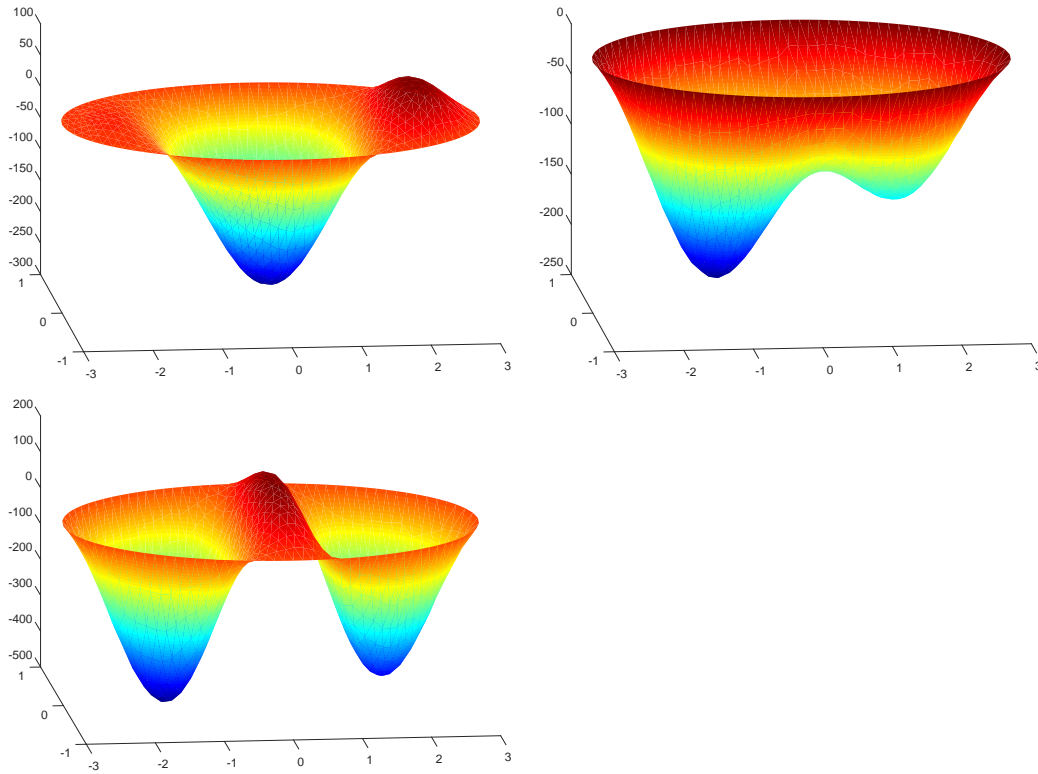


Figura 3.13: Em ordem, as soluções  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ .

Note que as soluções são essencialmente diferentes: nenhuma delas é rotação/reflexão da outra relativa as simetrias de  $\Omega$ . O erro relativo de cada solução, calculado por

$$e_r(u) = \frac{\|F(u) - g\|_Y}{\|g\|_Y}$$

é mostrado na tabela abaixo.

Solução	Erro relativo
$u_1$	$5.2952 \cdot 10^{-6}$
$u_2$	$5.5469 \cdot 10^{-7}$
$u_3$	$3.5103 \cdot 10^{-7}$

Tabela 3.2: Erros relativos para cada solução na norma  $L^2$ .

### 3.2.2

#### Fibras bidimensionais

Vamos considerar as mesmas condições da subseção anterior, porém com a derivada de  $f$  como na figura 3.14.

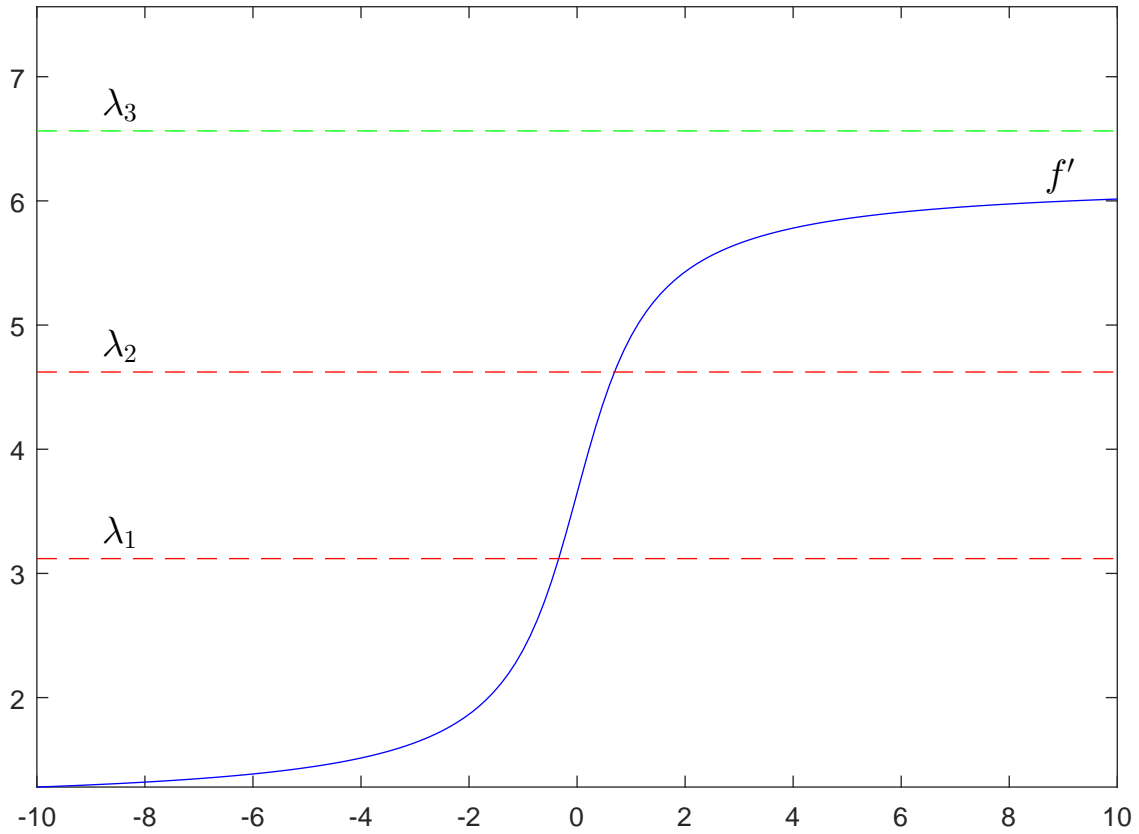


Figura 3.14: Gráfico de  $f'$  e os 3 primeiros autovalores de  $-\Delta$ .

As funções altura agora estão definidas do plano no plano. Na figura 3.15, uma representação de  $h$  para  $g = 10\varphi_3 - 300\varphi_2 - 50\varphi_1$ , assim o nível de  $g$  é  $(-300, -50)$ . Seguindo a ideia do exemplo em dimensão finita, calculamos a imagens por  $h$  de circunferências concêntricas.

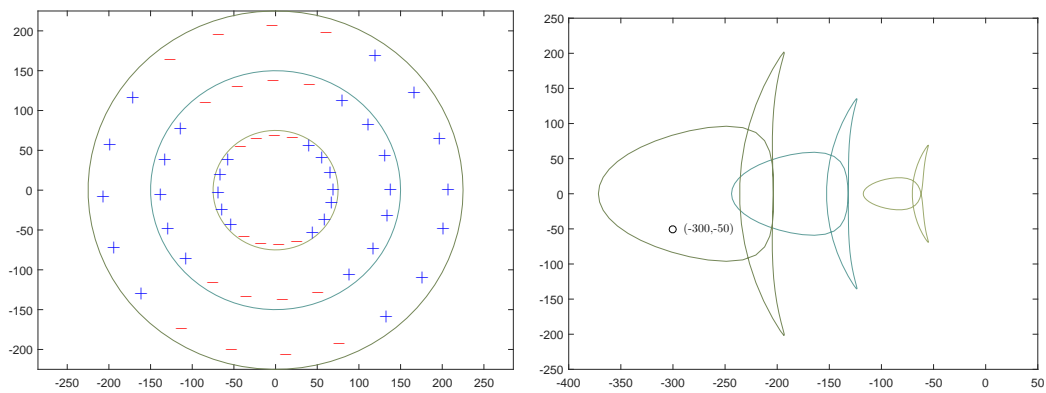


Figura 3.15: Imagens (direita) pela função altura de circunferências concêntricas (esquerda).

A figura acima traz a indicação do sinal da matriz jacobiana em alguns pontos das curvas. A semelhança com exemplo da seção anterior fica evidente se traçarmos uma aproximação do conjunto crítico e de sua imagem, como mostra a figura 3.16.

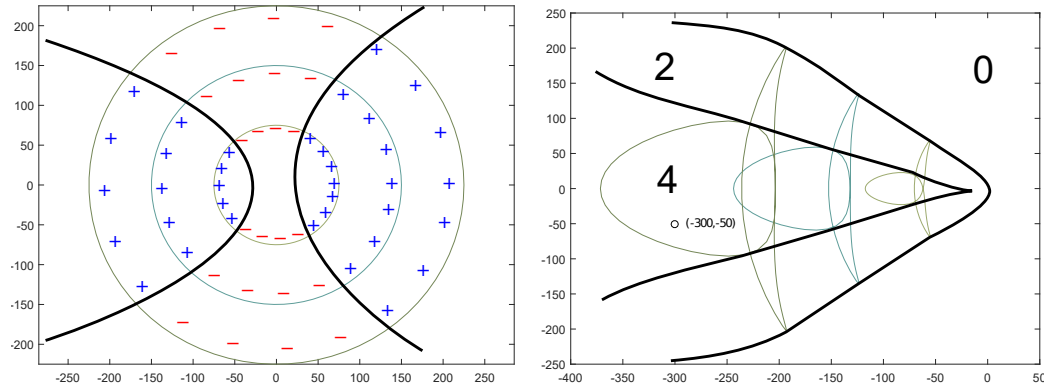


Figura 3.16: Aproximação do conjunto crítico.

Assim como na figura 3.9 (pág. 27), as curvas em forma de peixe (também construídas em (1)) mostram o padrão de quatro-duas-zero pré-imagens. Assim, esperamos encontrar quatro pré-imagens para o lado direito  $g$  em questão, que de fato são encontradas na Seção 4.1.

## 4

### Abordagem numérica

Vamos apresentar a estratégia para encontrar soluções de  $F(u) = g$  fazendo o uso da decomposição que define a função  $F$  como *flat*. Tomamos como modelo a função da subseção 3.2.1 (pág. 29).

#### 4.1

##### A estrutura geral

O problema se divide em duas partes substancialmente diferentes. Na primeira, o ingrediente fundamental é a construção de uma rotina para calcular a função altura  $h : V_X \rightarrow V_Y$  da fibra  $\alpha_g = F^{-1}(g + V_Y), g \in Y$ . Para tanto, dado  $v \in V_X$ , devemos encontrar um ponto  $w \in W_X$  tal que  $v + w$  está na fibra  $\alpha_g$ . Isso é essencialmente inverter  $F_v$ , um processo numericamente robusto (porém complexo) que chamamos de etapa horizontal. De posse de  $w$ , temos que  $h(v) = Q_Y(F(v + w))$ , como definido na Seção 2.1. Feito isso, partimos à etapa vertical: procurar pré-imagens por  $h$ , um problema em dimensão finita. Se a fibra tem dimensão um, seguimos essencialmente os procedimentos em (1) para o cálculo da função altura e de pré-imagens. Para outras dimensões, recorreremos a métodos de continuação no espírito de (7).

#### 4.2

##### Andando na horizontal

Fixemos um lado direito  $g = g_W + g_V \in Y$  associado à fibra  $\alpha_g = F^{-1}(g + V_Y)$ . Fixe  $v \in V_X$ . O primeiro passo na direção de calcular o valor da função altura  $h(v)$  é encontrar o (único)  $w = \alpha(v) \in W_X$  tal que  $w + v$  esteja em  $\alpha_g$ , ou seja,  $F(w(v) + v) \in g + V_Y$ .

Vamos traduzir o problema de encontrar  $w$  acima na linguagem dos operadores de restrição projetada  $F_v$ . Primeiramente, note que os subespaços verticais  $g + V_Y$  e  $g_W + V_Y$  são iguais, pois  $g_W = P_Y(g)$ . Assim, exigir que  $F(w + v) \in g + V_Y$  é o mesmo que exigir  $F_v(w) = g_W$ .

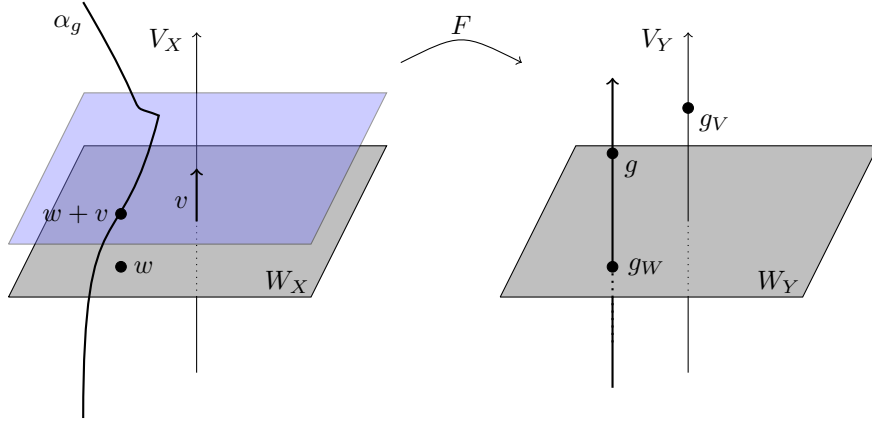


Figura 4.1: Procuramos a interseção do subespaço afim  $W_X + v$  com a fibra  $\alpha_g$ .

Por definição de *flatness*,  $F_v : W_X \rightarrow W_Y$  é inversível para todo  $v \in V_X$ : temos que resolver a equação  $F_v(w) = g_W$ , que não é uma tarefa imediata. De fato,  $F_v$  está definido entre espaços de dimensão infinita para os quais nem sequer temos uma descrição explícita (eles são dados como complementos ortogonais).

Um tratamento natural do ponto de vista numérico é a usada em (1): emular  $H_0^1(\Omega)$  via elementos finitos. Empregaremos elementos do tipo  $P_1$  (contínuos, linear por partes na notação de (9)). Para regiões  $\Omega$  gerais, vamos supô-las aproximadas pelas suas triangulações. Torna-se necessário também aproximar as autofunções do Laplaciano.

#### 4.2.1

##### Invertendo $F_v$

No contexto suave, cada  $F_v : W_X \rightarrow W_Y$  é um difeomorfismo, tornando o método de Newton uma opção. Elegendo um  $w_0 \in W_X$  como passo inicial, temos a sequência

$$w_{n+1} = w_n - (F'_v)^{-1}(w_n)(e)$$

com

$$e = F_v(w_n) - g_W$$

e, para  $z \in W_X$ ,

$$F'_v(w_n)z = \left( P_Y \left( -\Delta(w_n + v) - f(w_n + v) \right) \right)' z = -\Delta z - P_Y f'(w_n + v)z.$$

Uma aplicação ingênua desse método exigiria a construção de elementos finitos apropriados para os espaços  $W_X$  e  $W_Y$ . Além da dificuldade óbvia de se

caracterizar funções apenas sabendo a quem elas são ortogonais, tal processo tornaria não esparsas as matrizes fundamentais envolvidas no problema. Vamos estender a função  $F'_v : W_X \rightarrow W_Y$  ao domínio todo de forma conveniente.

**Definição 4.1** (*Operador estendido*) Fixado  $u_0 \in X$ , definimos o operador linear estendido

$$L(u_0)z = -\Delta z - P_Y f'(u_0)P_X z,$$

para  $z \in X$ .

**Proposição 4.2** Para todo  $u_0 = w_0 + v_0 \in W_X \oplus V_X$ , o operador  $L(u_0) : X \rightarrow Y$  é um isomorfismo. Mais, sua restrição ao subespaço  $W_X$  coincide com o operador  $F'_{v_0}(w_0)$ .

*Demonstração.* Basta notar que

$$L(u_0)z = \begin{cases} F'_{v_0}(w_0)z & \text{se } z \in W_X; \\ -\Delta z & \text{se } z \in V_X. \end{cases}$$

Assim,  $L(u_0) : W_X \rightarrow W_Y$  é um isomorfismo por *flatness* e de  $V_X$  em  $V_Y$  por serem autoespaços de  $-\Delta$ .  $\square$

Continuamos então o processo de inversão de  $F_v$  resolvendo

$$L(w_n)h = P_Y(e) = P_Y(F_v(w_n) - P_Y g)$$

e, em seguida, fazendo a atualização  $w_{n+1} = w_n - P_X(h)$ . A projeção de  $h$  em  $W_X$ , inútil do ponto de vista teórico, tem a função de eliminar possíveis desvios introduzidos na inversão numérica de  $L(w_n)$ .

Cabem aqui duas observações. Primeiro, por ter autovalores relativamente longe de zero, a inversão envolvendo o operador estendido (que é claramente simétrico) é bastante robusta. Segundo, veremos adiante que quase sempre calcularemos a função altura em pontos próximos a outros já calculados: isso permite usar passos iniciais  $w_0$  para o método de Newton bastante próximos da solução da equação, poupando iterações.

#### 4.2.2

##### Configuração dos Elementos Finitos

Como ilustrado na figura 3.10 (pág. 28), a região  $\Omega$  é decomposta em elementos triangulares de  $P_1$ . Caso a região seja poligonal, toda ela é coberta pela decomposição.



Numerados os vértices, ficam definidas funções  $\psi_i$ , lineares por partes, valendo 1 no vértice  $i$  e 0 nos demais. Como estamos trabalhando em  $H_0^1(\Omega)$ , só nos interessa os vértices que não estão na fronteira.

Ficam definidas as matrizes de massa  $M$  e rigidez  $K$  por

$$M_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle_0 \text{ e } K_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle_1,$$

sendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  os produtos internos de  $H_0^1(\Omega)$  e  $H^{-1}(\Omega)$ , respectivamente.

O algoritmo usa dois sistemas de coordenadas. Seja  $m$  o número de vértices interiores a  $\Omega$ . Uma função  $u \in X$  é descrita na base linear por partes com notação  $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$  e nesse caso as coordenadas são simplesmente a amostragem da função nos vértices, ou seja,

$$u(x) = \sum_{i=1}^m \underline{u}_i \psi_i(x).$$

Essas são as coordenadas contravariantes no vocabulário tensorial habitual.

O produto interno de  $H_0^1(\Omega)$  na versão discreta é  $\langle u, v \rangle_1 = \langle \underline{u}, K \underline{v} \rangle$ , sendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno usual do  $\mathbb{R}^m$ .

Uma função  $g \in Y$  é descrita na base  $\ell_j$  de funções tais que  $\langle \psi_i, \ell_j \rangle_0 = \delta_{ij}$  com notação  $\hat{g} \in \mathbb{R}^m$ . Tais coordenadas são obtidas da amostragem da função  $g$  nos vértices, com a mudança de coordenadas  $\hat{g} = M \underline{g}$ . Assim

$$g(x) = \sum_{j=1}^m (M \underline{g})_j \psi_j(x).$$

Essas, por outro lado, são as coordenadas covariantes de  $g$ .

O produto interno de  $H^{-1}(\Omega)$  na versão discreta é  $\langle f, g \rangle_0 = \langle \hat{f}, M^{-1} \hat{g} \rangle$ .

Nessa linguagem, a discretização da equação  $F(u) = -\Delta u - f(u) = g$  é simplesmente

$$K \underline{u} - M f(\underline{u}) = \hat{g},$$

com as coordenadas de  $f(u)$  obtidas avaliando-se  $f$  em cada coordenada de  $\underline{u}$ .

Com as matrizes de rigidez e de massa, podemos construir a versão discreta  $V_X^h = V_Y^h$  dos subespaços  $V_X = V_Y$  junto com seus complementos ortogonais. Os autovalores e autofunções de  $-\Delta$  são aproximadas pelas soluções  $\lambda_k$  e  $\varphi_k$  do problema de autovalor generalizado

$$K \underline{\varphi} = \lambda M \underline{\varphi}.$$

Os subespaços  $W_X^h$  e  $W_Y^h$  são os complementos ortogonais de  $V_X^h$  no produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  e de  $V_Y$  no produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ , respectivamente.

### 4.2.3

#### Discretização das projeções

Vamos à discretização dos operadores  $P_X, Q_X, P_Y$  e  $Q_Y$ . Suponha, inicialmente, que  $f$  interage apenas com um autovalor de  $-\Delta$ , que será de  $\varphi_k$ . Considere que  $\varphi_k$  está normalizado de acordo com o espaço que estiver, ou seja,  $\|\varphi_k\|_X = 1$  e  $\|\hat{\varphi}_k\|_Y = 1$ . Temos então

$$\begin{aligned} Q_X \underline{u} &= \langle u, \varphi_k \rangle_1 \varphi_k = \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k \\ &= \langle \underline{u}, K \varphi_k \rangle \varphi_k = \lambda_k \langle \underline{u}, M \varphi_k \rangle \varphi_k, \end{aligned}$$

$$Q_Y \hat{g} = \langle g, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k = \langle \hat{g}, M^{-1} \hat{\varphi}_k \rangle \hat{\varphi}_k = \langle \hat{g}, \underline{\varphi}_k \rangle \hat{\varphi}_k.$$

Caso a não linearidade interaja com mais de um autovalor, basta tomar combinações lineares das projeções acima percorrendo toda base de  $V_X$  (e  $V_Y$ ). As projeções nos espaços horizontais são calculadas com  $P_X = I - Q_X$  e  $P_Y = I - Q_Y$ .

Enfim, o problema se resume a resolver sistemas associados ao operador estendido: na próxima subseção, apresentamos os detalhes do seu processo de discretização e montagem.

### 4.2.4

#### Discretização do Operador Estendido

Precisamos, a cada iteração, resolver a equação

$$L(u_0)z = -\Delta z - P_Y f'(u_0) P_X z = g - F(u_0).$$

Para a discretização, considere a base  $\{\psi_i\}$  de elementos lineares por partes. A formulação fraca da equação acima é

$$\langle -\Delta z, \psi_i \rangle_0 - \langle P_Y f'(u_0) P_X z, \psi_i \rangle_0 = \langle g, \psi_i \rangle_0 - \langle F(u_0), \psi_i \rangle_0$$

devendo valer para todo  $i$  (isso será omitido daqui em diante). Escrevendo

$$z = \sum_j z_j \psi_j,$$

vemos que três dos termos da equação tem discretização conhecida:

- $\langle -\Delta z, \psi_i \rangle_0 = \langle z, \psi_i \rangle_1$  é simplesmente  $K \underline{z}$ ;
- $\langle g, \psi_i \rangle_0$  é  $\hat{g} = M \underline{g}$ ;

$$- \langle F(u_0), \psi_i \rangle_0 \text{ se torna } \widehat{F(u_0)} = K\underline{u_0} - Mf'(\underline{u_0}).$$

Por ora, temos

$$\begin{aligned} K\underline{z} - \langle P_Y f'(u_0) P_X z, \psi_i \rangle_0 &= \hat{g} - \widehat{F(u_0)} \\ K\underline{z} - A\underline{z} &= M\underline{g} - K\underline{u_0} + Mf'(\underline{u_0}) \end{aligned}$$

O termo  $\langle P_Y f'(u_0) P_X z, \psi_i \rangle_0$ , vetor acima representado pelo produto  $A\underline{z}$  (omitimos  $i$  novamente), é mais delicado. Suponha que a não linearidade interaja com o autovalor  $\varphi_k$  somente. Para  $\alpha_{ik} = \langle \psi_i, \varphi_k \rangle_1$ ,

$$\begin{aligned} A\underline{z} &= \langle f'(u_0)(\psi_j - Q_X \psi_j)z, \psi_i - Q_X \psi_i \rangle_0 \\ &= \langle f'(u_0)\psi_j, \psi_i \rangle_0 z_j - \langle f'(u_0)Q_X \psi_j, \psi_i \rangle_0 z_j \\ &\quad - \langle f'(u_0)\psi_j, Q_X \psi_i \rangle_0 z_j + \langle f'(u_0)Q_X \psi_j, Q_X \psi_i \rangle_0 z_j \\ &= \langle f'(u_0)\psi_j, \psi_i \rangle_0 z_j - \langle \alpha_{jk} f'(u_0)\varphi_k, \psi_i \rangle_0 z_j \\ &\quad - \langle f'(u_0)\psi_j, \alpha_{ik}\varphi_k \rangle_0 z_j + \langle \alpha_{jk} f'(u_0)\varphi_k, \alpha_{ik}\varphi_k \rangle_0 z_j \end{aligned}$$

O operador estendido precisa ser calculado (e invertido) uma quantidade muito grande de vezes. Fez-se necessário criar uma estratégia para calcular esses produtos triplos com bom desempenho sem sacrificar precisão. As parcelas do operador estendido envolvem o cálculo das integrais do tipo

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \underline{u}_i \psi_i(x) \sum_{j=1}^m \underline{v}_j \psi_j(x) \sum_{\ell=1}^m \underline{w}_{\ell} \psi_{\ell}(x) dx,$$

produtos de três funções das quais só conhecemos seus valores nos vértices.

O uso da regra do ponto médio (a mais simples e rápida), como em (1), não parece uma boa alternativa, por razões de complexidade e pela dificuldade de fazer boas aproximações dos valores envolvidos. Em nosso algoritmo, só fazemos uso dos valores das funções nos vértices da malha e as integrais básicas

$$\int_{\Omega} \psi_i \psi_j \psi_{\ell}$$

são guardadas em uma matriz  $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_{ij\ell})$  com três índices, de tamanho  $m \times m \times m$ . As expressões acima são tensores trilineares nessas integrais básicas.

A matriz  $\mathfrak{M}$  é calculada apenas uma vez, e é guardada como uma estrutura esparsa. Mais, frequentemente as coordenadas de  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  correspondem a elementos da base  $\varphi_i$ , simplificando mais ainda os cálculos.

Voltemos à construção das quatro parcelas que formam a matriz  $A$ , um dos constituintes do operador estendido.

A primeira parcela é simples: defina  $\Theta_{ij} = \langle f'(u_0)\psi_j, \psi_i \rangle_0$ . A matriz  $\Theta$  é simétrica, esparsa e não depende de  $k$ .

Para as três parcelas seguintes, introduzimos os vetores

$$\Psi_k = \left( \langle \psi_1, \varphi_k \rangle_1, \langle \psi_2, \varphi_k \rangle_1, \dots, \langle \psi_n, \varphi_k \rangle_1 \right),$$

$$\Phi_k = \left( \langle f'(u_0)\psi_1, \varphi_k \rangle_0, \langle f'(u_0)\psi_2, \varphi_k \rangle_0, \dots, \langle f'(u_0)\psi_n, \varphi_k \rangle_0 \right).$$

Nesses termos, a matriz associada a  $\langle f'(u_0)\psi_j, \alpha_{ik}\varphi_k \rangle_0$  é dada pelo produto  $\Psi_k^T \cdot \Phi_k$ . Tal matriz tem posto 1, mas não é necessariamente simétrica. Analogamente, a matriz de  $\langle \alpha_{jk}f'(u_0)\varphi_k, \psi_i \rangle_0$  é dada por  $\Phi_k^T \cdot \Psi_k$ , transposta da matriz anterior, também de posto 1. Isso trata da segunda e da terceira parcelas.

Para a quarta parcela, temos

$$\langle \alpha_{jk}f'(u_0)\varphi_k, \alpha_{ik}\varphi_k \rangle_0 = \langle \psi_j, \varphi_k \rangle_1 \langle \psi_i, \varphi_k \rangle_1 \langle f'(u_0)\varphi_k, \varphi_k \rangle_0.$$

O último fator não depende de  $i$  ou  $j$ , e é apenas um número. Definindo  $\beta_{kh} = \langle f'(u_0)\varphi_k, \varphi_h \rangle_0$ , essa matriz fica  $\beta_{kk}\Psi_k^T \cdot \Psi_k$ , que também é simétrica e tem posto 1.

Com a notação apresentada acima,

$$A = \Theta - (\Psi_k^T \cdot \Phi_k + \Phi_k^T \cdot \Psi_k) + \beta_{kk}\Psi_k^T \cdot \Psi_k$$

Observe que o termo  $\Psi_k^T \cdot \Phi_k + \Phi_k^T \cdot \Psi_k$  é uma matriz simétrica. Portanto, todo o lado esquerdo da equação forma uma matriz simétrica.

Caso a não linearidade interaja com os autovalores de  $\lambda_p$  a  $\lambda_q$ , a discretização de  $L(u_0)$  é dada por

$$L(u_0) = K - \left( \Theta - \sum_{k=p}^q (\Psi_k^T \cdot \Phi_k + \Phi_k^T \cdot \Psi_k) + \sum_{k=p}^q \sum_{h=p}^q \beta_{kh}\Psi_k^T \cdot \Psi_h \right),$$

lembrando que  $\Theta$ ,  $\Phi_k$  e  $\beta_{kh}$  variam com  $u_0$ .

Em suma, para resolver  $F_v(u) = g_W$ , essa primeira parte do algoritmo encontra um ponto  $w \in W_X$  tal que  $v + w \in \alpha_{g_W}$  — isto é, encontramos um ponto da fibra associada a  $g$  no subespaço afim  $v + W_X$ . Na próxima seção, procuramos pela fibra  $\alpha_{g_W}$  as soluções de  $F(u) = g$ , que forçosamente se encontram lá.

Calcular a função altura  $h = h_g : V_X \rightarrow V_Y$  associada a uma fibra  $\alpha_g$  agora é fácil. Tome  $v \in V_X$ , obtenha pela seção anterior  $w \in W_X$  tal que  $v + w \in \alpha_g$  e então  $h(v) = Q_Y(F(v + w))$ .

### 4.3

#### Andando em $V_X$ — invertendo a função altura

De posse da função altura  $h : V_X \rightarrow V_Y$ , definida entre espaços de dimensão finita, resta a tarefa de encontrar pré-imagens de  $g_V = Q_Y(g)$ . É nesse ponto que as particularidades do problema original — elipticidade, não linearidade especial — nos abandonam. No caso seminal associado ao teorema de Ambrosetti-Prodi para  $F(u) = -\Delta u - f(u)$  (com  $f$  estritamente convexa,  $\overline{f'(\mathbb{R})} \cap \sigma(-\Delta) = \{\lambda_1\}$ ), a função altura é especialmente simples: uma função unimodal da reta na reta, com extremos indo a  $-\infty$  (topologicamente, uma parábola côncava). A análise numérica permite o estudo de funções altura mais complexas, como já visto na figura 3.12 (pág. 30).

Com  $f$  interagindo com qualquer outro autovalor, já não há mais garantia de que  $F$  é própria mesmo com a hipótese de convexidade estrita. O único porto seguro é a existência e ortogonalidade da decomposição e, portanto, existência de fibras, o que é suficiente para realizar a análise numérica de interesse.

#### 4.3.1

##### O inversor de segmentos

O elemento básico do algoritmo que apresentaremos agora é o *inversor de segmentos*. A ideia é simples: dados  $b \in V_Y$  e uma *semente*  $x_s \in V_X$ , vamos *tentar* calcular a imagem inversa do segmento orientado que liga  $h(x_s)$  a  $b$  usando algum método de continuação (em geral, Newton) a partir do ponto  $x_s$ . A estimativa para a matriz jacobiana de  $h$  é feita por diferenças finitas — a única operação disponível é avaliar a função  $h$  num dado ponto: o problema original não nos dá qualquer informação sobre as derivadas de  $h$ .

A ênfase em “tentar” é realista: em algum momento do processo podemos encontrar o conjunto crítico de  $h$ , decretando o fim da possibilidade de continuação por levantamento local. Veremos adiante que, embora isso pareça um problema, *desejaremos que essa dificuldade apareça*.

Aliás, como mostrado em (1), o conjunto crítico de  $h_g : V_X \rightarrow V_Y$  é simples de descrever em termos do conjunto crítico de  $F$ :  $v_c$  é um ponto crítico de  $h_g$  se e somente se  $v_c + \alpha_g(v_c)$  é ponto crítico de  $F$ .

Como modelo para apresentar o algoritmo, vamos mais uma vez considerar a situação em dimensão dois,

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 - y^2 - x, 2xy - y) \end{aligned}$$

As curvas vermelhas na figura 4.2 denotam o conjunto crítico de  $h$  e sua imagem. Na imagem, vê-se o ponto  $b$  e no domínio duas sementes,  $x_1$  e  $x_2$ . A

inversão do segmento ligando  $h(x_1)$  a  $b$  foi interrompida ao encontrarmos um ponto crítico, como se vê no extremo da curva partindo de  $x_1$  no domínio — esse ponto crítico aliás é uma dobra, e essa propriedade será explorada mais adiante.

O ponto  $x_2$  é levado a um ponto que, por sua vez, também é imagem de algum ponto crítico, mas isso não é relevante. A inversão do segmento de  $h(x_2)$  a  $b$  procede sem dificuldades, e obtém-se uma pré-imagem de  $b$ , o ponto  $b_1$ .

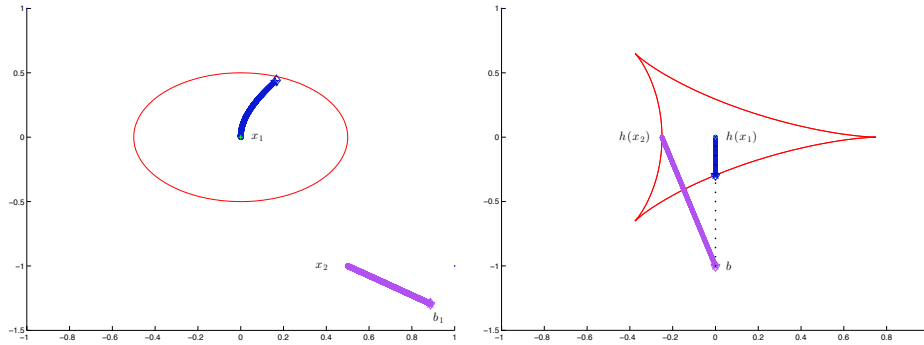


Figura 4.2: Invertendo dois segmentos: uma inversão completa, outra não.

### 4.3.2

#### Estendendo o inversor: além do conjunto crítico

Veremos agora o que fazer ao encontrarmos o conjunto crítico. O processo de inversão do segmento de  $h(x_1)$  a  $b$  parou porque decidiu-se que matriz jacobiana calculada não tem condições de ser invertida. O algoritmo então supõe a situação genérica ((10)): estamos próximos a uma *dobra*, a singularidade de Morin de ordem 1. De forma sucinta (para detalhes, (11) e (2)), um ponto crítico  $p_0$  de uma função  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dobra se, após composição com difeomorfismos levando  $p_0$  a  $0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $G$  perto de  $p_0$  assume a *forma normal*

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, y^2) .$$

Isso aliás, no caso de dimensão finita, que é o que nos interessa, se verifica exatamente quando o ponto crítico  $p_0$  é um ponto regular do determinante de  $Dh$ , e o núcleo de  $Dh(p_0)$  tem dimensão um, além de não ser tangente ao conjunto crítico em  $p_0$ .

A propriedade da dobra que vamos explorar é a que segue.

**Proposição 4.3** *Seja  $p_0$  um ponto de dobra da função  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Segmentos no contra-domínio que passam por  $G(p_0)$  têm uma parte com duas*

pré-imagens, e outra que não está na imagem de  $G$ . As duas pré-imagens se tangenciam e a direção de tangência é dada pelo núcleo de  $DG(p_0)$ .

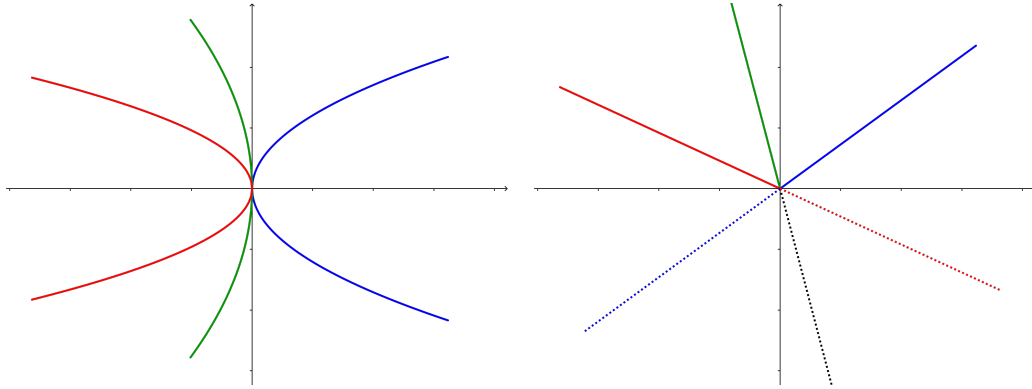


Figura 4.3: Exemplo em  $\mathbb{R}^2$ .

*Demonstração.* Como difeomorfismos preservam as propriedades de interesse, basta mostrar o resultado para a própria forma normal próxima a 0. Temos

$$DG(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2y \end{bmatrix},$$

com núcleo em 0 gerado pelo vetor vertical  $(0, \dots, 1)$ . Todos os segmentos no contra-domínio que passam pela origem são da forma  $t(v_1, \dots, v_n)$  que têm por imagens inversas as curvas

$$\gamma(t) = (tv_1, \dots, tv_{n-1}, \pm\sqrt{tv_n}) ,$$

que, aliás, só existem se  $tv_n \geq 0$  e que são verticais na origem.  $\square$

Assim que é detectada uma possível não invertibilidade da matriz jacobiana  $Dh(x_0)$ , o algoritmo calcula o autovetor  $z$  de  $Dh(x_0)$  associado ao menor autovalor em módulo. Sobre a reta  $x_0 + tz$ , procura-se um parâmetro  $t_c$  tal que o determinante de  $Dh(x_0 + t_c z)$  seja zero. O invertedor de segmentos então para, devolve a curva encontrada entre  $x_s$  e  $x_0$  (toda de um lado do conjunto crítico), o ponto  $x_0 + t_c z$  (crítico) e o ponto  $x_0 + 2t_c z$  (supostamente do outro lado do conjunto crítico — isso se verifica estudando a variação do sinal do determinante de  $Dh$ ). Esse último ponto  $x_0 + 2t_c z$  será usado como condição inicial — isto é, uma nova semente — para inversão de outros segmentos.

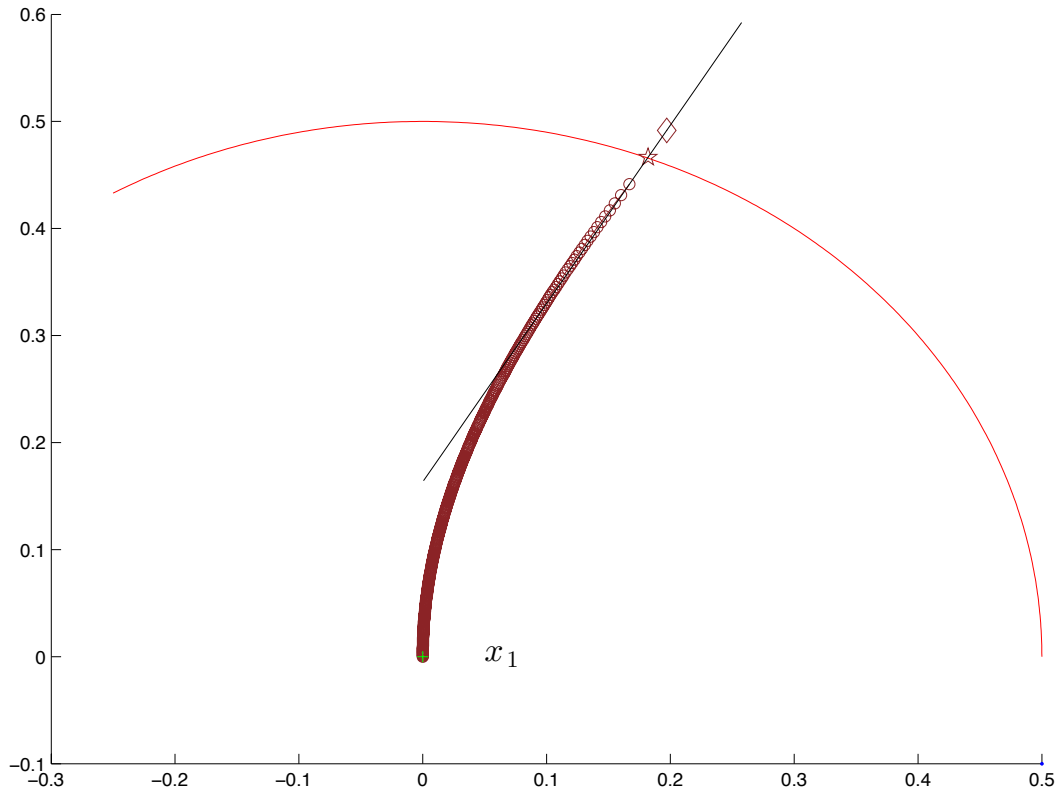


Figura 4.4: Inversão do segmento de  $h(x_1)$  a  $b$  se aproxima do conjunto crítico, encontra um ponto crítico (estrela) e um ponto além do crítico (losango), uma isca.

Ao ponto  $x_0 + 2t_c z$ , calculado caso o conjunto crítico seja encontrado, damos o nome de *isca*.

No nosso exemplo, com a escolha da semente  $x_1$  não conseguimos inverter todo o segmento de  $h(x_1)$  a  $b$ , mas apenas a porção dele que liga  $h(x_1)$  a algum  $y_0$ , imagem de  $x_0$ . Conseguimos, ainda, uma isca, que por propriedade de dobra, pode estar próxima a uma segunda imagem do ponto  $x_0$ . Pois então vamos inverter agora o segmento orientado que liga  $y_0$  a  $h(x_1)$ , usando como semente a isca, como na figura 4.5.



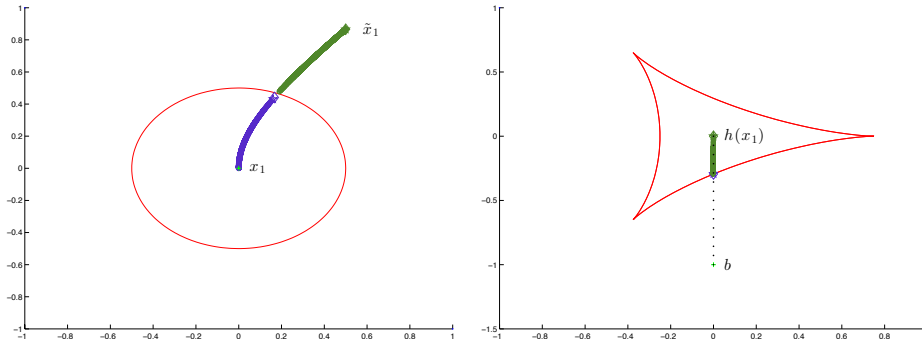


Figura 4.5: Outra inversão, outra pré-imagem  $\tilde{x}_1$  de  $h(x_1)$ .

Caso essa inversão tenha sucesso (como no exemplo), encontraremos  $\tilde{x}_1$ , uma nova pré-imagem de  $h(x_1)$ . Isso nos dá a pista: ao encontrarmos o conjunto crítico, torna-se latente a possibilidade de gerar nova pré-imagem a partir de outra conhecida.

Assim sendo, caso queiramos encontrar mais pré-imagens de  $b$ , se torna *desejável* que, ao inverter um segmento *começando* por  $b$ , encontremos o conjunto crítico. Pois assim se repetiria com  $b$  o que aconteceu com  $h(x_1)$ , e poderíamos encontrar outras pré-imagens de  $b$ .

### 4.3.3

#### Usando o inversor de segmentos para encontrar soluções.

Vejamos um exemplo mais difícil. Considere a função  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$h(x, y) = \left( x^3 - 3xy^2 + \frac{5x^2}{2} - \frac{5y^2}{2} + x, 3x^2y - y^3 - 5xy + y \right).$$

Procuraremos soluções de  $h(x, y) = b = (0, 0)$ . A figura 4.6 mostra a configuração do conjunto crítico (que se assemelha a duas elipses) e sua imagem, enquanto a figura 4.7 destaca a imagem por  $h$  da curva crítica interna. As figuras foram feitas com o programa  $2 \times 2$  ((7)), que também obtém as pré-imagens que procuramos (por um processo completamente diferente), e assim serve de oráculo para o cálculo.

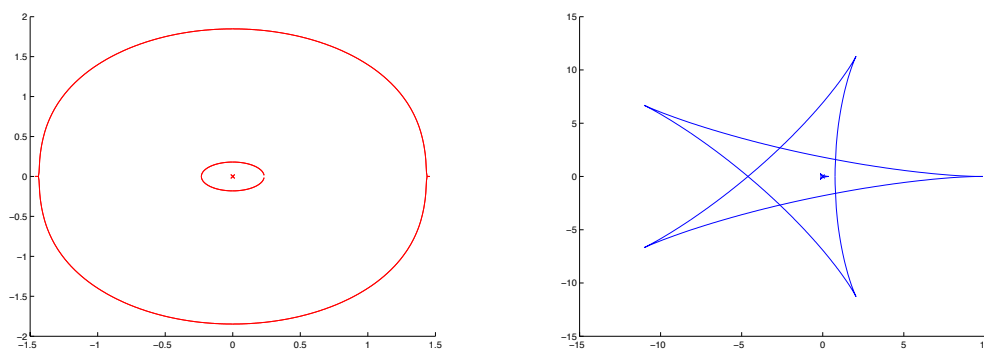


Figura 4.6: A estrela à direita é imagem da curva maior do conjunto crítico.

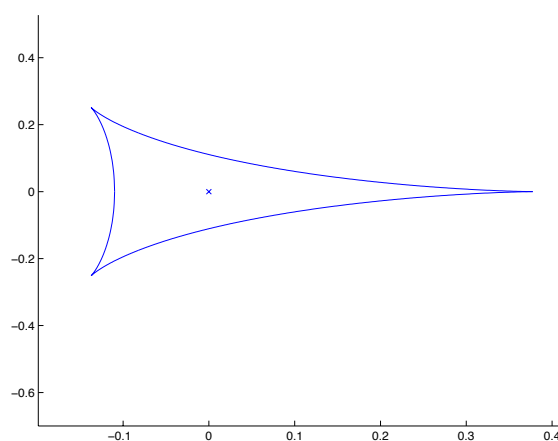


Figura 4.7: Imagem da curva menor ampliada; ao centro,  $b$ .

Começamos escolhendo a semente  $x_s$  e procedemos (fig. 4.8) à inversão do segmento orientado que liga  $h(x_s)$  até  $b$ , denotado por  $h(x_s) \rightsquigarrow b$ . O processo termina sem encontrarmos pontos crítico, significando que uma pré-imagem  $b_1$  foi encontrada.

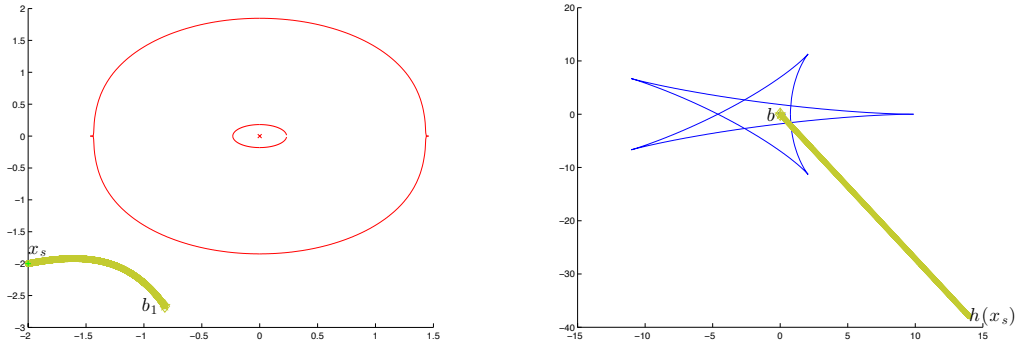


Figura 4.8: Inversão de  $h(x_s) \mapsto b$  resultando numa primeira solução  $b_1$ .

De posse de uma solução, procedemos como na subseção anterior. Escolhemos um ponto  $x_1$  e invertemos  $b \mapsto h(x_1)$  usando como semente a solução  $b_1$ . Caso esse processo vá até o fim (isto é, não se encontrou ponto crítico), encontraremos um ponto  $\tilde{x}_1$  que é pré-imagem de  $h(x_1)$ . Caso  $\tilde{x}_1 = x_1$ , não ganhamos informação alguma. Mas se  $\tilde{x}_1 \neq x_1$  (fig. 4.9), podemos inverter o segmento  $h(x_1) \mapsto b$  usando  $x_1$  como semente. Caso essa nova inversão não seja interrompida pelo conjunto crítico, terminaremos numa solução  $b_2$  que, nesse exemplo, é diferente de  $b_1$ .

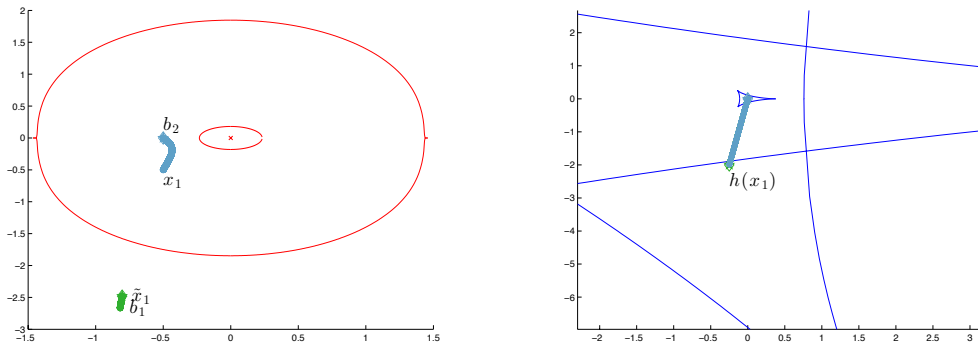


Figura 4.9: Apesar da inversão de  $b \mapsto h(x_1)$  não ter tido o sucesso que esperávamos, pudemos usar  $x_1$  como semente, encontrando mais uma solução.

Agora, um caso mais interessante. Escolhemos um ponto  $x_2$  e invertemos o segmento  $b \mapsto h(x_2)$  usando a nova solução  $b_2$  como semente. Na figura 4.10

vemos um exemplo de escolha de  $x_2$  que faz com que essa primeira inversão pare num ponto  $y_0$  e gere uma isca  $K$ . Usaremos a isca  $K$  como semente para inverter o segmento  $y_0 \rightarrow b$ . Caso essa inversão se complete, chegaremos uma solução que, nesse exemplo, já era conhecida, mas poderia ser inédita. De toda forma, encontrando ou não o conjunto crítico nesse passo, ainda resta a inversão de  $h(x_2) \rightarrow b$  usando a semente  $x_2$  que, nesse caso, leva a mais uma solução  $b_3$ .

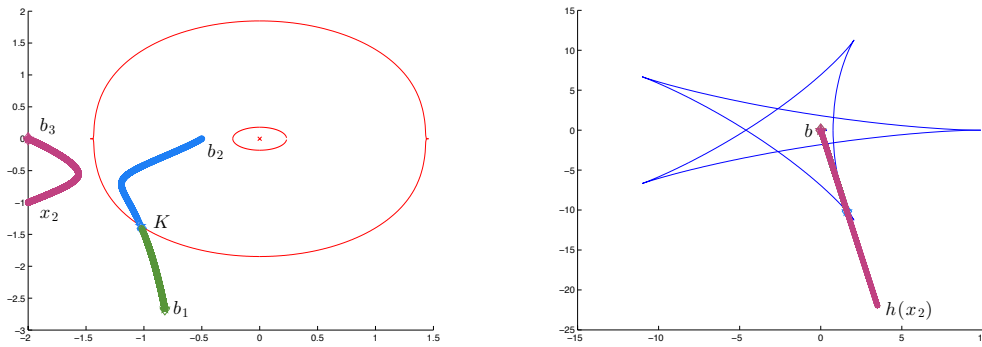


Figura 4.10: Inversão de  $h(x_2) \rightarrow b$  resultando em nova solução  $b_3$ .

Antes de prosseguir, vamos listar esses casos todos num diagrama. Combinando o uso do inversor de segmentos começando por sementes  $x_s$  para encontrar pré-imagens de  $b$  (conhecendo ou não outras pré-imagens), com seu uso no sentido contrário  $b \rightarrow h(x_s)$  para gerar soluções a partir de outras, criamos um segundo procedimento apresentado a seguir.

Escolhemos um ponto  $x_s$  e alguma pré-imagem conhecida  $b_\ell$  obtida pelo uso do inversor de segmentos como na subseção acima. Por saída, temos uma lista dos pontos críticos e iscas, além de, claro, uma lista de pré-imagens inéditas de  $b$ .

O procedimento é ilustrado no fluxograma da figura 4.11. Sobre ele, algumas observações:

- Blocos com “ $a \rightarrow b$  semente =  $d$ ” representam o uso do inversor de segmentos como descrito;
- Os caminhos com “C” e “NC” indicam se a inversão parou ou não no conjunto crítico, respectivamente;
- Todo ponto crítico encontrado é armazenado, assim como a isca que dele se origina;

- Pré-imagens de  $b$  só são armazenadas se forem inéditas.

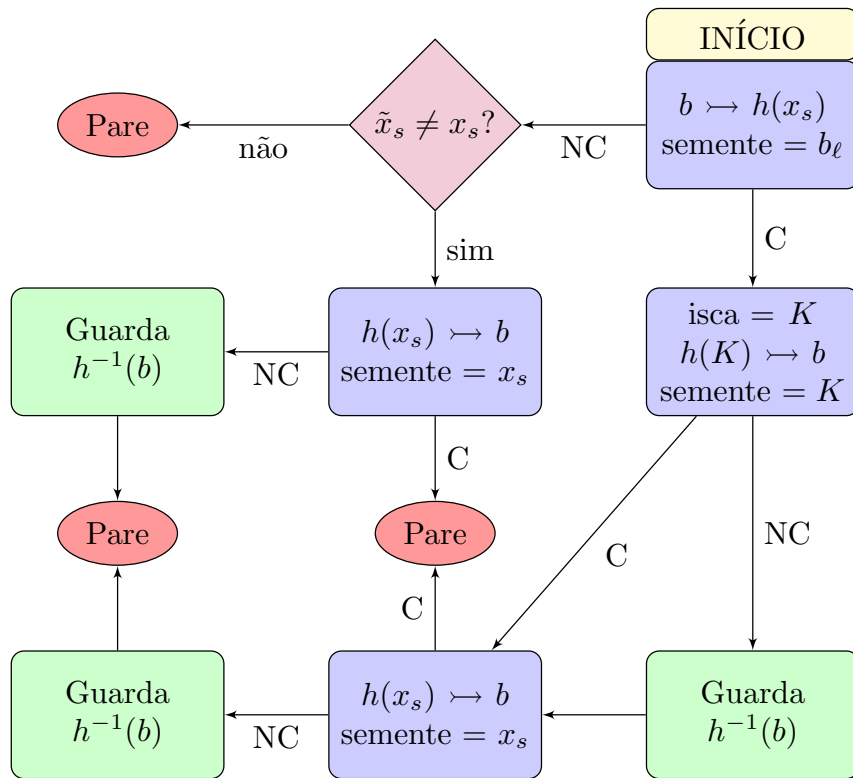


Figura 4.11: Fluxograma do procedimento.

No nosso exemplo, aplicando esse procedimento repetidas vezes (mais precisamente, seis sementes) encontramos 9 soluções para a equação como ilustram as figuras 4.12 (domínio) e 4.13 (imagem). Foram acrescentadas figuras também para as vizinhanças da origem: note-se a abundância de pré-imagens ao redor da origem nas figuras 4.14 (domínio) e 4.15 (imagem)

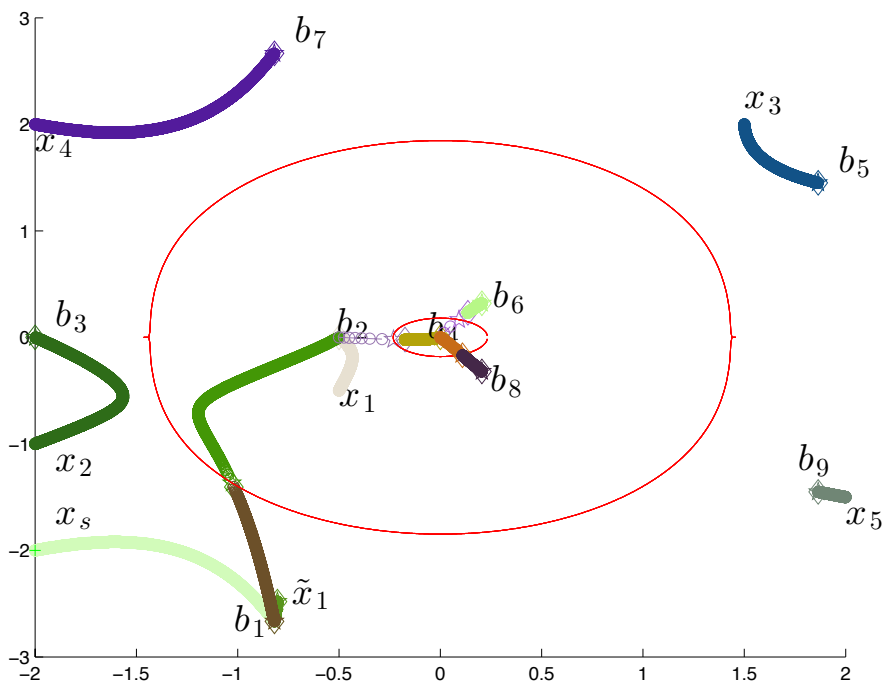


Figura 4.12: As nove pré-imagens de  $b$  no domínio de  $h$ .

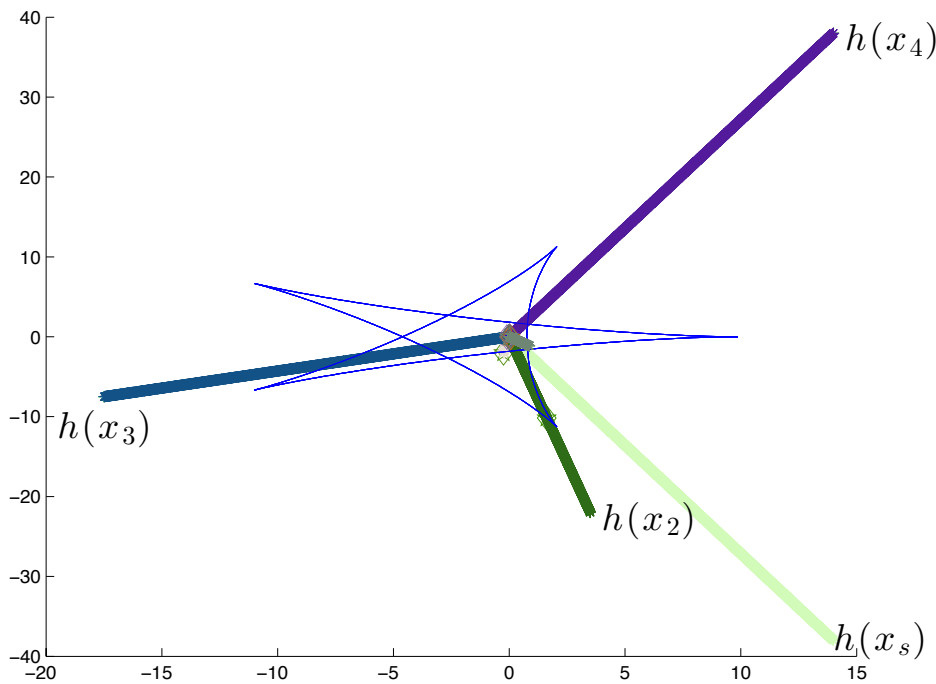


Figura 4.13: Imagem de  $h$ .

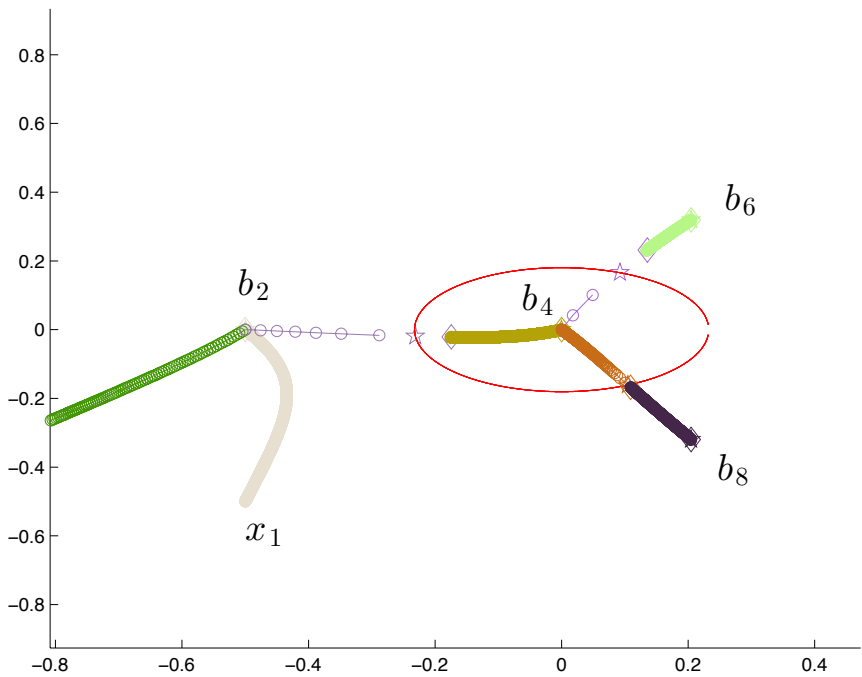


Figura 4.14: Detalhe no domínio.

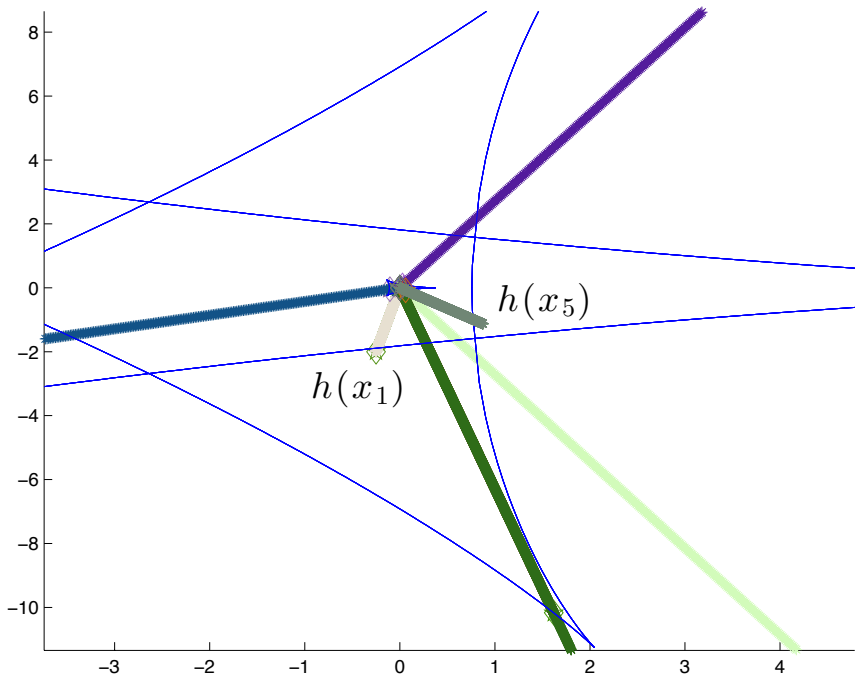


Figura 4.15: Detalhe no imagem.

Um sumário das entradas usadas para rodar o procedimento é mostrado na tabela que segue.

Ponto	Solução conhecida	Soluções atingidas
$x_1$	$b_1$	$b_2$
$x_2$	$b_2$	$b_1, b_3$
$x_3$	$b_2$	$b_4, b_5$
$x_4$	$b_4$	$b_6, b_7$
$x_5$	$b_4$	$b_8, b_9$

Tabela 4.1: Sumário do processo.

Na figura abaixo, a imagem da *flor*  $h^{-1}(h(C))$  da função  $h$  calculada com o programa  $2 \times 2$ . As curvas espessas, uma vermelha, outra azul, formam o conjunto crítico  $C$ . Cada pequena mancha azul na verdade forma um triângulo, como mostra o exemplo ampliado: são cópias difeomorfas da imagem da curva crítica azul. Cada um desses triângulos (cinco mais para fora, três em volta da curva crítica azul, e uma dentro) contém exatamente uma pré-imagem de  $b = 0$ .

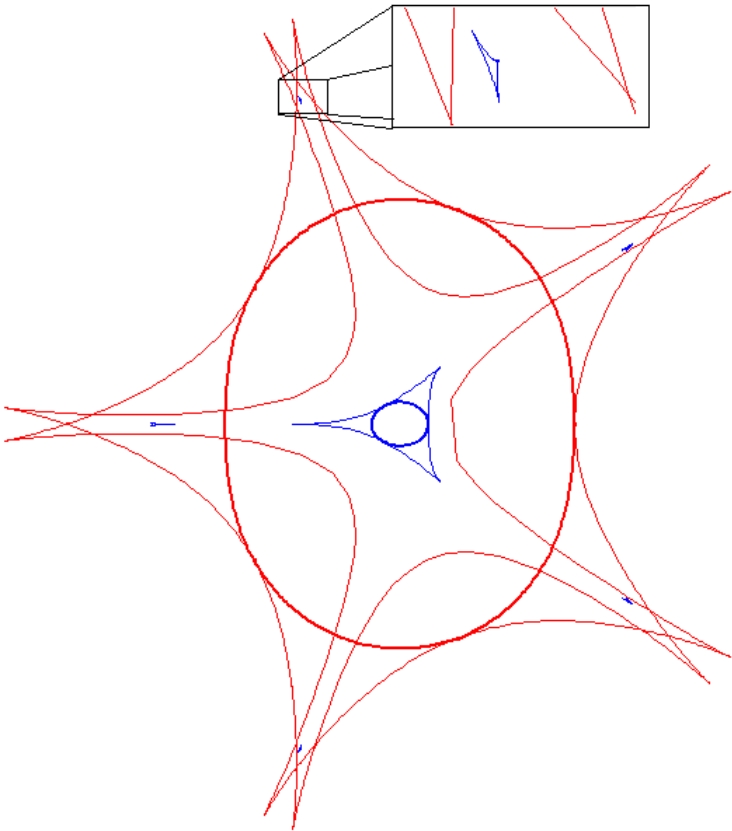


Figura 4.16: A flor  $h^{-1}(h(C))$ .



## 5

### Simulações numéricas

Nesse capítulo, veremos alguns exemplos do algoritmo em ação. Primeiro, vamos revisitar o exemplo do operador semilinear do capítulo 3. Depois, usamos o processo num exemplo de demonstração assistida por computador.

#### 5.1

##### Um exemplo ainda com oráculo: sementes escolhidas artificialmente

Vamos considerar novamente o operador definido na subseção 3.2.2 (pág. 31). Sendo  $h$  a função altura associada a  $g = 10\varphi_3 - 300\varphi_2 - 50\varphi_1$ , queremos soluções de  $h(x, y) = (-300, -50)$ . Como vimos anteriormente, esperamos encontrar quatro soluções. A disposição das soluções pode, nesse exemplo, ser estimada pelos sinais dos determinantes.

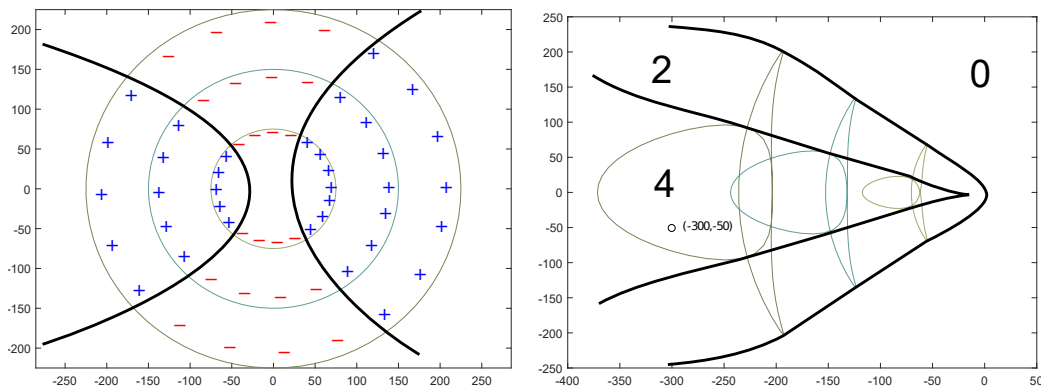


Figura 5.1: Prospeção do conjunto crítico.

As informações contidas na figura acima nos convidam a fazer continuação escolhendo por dados iniciais um ponto em cada componente positiva e dois pontos na componente negativa (uma de cada “lado”). Ainda, é possível escolher dados iniciais próximos ao conjunto crítico, já que o algoritmo explora essa informação.

A figura 5.2 traz o resultado das seguintes escolhas: Procuramos uma primeira solução tomando  $x_s = (-50, 100)$  como ponto inicial, obtendo  $b_1$  como resultado (um ponto na parte de cima da componente negativa). De

posse de  $b_1$ , escolhemos como semente  $x_1 = (-200, -200)$ , um ponto próximo ao conjunto crítico (e ainda na componente negativa). Duas novas soluções são encontradas, uma ( $b_2$ ) na componente positiva da direita) e outra ( $b_3$ ) na parte de baixo da componente negativa. Naturalmente, escolhemos um ponto ( $x_2$ ) na componente positiva da esquerda, obtendo outra pré-imagem de  $x_2$  e a última solução  $b_4$ .

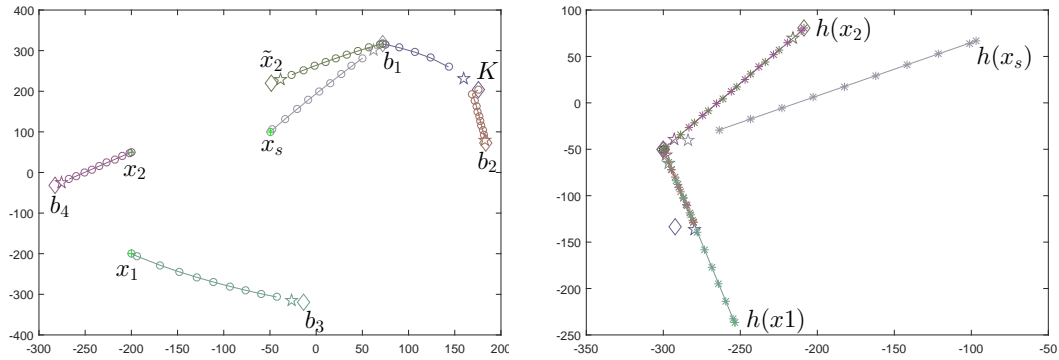


Figura 5.2: Quatro soluções encontradas com três dados iniciais.

Na figura 5.3, a representação gráfica das 4 soluções.

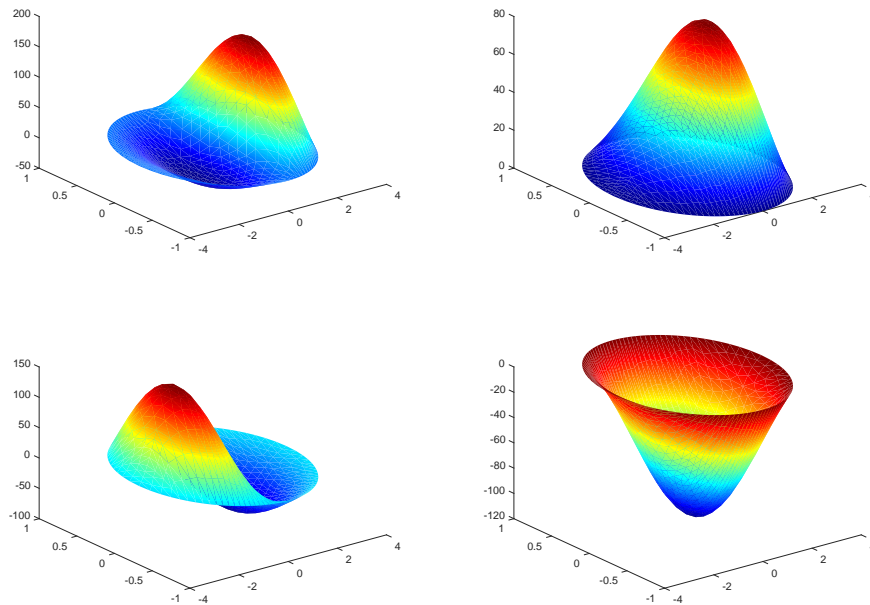


Figura 5.3: Gráficos das soluções  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  e  $b_4$  (na ordem).

O erro relativo de cada solução é mostrado abaixo na tabela abaixo.

Solução	Erro relativo
$b_1$	$1.9343 \cdot 10^{-7}$
$b_2$	$2.7675 \cdot 10^{-7}$
$b_3$	$4.2727 \cdot 10^{-7}$
$b_4$	$7.3996 \cdot 10^{-8}$

Tabela 5.1: Erros relativos para cada solução na norma  $L^2$ .

## 5.2

### Mesmo exemplo: sementes escolhidas aleatoriamente

Ainda com o mesmo operador da seção anterior, vamos exemplificar o uso de sementes escolhidas aleatoriamente, desde a busca pela primeira solução até o uso dos pontos críticos encontrado na escolha, passando pelo uso de soluções já conhecidas para encontrar novas.

#### 5.2.1

##### A primeira solução

O processo de busca da primeira solução é também uma prospecção. Nele podemos criar uma intuição sobre a escala do problema e possivelmente encontrar pontos críticos. Em dimensão dois (e até três, com um pouco de esforço) podemos, como anteriormente, plotar circunferências (esferas, em  $\mathbb{R}^3$ ) e analisar visualmente o problema, mas em dimensão mais alta o que resta é medir sinal de determinante e distância entre alguns poucos pontos.

Na falta completa de informações, o dado inicial  $(x_s)$  é escolhido de maneira aleatória. Uma escolha seria a origem. Porém, como é evidente segundo o oráculo usado anteriormente, a origem tem um enorme potencial de estar próximo a cúspides. Sorteamos, então, um ponto com cada coordenada sendo uma distribuição normal com média zero e desvio 20.

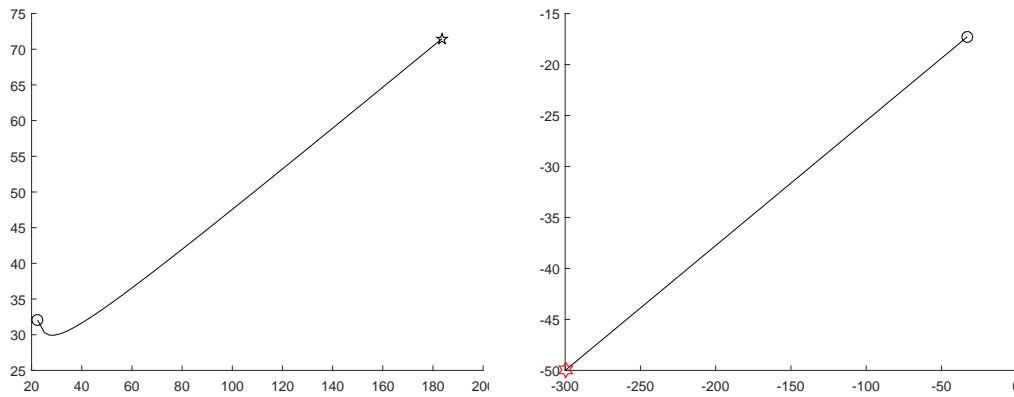


Figura 5.4: Como dado inicial aleatório (bolinha), encontramos a primeira solução (estrela).

A primeira solução encontrada é  $b_2 \sim (183, 71)$ , encontrada na seção anterior. Vemos que o dado inicial e sua imagem estão em escalas semelhantes. Outra informação relevante vem da forte curvatura próxima ao dado inicial: esse efeito costuma ocorrer próximo a cúspides. Nota-se, ainda, uma certa regularidade da função dado pela curvatura quase nula longe da origem. Isso se deve ao comportamento assintótico linear da não linearidade.

### 5.2.2

#### Encontrando mais soluções: sorteando sementes

Encontrada a primeira solução, vamos usá-la como base para encontrar as próximas como no capítulo anterior. Sorteamos mais três sementes nas mesmas condições que o primeiro sorteio. O resultado está ilustrado na figura 5.5.

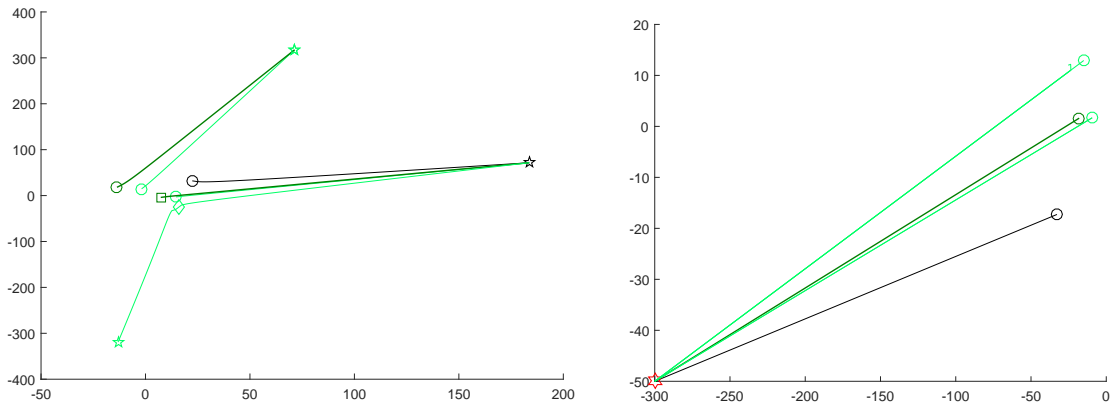


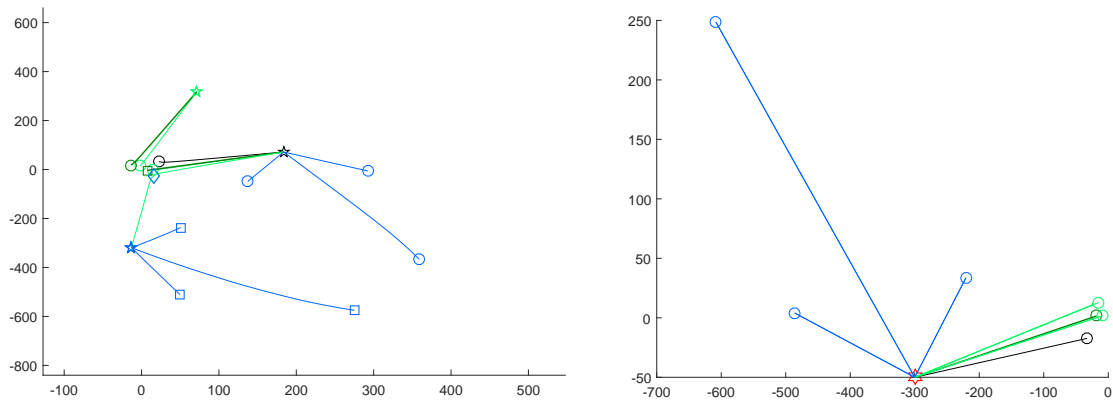
Figura 5.5: Dados iniciais e suas imagens (bolinhas), encontramos mais duas soluções (estrelas) e um ponto crítico (losango)

Duas novas soluções (estrelas verdes) foram encontradas, que correspondem a  $b_1$  e  $b_3$ . Esta última, inclusive, é resultado da localização de um ponto crítico (indicado pelo losango verde). O ponto indicado por um quadrado verde escuro compartilha sua imagem com a semente também verde escura. Lembre-se que quando o inversor de segmentos encontra um ponto  $\tilde{x}_i$  diferente da semente  $x_i$  mas com mesma pré-imagem, resta inverter o segmento  $h(x_i) \mapsto (-300, -50)$ , o resultado é curva em verde escuro correspondente no domínio. A escolha aleatória foi, por acaso, muito feliz.

### 5.2.3

#### Variando as soluções-base

Agora estamos com 3 soluções sendo que utilizamos somente a  $b_2$  (estrela preta) como ponto de partida de inversão. Continuaremos o processo agora tendo  $b_3$  como base para o algoritmo. Vamos, também, alterar a escala dos sorteios para um desvio de 200.

Figura 5.6: *Nenhuma solução nova.*

O resultado não é animador. Os três sorteios encontram apenas soluções conhecidas e mais pontos que compartilham imagem com as sementes. A única informação que tiramos disso é que entre as bolinhas azuis e os quadrados azuis passa o conjunto crítico.

Faremos mais 3 sorteios com a solução  $b_1$  como referência.

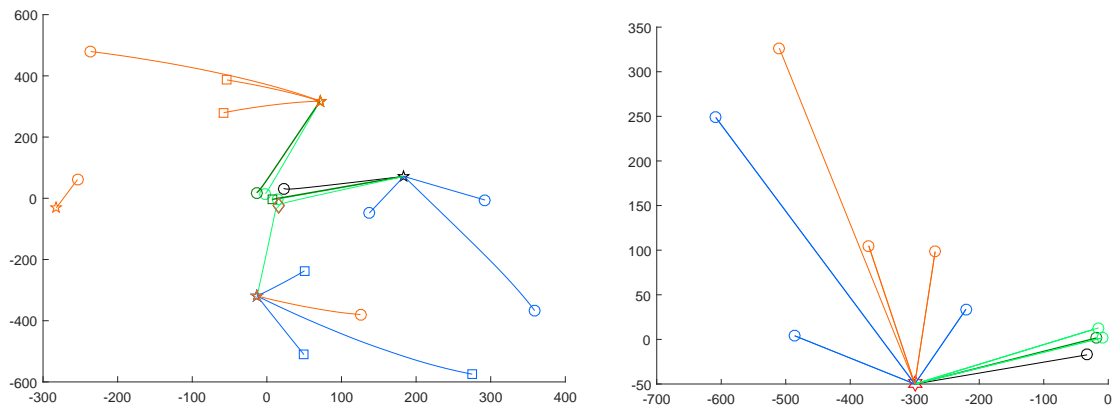


Figura 5.7: Nova pré-imagem encontrada

Finalmente uma nova solução,  $b_4$ , foi encontrada trazendo mais uma opção de ponto base para o processo (caso não exista um oráculo para nos dizer que existem apenas quatro soluções).

### 5.3

#### Um exemplo mais difícil

É claro que a técnica não assegura que todas as soluções tenham sido encontradas. Uma atitude mais positiva seria pensar em utilizá-la em situações para as quais queremos saber se existem mais soluções do que as já conhecidas - ou pelo menos previstas, por argumentos teóricos.

Vamos exemplificar isso reconsiderando o exemplo de Breuer, McKenna e Plum em (12), que considera soluções da equação  $F(u) = -\Delta u - u^2 = s \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ , com  $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ . Note que o operador tem a forma  $F(u) = -\Delta u - f(u)$  com  $f(x) = x^2$ . A ênfase na abordagem deles reside na verificação meticulosa das hipóteses do teorema de Kantorovich, que traz condições suficientes para que o método de Newton convirja conhecido um ponto suficientemente próximo da solução.

A comunidade de EDP conjecturava desde a década de 80 que essa equação possuía pelo menos 4 soluções para  $s$  suficientemente negativo. Usando um algoritmo do passo da montanha combinado com séries de Fourier finitas, métodos de Newton e de colocação, foram encontradas 4 soluções essencialmente diferentes para  $s = -800$ .

Nosso algoritmo de inversão depende da existência de uma decomposição de Lyapunov-Schmidt global na qual o operador  $-\Delta u - f(u)$  seja *flat*. Isso exige a limitação de  $f'$ , o qual não é o caso para  $F$ . Consideramos, então, o operador  $\tilde{F}(u) = -\Delta u - \tilde{f}(u)$  no qual  $\tilde{f}'$  é uma versão de  $f'$  alterada para que fique limitada:

$$\tilde{f}'(x) = \begin{cases} 2r & \text{se } x \geq r; \\ 2x & \text{se } \ell \geq x \geq r; \\ 2\ell & \text{se } \ell \geq x \end{cases}$$

O operador  $\tilde{F}$  coincide com  $F$  se  $u$  assumir valores no intervalo  $[\ell, r]$  e admite uma decomposição de Lyapunov-Schmidt global. O tamanho da interação depende obviamente das escolhas de  $\ell$  e  $r$ .

A geometria da região permite uma decomposição em triângulos uniformes mostrada na figura 5.8 e uma aproximação para os primeiros autovalores de  $-\Delta$  segue na tabela 5.2.

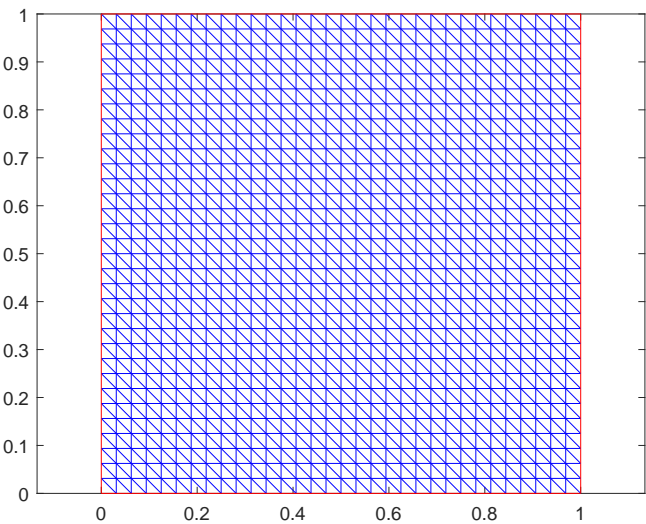


Figura 5.8: Triangularização para  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ .

Índice	Valor	Índice	Valor
$\lambda_1$	19.7868	$\lambda_7$	129.7290
$\lambda_2$	49.5525	$\lambda_8$	130.7053
$\lambda_3$	49.6674	$\lambda_9$	170.3116
$\lambda_4$	79.7161	$\lambda_{10}$	170.3751
$\lambda_5$	99.6329	$\lambda_{11}$	181.4211
$\lambda_6$	99.6381	$\lambda_{12}$	201.5760

Tabela 5.2: Os doze primeiros autovalores de  $-\Delta$ .

**5.3.1**  
**Interação de tamanho 3**

Primeiramente, vamos escolher  $\ell = -0.5 \cdot 10^{10}$  e  $r = 35$ . Note que, com essa escolha, a interação se dá com os 3 primeiros autovalores como ilustra a figura abaixo.



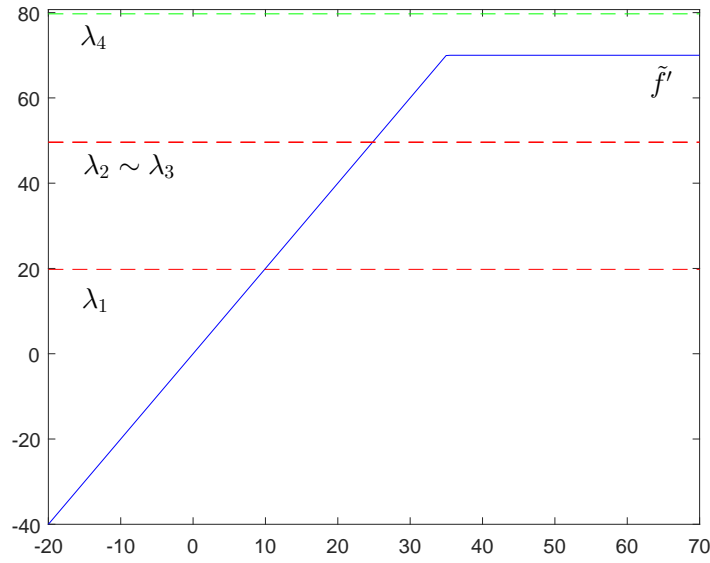


Figura 5.9: Gráfico de  $\tilde{f}'$ . Interação acontece com os 3 primeiros autovalores de  $-\Delta$ .

Com uma semente encontramos a primeira solução  $u_1$ . Após 10 sorteios de sementes usando  $u_1$  como base (encontrando  $u_2$ ) e mais 10 usando  $u_2$  como base, fomos também capazes de alcançar 4 soluções essencialmente diferentes para  $\tilde{F}(u) = -800 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ , representadas na figura 5.10. Foram encontradas, ainda, nove pontos críticos.

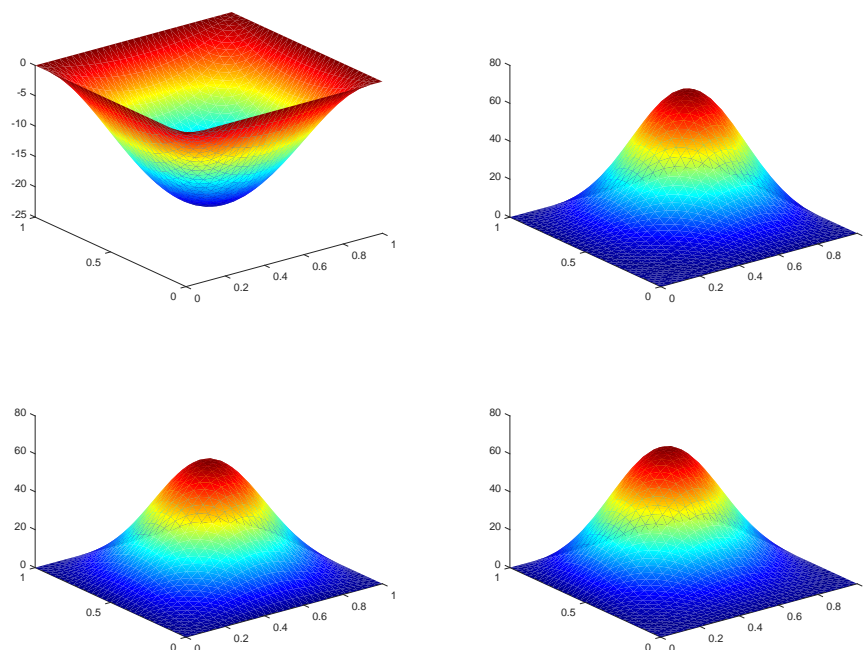


Figura 5.10: Gráficos das soluções  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  (estão nessa ordem).

Em verdade, foram encontradas 8 soluções. Porém, quando dizemos que quatro delas são essencialmente diferentes significa que uma não difere da outra por uma simples rotação/reflexão. Essas simetrias ficam evidentes na figura 5.11, na qual mostramos as soluções encontradas em níveis.

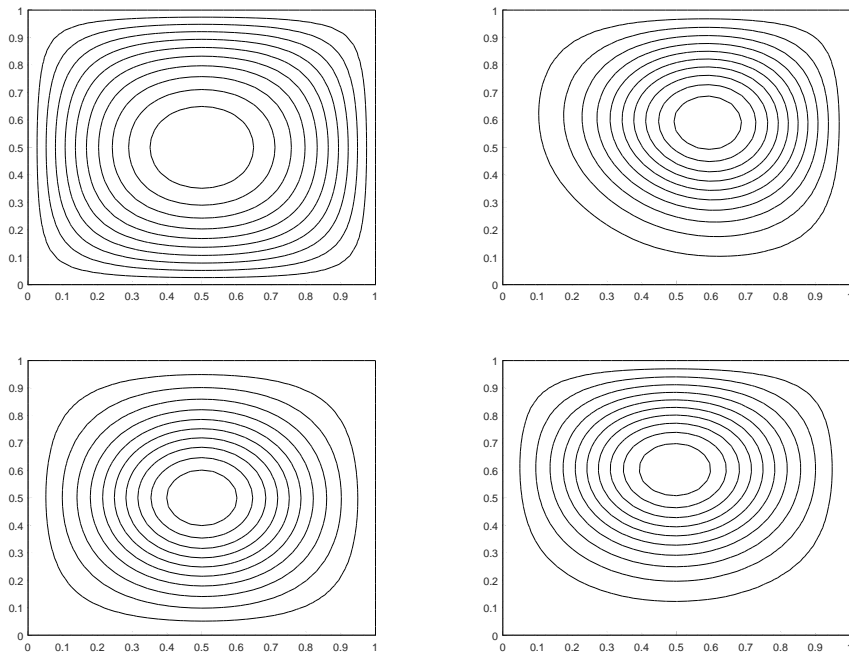


Figura 5.11: Níveis das funções  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  (mesma ordem).

Resta saber o quanto essas 4 funções são soluções da equação original  $F(u) = -800 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ . O cálculo do erro relativo revela uma precisão ruim como mostra a tabela 5.3.

Solução	Erro relativo para $\tilde{F}$	Erro relativo para $F$
$u_1$	$3.7952 \cdot 10^{-10}$	$3.7952 \cdot 10^{-10}$
$u_2$	$1.1571 \cdot 10^{-8}$	$4.1072 \cdot 10^{-1}$
$u_3$	$7.0826 \cdot 10^{-7}$	$2.9506 \cdot 10^{-1}$
$u_4$	$5.1119 \cdot 10^{-8}$	$3.6801 \cdot 10^{-1}$

Tabela 5.3: Erros relativos na norma  $L^2$  com respeito a  $\tilde{F}$  e a  $F$ .

Note que os erros coincidem para  $u_1$  visto que tal solução assume somente valores negativos. Já as demais funções assumem valores bem acima de 35, a partir do qual  $\tilde{F}$  e  $F$  não mais coincidem.

### 5.3.2

#### Indo além: dimensão 11

Na tentativa de encontrar soluções mais precisas do problema original, tomamos  $\ell = -0.5 \cdot 10^{10}$  e  $r = 100$ . Conforme a tabela 5.2, isso faz com que os subespaços verticais tenham dimensão 11.

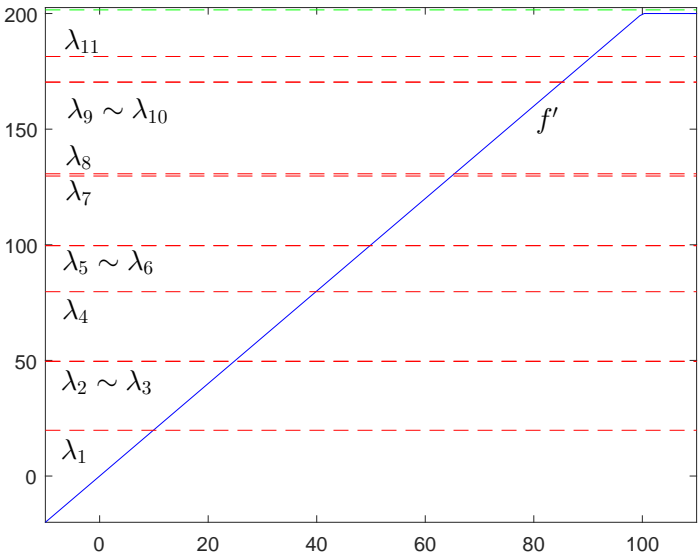


Figura 5.12: Gráfico de  $\tilde{f}'$ . Interação acontece com os 3 primeiros autovalores de  $-\Delta$ .

Com uma semente encontramos a primeira solução  $u_1$ . Após 3 sorteios de sementes usando  $u_1$  como base (encontrando  $u_2$ ), mais 2 usando  $u_2$  como base (encontrando  $u_4$ ) e ainda outro com base em  $u_4$  para encontrar  $u_3$ . Foram encontradas, ainda, nove pontos críticos. Ignorando as simetrias, foram 6 as soluções encontradas.

Verificando a precisão dos resultados, obtemos o desejado.

Solução	Erro relativo para $\tilde{F}$	Erro relativo para $F$
$u_1$	$1.4260 \cdot 10^{-10}$	$1.4260 \cdot 10^{-10}$
$u_2$	$2.6216 \cdot 10^{-10}$	$2.6216 \cdot 10^{-10}$
$u_3$	$3.0015 \cdot 10^{-6}$	$3.0015 \cdot 10^{-6}$
$u_4$	$1.9406 \cdot 10^{-5}$	$1.9406 \cdot 10^{-5}$

Tabela 5.4: Erros relativos na norma  $L^2$  com respeito a  $\tilde{F}$  e a  $F$ .

Os erros coincidem porque as próprias funções coincidem na imagem de cada solução.

## Referências bibliográficas

- [1] CAL NETO, J. T.; TOMEI, C.. Numerical analysis of semilinear elliptic equations with finite spectral interaction. *J. Math. Anal. Appl.*, 395(1):63–77, 2012.
- [2] MALTA, I.; SALDANHA, N. C. ; TOMEI, C.. Correction of “Morin singularities and global geometry in a class of ordinary differential operators” (*Topol. Methods Nonlinear Anal.* 10 (1997), 37–169) [mr1646631]. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 32(2):411–414, 2008.
- [3] DOLPH, C. L.. Nonlinear integral equations of the Hammerstein type. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 66:289–307, 1949.
- [4] HAMMERSTEIN, A.. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. *Acta Math.*, 54(1):117–176, 1930.
- [5] AMBROSETTI, A.; PRODI, G.. On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 93:231–246, 1972.
- [6] BERGER, M. S.; PODOLAK, E.. On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem. *Indiana Univ. Math. J.*, 24:837–846, 1974/75.
- [7] MALTA, I.; SALDANHA, N. C. ; TOMEI, C.. The numerical inversion of functions from the plane to the plane. *Math. Comp.*, 65(216):1531–1552, 1996.
- [8] TOMEI, C.; ZACCUR, A.. Geometric aspects of Ambrosetti-Prodi operators with Lipschitz nonlinearities. In: *ANALYSIS AND TOPOLOGY IN NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS*, volumen 85 de *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, p. 445–456. Birkhäuser/Springer, Cham, 2014.
- [9] CIARLET, P. G.. The finite element method for elliptic problems, volumen 40 de *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Reprint of the 1978 original [North-Holland, Amsterdam; MR0520174 (58 #25001)].

- [10] WHITNEY, H.. On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Ann. of Math. (2), 62:374–410, 1955.
- [11] MORIN, B.. Formes canoniques des singularités d’une application différentiable. C. R. Acad. Sci. Paris, 260:6503–6506, 1965.
- [12] BREUER, B.; MCKENNA, P. J. ; PLUM, M.. Multiple solutions for a semilinear boundary value problem: a computational multiplicity proof. J. Differential Equations, 195(1):243–269, 2003.