5
Formulação Dinâmica Não Linear no Domínio da Frequência

No Capítulo 2, foram apresentadas as formulações para a análise dinâmica de estruturas reticuladas no domínio do tempo, sendo uma informação importante vinda desta análise a resposta da estrutura na região de ressonância. Porém, para a obtenção da resposta em frequência através da análise no domínio do tempo, é necessário obter a resposta do sistema estrutural na fase permanente do movimento, como pode ser visto, por exemplo, em Galvão (2004) e Silva (2009). Isto pode resultar em um grande esforço computacional para estruturas com grande número de graus de liberdade. Este esforço aumenta ainda mais se a estrutura apresenta um comportamento não linear. Neste caso, a resposta em frequência se torna bem mais complexa que no caso linear em virtude da possibilidade de soluções coexistentes para certas frequências de excitação, estáveis e instáveis, e bifurcações que dão origem a diversos pontos limite ao longo da curva de ressonância. Além disto, muitos algoritmos de integração numérica apresentam um amortecimento numérico que comprometem o cálculo da magnitude da resposta permanente, em particular em sistemas com longos transientes.

No caso de estruturas submetidas a excitações sísmicas, há um grande interesse em conhecer suas propriedades em frequência, já que a vulnerabilidade da estrutura durante os eventos sísmicos depende do conteúdo de frequências e da faixa de valores que concentra a maior potência sísmica. Na presente tese, propõe-se uma técnica incremental-iterativa para o cálculo da resposta em frequência de sistemas estruturais reticulados não lineares.

A transformação das equações discretizadas de movimento através de elementos finitos para o domínio da frequência é feita através do método do balanço harmônico clássico para o caso linear, seguindo a formulação apresentada em Pasquetti (2008), juntamente com o método de Galerkin no tempo e de técnicas de continuação.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

Para a análise não linear, é usada uma variante do método do balanço harmônico juntamente com o método de Galerkin para obtenção das equações algébricas não lineares no domínio da frequência. A formulação é uma adaptação particular do método proposto por Cheung e Chen (1990) e generalizado para o uso em modelos de elementos finitos por Chen *et al* (2001). Para a análise não linear é considerada apenas a não linearidade geométrica dos elementos estruturais.

5.1. Obtenção de Curvas de Ressonância Através da Análise no Tempo

Para a obtenção das curvas de ressonância de uma estrutura através da análise no tempo é necessário submeter à estrutura a uma excitação harmônica com uma frequência de excitação ω que é multiplicada por um vetor de cargas de referência. Neste caso, a Equação (2.54), pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{M\ddot{u}}(t) + \boldsymbol{C\dot{u}}(t) + \boldsymbol{F_{int}}(t) = F\cos(\omega t)\,\boldsymbol{F_r} \tag{5.1}$$

onde F e ω são a magnitude e frequência da excitação harmônica, respectivamente.

A técnica mais simples para obter as curvas de ressonância para sistemas não lineares sob uma excitação harmônica consiste em fazer várias análises no tempo, variando-se a frequência de excitação. As análises no tempo são geralmente feitas por integração direta das equações de equilíbrio. Estas análises devem ser feitas até se alcançar a fase permanente do movimento, tal como mostrado na Figura 5.1.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

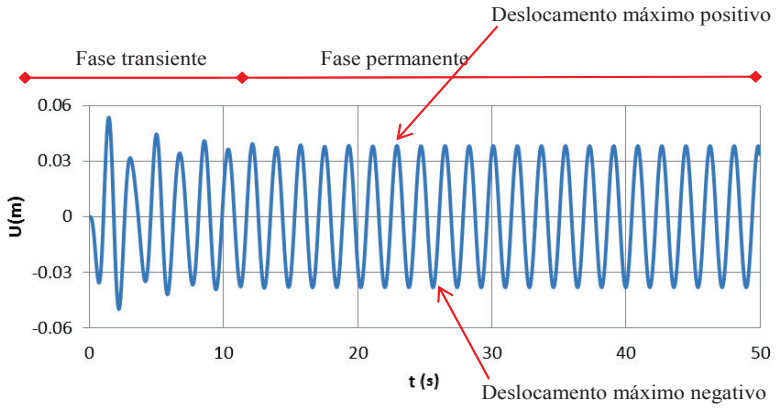

Figura 5.1 – Variação do deslocamento no tempo de um sistema de um grau de liberdade submetido a uma carga harmônica com frequência de excitação ω; fase transiente e fase permanente.

A curva de ressonância é obtida mapeando os deslocamentos máximos na fase permanente correspondente a cada valor de frequência considerado. Para o caso de análises lineares o deslocamento máximo negativo e positivo tem a mesma magnitude. Porém, em análises não lineares, há a possibilidade de que estes valores sejam diferentes, como é o caso de estruturas com não linearidade geométrica quadrática. A curva de ressonância pode ser expressa pela relação entre a frequência de excitação e a norma do deslocamento máximo.

Uma desvantagem deste método, mesmo em análises lineares, é a necessidade de continuar a análise no tempo até se alcançar a fase permanente. Isto depende diretamente das propriedades de amortecimento da estrutura e das não linearidades, podendo levar a um grande esforço computacional em sistemas com um grande número de graus de liberdade. A principal dificuldade é, entretanto, mapear pontos onde há multiplicidade de soluções, incluindo soluções instáveis.

5.2.
Método do Balanço Harmônico

O Método do Balanço Harmônico (MBH) é um dos métodos mais simples usados para transformar um sistema do domínio do tempo para o domínio da frequência. Este método permite a transformação de um sistema de equações diferenciais, lineares ou não lineares, em um sistema de equações algébricas. A

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

ideia básica deste método está na aproximação da solução de uma equação diferencial por uma série truncada de Fourier. Portanto, uma função solução $x(t)$ pode ser expressa como:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} [A_n cos(n\omega t) + B_n sen(n\omega t)] \tag{5.2}$$

onde A_n e B_n são amplitudes do enésimo harmônico e N é o número de harmônicos usados na aproximação. Esta aproximação deve ser substituída na equação diferencial, e, após se fazer a transformação de potências e produtos de funções harmônicas em somas de harmônicos, deve ser feito o balanço de harmônicos coletando todos os coeficientes de cada um dos harmônicos presentes na equação e igualando-os a zero. Este processo tem como resultado um sistema de equações algébricas onde as variáveis a serem determinadas são as amplitudes modais A_n e B_n e a frequência de excitação, ω. Para não linearidades polinomiais em que a função solução $x(t)$ está elevada a uma potência inteira na equação diferencial, é útil expandir as potencias dos termos trigonométricos, através das relações de identidade com ângulos múltiplos. Por exemplo, considerando potências cúbicas e quárticas, podem ser consideradas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \big(cos(n\omega t)\big)^3 &= \tfrac{3}{4} cos(n\omega t) + \tfrac{1}{4} cos(3n\omega t) \\ \big(cos(n\omega t)\big)^4 &= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2} cos(2n\omega t) + \tfrac{1}{8} cos(4n\omega t) \end{aligned} \tag{5.3}$$

O processo descrito anteriormente é aplicado sob a premissa que a equação diferencial é homogênea ou que o termo independente $f(t)$ é também expresso como uma combinação dos harmônicos. Porém, se este não for o caso, ainda é possível usar o MBH expandindo o termo independente $f(t)$ em uma série de Fourier que contenha os mesmos harmônicos empregados na aproximação da função solução $x(t)$, ou seja:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N} [C_n cos(n\omega t) + D_n sen(n\omega t)] \tag{5.4}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

onde os coeficientes da série C_n e D_n podem ser obtidos levando em conta a ortogonalidade dos harmônicos.

5.3. Formulação Linear do Equilíbrio Dinâmico na Frequência

Usando o MBH, descrito na seção anterior, a resposta no tempo do campo dos deslocamentos pode ser determinada como:

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{n=0}^{N} [\boldsymbol{A}_n cos(n\omega t) + \boldsymbol{B}_n sen(n\omega t)] \tag{5.5}$$

onde $\boldsymbol{A}_n$ e $\boldsymbol{B}_n$ são os vetores que contêm as componentes nodais da amplitude do enésimo harmônico e N é o número de harmônicos usados na aproximação. Considerando o sistema linear, onde o vetor de forças internas é dado por $\boldsymbol{F_{int}}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t)$, é necessário apenas o segundo termo da Equação (5.5), isto é:

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{A}_1 cos(\omega t) \ + \boldsymbol{B}_1 sen(\omega t) \tag{5.6}$$

Substituindo a equação anterior na equação (5.1) obtém-se:

$$(\omega \boldsymbol{C}.\boldsymbol{A}_1 - (\omega^2 \boldsymbol{M} - \boldsymbol{K}).\boldsymbol{B}_1) cos(\omega t) - ((-\omega^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}).\boldsymbol{A}_1 + \omega \boldsymbol{C}.\boldsymbol{B}_1) sen(\omega t) = F.\boldsymbol{F_r}.\cos(\omega t) \tag{5.7}$$

Fazendo o balanço dos harmônicos, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \omega \boldsymbol{C} & -\omega^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} \\ -\omega^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} & -\omega \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{B}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F.\boldsymbol{F_r} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

A equação (5.8) pode ainda ser representada de forma mais compacta da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{K}}(\omega).\overline{\boldsymbol{A}} - \overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{0} \tag{5.9}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

onde:

$$\overline{\mathbf{K}}(\omega) = \begin{bmatrix} \omega \boldsymbol{C} & -\omega^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} \\ -\omega^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} & -\omega \boldsymbol{C} \end{bmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{A}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{B}_1 \end{Bmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{F}} = \begin{Bmatrix} F.\boldsymbol{F_r} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

sendo a frequência de excitação ω e o vetor de amplitudes modais $\overline{\boldsymbol{A}}$ as variáveis a serem determinadas. A matriz $\overline{\mathbf{K}}(\omega)$ é conhecida como matriz de transferência ou matriz de impedância. Cabe salientar que, apesar de ser uma análise linear, o sistema de equações é não linear. Portanto, é necessário o emprego de um método de solução para sistemas de equações não lineares.

5.4. Formulação Não Linear do Equilíbrio Dinâmico na Frequência: Método do Balanço Harmônico-Galerkin

Para a consideração do comportamento não linear nas estruturas, é usada uma variante do MBH descrito anteriormente. Neste caso, considerando que na fase permanente do movimento há somente vibrações periódicas, é conveniente a mudança da variável do tempo t para uma variável de tempo adimensional τ através de:

$$\tau = \omega t \tag{5.11}$$

onde ω é a frequência do movimento periódico, Substituindo a equação (5.11) na equação (5.1), chega-se ao seguinte sistema de equação de movimento:

$$\omega^2 \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau) + \omega \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}(\tau) + \boldsymbol{Fi}(\boldsymbol{u}(\tau)) = F\cos(\tau)\boldsymbol{F_r} \tag{5.12}$$

Da mesma forma que no caso do balanço harmônico tradicional, o campo de deslocamentos é aproximado por uma série truncada de Fourier. Logo, cada componente do vetor de deslocamentos pode ser aproximada por:

$$u_i(\tau) = \sum_{n=0}^{N} \left[a_{i,n} cos(n\tau) + b_{i,n} sen(n\tau) \right] \tag{5.13}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

onde $a_{i,n}$ e $b_{i,n}$ são as componentes dos vetores de amplitude modal do enésimo harmônico. Para a consideração de não linearidades de natureza quadrática e cúbica, a mínima aproximação possível é dada pela soma dos dois primeiros termos da série de Fourier. Adotando então esta aproximação a componente de deslocamento é aproximada por:

$$u_i(\tau) = a_{i,0} + b_{i,1}cos(\tau) + c_{i,1}sen(\tau) \tag{5.14}$$

É importante ressaltar que esta aproximação é adotada supondo que o efeito da não linearidade é pequeno. Para estruturas com forte não linearidade geométrica devem ser adicionados mais termos da série descrita pela equação (5.13), aumentando a ordem do sistema algébrico a ser resolvido. No caso linear e para sistemas com não linearidade cúbica, pode-se usar a aproximação:

$$u_i(\tau) = a_{i,1}cos(\tau) + b_{i,1}sen(\tau) \tag{5.15}$$

De uma forma mais compacta a equação (5.14) pode ser rescrita como:

$$u_i = \boldsymbol{C}\,\overline{\boldsymbol{a}}_i \tag{5.16}$$

onde:

$$\boldsymbol{C}(\tau) = \langle 1, sen(\tau), \cos(\tau)\rangle\text{, e } \overline{\boldsymbol{a}}_i = \langle a_{i,0}, b_{i,1}, c_{i,1}\rangle^T \tag{5.17}$$

A partir das componentes nodais, pode ser obtida a seguinte relação:

$$\boldsymbol{u}(\tau) = \boldsymbol{S}(\tau).\overline{\boldsymbol{A}} \tag{5.18}$$

com:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

$$\boldsymbol{S}(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}(\tau) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}(\tau) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}(\tau) & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}(\tau) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}(\tau) \end{bmatrix}_{NGLx3NGL}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}} = \langle \overline{\boldsymbol{a}}_1, \overline{\boldsymbol{a}}_2, \dots, \overline{\boldsymbol{a}}_{NGL} \rangle_{1x3NGL} \tag{5.19}$$

onde *NGL* é o número de graus de liberdade.

Substituindo então a equação (5.18) na equação (5.12), obtém-se:

$$\omega^2 \boldsymbol{M}.\ddot{\boldsymbol{S}}(\tau)\overline{\boldsymbol{A}} + \omega \boldsymbol{C}.\dot{\boldsymbol{S}}(\tau)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Fi}(\boldsymbol{S}(\tau).\overline{\boldsymbol{A}}) = F.\cos(\tau)\boldsymbol{F_r} \tag{5.20}$$

Para eliminar a variável temporal τ, o resíduo ponderado calculado multiplicado ambos os lados da equação (5.20) por uma função peso e integrando-os com respeito à variável periódica τ no intervalo $\tau = 0 - 2\pi$ é minimizado. Para esta ponderação é adotado o método de Galerkin, onde a função peso é a própria função de aproximação, e que, neste caso, é dada pela matriz $\boldsymbol{S}(\tau)$. Realizada esta ponderação, obtém-se a partir de (5.20):

$$\int_0^{2\pi} \left[\boldsymbol{S}(\tau)^{\boldsymbol{T}} \left(\omega^2 \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{S}}(\tau)\overline{\boldsymbol{A}} + \omega \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{S}}(\tau)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Fi}(\boldsymbol{S}(\tau)\overline{\boldsymbol{A}})\right)\right] d\tau$$

$$= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{F_0} \cos(\tau) d\tau \tag{5.21}$$

Reescrevendo a equação anterior de uma forma mais compacta, tem-se:

$$\omega^2 \overline{\boldsymbol{M}}\ \overline{\boldsymbol{A}} + \omega \overline{\boldsymbol{C}}\ \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{Fi}}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \overline{\boldsymbol{F}} \tag{5.22}$$

com:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^T \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{S}}(\tau).\, d\tau$$

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^T \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{S}}(\tau).\, d\tau$$

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^T\, F\cos(\tau)\boldsymbol{F_r}\, d\tau$$

$$\overline{\boldsymbol{Fi}}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^T \boldsymbol{Fi}(\boldsymbol{S}(\tau), \overline{\boldsymbol{A}}) d\tau \tag{5.23}$$

A equação (5.22) define um sistema algébrico de equações não lineares, que tem como incógnitas a frequência ω e o vetor de amplitudes modais $\overline{\boldsymbol{A}}$. A determinação do vetor $\overline{\boldsymbol{Fi}}(\overline{\boldsymbol{A}})$ depende da expressão usada para a determinação $\boldsymbol{Fi}(\boldsymbol{u}(\tau))$ que contém a fonte do comportamento não linear do sistema estrutural. Para a aplicação do método anteriormente descrito, é necessária uma expressão expedita de Fi em função dos deslocamentos, resultando em um vetor dependente das amplitudes $\overline{\boldsymbol{Fi}}(\overline{\boldsymbol{A}})$. Uma vez determinado $\overline{\boldsymbol{Fi}}(\overline{\boldsymbol{A}})$, o passo seguinte é a solução do sistema algébrico de equações não lineares, como mostrado a seguir.

5.5. Solução do Sistema de Equações Não Lineares na Frequência: Controle de Arco

Como visto nos itens anteriores, a análise no domínio da frequência recai na solução de um sistema de equações não lineares, mesmo para problemas com comportamento linear, como mostrado nas equações (5.9) e (5.22). Faz-se então necessário o emprego de um algoritmo de solução de equações não lineares para a determinação da relação entre a frequência de excitação e o vetor de amplitudes modais. Neste contexto, as equações (5.9) e (5.22) podem ser definidas de forma mais geral como:

$$\boldsymbol{R}(\omega, \overline{\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{0} \tag{5.24}$$

Através da análise incremental, pode ser estabelecido que o equilíbrio dinâmico no domínio da frequência para um incremento i é dado por:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

$$\boldsymbol{R}(\omega_i, \overline{\boldsymbol{A}}_i) = \boldsymbol{0} \tag{5.25}$$

onde o valor das incógnitas no incremento i é calculado a partir do equilíbrio do incremento anterior já conhecido. Tem-se então:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \Delta\omega_i, \quad \overline{\boldsymbol{A}}_i = \overline{\boldsymbol{A}}_{i-1} + \Delta\overline{\boldsymbol{A}}_i \tag{5.26}$$

Substituindo a equação anterior na equação (5.25), obtém-se:

$$\boldsymbol{R}(\omega_{i-1} + \Delta\omega_i, \overline{\boldsymbol{A}}_{i-1} + \Delta\overline{\boldsymbol{A}}_i) = \boldsymbol{0} \tag{5.27}$$

Os incrementos $\Delta\omega_i$ e $\Delta\overline{\boldsymbol{A}}_i$ são as novas incógnitas a serem obtidas, as quais podem ser calculadas usando um processo iterativo, a saber:

$$\Delta{\omega_i}^k = \Delta{\omega_i}^{k-1} + \delta{\omega_i}^k, \Delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k = \Delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^{k-1} + \delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k \tag{5.28}$$

sendo $\delta{\omega_i}^k$ e $\delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k$ as variações ou corretores dos incrementos de frequência e amplitude respectivamente e o índice sobrescrito k indica o número da iteração. Os corretores $\delta{\omega_i}^k$ e $\delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k$ podem ser obtidos através da aproximação de Newton, variando a equação (5.27), ou seja:

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}^{k-1}}{\partial \overline{\boldsymbol{A}}_i}\delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k + \frac{\partial \boldsymbol{R}^{k-1}}{\partial \omega_i}\delta{\omega_i}^k = \boldsymbol{R}^{k-1} \tag{5.29}$$

ou, de maneira mais compacta, como:

$$\overline{\boldsymbol{Km}}^{k-1}\delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k + \delta{\omega_i}^k\overline{\boldsymbol{f}}^{k-1} = \boldsymbol{R}^{k-1} \tag{5.30}$$

Para resolver o sistema de equações (5.30), é necessária a adição de uma equação de restrição. Na presente seção é empregada a restrição do comprimento de arco formulada por Crisfield (1981) e por Ramm (1981) com a finalidade de passar pelos diversos pontos limites presentes nas curvas de ressonância não lineares. A adaptação da restrição de arco para solução de sistemas não lineares na frequência pode ser vista nos trabalhos de Ferreira e Serpa (2005) e de Pasquetti

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

(2008). No presente trabalho é usada uma adaptação particular do método do controle do comprimento de arco para a solução do sistema de equações algébricas não lineares vindas da aplicação do método do MBH. Para este problema específico, a equação de restrição do comprimento de arco é dada por:

$$g\left(\Delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k, \Delta\omega_i{}^k\right) = \left(\Delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k\right)^T . \Delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k + \left(\Delta\omega_i{}^k\right)^2 \left(\overline{\boldsymbol{f}}^{k-1}\right)^{\boldsymbol{T}} . \overline{\boldsymbol{f}}^{k-1} - \Delta l_i{}^{\mathbf{2}} = 0 \qquad (5.31)$$

onde Δl é o parâmetro de controle prescrito e que permanece constante durante todo o processo iterativo. Combinando as equações (5.27), (5.28), (5.30) e (5.31), chega-se ao cálculo do corretor de frequência, $\delta\omega_i{}^k$, a saber:

$$\delta\omega_i{}^k = \begin{cases} \pm \dfrac{\Delta \boldsymbol{l_i}^{\mathbf{2}}}{\sqrt{\boldsymbol{v^T}.\boldsymbol{v} + \overline{\boldsymbol{f}}^{k-1^{\boldsymbol{T}}}.\overline{\boldsymbol{f}}^{k-1}}} & se\ k = 1 \\ -\dfrac{\boldsymbol{r}^{k^T}.\boldsymbol{v}^k}{\boldsymbol{v}^{k^{\boldsymbol{T}}}.\boldsymbol{v}^k} & se\ k > 1 \end{cases} \qquad (5.32)$$

com:

$$\boldsymbol{v}^k = (\overline{\boldsymbol{Km}}^{k-1})^{-\mathbf{1}}.\overline{\boldsymbol{f}}^{k-1}, \boldsymbol{r}^k = (\overline{\boldsymbol{Km}}^{k-1})^{-\mathbf{1}}.\boldsymbol{R}^{k-1} \qquad (5.33)$$

O sinal do primeiro corretor (preditor) de frequência, $\delta\omega_i{}^1$, é determinado seguindo o critério de trabalho positivo, ou seja:

$$sign\left(\delta\omega_i{}^1\right) = sign\left((\boldsymbol{v}^k)^{\boldsymbol{T}}.\overline{\boldsymbol{f}}^{k-1}\right) \qquad (5.34)$$

onde $sign(.)$ é o operador que devolve o sinal da expressão dentro do parêntese. O corretor do vetor de amplitudes pode ser calculado a partir da equação (5.30) como:

$$\delta\overline{\boldsymbol{A}}_i{}^k = \boldsymbol{r}^k - \delta\omega_i{}^k.\boldsymbol{v}^k \qquad (5.35)$$

Para o caso do método do balanço harmônico clássico usado na análise linear, as seguintes particularizações podem ser obtidas:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

$$\overline{\boldsymbol{Km}} = \begin{bmatrix} \omega \boldsymbol{C} & -\omega^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} \\ -\omega^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} & -\omega \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & -2\omega \boldsymbol{M} \\ -2\omega \boldsymbol{M} & -\boldsymbol{C} \end{bmatrix} . \bar{\boldsymbol{A}} \tag{5.36}$$

Analogamente, para o MBH–Galerkin na análise não linear, podem ser deduzidas as seguintes expressões:

$$\overline{\boldsymbol{Km}} = \omega^2 \bar{\boldsymbol{M}} + \omega \bar{\boldsymbol{C}} + \frac{\partial \overline{\boldsymbol{Fi}}(\bar{\boldsymbol{A}})}{\partial \bar{\boldsymbol{A}}}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}} = 2\omega \bar{\boldsymbol{M}} + \bar{\boldsymbol{C}} \tag{5.37}$$

5.6. Não Linearidade Geométrica na Frequência

Como visto na seção 5.4, o equilíbrio dinâmico no domínio da frequência precisa de uma solução expedita para a determinação das forças internas dependentes dos deslocamentos. Em virtude da análise incremental, o vetor de deslocamentos pode ser expresso como:

$$\boldsymbol{u}(t_i) = \boldsymbol{u}(t_{i-1}) + \Delta \boldsymbol{u}(t) \tag{5.38}$$

e o vetor de forças internas pode ser calculado como:

$$\boldsymbol{F_{int}}(t_i) = \boldsymbol{F_{int}}(t_{i-1}) + \Delta \boldsymbol{F_{int}}(t) \tag{5.39}$$

O incremento do vetor de forças internas pode ser deduzido a partir das relações cinemáticas de deformação e deslocamento e levando em consideração as relações constitutivas entre tensões e deformações. Essas relações dependem do tipo de formulação não linear adotada. Este tópico já foi tratado no Capítulo 2. Na presente tese é estudada apenas a não linearidade geométrica, dependente dos esforços internos. Desta forma, o incremento de forças internas pode ser aproximado por:

$$\Delta \boldsymbol{F_{int}} = (\mathbf{K}_{\boldsymbol{L}} + \mathbf{K}_{\boldsymbol{NL}}) \Delta \boldsymbol{u} \tag{5.40}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

onde $\mathbf{K_L}$ é a matriz de rigidez linear elástica e $\mathbf{K_{NL}}$ é a matriz que contém os efeitos não lineares, ambas definidas na equação (2.22). Considerando uma formulação linearizada, a matriz de rigidez geométrica para um elemento plano de viga-coluna em coordenadas locais é expressa por Silva (2009) como:

$$K_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{P}{L} & \frac{M1+M2}{L^2} & 0 & -\frac{P}{L} & -\frac{M1+M2}{L^2} & 0 \\ \frac{M1+M2}{L^2} & \frac{6\,P}{5\,L} & \frac{P}{10} & -\frac{M1+M2}{L^2} & -\frac{6\,P}{5\,L} & \frac{P}{10} \\ 0 & \frac{P}{10} & \frac{P\,L}{15} & 0 & -\frac{P}{10} & -\frac{P\,L}{30} \\ -\frac{P}{L} & -\frac{M1+M2}{L^2} & 0 & \frac{P}{L} & \frac{M1+M2}{L^2} & 0 \\ -\frac{M1+M2}{L^2} & -\frac{6\,P}{5\,L} & -\frac{P}{10} & \frac{M1+M2}{L^2} & \frac{6\,P}{5\,L} & -\frac{P}{10} \\ 0 & \frac{P}{10} & -\frac{P\,L}{30} & 0 & -\frac{P}{10} & \frac{P\,L}{15} \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

sendo P o esforço normal médio e $M1$ e $M2$ os momentos fletores do nó inicial e final, respectivamente. Em um elemento de barra, os esforços internos são função do campo de deslocamentos longitudinal $u(x)$ e transversal $v(x)$. No caso de uma barra de seção constante, tais esforços são dados por:

$$P = EA\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{1}{L}\int_0^L \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^2 . dx\right)$$

$$M = EI\left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\right) \tag{5.42}$$

Os campos de deslocamentos longitudinais $u(x)$ e transversais $v(x)$ são obtidos de acordo com a equação (2.19) como:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2} H_i(x)\mathrm{u}_i \ , v(x) = \sum_{i=3}^{6} H_i(x)\ \mathrm{u}_i \tag{5.43}$$

onde as funções de interpolação, $H_i(x)$, estão descritas em (2.20). Os incrementos dos deslocamentos nodais podem ser expressos em função dos incrementos das amplitudes modais, de forma análoga à equação (5.18), logo:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

$$\Delta \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{S}(\tau).\Delta\overline{\boldsymbol{A}} \tag{5.44}$$

Combinando as equações (5.18), (5.39), (5.40) e (5.44), o vetor de forças internas $\boldsymbol{F_{int_i}}$ pode ser obtido como:

$$\boldsymbol{F_{int_i}} = \boldsymbol{K_L S}(\tau)\overline{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{F_{int_{i-1}}} + \boldsymbol{K_{NL} S}(\tau)\Delta\overline{\boldsymbol{A}} \tag{5.45}$$

Finalmente, o vetor de forças internas no domínio da frequência, definido na equação (5.23), pode ser calculado como:

$$\overline{\boldsymbol{Fi_i}}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{L}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{i}} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{NL}}\Delta\overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{Fi_{i-1}}}(\overline{\boldsymbol{A}}) \tag{5.46}$$

onde:

$$\overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{L}} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^T \boldsymbol{K_L S}(\tau) d\tau$$

$$\overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{NL}} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^T \boldsymbol{K_{NL} S}(\tau) d\tau$$

$$\overline{\boldsymbol{Fi_{i-1}}}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^T \boldsymbol{F_{NL_{i-1}}} d\tau \tag{5.47}$$

É importante salientar que, se for desconsiderado o comportamento não linear, ou seja, se $\overline{\boldsymbol{Fi_{i-1}}}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{L}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{i}}$, o sistema de equações de equilíbrio no domínio da frequência definido na equação (5.22) resulta no mesmo obtido através do MBH clássico, definido através da equação (5.9).

5.7. Rotação da Matriz de Rigidez Não Linear no Domínio da Frequência e Montagem do Sistema Global

Para a montagem do sistema global de equações, as matrizes $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{K_L}$ e $\boldsymbol{K_{NL}}$ definidas nas equações (2.55) e (2.22), respectivamente, devem estar no sistema global de coordenadas. As deduções feitas para $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{K_L}$ são aplicáveis a qualquer sistema de referência, sendo possível se trabalhar com as matrizes já transformadas para o sistema global. Já $\boldsymbol{K_{NL}}$, definida na equação (5.41), está

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

formulada em referência ao sistema local do elemento, sendo necessária sua transformação para o sistema de coordenadas globais. Com base na expressão (2.48), a matriz $\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{NL}}$ pode ser reescrita como:

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{NL}} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^T \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{NL}} \boldsymbol{T} \boldsymbol{S}(\tau) d\tau \tag{5.48}$$

onde $\boldsymbol{T}$ é a matriz de rotação definida em (2.46) e que está em função do ângulo α, que é a inclinação do elemento com respeito ao eixo horizontal das coordenadas globais. Este processo pode ser inconveniente em termos da implementação de um código de programação para a montagem de $\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{NL}}$, já que os elementos de $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{NL}}$ têm expressões extensas, quando expressos em função dos deslocamentos nodais, mesmo no sistema global. Estas expressões seriam ainda mais extensas se feita a transformação para um ângulo arbitrário α após a transformação. Neste contexto, é conveniente contar com uma matriz de transformação que opere após a integração com respeito à variável τ, de tal forma que $\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{NL}}$ possa ser obtida em coordenadas globais como:

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{NL}} = \boldsymbol{T'}^T \int_0^{2\pi} \boldsymbol{S}(\tau)^T \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{NL}} \boldsymbol{S}(\tau) d\tau \boldsymbol{T'} \tag{5.49}$$

onde $\boldsymbol{T'}$ é uma matriz de rotação equivalente que cumpre com a seguinte igualdade:

$$\boldsymbol{T'}^T \boldsymbol{S}(\tau)^T = \boldsymbol{S}(\tau)^T \boldsymbol{T}^T \tag{5.50}$$

Aproveitando a condição de matriz diagonal em blocos de $\boldsymbol{S}(\tau)$, da ortogonalidade da matriz de rotação $\boldsymbol{T}$ e por meio de manipulações matriciais, pode ser obtida uma expressão para obter as componentes da matriz $\boldsymbol{T'}$ em função dos elementos da matriz de rotação $\boldsymbol{T}$, que pode ser montada por blocos da seguinte forma:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA

$$\boldsymbol{T'} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t'}_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{t'}_{1,NGL} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{t'}_{NGL,1} & \cdots & \boldsymbol{t'}_{NGL,NGL} \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

onde componente $\boldsymbol{t'}_{i,j}$ são submatrizes calculadas através de:

$$\boldsymbol{t'}_{i,j} = \boldsymbol{T}_{i,j}\boldsymbol{I_3} \tag{5.52}$$

onde $\boldsymbol{I_3}$ é a matriz identidade de ordem 3x3. Por fim, a montagem do sistema global é feito de forma similar ao procedimento adotado no método da rigidez direta, de forma análoga ao processo feito na análise no domínio do tempo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012320/CA