

2 Formulação Não Linear Estática e Dinâmica no Domínio do Tempo

Neste Capítulo são descritas todas as formulações necessárias para a análise não linear estática e dinâmica no domínio do tempo de estruturas reticulares no plano. Estão incluídos neste Capítulo: a formulação do elemento finito de tipo barra, a discretização do sistema estrutural, a consideração da flexibilidade da base, o equilíbrio dinâmico no domínio do tempo, as técnicas para solução de sistemas de equações não lineares e os algoritmos empregados na integração direta das equações de movimento linear e não linear.

2.1. Formulação do Elemento Finito Não Linear

Muitos pesquisadores têm estudado diversas formulações para a medição de deformações nos elementos estruturais que consideram os efeitos de grandes deslocamentos e grandes deformações. Neste contexto, podem ser citados os trabalhos feitos por Wen e Ramhinzadeh (1983), Chajes e Churchill (1987), Goto e Chen (1987), Wong e Tin-Loi (1990), Alves (1993), Torkamani *et al.* (1997), Pacoste e Erikson (1995, 1997), Galvão (2000,2004) e Silva (2009), os quais fornecem contribuições importantes no estudo de formulações Lagrangianas ou materiais. Nesta seção são descritas as formulações de elementos finitos para elementos tipo barra, usadas no presente trabalho. Cabe salientar que, como o foco da presente tese está no estudo de estruturas esbeltas, são consideradas apenas as deformações geradas pela flexão dos elementos estruturais, ou seja, seguindo a teoria de Euler Bernoulli.

2.1.1. Medidas de deformação não linear

Na presente tese são empregadas duas formulações não lineares para medidas de deformação que utilizam o referencial Lagrangiano atualizado. Estas

formulações estão baseadas na hipótese de viga-coluna de Euler-Bernoulli, as quais estão descritas a seguir.

2.1.1.1. Formulação Não Linear FN1

Andrade (1993) apresenta uma formulação baseada na teoria de Euler-Bernoulli que emprega o referencial Laringiano atualizado. Considerando o tensor de deformações de Green Lagrange, o incremento de deformação axial total do é dado por:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{d\Delta u}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.1)$$

onde Δu é o incremento do deslocamento longitudinal e Δv é o incremento de deslocamento transversal da seção, considerado constante para toda a seção, tal como pode ser visto na Figura 2.1. A equação (2.3) pode ser expressa na seguinte forma aditiva:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx} \quad (2.2)$$

onde Δe_{xx} e $\Delta \eta_{xx}$ são as parcelas linear e não linear, respectivamente, e que são expressas em função dos deslocamentos da linha neutra através de:

$$\begin{aligned} \Delta e_{xx} &= \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \\ \Delta \eta_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) + \left(y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

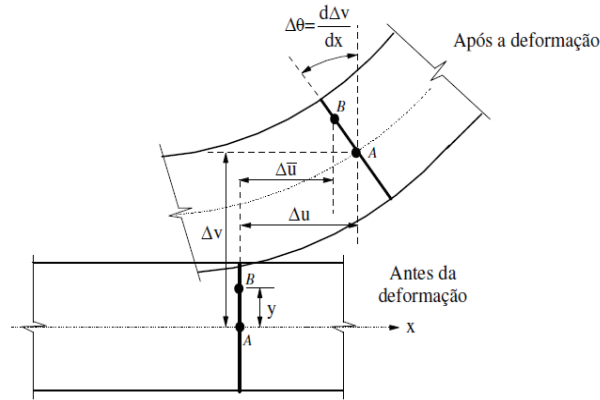


Figura 2.1 – Comportamento da seção transversal do elemento barra. Ref. Silva (2009).

Cabe destacar que, como mencionado em Galvão (2000) e Silva (2009), esta formulação é conveniente quando há pequenas rotações. Portanto, para análise de rotações moderadas é necessário adotar uma formulação que contenha mais termos não lineares para minimizar o erro da aproximação.

2.1.1.2. Formulação Não Linear FN2

Esta teoria, formulada por Yang e Kuo (1994) e usada por Galvão (2004), e mais recentemente por Silva (2009), é também baseada na teoria de Euler-Bernoulli e utiliza o referencial Lagrangiano atualizado. Nesta formulação, são consideradas duas componentes do tensor de Green-Lagrange, ou seja:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \Delta e_{xx} + \Delta \eta_{xx}, \quad \Delta \varepsilon_{xy} = \Delta e_{xy} + \Delta \eta_{xy} \quad (2.4)$$

sendo as parcelas lineares e não linear de cada componente são dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta e_{xx} &= \frac{d\Delta u}{dx} - y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \\ \Delta e_{xy} &= 0 \\ \Delta \eta_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 - 2y \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) + \left(y \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 \right] \\ \Delta \eta_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} + \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cabe ressaltar a existência de outras formulações que consideram o aporte da deformação cisalhante, baseadas na teoria de Timoshenko ou similares, como a mostrada em Silva (2009). Porém, o presente estudo destina-se à análise de estruturas aperticadas compostas por elementos esbeltos onde o efeito cisalhante é reduzido. Como é mencionado em Silva (2009), o emprego de funções lineares para aproximação da deformação axial pode levar ao efeito de membrana. Para reduzir este efeito, é adotada a sugestão de Crisfield (1991) que considera um valor médio do termo $\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2$ na parcela não linear da deformação axial, isto é:

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\Delta u}{dx}\right)^2 - 2y \left(\frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2}\right) + \left(y \frac{d^2\Delta v}{dx^2}\right)^2 + \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2 dx \right] \quad (2.6)$$

A equação anterior também é válida para a formulação não linear FN1.

2.1.2.

Forças Internas Resultantes e Energia Potencial Total

Para o caso da análise utilizando o referencial Lagrangiano atualizado, os esforços internos resultantes em um instante de análise t são calculados a partir de:

$${}^tN = \int_A {}^t\tau_{xx} dA, \quad {}^tQ = \int_A {}^t\tau_{xy} dA, \quad {}^tM = \int_A {}^t\tau_{xx} y dA \quad (2.7)$$

onde N , Q e M são a força axial, força cortante e momento fletor, respectivamente, e τ_{xx} e τ_{xy} são as componentes axial e cisalhante do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff (PK-II). A configuração deformada inicial no instante t , assim como os esforços iniciais nos extremos do elemento no mesmo instante de tempo, são mostrados na Figura 2.2.

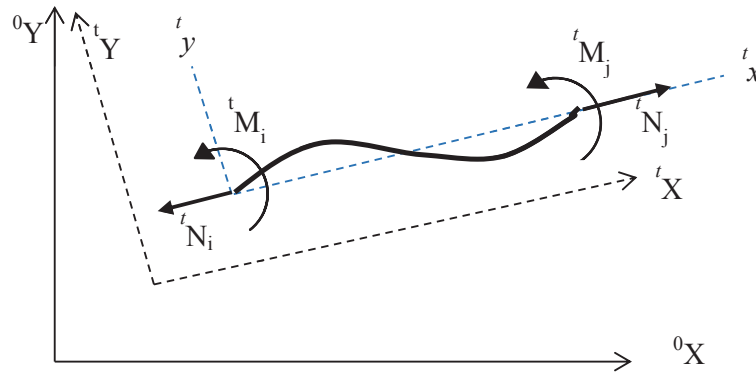


Figura 2.2 – Configuração deformada inicial e esforços nas extremidades.

Segundo a configuração mostrada na Figura 2.2, os esforços internos ao longo do elemento podem ser calculados como:

$$\begin{aligned}
 {}^tN &= {}^tN_i \\
 {}^tM &= - {}^tM_i + ({}^tM_i + {}^tM_j) \frac{{}^tx}{tL} \\
 {}^tQ &= - \frac{({}^tM_i + {}^tM_j)}{tL}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Segundo a teoria de Bernoulli e considerando material elástico linear, a componente de tensão axial longitudinal pode ser escrita como:

$${}^t\tau_{xx} = E {}^t\varepsilon_{xx} \tag{2.9}$$

onde E é o módulo de Young. Já a componente cisalhante da tensão pode ser calculada, seguindo o proposto por Yang e Kuo (1994), por:

$${}^t\tau_{xy} = \frac{E}{2} \left[\left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d^3\Delta v}{dx^3} + \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^3\Delta v}{dx^3} \right] \tag{2.10}$$

onde h é a altura da seção. O incremento energia potencial total do sistema, $\Delta\Pi$, pode ser expresso como:

$$\Delta\Pi = \Delta U + \Delta W \quad (2.11)$$

onde ΔU é o incremento da energia de deformação e ΔW é o trabalho das forças externas. Estas parcelas são dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_V ({}^t\tau_{xx}\Delta\varepsilon_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy})dV + \int_V \left(\frac{E}{2}\Delta\varepsilon_{xx}^2 + 2\Delta\tau_{xy}\Delta\varepsilon_{xy}\right)dV \\ \Delta W &= -\int_S {}^tF_i\Delta u_i dS - \int_S \Delta F_i\Delta u_i dS \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde F_i e ΔF_i são o campo de forças externas e o incremento de estas, respectivamente. A primeira integral em ΔU corresponde à energia devida às tensões iniciais no instante t , que é igual em módulo ao trabalho das forças internas no instante t , portanto cancelam-se dentro do funcional. Levando em conta as expressões (2.3) e (2.5), o funcional $\Delta\Pi$ pode ser reescrito como:

$$\Delta\Pi = U_L + U_{NL} - \int_S \Delta F_i\Delta u_i dS \quad (2.13)$$

onde U_L é a parcela de energia que independe dos deslocamentos, e portanto, pode ser considerada como a parcela linear da energia de deformação:

$$U_L = \int_V \frac{E}{2}\Delta\varepsilon_{xx}^2 dV \quad (2.14)$$

A parcela U_{NL} , que depende das tensões e que a sua vez dependem dos deslocamentos, pode ser calculada de duas formas. A primeira é considerando o sistema linearizado, ou seja, os diferenciais de ordem superior são desprezados (Galvão, 2004). Com esta hipótese, e levando em conta (2.8), U_{NL} é definido por:

$$U_{NL} = U_{\tau} = \int_0^L \left[\frac{{}^t N}{2} \left(\frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \int_0^L \frac{{}^t M}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta u}{dx^2} dx - \int_0^L \frac{{}^t Q}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} dx \quad (2.15)$$

A segunda forma consiste em considerar as parcelas de ordem superior (Silva, 2009; Yang e Kuo, 1994). Assim, tem-se:

$$U_{NL} = U_{\tau} + U_1 + U_2 \quad (2.16)$$

com:

$$U_1 = \int_0^L \left[\frac{EA}{2} \left(\frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) + EI \frac{3}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right)^2 + EI \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \right] dx$$

$$U_2 = \int_0^L \left[\frac{EA}{8} \left(\frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right)^2 + \frac{EI}{8} \left(\frac{d\Delta u^2}{dx} + \frac{d\Delta v^2}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \Delta v}{dx^2} \right) + EI \left(\frac{1}{2} \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2 \Delta v}{dx^2} + \frac{d\Delta u^2}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} \frac{d^3 \Delta v}{dx^3} \right) \right] dx^2 \quad (2.17)$$

Exemplos comparativos de formulações não lineares feitos em Silva (2009) mostram que não há diferença importante entre a consideração completa e linearizada, desde que sejam considerados pequenos incrementos na análise. Portanto, na presente tese, é adotada a formulação considerando o sistema linearizado. Silva (2009) chama a atenção que pelo fato que na formulação do elemento finito é usado um referencial Lagrangiano atualizado, é importante conhecer o estado de tensões ou de deformações no instante de análise t , a saber:

$${}^t \varepsilon = \frac{{}^t P}{EA} + \frac{y}{EI} \left[{}^t M_i - \frac{({}^t M_i + {}^t M_j)}{{}^t L} x \right] \quad (2.18)$$

2.1.3. Discretização do sistema por elementos finitos

A discretização no espaço do sistema estrutural é feita através de uma malha de elementos finitos de viga-coluna, cuja formulação cinemática foi descrita na seção anterior. Os campos de deslocamentos axial e transversal destes elementos, u e v respectivamente, são aproximados por duas famílias de funções. Os deslocamentos axiais são aproximados através de funções de interpolação lineares. Já os deslocamentos transversais são aproximados através de funções polinomiais de terceiro grau conhecidas como funções Hermitianas. Portanto, os deslocamentos desses campos de deslocamento podem ser obtidos como:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^2 H_i(x) \Delta u_i, \Delta v = \sum_{i=3}^6 H_i(x) \Delta u_i \quad (2.19)$$

Onde Δu_i é o deslocamento do i -ésimo grau de liberdade do elemento (ver Figura 2.3), e as funções de interpolação $H_i(x)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \frac{x}{L}, H_2(x) = 1 - \frac{x}{L}, H_3(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ H_4(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, H_5(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, H_6(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3} \end{aligned} \quad (2.20)$$

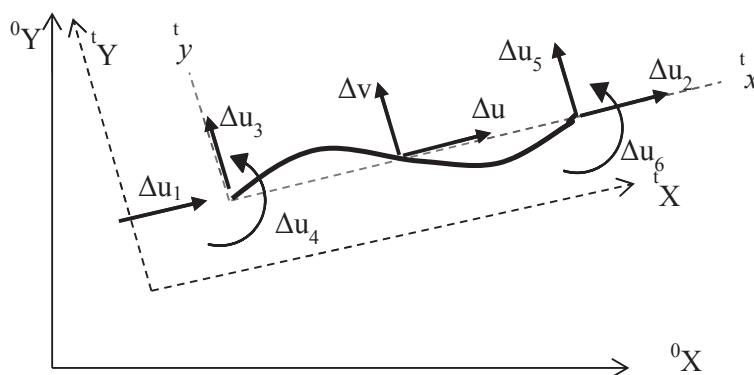


Figura 2.3 – Graus de liberdade do elemento finito de viga-coluna.

2.1.4.

Matriz de rigidez, vetor de forças internas e equilíbrio estático

Introduzindo (2.20) em (2.13) e levando em conta as relações cinemáticas (2.5) e (2.6), assim como as relações constitutivas dadas em (2.9) e (2.10), chega-se ao funcional do incremento de energia total em função do incremento dos deslocamentos nodais (Alves, 1993; Galvão, 2004; e Silva, 2009) através de:

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{u}^T(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau)\Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^T {}^t\mathbf{F}_{int} - \Delta\mathbf{u}^T{}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r \quad (2.21)$$

onde, $\Delta\mathbf{u}$ é o incremento dos deslocamentos nodais, ${}^t\mathbf{F}_{int}$ é o vetor de esforços internos no instante t , \mathbf{F}_r é o vetor de referencia das forças externas, λ é o parâmetro de intensidade de carga externa, \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez elástica linear e \mathbf{K}_τ a matriz de rigidez dependente dos esforços internos. As matrizes de rigidez são dadas por:

$$\mathbf{K}_{L_{i,j}} = \frac{\partial^2 U_L}{\partial \Delta\mathbf{u}_i \partial \Delta\mathbf{u}_j}$$

$$\mathbf{K}_{\tau_{i,j}} = \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \Delta\mathbf{u}_i \partial \Delta\mathbf{u}_j} \quad (2.22)$$

É importante salientar que a matrizes de rigidez \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_τ , definidas em (2.22), encontram-se no sistema local de coordenadas x, y . Aplicando o princípio de energia potencial estacionária, chega-se à seguinte equação de equilíbrio estático do sistema em coordenadas locais, a saber:

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau)\Delta\mathbf{u} + {}^t\mathbf{F}_{int} - {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r = \mathbf{0}, \text{ ou}$$

$$\Delta\mathbf{F}_{int} + {}^t\mathbf{F}_{int} - {}^{t+\Delta t}\lambda\mathbf{F}_r = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

Para eliminar modos espúrios decorrentes de deslocamentos de corpo rígido, Yang e Kuo (1994) propõem calcular o incremento de força interna através dos deslocamentos naturais de cada elemento. Assim, tem-se:

$$\Delta\mathbf{F}_{int} = (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau)\Delta\mathbf{u}_N \quad (2.24)$$

onde:

$$\Delta \mathbf{u}_N^T = [0 \quad 0 \quad \theta_{ci} \quad \delta \quad 0 \quad \theta_{cj}] \quad (2.25)$$

com:

$$\delta = {}^{t+\Delta t}L - {}^tL, \theta_{ci} = \Delta\theta_i - \Psi, \theta_{cj} = \Delta\theta_j - \Psi \quad (2.26)$$

sendo Ψ a rotação de corpo rígido.

2.1.5. Formulação do elemento com ligação semirrígida

A idealização de ligação perfeitamente rígida ou completamente flexível é pouco presente na realidade, principalmente nos sistemas estruturais compostos por pórticos de barras ligadas através de dispositivos externos, como é o caso de edificações em aço. Neste caso o comportamento das conexões ou ligações é um estado intermediário entre os comportamentos perfeitamente rígido ou flexível, existindo rotações relativas entre os elementos que são conectados por estas ligações. Nesta seção, é resumida uma formulação para a inclusão da presença de ligações semirrígidas nas extremidades do elemento finito, caso este possua tal ligação. Galvão (2004) e Silva (2009) apresentam formulações para a inclusão da ligação semirrígida com base nas formulações propostas por Chen *et al* (1996) e Chan e Chui (2000). Neste item é apresentada de forma resumida a formulação descrita em Galvão (2004) e Silva (2009).

Dado que a o grau de liberdade mais afetado pela existência de uma ligação semirrígida é a rotação do nó, a ligação pode ser idealizada como uma mola com uma determinada rigidez à rotação S_c . Então, pode ser considerada uma rotação relativa entre o nó, assumido externo, e a barra, tal como se mostra na Figura 2.4.

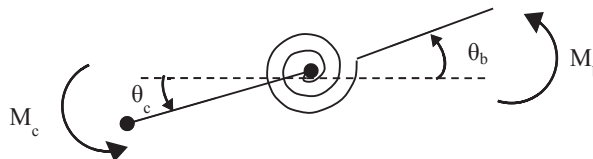


Figura 2.4 – Idealização de ligação semirrígida.

Na Figura 2.4, M_c , θ_c e M_b , θ_b são os momentos e rotações da conexão e do elemento de barra, respectivamente. Do equilíbrio de momentos na conexão, tem-se:

$$M_c = -M_b = S_c(\theta_c - \theta_b) \quad (2.27)$$

A relação incremental entre as rotações e momentos pode ser expressa de forma incremental como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_c \\ \Delta M_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c \\ -S_c & S_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_c \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

A rigidez tangente da ligação semirrígida, S_c , é obtida por:

$$S_c = \frac{dM}{d\phi}, \quad \text{com } \phi = \theta_c - \theta_b \quad (2.29)$$

Considerando os dois extremos das barras, é possível identificar as seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bj} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c & -S_c & 0 & 0 \\ -S_c & S_c + K_{3,3} & K_{3,6} & 0 \\ 0 & K_{6,3} & S_c + K_{6,6} & -S_c \\ 0 & 0 & -S_c & S_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bj} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

onde os termos $K_{i,j}$ correspondem aos termos da matriz de rigidez elástica do elemento viga-coluna. Os esforços nodais rotacionais e cisalhantes do elemento podem então ser representados pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta Q_i \\ \Delta M_j \\ \Delta Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

sendo os deslocamentos nodais dados por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_{ci} \\ \Delta\theta_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & 1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta v_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta v_j \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Combinando as equações (2.28), (2.29), (2.30), (2.31) e (2.32), pode-se, por fim, obter a relação entre os esforços e deslocamentos nodais, ou seja:

$$\{\Delta F\} = [K_e]\{\Delta u\} \quad (2.33)$$

onde:

$$[S_c] = [A_1] \left([S_1] - \frac{1}{\beta} [S_1][S_2][S_1] \right) [A_1]^T \quad (2.34)$$

com:

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} & 1 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} S_{cj} + K_{6,6} & -K_{3,6} \\ -K_{6,3} & S_{ci} + K_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} S_{ci} & 0 \\ 0 & S_{cj} \end{bmatrix}$$

$$\beta = (S_{ci} + K_{3,3})(S_{cj} + K_{6,6}) - K_{3,6}K_{6,3} \quad (2.35)$$

A dimensão da matriz K_e é de ordem 4x4 e corresponde aos graus de liberdade de rotação e deslocamento transversal do elemento. Finalmente, a matriz de rigidez incluindo a possibilidade de ter duas molas nas extremidades é dada por:

$$[K_{sr}] = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & Ke_{2,2} & Ke_{2,1} & K_{2,1} & Ke_{2,6} & Ke_{2,5} \\ K_{3,1} & Ke_{1,2} & Ke_{1,1} & K_{3,1} & Ke_{1,6} & Ke_{1,5} \\ K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} \\ K_{5,1} & Ke_{6,2} & Ke_{6,1} & K_{5,4} & Ke_{6,6} & Ke_{5,6} \\ K_{6,1} & Ke_{5,2} & Ke_{5,1} & K_{6,4} & Ke_{6,5} & Ke_{5,5} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Quando houver um elemento com apenas uma conexão semirrígida, pode se utilizar a mesma formulação, em que se consideram valores de S_c apropriados a cada situação, ou seja, se um dos extremos for rígido, S_c será igual a uma constante de grande magnitude e se for uma articulação, $S_c = 0$.

Outra abordagem é considerar um sistema auxiliar onde as molas aparecem como graus de liberdade adicionais externos, tal como se mostra na Figura 2.5.

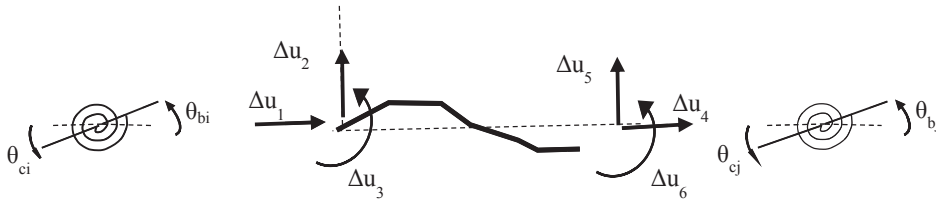


Figura 2.5 – Sistema auxiliar de barra com molas.

A matriz de rigidez do sistema auxiliar é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{M}_i \\ \Delta \mathbf{F} \\ \Delta \mathbf{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_i & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta}_i \\ \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad ou,$$

$$\Delta \mathbf{F}_{aux} = \mathbf{K}_{aux} \Delta \mathbf{u}_{aux} \quad (2.37)$$

onde $\Delta \mathbf{M}_i$, $\Delta \mathbf{M}_j$, \mathbf{S}_i , \mathbf{S}_j , $\Delta \boldsymbol{\theta}_i$, $\Delta \boldsymbol{\theta}_j$ são os vetores de momento, rigidez à rotação, e a rotação das extremidades inicial e final, respectivamente, definidas em (2.28). $\Delta \mathbf{F}$, \mathbf{K} e $\Delta \mathbf{u}$ são o vetor de esforços nodais, matriz de rigidez tangente e vetor de descolamentos nodais do elemento sem ligações, respectivamente. Considerando o sistema aumentado dado por:

$$\Delta \mathbf{F}_a = \mathbf{K}_a \cdot \Delta \mathbf{u}_a \quad (2.38)$$

onde:

$$\Delta \mathbf{F}_a = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{u}_a = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix}, \quad (2.39)$$

é possível obter uma relação cinemática entre o sistema aumentado original e auxiliar, que relacione esforços e deslocamentos nodais, ou seja:

onde:

$$\bar{\mathbf{T}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

A matriz \mathbf{K}_a pode ser calculada como:

$$\mathbf{K}_a = \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{K}_{aux} \bar{\mathbf{T}} \quad (2.42)$$

As duas últimas filas e colunas da matriz \mathbf{K}_a correspondem aos graus internos aumentados e identificados com o subscrito b. Assim, (2.37) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ \Delta \mathbf{M}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{acc} & \mathbf{K}_{acb} \\ \mathbf{K}_{abc} & \mathbf{K}_{abb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Através da condensação estática é possível estabelecer uma relação entre $\Delta \mathbf{F}_{int}$ e $\Delta \mathbf{u}$ considerando as ligações semirrígidas, dada pela seguinte expressão:

$$\Delta \mathbf{F}_{int} = \mathbf{K}e. \Delta \mathbf{u} \quad (2.44)$$

onde \mathbf{Ke} é a matriz de rigidez equivalente do elemento que inclui o efeito da ligação semirrígida. A matriz \mathbf{Ke} pode ser obtida por condensação. Desta forma, tem-se:

$$\mathbf{Ke} = \mathbf{K}_{acc} - \mathbf{K}_{acb} \cdot \mathbf{K}_{abb}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{abc} \quad (2.45)$$

2.1.6.

Matriz de rotação e montagem do sistema global estático

As deduções feitas para a obtenção do equilíbrio incremental estático são realizadas em nível de elemento finito e considerando o sistema de coordenadas locais x, y . Para a montagem do sistema global de equilíbrio estático é necessária a obtenção do equilíbrio do elemento coordenadas globais, X, Y . Para isto, faz-se necessária a transformação da matriz de rigidez, assim como do vetor de forças externas. Define-se então a seguinte matriz de rotação no plano, \mathbf{T} , (Bathe, 1996):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & & & & \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & & & \\ & & & & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ & & & & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

onde α é o ângulo que faz o elemento reto com respeito ao eixo horizontal do sistema global. A matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais, \mathbf{Ke}_g , será dada por:

$$\mathbf{Ke}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{Ke} \mathbf{T} \quad (2.47)$$

Analogamente pode ser estabelecida a relação entre o vetor de forças internas no sistema global, \mathbf{Fi}_g , e no sistema local, a saber:

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{T} \mathbf{F} \mathbf{i}_g \quad (2.48)$$

Finalmente, pode ser estabelecido o equilíbrio global do sistema definido por:

$$\Delta \mathbf{F}_i + {}^t \mathbf{F}_i - {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_e = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{F}_i = \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{U} \quad (2.49)$$

onde \mathbf{F}_i , \mathbf{F}_e e \mathbf{U} são vetores de forças internas, forças externas de referência e deslocamentos nodais do sistema global, e \mathbf{K} é a matriz de rigidez tangente do sistema global. Para a montagem dos vetores e matrizes globais é empregado o método da rigidez direta (Bathe, 1996).

2.2.

Formulação para Análise Dinâmica no Domínio do Tempo

Nesta seção é apresentada a formulação para a análise dinâmica não linear do sistema estrutural submetido a uma excitação de base. Nesta seção, é descrita a formulação para análise no tempo.

2.2.1.

Energia potencial e equação de movimento

Considerando nas equações de movimento apenas a inércia translacional do elemento e o amortecimento associado a este movimento (hipótese compatível com a teoria de Euler-Bernoulli), a equação de equilíbrio dinâmico para um instante t pode ser obtida através do princípio dos trabalhos virtuais como:

$$\int_S \mathbf{f}(t) \delta \mathbf{u}(t) dS = \int_V \boldsymbol{\tau}(t) \delta \boldsymbol{\varepsilon}(t) dV + \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) \delta \ddot{\mathbf{u}}(t) dV + \int_V c \dot{\mathbf{u}}(t) \delta \dot{\mathbf{u}}(t) dV \quad (2.50)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é o campo dos deslocamentos dependentes do tempo, ρ a densidade do material e c o coeficiente de amortecimento e $\mathbf{f}(t)$ é o campo de forças externas dependentes do tempo.

Considerando a teoria de viga-coluna de Euler-Bernoulli, o campo dos deslocamentos pode ser obtido através da interpolação dos deslocamentos nodais da equação (2.19), que é expressa na sua forma matricial como:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{H}(x) \mathbf{u}(t) \quad (2.51)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é o vetor dos deslocamentos nodais, $\mathbf{H}(x)$ é a matriz que contém as funções de interpolação definidas em (2.20). Analogamente, os campos de velocidade e aceleração podem ser obtidos como:

$$\dot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{H}(x) \dot{\mathbf{u}}(t) \quad e \quad \ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{H}(x) \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad (2.52)$$

A relação cinemática entre deformações e deslocamentos é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \mathbf{B}(x) \mathbf{u}(t) \quad (2.53)$$

onde $\mathbf{B}(x)$ é obtida por diferenciação da matriz e combinação da matriz $\mathbf{H}(x)$, (Galvão, 2004). Introduzindo (2.51), (2.52) e (2.53) em (2.50), obtém-se, finalmente, a expressão matricial de equilíbrio dinâmico não linear do elemento, a saber:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{F}_{int}(t) = \mathbf{F}_e(t) \quad (2.54)$$

onde:

$$\mathbf{M} = \int_0^L \rho \mathbf{H}(x)^T \mathbf{H}(x) dx, \quad \mathbf{C} = \int_0^L c \mathbf{H}(x)^T \mathbf{H}(x) dx$$

$$\mathbf{F}_{int} = \int_0^L \mathbf{B}(x)^T \boldsymbol{\tau} dx, \quad \mathbf{F}_e(t) = \int_0^L \mathbf{H}(x)^T \mathbf{f}(x, t) dx \quad (2.55)$$

O vetor de forças internas \mathbf{F}_{int} em um instante de análise $t + \Delta t$, pode ser obtido como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int} = {}^t\mathbf{F}_{int} + \Delta\mathbf{F}_{int} \quad (2.56)$$

O vetor incremental de força $\Delta\mathbf{F}_{int}$ pode ser obtido através da equação (2.25) e dependerá do tipo de formulação que estiver sendo empregada. Da mesma forma, é possível adotar $\mathbf{F}_e(t)$ como o produto do vetor de forças de referência \mathbf{F}_r e uma de intensidade no tempo $f(t)$:

$$\mathbf{F}_e(t) = \mathbf{F}_r f(t) \quad (2.57)$$

O vetor \mathbf{F}_r é obtido através da integral (2.55). Considerando a função de carregamento externo $\mathbf{f}(x, t) = f_e(x)f(t)$, tem-se:

$$\mathbf{F}_r = \int_0^L \mathbf{H}(x)^T f_e(x) dx \quad (2.58)$$

onde $f_e(x)$ é a função que descreve as cargas ao longo do elemento. O vetor de referência, \mathbf{F}_r , é também conhecido como carregamento nodal equivalente.

2.2.2.

Matriz de massa considerando ligações semirrígidas

Como destacado em Galvão (2004) e Silva (2009), para manter a consistência na análise, no caso de presença de ligações semirrígidas, é necessário definir a força de inércia com base no campo de deslocamentos que incluem o efeito da ligação semirrígida. Chan e Chui (2000) propõem a definição de uma função de interpolação do deslocamento transversal baseada em um campo de deslocamento consistente definido por um polinômio cúbico:

$$\Delta v(x) = \sum_{i=0}^3 A_i x^i \quad (2.59)$$

onde os coeficientes são determinados a partir das condições de contorno:

$$\Delta v(0) = \Delta v_i, \Delta v(L) = \Delta v_j, \frac{d\Delta v}{dx}(0) = \Delta \theta_{bi}, \frac{d\Delta v}{dx}(L) = \Delta \theta_{bj} \quad (2.60)$$

Pode-se então expressar (2.59) na forma matricial de acordo com:

$$\Delta v(x) = [H_1^2 H_2 L \quad -H_2^2 H_1 L] \begin{bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{bmatrix} + [(3 - 2H_1)H_1 \quad (3 - 2H_2)H_2] \begin{bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta v_j \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

onde H_1 e H_2 são as funções definidas em (2.20). Levando em conta as equações (2.30), (2.31) e (2.32), chega-se a:

$$\Delta v(x) = \mathbf{H}^* \begin{bmatrix} \Delta v_i \\ \Delta v_j \\ \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{bmatrix}$$

com:

$$\mathbf{H}^* = [H_1^2 H_2 L \quad -H_2^2 H_1 L] \mathbf{S}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/L & 0 & -1/L \\ 0 & 1/L & 1 & -1/L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (3 - 2H_1)H_1 & 0 & (3 - 2H_2)H_2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Por fim, pode ser definida a matriz \mathbf{H} modificada da seguinte maneira:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_1^* \quad \mathbf{H}_2^* \quad \mathbf{H}_4 \quad \mathbf{H}_1^* \quad \mathbf{H}_4^*] \quad (2.63)$$

2.2.3.

Matriz de amortecimento e sistema global de equilíbrio

A determinação da matriz de amortecimento expressa na equação (2.55) é, na prática, extremamente complicada. Para contornar este problema é usual definir uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa ou à matriz de rigidez ou a uma combinação linear de ambas, como indicado na seguinte expressão:

$$\mathbf{C} = \mu_1 \mathbf{M} + \mu_2 \mathbf{K} \quad (2.64)$$

Um procedimento usual para a obtenção dos coeficientes de proporcionalidade μ_1 e μ_2 é seguindo o método de Rayleigh (Clough e Penzien, 1993), calculando estes coeficientes como:

$$\mu_1 = \xi \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}, \mu_2 = \xi \frac{2}{\omega_1+\omega_2} \quad (2.65)$$

onde ω_1 e ω_2 são frequências naturais de vibração distintas, e ξ é uma taxa de amortecimento definido pelo usuário, muitas vezes baseada em resultados experimentais.

Para a obtenção do sistema global de equilíbrio dinâmico é necessário que todas as matrizes e vetores sejam transformados para este sistema. Para isto, as matrizes de cada elemento devem ser transformadas através da matriz de rotação \mathbf{T} . Obtendo as matrizes e vetores de força no sistema global, o sistema final pode ser montado somando a incidência nodal de todos os elementos, que resulta finalmente em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{F}\mathbf{i}(t) = \mathbf{F}\mathbf{r}f(t) \quad (2.66)$$

2.2.4. Equação de movimento para excitação de base

A excitação sísmica geralmente é representada por um deslocamento de base dependente do tempo, $u_g(t)$. Esta excitação geralmente tende a deslocar uniformemente todos os graus de liberdade do apoio, deslocando assim toda a estrutura, o que gera forças de inercia que produzem por sua vez deslocamentos relativos à base, tal como mostrado na Figura 2.6.

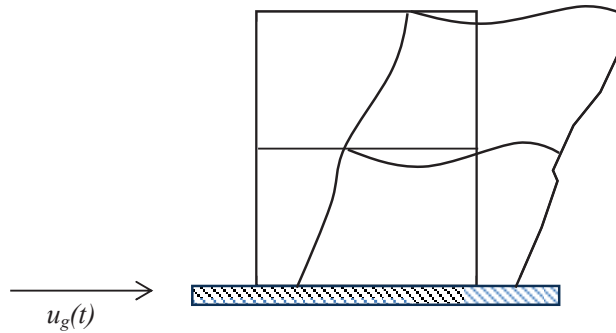


Figura 2.6 – Sistema Estrutural submetido a deslocamento de base.

Sob a hipótese de que a base se desloca uniformemente, como mostrado na Figura 2.6, é possível reescrever o sistema global de equações de movimento em função dos deslocamentos relativos à base como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{F}\mathbf{i}(t) = -\mathbf{M}\bar{\mathbf{r}}\ddot{u}_g(t) \quad (2.67)$$

onde \mathbf{U} representa o vetor de deslocamentos nodais relativos à base e $\bar{\mathbf{r}}$ é o vetor que define o deslocamento de corpo rígido de cada grau de liberdade relativo ao deslocamento que sofre a base (Clough e Penzien, 1993 e Chopra, 1995), e $\ddot{u}_g(t)$ é a aceleração de base.

2.3. Solução no domínio do Tempo

Nesta seção são abordados os métodos de solução linear e não linear para o problema de vibração livre e forçada do sistema (2.66). São destacados os algoritmos mais usados na literatura para obtenção das frequências e modos de vibração, assim como para a integração direta do sistema de equações.

2.3.1. Frequências naturais e modos de vibração

Considerando que a estrutura vibra livremente, ou seja, com $\ddot{u}_g(t) = 0$, e desprezando o efeito do amortecimento, o sistema descrito em (2.67) pode ser reescrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

onde \mathbf{K} é matriz de rigidez. Supondo que a solução de deslocamentos é dada pela solução harmônica:

$$\mathbf{U}(t) = A e^{i\omega t} \boldsymbol{\phi} \quad (2.69)$$

onde $\boldsymbol{\phi}$ é o vetor modal de vibração, A é amplitude e ω é a frequência de vibração da solução, e substituindo (2.69) em (2.68), obtém-se:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) A e^{i\omega t} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

Para que equação anterior tenha uma solução não trivial, é necessário que:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (2.71)$$

A equação (2.71) é conhecida na álgebra linear como um problema de autovalor generalizado, sendo o autovalor ω^2 o quadrado das frequências de vibração e os autovetores $\boldsymbol{\phi}$ os modos de vibração correspondentes a tal frequência. Para resolver o problema de autovalor, há diversos algoritmos que podem ser usados como ferramenta de cálculo para obter ω e $\boldsymbol{\phi}$. Dentre estes métodos, pode ser destacado o método de Jacobi usado por Galvão (2004) e Silva (2009), e que é descrito detalhadamente por Brebbia e Ferrante (1986).

Para o caso de uma estrutura com comportamento não linear na presença de carregamento estático (estrutura pré-carregada), o cálculo das frequências e modos de vibração não pode ser efetuado diretamente, (Galvão, 2004; Silva, 2009), já que a matriz de rigidez \mathbf{K} depende dos esforços internos. Para isto, é necessário fazer uma análise estática não linear para obter a configuração deformada da estrutura correspondente ao carregamento existente e assim conhecer os esforços internos para o cálculo de \mathbf{K} e, posteriormente, utilizar o método de Jacobi para o cálculo das frequências e modos de vibração.

2.3.2. Análise transiente e integração direta no domínio do tempo

A resposta na fase transiente da vibração é muito importante no estudo de vários problemas de vibração forçada. Esta importância é ressaltada no caso de excitação sísmica, onde as maiores amplitudes de vibração ocorrem usualmente nesta fase do movimento. Para isto são necessárias técnicas de integração numérica do sistema de equações de movimento, que calculam a resposta no tempo de forma incremental partindo de certo conjunto de condições iniciais.

Na literatura podem ser encontrados diversos métodos de integração passo a passo que têm sido desenvolvidos para a análise linear e não linear. Estes métodos podem ser divididos em dois grupos: explícitos e implícitos. Os métodos explícitos consistem basicamente no cálculo da resposta do sistema para o tempo $t + \Delta t$ em função da resposta do no instante de tempo t , ou seja:

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = f(\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), \ddot{\mathbf{U}}(t)) \quad (2.72)$$

Por outro lado, os métodos chamados implícitos utilizam também informações da resposta do sistema no próprio instante de análise, isto é:

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = f(\mathbf{U}(t + \Delta t), \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t), \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t), \mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), \ddot{\mathbf{U}}(t)) \quad (2.73)$$

Geralmente os métodos implícitos levam a processos de cálculo mais demorados, particularmente no caso de análises não lineares, porém têm a vantagem de serem mais estáveis que os métodos explícitos. A estabilidade do método é exigida principalmente na análise de sistemas fortemente não lineares. Um aspecto que influi de maneira importante na estabilidade do método de integração é a correta escolha do incremento de tempo Δt . Bathe (1996) sugere que o valor de Δt seja limitado por:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}}, \quad (2.74)$$

onde ω_{max} é a máxima frequência do sistema. Cabe salientar que em muitos casos a importância de certas frequências diminui no decorrer da análise. Portanto, usar um Δt muito pequeno em toda a análise pode levar a um esforço de computacional desnecessário. Para isto, resulta conveniente uma técnica que permita uma adaptação do tamanho de Δt .

2.3.3. Métodos de integração para análise linear

A seguir são apresentados alguns dos métodos implícitos e explícitos de integração direta para a análise transiente linear.

2.3.3.1. Método implícito de Newmark

O método de integração de Newmark é um dos mais utilizados em problemas de dinâmica estrutural. A simplicidade da implementação e a estabilidade fazem deste método um dos mais populares na análise transiente. O método é baseado na expansão dos campos de deslocamentos e velocidade em séries de Taylor de acordo com:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^3}{6} {}^t\ddot{\ddot{\mathbf{U}}} + \dots \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\ddot{\mathbf{U}}} + \dots \end{aligned} \quad (2.75)$$

Desprezando os termos de quarta ordem e superiores, assume-se que a aceleração varia linearmente. Newmark generalizou esta aproximação na seguinte forma:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \beta \Delta t^3 {}^t\ddot{\ddot{\mathbf{U}}} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \gamma {}^t\ddot{\ddot{\mathbf{U}}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Através da correta combinação de (2.76), chega-se às as fórmulas de Newmark:

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} &= {}^t\dot{\mathbf{U}} + (1 - \gamma)\Delta t {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \\
 {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= {}^t\mathbf{U} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \beta\Delta t^2 {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Substituindo (2.77 em 2.66), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} &= \hat{\mathbf{K}}^{-1} {}^t\hat{\mathbf{F}} \\
 \hat{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} \\
 \hat{\mathbf{F}} &= -\mathbf{M}\mathbf{r}^{t+\Delta t}\ddot{u}_g + \mathbf{C}\left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t} {}^t\mathbf{U} + \left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t} - 1\right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\right) + \\
 &\quad - \mathbf{M}\left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t^2} {}^t\mathbf{U} + \frac{1}{\beta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\right)
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Os coeficientes γ e β determinam a eficiência e estabilidade do algoritmo e dependem do tipo de aproximação para a variação da aceleração. Para o caso da aceleração linear, $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/6$. Subbaraj e Dokainish (1989) mostram que o método de Newmark é incondicionalmente estável para: $\gamma \geq 1/2$ e $\beta = (2\gamma + 1)^2/16$. Na literatura é usual se trabalhar com $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ (Newmark, 1959).

Um problema frequente nos algoritmos da família de Newmark é a exatidão dos resultados, principalmente em problemas fortemente não lineares, já que, além do erro da própria aproximação, em alguns casos há evidência de erros acumulados ao integrar-se as equações de movimento ao longo de uma grande quantidade de ciclos em virtude do amortecimento numérico do algoritmo. Para verificar a exatidão dos resultados é conveniente comparar os resultados do método de Newmark como métodos que não possuam estes problemas de erro. Dentre eles pode-se destacar os métodos da família Runge-Kutta.

2.3.3.2. Métodos explícitos de Runge-Kutta

Conhecidos pela sua exatidão e simplicidade de implementação, os métodos de integração de Runge-Kutta são empregados em grande número de problemas

de integração de equações diferenciais lineares e não lineares uma vez que o processo de integração é igual para ambos os casos desde que sejam conhecidas com precisão as expressões de não linearidade. Os métodos de Runge-Kutta têm como base o método de Euler (Figura 2.6), onde o valor de uma função no instante $t + \Delta t$ é calculado como a soma do valor da função no instante t , multiplicado pelo valor da tangente avaliada em algum ponto do intervalo entre t e $t + \Delta t$ (Butcher, 2003).

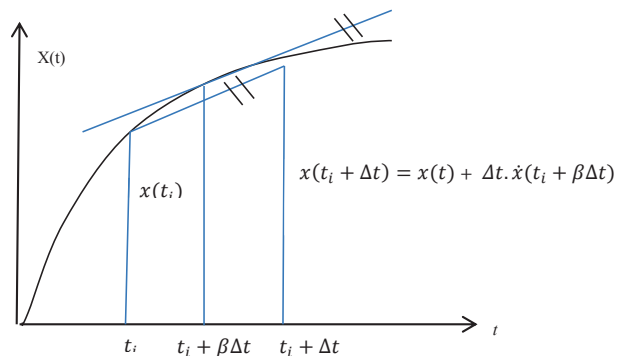


Figura 2.7 – Esquema de integração do método de Euler.

Os métodos de Runge-Kutta seguem a ideia do método de Euler, empregando um ou mais pontos para interpolar o valor da tangente equivalente usada no método de Euler.

Para entender a mecânica dos métodos Runge-Kutta, considere-se uma equação diferencial de primeira ordem do tipo:

$$\dot{u} = F(u, t) \quad (2.79)$$

tendo como condição inicial:

$$u(t^n) = u^n \quad (2.80)$$

A resposta do sistema para um incremento de tempo Δt pode ser expresso como:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{i=1}^{od} b_i k_i \quad (2.81)$$

$$k_i = g(u^n, a_{ij}, c_i)$$

onde od é o número de etapas de cálculo, a_{ij} , b_i e c_i , são coeficientes que dependem da ordem da aproximação e da regra de quadratura usada. Butcher (2003) organizou estes coeficientes em tabelas conhecidas como Arranjos de Butcher.

Tabela 2-1. Estrutura do Arranjo de coeficientes de Butcher

b_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2} \dots$	$a_{1,od}$
b_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2} \dots$	$a_{2,od}$
...
b_{od}	$a_{od,1}$	$a_{od,2} \dots$	$a_{od,od}$
	c_1	$c_2 \dots$	c_{od}

Neste contexto, o método de Runge-Kutta pode ser entendido como uma generalização do método de Euler, já que a resposta do sistema no passo seguinte é avaliada através da soma da resposta no passo anterior mais o produto do incremento do tempo com uma inclinação ou tangente aproximada. Assim, o método de Euler pode ser considerado como um método de Runge-Kutta de primeira ordem que usa um ponto para o cálculo da tangente aproximada. Conforme a ordem do método aumenta, são usados mais pontos no cálculo da tangente e o cálculo da resposta torna-se mais preciso.

As constantes k_i presentes em (2.81) podem ser obtidas por:

$$k_i = F(u^n + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, t_n + c_i \Delta t), i = 1..od \quad (2.82)$$

Na presente proposta são empregados três tipos de interpolações explícitas. A primeira interpolação, e mais conhecida, é a correspondente ao método de

Runge-Kutta clássico de quarta ordem e quatro etapas cuja tabela de cálculo é apresentada na Tabela 2-2. No presente trabalho o método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem será denominado pela sigla RK4.

Tabela 2-2. Arranjo de Butcher do método clássico de RK4 (Butcher,2003)

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Também é empregada uma aproximação explícita de sexta ordem e sete etapas obtida por Niström que será identificada com a sigla RK6, a qual é mostrada na Tabela 2-3.

Tabela 2-3. Coeficientes de Niström de sexta ordem (Butcher,2003)

0								
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$							
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$					
$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{48}$	$-\frac{55}{24}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{15}{8}$				
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{11}{24}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$			
1	$-\frac{261}{260}$	$\frac{33}{13}$	$\frac{43}{156}$	$-\frac{118}{39}$	$\frac{32}{195}$	$\frac{80}{39}$		
	$\frac{13}{200}$	0	$\frac{11}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{13}{200}$	

Existem algoritmos da família Runge-Kutta que consideram a adaptação do passo de tempo Δt , dentre eles, um dos mais populares é o proposto por Fehlberg (1969). O método de Fehlberg de quarta ordem, ou também identificado pela sigla RKF45, utiliza uma tabela única de seis etapas para o cálculo de duas aproximações. Para isto, são definidos dois vetores de constantes c_i , sendo uma para cálculo de uma aproximação de quarta ordem e outra para uma aproximação de quinta ordem, a qual é usada como referência para a estimativa do erro local (Tabela 2-4).

Tabela 2-4. Arranjo de coeficientes para o método de RKF45 (Butcher,2003)

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{3513}$	$-\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	
C_i de 4ª ordem \rightarrow	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2568}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	0
C_i de 5ª ordem \rightarrow	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$

Assumindo a diferença das duas aproximações como o erro local, tem-se que:

$$E = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \quad (2.83)$$

Se o erro local não satisfizer a medida de tolerância desejada, um novo incremento de tempo pode ser adotado como:

$$\Delta t^k = s \cdot \Delta t^k$$

$$s = \left(\frac{tol}{2|y_{j+1}^k - z_{j+1}^k|} \right)^{1/4} \quad (2.84)$$

onde tol é a medida de tolerância desejada, y é a aproximação de quarta ordem, e z é a aproximação de quinta ordem. No método de RKF-45 é necessária a determinação de limites máximos e mínimos para Δt .

Para analisar o sistema cuja excitação é dada por uma série discreta de dados, como é no caso de acelerogramas reais, é necessário adaptar o método de Runge-Kutta, já que ele precisa do valor da excitação em tempos que estão registrados de forma explícita nos acelerogramas. Uma forma de resolver esse problema é através da interpolação de dados, i.e., interpolar o valor da excitação no tempo desejado a partir de valores da excitação em tempos adjacentes já conhecidos. Na presente tese é adotada a interpolação linear nos exemplos em que é analisado o sistema submetido a um sismo determinado por um acelerograma discreto (sismo conhecido). Uma vantagem deste método sobre o convencional RK4 está na quantidade de etapas para estimar o erro local. Enquanto o método de RK4 precisa de oito etapas, RKF45 usa apenas seis. Uma comparação interessante destes dois métodos é feita por Mathews e Fink (2004).

2.3.3.3. Integração do sistema dinâmico linear pelos métodos Runge-Kutta explícitos

No item 2.3.3.2 foi mostrada a integração de Runge-Kutta para uma equação diferencial ordinária, EDO, de primeira ordem. Os sistemas dinâmicos lineares são compostos por EDOs de segunda ordem. Portanto, para o emprego dos métodos RK, é necessária a transformação do sistema de segunda ordem em outro sistema de primeira ordem. Neste caso, o sistema definido em (2.71) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{Z} \\ \dot{\mathbf{Z}} &= -\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) - \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{Z} + \mathbf{K}\mathbf{U}) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Organizando matricialmente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) \end{Bmatrix} \quad ou, \\ \dot{\mathbf{U}}^*(t) &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}^*(t) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t) \end{aligned} \quad (2.86)$$

O sistema (2.86) tem a forma descrita em (2.79) e pode ser resolvido diretamente por qualquer um dos métodos apresentados. A resposta obtida em

$\mathbf{U}^*(t + \Delta t)$ contém os deslocamentos e velocidades do sistema. As acelerações do sistema podem ser obtidas através do equilíbrio da expressão (2.71).

2.3.3.4. Método implícito de Runge-Kutta-Gauss

Observando a formulação dos métodos Runge-Kutta explícitos. Pode ser notado que estes métodos são de fácil implementação. Porém, o problema dos métodos explícitos está na sua estabilidade diante de problemas denominados *Stiff* ou rígidos, caracterizados por serem problemas em que a resposta possui frequências muito afastadas entre si. Isto significa que na resposta do sistema há participação de frequências muito baixas e muito elevadas ao mesmo tempo, obrigando a utilizar valores de passo de tempo muito pequenos. Estes problemas são mais evidentes em sistemas com forte não linearidade. Diante desta situação, torna-se favorável o uso de algoritmos implícitos, os quais têm regiões de estabilidade maiores que os métodos explícitos. No entanto, estes métodos precisam de um número consideravelmente maior de operações. No presente trabalho é utilizado como método de integração implícita o método de duas etapas e de quarta ordem que emprega a quadratura de Gauss, denominado no presente trabalho com a sigla RKG4, conhecido também como o método de Gauss-Legendre (Butcher, 2003).

Tabela 2-5. Arranjo de Butcher para o método de RKG4

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Nos Métodos de Runge-Kutta explícitos, o cálculo das constantes k_i , dadas na expressão (2.81), não é mais sequencial. Porém, em sistemas dinâmicos

lineares, como o mostrado em (2.86), é possível obter uma expressão direta. Por exemplo, para um método implícito de duas etapas, tem-se:

$$\begin{aligned} k_1 &= F(u^n + \mathbf{a}_{11}k_1 + \mathbf{a}_{12}k_2, t_n + c_1\Delta t) \\ k_2 &= F(u^n + \mathbf{a}_{21}k_1 + \mathbf{a}_{22}k_2, t_n + c_2\Delta t) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Substituindo em (2.86), e combinando em (2.82), tem-se:

$$\begin{aligned} k_1 &= \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}^*(t) + a_{11}k_1 + a_{12}k_2) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t + c_1\Delta t) \\ k_2 &= \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}^*(t) + a_{12}k_1 + a_{22}k_2) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t + c_2\Delta t) \end{aligned} \quad (2.88)$$

Organizando matricialmente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - a_{11}\hat{\mathbf{A}} & -a_{12}\hat{\mathbf{A}} \\ -a_{21}\hat{\mathbf{A}} & \mathbf{I} - a_{22}\hat{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}^*(t) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t + c_1\Delta t) \\ \hat{\mathbf{A}}\mathbf{U}^*(t) + \mathbf{r}^*\ddot{u}_g(t + c_2\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Como pode ser observado na expressão anterior, o cálculo de k_i envolve a resolução de um sistema de ordem 4 vezes maior que o sistema original.

2.3.4. Integração direta para análise não linear

Nos itens anteriores foram desenvolvidos algoritmos para a integração direta do sistema (2.66) para o caso linear. No presente tópico é apresentada a adaptação de dois destes algoritmos para a resolução do problema não linear.

2.3.4.1. Método Implícito de Newmark para análise não linear

Ao contrário do processo descrito em 2.3.3.1, onde o vetor de forças internas era dado diretamente pela multiplicação da matriz de rigidez linear e o vetor de deslocamentos, a solução direta não é possível no caso não linear, já que o vetor de forças internas depende do campo de deslocamentos. Por tal motivo, é necessária uma técnica iterativa para o cálculo da resposta no instante $t + \Delta t$. No

presente trabalho é adotada a técnica descrita em Villaverde (2008), usada também por Galvão (2004) e Silva (2009), que combina o algoritmo de integração no tempo de Newmark com o esquema iterativo de solução de equações não lineares de Newton-Raphson, descrito de forma resumida na Tabela 9-9.

Tabela 2-6. Algoritmo de Newmark para o problema não linear

- 1) Inicializar Dados de entrada para o instante t : ${}^t\mathbf{U}$, ${}^t\dot{\mathbf{U}}$, ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$
- 2) Estabelecer os parâmetros iniciais de análise: Fixar Δt , montar \mathbf{M} , \mathbf{C} , ${}^t\mathbf{F}_i$ e \mathbf{K}
- 3) Determinar o incremento excitação sísmica :
- 4) Montar as matrizes de rigidez efetiva e de carregamento efetivo: $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{F}} \rightarrow \text{eq}(2.78)$
- 5) Calcular os deslocamentos incrementais : $\Delta\mathbf{U}^0 = \hat{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\mathbf{F}}$
- 6) Processo Iterativo para $k=1,2,\dots$:
 - i. Calcular ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{k-1}$, ${}^t\dot{\mathbf{U}}$, ${}^t\ddot{\mathbf{U}} \rightarrow (2.77)$.
 - ii. Calcular o vetor de forças internas: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{U}^{k-1}$
 - iii. Calcular o vetor de forças residuais: $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow (2.66)$
 - iv. Calcular a correção dos deslocamentos incrementais: $\delta\mathbf{U} = : \hat{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\mathbf{R}}$
 - v. Atualizar os deslocamentos incrementais: $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{k-1} + \delta\mathbf{U}$
 - vi. Verifique a convergência:
 $\frac{|\Delta\mathbf{U}|}{|{}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}|} \leq \text{fator de convergencia?} \rightarrow (\text{sim}, \text{não})$
Sim: ir ao passo 7.
Não: Atualizar todos os parâmetros de rigidez \mathbf{K} , \mathbf{M} e retornar a “i”.
- 7) Atualizar ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$, ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$, ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \rightarrow (2.77)$. ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^k$, \mathbf{K} , \mathbf{M} , \mathbf{C} e todos os parâmetros susceptíveis a variação em função dos deslocamentos.
- 8) Atualizar o tempo de análise para o seguinte passo de integração: $t = t + \Delta t$ ir para o passo 1) e iniciar um novo incremento.

2.3.4.2. Método de Runge-Kutta para análise não linear

Ao contrário do método de Newmark, onde é formado um vetor de forças efetivas e uma matriz de rigidez efetiva, possibilitando desta forma o uso de um esquema iterativo de tipo Newton-Raphson, os métodos de Runge-Kutta precisam de uma adaptação distinta para solução iterativa de sistemas não lineares. Vale lembrar que o método de Runge-Kutta não precisa de adaptação quando a fonte de não linearidade é dada por alguma expressão expedita. Porém, não é este o caso

na grande maioria dos problemas de análise estrutural não linear, onde as fontes de não linearidade não são conhecidas de forma expedita, principalmente quando há não linearidade do material. Por tal motivo, na presente proposta apresenta-se um esquema iterativo de aproximação secante, ao qual o método de Runge-Kutta pode ser facilmente adaptado (Figura 2.8).

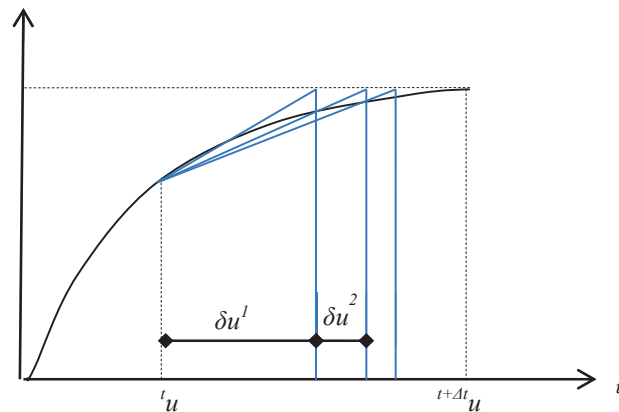


Figura 2.8 – Aproximação iterativa secante.

No presente trabalho é proposto um esquema de aproximação de Runge-Kutta iterativa para análise não linear seguindo a mecânica da aproximação secante. Na Tabela 2-7 é mostrado o esquema iterativo proposto para solução de sistemas dinâmicos não lineares empregando o método de Runge-Kutta. Na presente tese, será usado o apenas o método implícito RKG4 para a integração de sistemas dinâmicos não lineares, devido a que este método apresenta maior estabilidade, condição necessária para a avaliação dinâmica de sistemas com não linearidade acentuada.

Tabela 2-7. Algoritmo de Runge-Kutta para o problema não linear

<p>1) Inicializar Dados de entrada para o instante t: ${}^t\mathbf{U}$, ${}^t\dot{\mathbf{U}}$, ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$</p> <p>2) Estabelecer os parâmetros iniciais de análise: Fixar Δt, montar \mathbf{M}, \mathbf{C}, ${}^t\mathbf{F}_i$ e \mathbf{K}</p> <p>3) Determinar o incremento excitação sísmica :</p> <p>4) Obter a resposta incremental pelo método de Runge-Kutta: $\Delta\mathbf{U}^0$, $\Delta\dot{\mathbf{U}}^0$</p> <p>5) Calcular as acelerações incrementais : $\Delta\ddot{\mathbf{U}}^0 \rightarrow (2.77)$</p> <p>6) Processo Iterativo para $k=1,2,\dots$:</p> <p>i. Calcular ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{k-1}$, ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta\dot{\mathbf{U}}^{k-1}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \Delta\ddot{\mathbf{U}}^{k-1}$</p> <p>ii. Calcular o Vetor de Força interna: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{U}^{k-1}$</p> <p>iii. Calcular o Vetor de Forças residuais: $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow (2.67)$</p> <p>iv. Calcular a correção incremental através de Runge-Kutta, para um incremento de excitação externa \mathbf{R} a través de (2.81), (2.86), (2.89) .</p> <p>v. Atualizar: $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{k-1} + \delta\mathbf{U}$, $\Delta\dot{\mathbf{U}}^k = \Delta\dot{\mathbf{U}}^{k-1} + \delta\dot{\mathbf{U}}$, $\Delta\ddot{\mathbf{U}}^k = \Delta\ddot{\mathbf{U}}^{k-1} + \delta\ddot{\mathbf{U}}$</p> <p>vi. Verificar a convergência: $\frac{ \delta\mathbf{U} }{ {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U} } \leq$ fator de convergencia ? \rightarrow (sim , não) Sim: ir à próxima ao passo 7). Não: Atualizar todos os parâmetros de rigidez \mathbf{K}, \mathbf{M} e retornar a “i”</p> <p>7) Atualizar ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$, ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta\dot{\mathbf{U}}^k$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \Delta\ddot{\mathbf{U}}^k$ ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^k$, \mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{C} e todos os parâmetros susceptíveis a variação em função dos deslocamentos.</p> <p>8) Atualizar o tempo de análise para o seguinte passo de integração: $t = t + \Delta t$ ir para o passo 1) e iniciar um novo incremento.</p>

2.4.

Aspectos da Solução Estática Não Linear

Na seção anterior foi formulado o problema dinâmico não linear e a sua solução no espaço pelo método dos elementos finitos e no tempo através dos métodos de integração direta do sistema de equações de movimento. Embora o foco do presente estudo esteja orientado a análises dinâmicas, em alguns casos, são necessárias análises estáticas não lineares como parâmetros de referência para alguns problemas dinâmicos. Por este motivo, faz-se necessário descrever a metodologia de resolução de sistemas estáticos não lineares. Na presente seção são descritos de forma sucinta alguns dos métodos de solução de sistemas estáticos não lineares empregados na presente tese. Os detalhes da formulação

destes métodos podem ser encontrados em Silveira (1995), Galvão (2004), Silva (2009) e Crisfield (1991).

2.4.1. Método iterativo de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é amplamente usado tanto na análise não linear estática quanto na análise dinâmica de estruturas. A mecânica deste método está baseada em uma aproximação tangente, como visto na Figura 2.9.

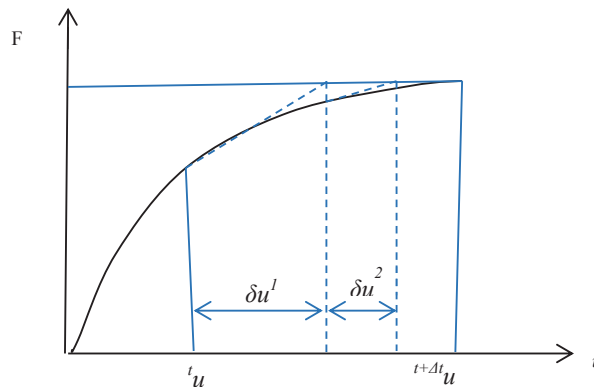


Figura 2.9 – Aproximação tangente no método de Newton-Raphson.

Para um problema com incrementos de carga especificados, a equação (2.23) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\tau)\Delta\mathbf{U} - \Delta\lambda\mathbf{F}_r &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}\Delta\mathbf{U} + \Delta\lambda\mathbf{F}_r &= \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \Delta\mathbf{F}_i - \Delta\lambda\mathbf{F}_r = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Como \mathbf{K} é função dos deslocamentos, admite-se como uma primeira aproximação o valor de \mathbf{K} no instante t , ou seja, a rigidez tangente no instante t . Calcula-se em seguida o incremento de deslocamentos $\Delta\mathbf{U}$ e, com este resultado, são atualizadas a matriz de rigidez e vetor de forças internas. A correção para cada iteração é dada por:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U} &= ({}^t\mathbf{K}^{k-1})^{-1}\mathbf{R}^{k-1} \\ \Delta\mathbf{U}^k &= \Delta\mathbf{U}^{k-1} + \delta\mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde \mathbf{R} é o vetor de forças desbalanceadas calculado a partir da expressão (2.23).

Este método é a base para o desenvolvimento de outros métodos de análise não linear. As iterações são feitas até atingir uma precisão desejada.

2.4.2. Método do controle de arco

Como é sabido na análise não linear, o método de Newton-Raphson falha quando a resposta do sistema apresenta um ponto limite de carga (*snap-through*) ou um ponto limite nos deslocamentos (*snap-back*). Para contornar estes problemas existe uma diversidade de métodos chamados de métodos de continuação, dentre eles, o método de controle de arco destaca-se por ser um método simples e com bom desempenho nos problemas não lineares geométricos. O método consiste em adicionar ao sistema descrito em (2.90) uma equação de restrição, baseada na expressão do comprimento de um segmento de curva ou arco de curva, resultando no seguinte sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\Delta\mathbf{U} - \Delta\lambda\mathbf{F}_r &= \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{U}^T\Delta\mathbf{U} + \varphi\Delta\lambda^2\mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r &= \Delta l^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde φ é um parâmetro de escala que define o tipo de método de controle de arco, e Δl é o parâmetro de incremento de arco. Este método pode ser combinado com o esquema de solução de Newton-Raphson. O incremento de carga $\Delta\lambda^0$ e de deslocamento $\Delta\mathbf{U}^0$ são dados por (Crisfield, 1997):

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^0 &= \pm \frac{\Delta l^2}{\sqrt{({}^t\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r)^T({}^t\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r) + \varphi\mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r}} \\ \Delta\mathbf{U}^0 &= \Delta\lambda^0 \cdot ({}^t\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r)^T \end{aligned} \quad (2.93)$$

A correção de carga e deslocamentos dentro do processo iterativo de Newton-Raphson, incluindo a restrição de arco, é dada por:

$$\begin{bmatrix} {}^t_{k-1}\mathbf{K} & -\mathbf{F}_r \\ 2\Delta\mathbf{U}^{k-1} & 2\varphi\Delta\lambda^{k-1}\mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^{k-1} \\ \mathbf{g}^{k-1} \end{Bmatrix} \quad (2.94)$$

onde \mathbf{g}^{k-1} é o resíduo resultante da equação de restrição adicional. Para $\varphi = 1$, a restrição é chamada de controle de arco esférico, enquanto $\varphi = 0$ define o método de arco cilíndrico. Na literatura podem ser encontrados outros métodos da família dos métodos de controle de arco, tal como as aproximações linearizadas de Risk (1979) e Ram (1982). Embora o método de controle de arco seja eficiente em grande número de problemas não lineares, este não é uma “panaceia” (Felippa, 2014), já que existem certas condições geométricas nas quais o algoritmo do controle de arco falha. Alguns exemplos, onde acontecem essas falhas, são mostrados por Carrera (2004). Além disto, Paullo e Roehl (2011,2013) mostram que o método de controle de arco apresenta problemas na análise de estruturas com materiais com comportamento não linear.

Na Figura 2.10 é mostrado o esquema iterativo do algoritmo de aproximação pelo método de controle de arco esférico para um sistema de um grau de liberdade

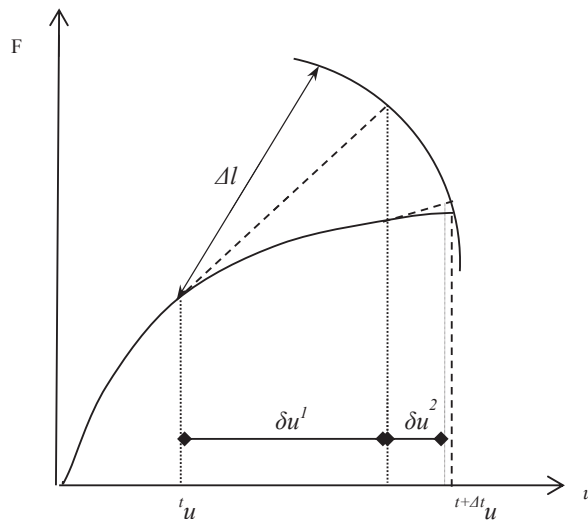


Figura 2.10 – Aproximação por arco esférico.

2.5. Consideração de Base Flexível

Na presente seção são descritas, de forma resumida, as formulações básicas usadas na inclusão de uma base flexível modelada por meio de modelos discretos e contínuos.

2.5.1. Formulação dinâmica do modelo contínuo com subestruturação

Suponha o sistema base-estrutura mostrada na Figura 2.11.

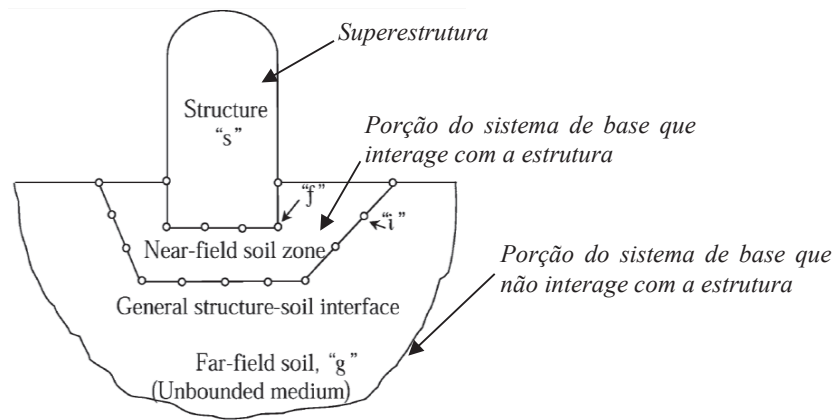


Figura 2.11 – Sistema base-estrutura (Halabian,2002).

A equação matricial de movimento do sistema conjunto é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bi} \\ \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_b \\ \ddot{\mathbf{U}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bi} \\ \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_b \\ \dot{\mathbf{U}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(t)_i \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

onde o índice b identifica os graus de liberdade do sistema base-estrutura menos os graus de liberdade correspondentes à interface entre a porção de sistema de base próximo e o sistema de base afastado, o qual é idealizado como um semiplano infinito. Os graus de liberdade da interfase são identificados através do subscrito i , $\mathbf{R}(t)_i$ é o vetor de reações na interfase (base-afastada) – (porção de sistema de base que interage), o qual pode ser calculado como:

$$\mathbf{R}(t)_i = - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bi} \\ \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \{\mathbf{1}\} \ddot{\mathbf{U}}_g \quad (2.96)$$

onde $\ddot{\mathbf{U}}^g_i$ é a aceleração na interfase, que pode ser calculada através da propagação de ondas do campo livre.

Identificando os graus de liberdade exclusivos da estrutura com o subscrito s , os do sistema de base que interage com o subscrito r os graus de liberdade da interfase base-estrutura com o subscrito f e a interface sistema (base-próxima)–(Base-afastada), já identificada com o subscrito i , o sistema descrito em (2.95) pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sf} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{fs} & \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fr} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{ir} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{ri} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_s \\ \ddot{\mathbf{U}}_f \\ \ddot{\mathbf{U}}_r \\ \ddot{\mathbf{U}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sf} & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{fs} & \mathbf{C}_{ff} & \mathbf{C}_{fr} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{rf} & \mathbf{C}_{rr} & \mathbf{C}_{ir} \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{ri} & \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_s \\ \dot{\mathbf{U}}_f \\ \dot{\mathbf{U}}_r \\ \dot{\mathbf{U}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sf} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{fs} & \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fr} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{rf} & \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{ir} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{ri} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_r \\ \mathbf{U}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(t)_i \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

As componentes correspondentes à estrutura podem ser adotadas com base nas formulações descritas nos itens anteriores. No entanto, as componentes do sistema de base e interfaces devem ser avaliadas segundo as características próprias de cada elemento. Um exemplo ilustrativo de como avaliar estas componentes pode ser encontrado em Halabian (2002).

2.5.2. Formulação dinâmica com modelos discretos

Seja o sistema estrutural com base flexível representado por um sistema discreto que tem apenas a possibilidade de deslocamento na direção horizontal quando submetido a deslocamento de base, tal como mostrado na Figura 2.12.

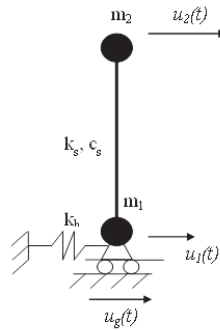


Figura 2.12 – Sistema unidimensional discreto solo-estrutura. (Wolf, 1985).

A flexibilidade da base está representada pelo sistema discreto mola-amortecedor com valores de constantes de rigidez k_h e amortecimento C_h . No caso convencional de base fixa, ou seja, quando o valor de k_h tende para infinito, o deslocamento $u_1(t)$ é nulo, e o sistema pode ser reduzido a um grau de liberdade descrito pela equação de movimento:

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2(t) + c_s \dot{u}_2(t) + k_s u_2(t) = -m_2 \ddot{u}_g(t) \quad (2.98)$$

Esta redução é obtida impondo a condição de contorno $u_1(t) = 0$. Porém, quando $u_1(t)$ é diferente de zero, o sistema completo deve ser considerado. Tem-se então:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (2.99)$$

Para o sistema descrito na equação anterior não ser singular, as constantes de mola e amortecimento devem ser adicionadas aos correspondentes graus de liberdade, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s + c_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (2.100)$$

Generalizando para um sistema com vários graus de liberdade, a inclusão da flexibilidade da base pode ser entendida como a adição de uma matriz diagonal de

rigidez e amortecimento nos graus de liberdade correspondentes à base. Então, o sistema descrito em (2.67) pode ser modificado para:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_s)\dot{\mathbf{U}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_s)\mathbf{U}(t) = -\mathbf{M}r\ddot{u}_g(t) \quad (2.101)$$

onde as matrizes \mathbf{C}_s e \mathbf{K}_s são diagonais e com termos nulos nos graus exclusivos à estrutura.

2.5.3. Elemento de Base Elasto-plástica

Na presente tese, é considerado que a base flexível tem comportamento elasto-plástico. A base é modelada por sistemas de molas unidimensionais com comportamento elástico ou elasto-plástico bi linear com endurecimento isotrópico (Souza Neto *et al*, 2008). A rigidez da mola (seja translacional ou rotacional) no regime elasto-plástico é considerada como proporcional à rigidez da mesma no regime elástico, tal como mostrado na Figura 2.13, onde k_h e k_r são as constantes elásticas das molas translacional-horizontal e rotacional respectivamente, assim como F_p e M_p são os valores das forças e momentos de escoamento, para translação e rotação respectivamente.

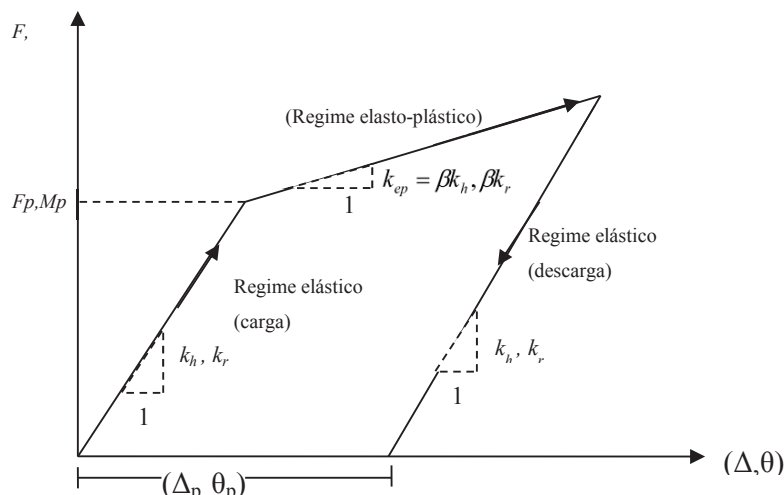


Figura 2.13 – Relação de força vs. Deslocamento de mola translacional ou rotacional unidimensional com comportamento elasto-plástico bi-linear. (Wolf, 1985).

Para os exemplos desenvolvidos na presente tese, as constantes de mola k_h , k_r , assim como os valores de força e momento de escoamento F_p e M_p são escolhidos de maneira arbitrária com a finalidade de que as molas entrem em regime elasto-plástico no decorrer das simulações, já que o intuito da presente tese está na avaliação da mudança da resposta quando a base perde rigidez por plastificação. A determinação das características destas molas com fins de projeto devem responder às características próprias do meio que está sendo modelado, como feito nos trabalhos de Halabian (2002) e Viana (2012).