

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ANÁLISE DE TENSÕES EM VIGAS CURVAS

STRESS ANALYSIS IN CURVED BEAMS

AUTOR: *Alexandre Tostes Santos*

ORIENTADOR: *Prof. Carlos Alberto de Almeida*

30 de Junho de 2016

Abstract

Despite their wide use in engineering and due to its complexity, the subject of curved beams is not a common subject in undergraduate Solid Mechanics courses. The aim of this project is to present a sound procedure to perform stress analysis and calculate displacements of curved beams, regardless their initial geometries and loadings. Thus, the obtained analytical results for four tested cases – a semicircular aircraft fuselage beam, a fish hook, a crane hook and a frame - were compared to solutions provided by numerical simulations based on Finite Element method procedures. These comparative analyses result that the proposed calculation technique is appropriate to applications to a wide range of curved beam geometries.

Keywords: Curved beams, stress analyses, Finite Element method, numerical model

Resumo

Por conta da sua complexidade, vigas curvas são um objeto de estudo ocasionalmente negligenciado em cursos de graduação, apesar da sua ampla utilização na engenharia. Este trabalho se destina a demonstrar o procedimento adequado para se realizar análises de tensões e para se calcular deslocamentos em vigas curvas, independente da sua geometria. Resultados analíticos para quatro geometrias testadas – a caverna da fuselagem de um avião, um gancho, um anzol e um uma viga em U – foram comparados com soluções fornecidas pela simulação numérica baseada no método dos Elementos Finitos. A análise comparativa das respostas permitiu validar o procedimento de cálculo utilizado para as geometrias selecionadas.

Palavras-chave: Vigas curvas, análise de tensões, Elementos Finitos, modelo numérico

Índice

Abstract	2
Resumo	3
1. Introdução	8
2. Deflexões em Vigas Curvas	11
2.1 Solução Utilizando o Método dos Elementos Finitos	16
2.2 Cálculo dos Deslocamentos	24
2.2.1 Especificações do Gancho	25
2.2.2 Especificações da Viga em U	26
2.2.3 Especificações do Anzol	27
2.2.4 Especificações da Fuselagem de Avião	28
2.3 Resultados Analíticos dos Deslocamentos (Comparação)	29
2.4 Resultados Numéricos	31
2.4.1 Deslocamentos no Gancho	32
2.4.2 Deslocamentos na Viga em U	35
2.4.3 Deslocamentos no Anzol	37
2.4.4 Deslocamentos na Fuselagem de Avião	38
3. Tensões em Vigas Curvas	39
3.1 Método Analítico	39
3.2 Resultados Analíticos das Tensões (Comparação)	41
3.3 Método Numérico para Obtenção das Tensões	42
3.3.1 Tensões no Gancho – Solução por Elementos Finitos	43
3.3.2 Tensões na Viga em U – Solução por Elementos Finitos	48
3.3.3 Tensões no Anzol – Solução por Elementos Finitos	52
3.3.4 Tensões na Fuselagem – Solução por Elementos Finitos	56
4. Conclusão	60
5. Bibliografia	61
Apêndice A: Solução Analítica dos Deslocamentos	62
A.1: Deslocamentos no Gancho	62
A.2: Deslocamentos na Viga em U	64
A.3: Deslocamentos no Anzol	66
A.4: Deslocamentos na Fuselagem	69
Apêndice B: Solução Analítica das Tensões	72
B.1: Tensões no Gancho	72
B.2: Tensões na Viga em U	76
B.3: Tensões no Anzol	77
B.4: Tensões na Fuselagem	78

Lista de Figuras

Figura 1: Arco de Clyde, em Glasgow, Escócia, um exemplo de viga curva	8
Figura 2: Exemplo de geração de malha a partir do modelo de um rolamento no SolidWorks	16
Figura 3: Modelo tridimensional de uma viga curva [1].	20
Figura 4: Modelo do gancho feito no <i>SolidWorks</i> .	25
Figura 5: Vista frontal e de seção do gancho.	25
Figura 6: Modelo da viga em U feita no <i>SolidWorks</i> .	26
Figura 7: Vistas frontal e lateral da viga em U.	26
Figura 8: Modelo do anzol feito no <i>SolidWorks</i>	27
Figura 9: Vistas superior e frontal do anzol.	27
Figura 10: Modelo da Caverna da Fuselagem de um avião feito no <i>SolidWorks</i> .	28
Figura 11: Vistas frontal e inferior da fuselagem.	28
Figura 12: Resultado numérico do deslocamento no gancho.	32
Figura 13: Resultado numérico mais próximo do valor analítico do deslocamento no gancho.	33
Figura 14: Resultado numérico do deslocamento na viga em U.	35
Figura 15: Resultado numérico mais próximo do valor analítico do deslocamento na viga em U.	36
Figura 16: Resultado numérico do deslocamento no anzol.	37
Figura 17: Resultado numérico do deslocamento na fuselagem.	38
Figura 18: Representação da primeira malha gerada para o gancho.	43
Figura 19: Resultado numérico das tensões no gancho utilizando a primeira malha.	44
Figura 20: Resultado numérico das tensões no gancho utilizando a segunda malha.	45
Figura 21: Distribuição de tensões ao longo da seção reta do gancho.	46
Figura 22: Representação da primeira malha gerada para a viga em U.	48
Figura 23: Resultado numérico das tensões na viga em U utilizando a primeira malha.	49
Figura 24: Resultado numérico das tensões na viga em U utilizando a segunda malha.	49
Figura 25: Distribuição de tensões ao longo da seção reta da viga em U.	51
Figura 26: Representação da primeira malha gerada para o anzol.	52
Figura 27: Resultado numérico das tensões no anzol utilizando a primeira malha.	53
Figura 28: Resultado numérico das tensões no anzol utilizando a segunda malha.	53
Figura 29: Distribuição de tensões ao longo da seção reta do anzol.	55
Figura 30: Vista em corte do anzol, mostrando graficamente a distribuição de tensões e a aproximação do eixo neutro com o eixo baricêntrico.	55
Figura 31: Representação em detalhe da primeira malha utilizada para simulações com a fuselagem.	56
Figura 32: Resultado numéricos das tensões na fuselagem utilizando a primeira malha.	57
Figura 33: Resultado numéricos das tensões na fuselagem utilizando a segunda malha.	57
Figura 34: Distribuição de tensões ao longo da seção reta da fuselagem.	59

Figura 35: Vista em corte da fuselagem, mostrando graficamente a distribuição de tensões e a aproximação do eixo neutro com o eixo baricêntrico.	59
Figura 36: Diagrama de corpo livre do gancho.	62
Figura 37: Diagrama de corpo livre da viga em U.	64
Figura 38: Diagrama de corpo livre do anzol.	66
Figura 39: Diagrama de corpo livre da fuselagem.	69
Figura 40: Representação das três áreas que compõem a seção transversal do gancho.	72
Figura 41: Área A1 da composição que forma a área transversal do gancho.	72
Figura 42: Área A2 da composição que forma a área transversal do gancho.	73
Figura 43: Área A3 da composição que forma a área transversal do gancho.	74
Figura 44: Modelo de área da seção transversal da viga em U.	76
Figura 45: Modelo da área da seção transversal do anzol.	77
Figura 46: Modelo da área da seção transversal da fuselagem.	78

Lista de Tabelas

Tabela 1: Valores para AeR/Ic considerando-se várias geometrias de seção transversal de vigas curvas [7]:	13
Tabela 2: Resultados comparativos dos deslocamentos para cada geometria.	29
Tabela 3: Parâmetros das malhas utilizadas para o cálculo dos deslocamentos.	31
Tabela 4: Parâmetros e resultados analítico para as tensões circunferenciais máximas nas fibras interna e externa de cada geometria.	41
Tabela 5: Parâmetros das malhas geradas para simulação com o gancho.	43
Tabela 6: Parâmetros das malhas geradas para simulação com a viga em U.	48
Tabela 7: Parâmetros das malhas geradas para simulação com a fuselagem.	52
Tabela 8: Parâmetros das malhas geradas para simulação com a fuselagem.	56

1. Introdução

Viga é a denominação utilizada para um elemento estrutural sujeito à ação de esforços laterais. Apesar de ser um dos tópicos mais explorados em cursos de graduação por conta da sua ampla ocorrência em problemas de engenharia estrutural, o estudo de vigas curvas não é usualmente feito, apesar da sua, também extensiva, utilização. No cotidiano alguns exemplos que podem ser observados, tais como arcos, olhais, elos de corrente, anzóis, molas curvas, dentre outros.

A extensão da sua importância pode ser equiparada à sua complexidade: o modelo clássico de vigas de Euler-Bernoulli não é adequado para descrever as deflexões de vigas curvas em flexão. Isso acontece em decorrência do acoplamento de esforços axiais e momentos fletores no caso de vigas planas e axiais com fletores e torçores no caso de vigas em 3D. A curvatura inicial de uma viga carrega consigo considerações que devem ser levadas em conta nos cálculos de distribuição de tensões, pois as fibras longitudinais na viga não possuem o mesmo comprimento inicial.



Figura 1: Arco de Clyde, em Glasgow, Escócia, um exemplo de viga curva

O propósito deste trabalho é descrever a análise de tensões e o cálculo de deslocamentos em vigas curvas e apresentar as soluções utilizando uma única equação que seja válida para quaisquer vigas curvas, independente das suas relações geométricas. Além disso, desenvolveu-se uma abordagem de modelo *benchmark* com o intuito de verificar as soluções analíticas comparando-as com as soluções numéricas obtidas utilizando o método dos Elementos Finitos. Os objetos escolhidos nesta análise foram a fuselagem de um avião, um anzol, um gancho e uma viga em U. A seleção se baseou nas diferentes relações entre os raios de curvatura iniciais e as espessuras das vigas para observando-se o seu comportamento quando sujeitas ao carregamento, sejam elas delgadas, espessas, com curvatura acentuada ou não.

Uma viga é solicitada por forças transversais se deforma, alterando a sua curvatura inicial e adquirindo uma posição espacial correspondente ao deslocamento dos pontos que compõem a estrutura. Determina-se a equação da curva de deflexão empregando-se o Teorema de Castigliano, que, baseado no princípio da conservação da energia – 1ª Lei da Termodinâmica –, fornece os deslocamentos associados a cada ponto da viga.

Naturalmente, um dos aspectos práticos que diferenciam a análise de tensões e deslocamentos de vigas curvas e retas é a diferença nas suas geometrias. Desta forma, a energia de deformação em uma viga reta resultante dos estados de tensão e deformação provocados pela distribuição de momentos fletores $M(x)$ resulta da solução clássica de Euler-Bernoulli [4] na equação:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M(x)^2}{EI} dx \quad (1)$$

Por outro lado, a equação utilizada para vigas curvas com raio de curvatura inicial constante R , de acordo com [7], é a que segue:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{AEe} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{FV^2R}{AG} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2R}{AE} dx - \int_0^L \frac{MN}{AE} dx \quad (2)$$

Como mostrado mais adiante, alguns termos das integrais utilizadas no cálculo da energia de deformação – o momento fletor M , o esforço cortante V e o esforço normal N – são funções da força atuante. Os demais termos são funções da geometria – a área transversal A , o raio inicial de curvatura R , a distância e entre a linha neutra e o eixo baricêntrico e o fator de forma F – e do material do componente – o módulo de elasticidade E e o módulo de cisalhamento G .

Quanto à análise de tensões, existem premissas a serem consideradas. A primeira é que, diferentemente do que se observa em vigas retas (teoria de Euler-Bernoulli), a distribuição de tensões em vigas curvas não é linear ao longo da espessura da viga, o que implica a não-coincidência do ponto de passagem da fibra neutra no baricentro da seção reta quando está submetida à flexão pura. Para cada tipo de geometria foi desenvolvida uma rotina de cálculo específica para a avaliação das tensões atuantes em pontos da viga.

A segunda é que nas vigas curvas existe uma outra componente de tensão que é a tensão radial associada ao momento fletor interno. Em via de regra, a tensão radial é substancialmente menor do que a tensão circunferencial, podendo, portanto, ser omitida, salvo por vigas cujas seções transversais são compostas de mesas ou flanges e almas [7].

2. Deflexões em Vigas Curvas

O método utilizado neste trabalho para calcular os deslocamentos nas vigas curvas estudadas foi o Teorema de Castigliano [4]. Esse teorema afirma que, ao se expressar a energia de deformação de uma estrutura linear elástica como função de uma força P , o cálculo da derivada parcial da energia de deformação em relação à força P resulta na equação dos deslocamentos da estrutura na direção da força P , isto é:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} \quad (3)$$

e para as rotações na estrutura, tem-se, tomando a derivada parcial da energia de deformação em relação a um momento M , no sentido de M :

$$\phi = \frac{\partial U}{\partial M} \quad (4)$$

Desta forma, torna-se necessário estabelecer a energia de deformação da viga estudada em relação à carga transversal P , ao momento M e à força normal N . A equação (2) utilizada para o cálculo representa as contribuições desses esforços para a deformação da viga.

É importante destacar que a equação (2) representa uma aproximação da energia interna obtida com a hipótese de que as seções planas permanecem planas e que o efeito da tensão radial é desprezível. Essa última hipótese é adequada desde que a seção transversal não tenha a forma de

H, I ou T [7]. Nesses casos, a tensão radial pode inclusive exceder a tensão circunferencial, e portanto a fórmula acima não seria mais adequada. No presente estudo tais geometrias não são contempladas e os cálculos serão imitados aos casos em que as tensões radiais podem ser negligenciadas. O primeiro termo da equação:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{AEeR} R dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{AEe} dx \quad (5)$$

é utilizado como uma boa aproximação para a energia de deformação de vigas com curvatura acentuada, mais especificamente naquelas em que o raio de curvatura da viga é até 10 vezes menor do que a espessura da seção transversal. Para raios de curvatura crescentes, esta expressão tende a se aproximar da equação (1) para calcular a energia de deformação de vigas retas. Conforme a relação R/d cresce – na qual R é o raio de curvatura e d é a espessura da viga –, mais o produto AeR – no qual A é a área da seção transversal e e é a distância entre o eixo centroidal e o eixo neutro – se aproxima do momento de inércia da seção. De acordo com [3], para vigas em que $R/d > 8$, vale fazer a aproximação:

$$e \approx \frac{I_c}{AR} \quad (6)$$

Por meio de manipulações algébricas simples é possível chegar-se à fórmula da energia de deformação em vigas retas, dada pela equação (7):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI_c} dx \quad (7)$$

Igual conclusão pode ser tomada da Tabela 1, na qual estão apresentados os valores de AeR/I_c para diversas seções retas com diferentes curvaturas, com R/d aproximando-se de 10:

Tabela 1: Valores para AeR/I_c considerando-se várias geometrias de seção transversal de vigas curvas [7]:

SEÇÃO TRANSVERSAL	RELAÇÃO R/d			
	1	3	5	10
Retangular	1.077	1.008	1.003	1.001
Circular	1.072	1.007	1.003	1.001
Triangular (base voltada para dentro)	0,927	0,95	0,976	0,988
Triangular (base voltada para fora)	1.268	1.054	1,03	1.014

Considerando-se as demais vigas com relação $R/d < 8$, o parâmetro e é obtido fazendo-se:

$$e = R - r_n = R - \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}$$

na qual r_n define a localização da fibra neutra. Os dois termos seguintes da equação (2) de deflexão da viga são representados pelas equações (9) e (10):

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{FV^2R}{AG} dx \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2R}{AE} dx \quad (10)$$

Essas equações representam as energias de deformação relativas ao cisalhamento e ao esforço normal, respectivamente. Elas têm resultados mais significativos em vigas espessas e em vigas com curvatura acentuada [2]. Isso acontece pois o efeito da normal N e do esforço cortante V são menores caso a viga tenha uma curvatura grande e caso seja mais delgada.

Na primeira dessas duas equações apresentadas acima, o termo definido anteriormente como fator de forma F depende da geometria da seção transversal. Por representar a única contribuição das tensões e deformações de cisalhamento, nota-se que no cálculo dessa integral tem-se o módulo de cisalhamento G .

O quarto e último termo da equação (2):

$$\int_0^L \frac{MN}{AE} dx \quad (11)$$

representa o termo de acoplamento dos esforços normais N e momentos fletores M presentes em vigas curvas. Este termo envolve a energia complementar desenvolvida a partir do acoplamento das tensões provocadas pelo momento fletor M e pela força normal N .

Sua utilização é objeto de discussão de autores. Ken Tepper [5] destaca a importância do uso do termo de acoplamento no cálculo da energia de deflexão de vigas, especialmente com curvatura acentuada. Boresi [2] salienta o resultado da multiplicação do momento fletor pelo esforço

normal: Caso estes termos tenham o mesmo sinal, o efeito do termo de acoplamento será negativo e recomenda-se que ele seja descartado. Isso acontece para atenuar a aproximação que se faz quando se despreza a tensão radial.

Como comentado anteriormente, os termos da equação (2) são funções da força atuante na viga. Essa afirmação é verificada pelo diagrama de corpo livre da viga, já que por meio deste, encontra-se expressões para o momento fletor e os esforços normal e cortante em função da solicitação.

Após entender a contribuição de cada um dos termos da equação (2) de deflexão, os conhecimentos serão colocados em prática. Para determinar as curvas de deflexões das peças, estas equações foram aplicadas a cada uma das geometrias selecionadas e as soluções foram comparadas com resultados decorrentes de simulações por Elementos Finitos efetuadas no programa *SolidWorks*.

Antes de se entrar no mérito dos resultados analíticos, será explorada a forma como opera a rotina empregada pelo programa.

2.1 Solução Utilizando o Método dos Elementos Finitos

O método dos Elementos Finitos é hoje, provavelmente, o método numérico mais confiável e utilizado em engenharia no dimensionamento e verificação de projetos. Um dos *softwares* mais empregados nesta tarefa, *SolidWorks* é um CAD – *Computed Aided Design* – cujo complemento de simulações utiliza o método dos Elementos Finitos como ferramenta computacional para resolver problemas com diferentes graus de complexidade.

Os modelos são formados por uma malha composta de subdivisões do domínio cujo comportamento é descrito por funções aproximantes associadas aos graus de liberdade do problema. O refino da malha, isto é, o aumento do número de elementos utilizados, está diretamente relacionado com as aproximações obtidas pelo método numérico. Isso acontece pois as funções interpoladoras, descritas mais adiante, são polinômios que descrevem o comportamento da solução em cada subdivisão do domínio. Conforme o tamanho do elemento utilizado é reduzido, melhora-se a aproximação à solução exata. Em contrapartida, a complexidade dos cálculos é aumentada e mais memória computacional é exigida para realiza-los.

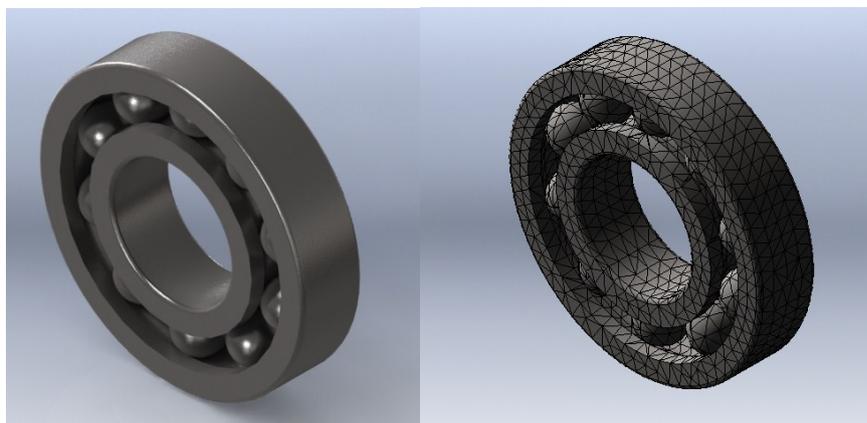


Figura 2: Exemplo de geração de malha a partir do modelo de um rolamento no SolidWorks

Inicialmente, por se tratar de uma técnica de discretização, os deslocamentos locais referidos ao sistema coordenado global são utilizados como variáveis de estado do problema em uma equação matricial na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{w}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{w}_2 \\ \dots \end{bmatrix}_{nx1} = R_{nxn} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \dots \end{bmatrix}_{nx1} \quad (12)$$

A matriz transformação R_{nxn} é utilizada para calcular os deslocamentos $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ em coordenadas locais em função dos deslocamentos (u, v, w) em coordenadas globais. Esse primeiro passo é importante porque é mais objetivo obter-se as matrizes (rigidez, por exemplo) referidas ao sistema local coordenado do elemento para depois, com a matriz R_{nxn} , obter a mesma matriz referida ao sistema global, assim expresso pela relação:

$$\underline{K} = \underline{R}^T \underline{K} \underline{R} \quad (13)$$

Desta forma a análise parte de um sistema local coordenado utilizando coordenadas r, s, t de um ponto em um elemento com q pontos nodais associados. Nos modelos tridimensionais, as coordenadas globais de qualquer ponto do elemento de viga são então expressas de acordo com as equações (14), (15) e (16):

$${}^1x(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^1x_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^1V_{tx}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k {}^1V_{sx}^k \quad (14)$$

$${}^1y(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^1y_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^1V_{ty}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k {}^1V_{sy}^k \quad (15)$$

$${}^1z(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^1z_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k {}^1V_{tz}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k {}^1V_{sz}^k \quad (16)$$

Nas quais:

- a_k, b_k são dimensões da seção transversal do elemento;
- ${}^1V_{t,s(x,y,z)}^k$ são as componentes do vetor unitário nas direções t, s no ponto nodal k ;
- O sobrescrito 1 representa um dado instante de tempo;
- A $h_k(r)$ $k = 1, q$ dá-se o nome de função de interpolação referidas ao nó k . No presente estudo essas são funções de Lagrange, nas quais possuem valor nulo em todos os pontos exceto no ponto referente ao nó em que é avaliada, cujo valor é unitário.

Avaliando-se os deslocamentos dos nós, tem-se:

$$u(r, s, t) = {}^1x - {}^0x = \sum_{k=1}^q h_k u_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{tx}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sx}^k \quad (17)$$

$$v(r, s, t) = {}^1y - {}^0y = \sum_{k=1}^q h_k v_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ty}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sy}^k \quad (18)$$

$$w(r, s, t) = {}^1z - {}^0z = \sum_{k=1}^q h_k w_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{tz}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sz}^k \quad (19)$$

Existem ainda três outros graus de liberdade associados às rotações dos nós e representados pelo vetor $\underline{\theta}_k$, na equação (20):

$$\underline{\theta}_k = \begin{bmatrix} \theta_x^k \\ \theta_y^k \\ \theta_z^k \end{bmatrix} \quad (20)$$

Que são utilizados na avaliação dos vetores normais referidos aos planos das seções retas. Desta forma,

$$V_t^k = {}^1V_t^k - {}^0V_t^k \quad (21)$$

$$V_s^k = {}^1V_s^k - {}^0V_s^k \quad (22)$$

Os vetores incremento são relacionados com os vetores rotações nodais, nas coordenadas x, y, z , na forma:

$$V_t^k = \theta_k \times {}^0V_t^k \quad (23)$$

$$V_s^k = \theta_k \times {}^0V_s^k \quad (24)$$

Substituindo-se o resultado acima nas equações das coordenadas em (14), (15) e (16), tem-se:

$${}^1x(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^1x_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (\theta_k \times {}^0V_{tx}^k) + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k (\theta_k \times {}^0V_{sx}^k) \quad (25)$$

$${}^1y(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^1y_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (\theta_k \times {}^0V_{ty}^k) + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k (\theta_k \times {}^0V_{sy}^k) \quad (26)$$

$${}^1z(r, s, t) = \sum_{k=1}^q h_k {}^1z_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (\theta_k \times {}^0V_{tz}^k) + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k (\theta_k \times {}^0V_{sz}^k) \quad (27)$$

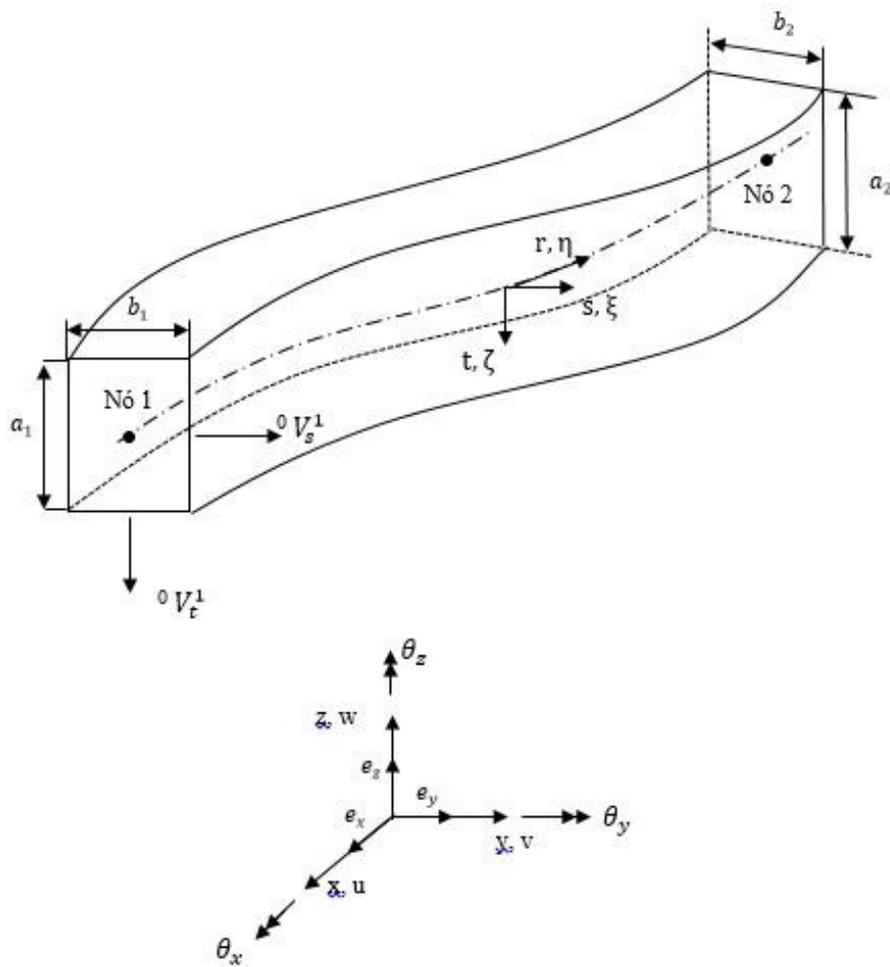


Figura 3: Modelo tridimensional de uma viga curva [1].

Dessa maneira é possível encontrar-se a matriz \underline{H} , cujos termos são as funções de interpolação que fornecem os campos de deslocamentos no interior dos elementos em função dos deslocamentos nodais. Definida a cinemática do elemento (a forma como ele se deforma), obtém-se as tensões no elemento de viga.

O passo seguinte consiste em definir a equação (28) de compatibilidade geométrica, resultado do somatório do produto entre a matriz \underline{B}_k e os graus de liberdade, \hat{u}_k do modelo:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{\eta\eta} \\ \gamma_{\eta\xi} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \underline{B}_k \hat{\underline{u}}_k \quad (28)$$

em que o vetor dos graus de liberdade é representado por:

$$\hat{\underline{u}}_k^T = [u_k \ v_k \ w_k \ \theta_x^k \ \theta_y^k \ \theta_z^k] \quad (29)$$

Portanto, as componentes do tensor das deformações do elemento de viga são expressas por:

$$\underline{\epsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (30)$$

que, em coordenadas locais r, s, t , fica expresso na forma global:

$$\underline{\epsilon}'(r, s, t) = \underline{T}^T \underline{\epsilon}(x, y, z) \underline{T} \quad (31)$$

$$\underline{\epsilon}'(r, s, t) = \begin{bmatrix} \epsilon_{\eta\eta} & \frac{\gamma_{\eta\xi}}{2} & \frac{\gamma_{\eta\zeta}}{2} \\ \frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} & \epsilon_{\xi\xi} & \frac{\gamma_{\xi\zeta}}{2} \\ \frac{\gamma_{\zeta\eta}}{2} & \frac{\gamma_{\zeta\xi}}{2} & \epsilon_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Considerando o elemento esbelto, apenas as componentes $\varepsilon_{\eta\eta}$, $\gamma_{\eta\xi}$ e $\gamma_{\eta\zeta}$ são relevantes e a matriz constitutiva do elemento de viga se reduz a:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G_k & 0 \\ 0 & 0 & G_k \end{bmatrix} \quad (33)$$

Assim, pode-se determinar a matriz de rigidez local do elemento, que resulta em:

$$\underline{\tilde{K}} = \int_v \underline{B}(r, s, t)^T \underline{C} \underline{B}(r, s, t) A \, d\tilde{x} \, d\tilde{y} \, d\tilde{z} = \int_v \underline{B}(r, s, t)^T \underline{C} \underline{B}(r, s, t) A \underline{J} \, dr \quad (34)$$

Na equação (34), \underline{J} é a matriz Jacobiana, obtida da derivada das coordenadas globais x, y, z em relação às coordenadas naturais r, s, t , isto é:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ ds \\ dt \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} dr \\ ds \\ dt \end{bmatrix} \quad (35)$$

A matriz de rigidez global do sistema é obtida a partir da matriz de rigidez local por:

$$\underline{K} = \underline{R}^T \underline{\tilde{K}} \underline{R} \quad (36)$$

Resolvendo-se o sistema de equações:

$$\underline{K}\hat{u} = \underline{R} \quad (37)$$

obtem-se o vetor \hat{u} dos deslocamentos nodais e, com ele, recuperar as componentes de deformações e de tensões empregando-se a Equação de Compatibilidade Geométrica e a Lei Constitutiva do material, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \tau_{\eta\eta} \\ \tau_{\eta\xi} \\ \tau_{\eta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G_k & 0 \\ 0 & 0 & G_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{\eta\eta} \\ \gamma_{\eta\xi} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix} \quad (38)$$

2.2 Cálculo dos Deslocamentos

Por meio do cálculo das deflexões, serão fornecidas as equações de deflexão referente às quatro geometrias de vigas propostas no início do trabalho.

Aqui é importante destacar as duas hipóteses adotadas:

- i. O material das vigas é homogêneo e isotrópico;
- ii. As vigas são tridimensionais e o material segue o comportamento linear elástico.

A primeira viga curva que será estudada é o gancho, uma viga curva com grande aplicabilidade na engenharia.

Dos diagramas de corpo livre determinou-se, para cada caso, o momento fletor e os esforços normal e cortante. As deduções para cada caso, bem como a solução para os deslocamentos, estão apresentadas no Apêndice A. Dessa forma, foi possível encontrar-se soluções para a energia de deformação da barra e, posteriormente, com a aplicação do Teorema de Castigliano, os deslocamentos associados a cada termo da equação.

Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 2. A intenção é evidenciar a contribuição de cada termo referente à equação de energia de deformação no cálculo dos deslocamentos e comprovar a condição de que vigas com um alto valor da razão raio de curvatura por espessura podem ser tratadas como vigas retas.

2.2.1 Especificações do Gancho

O gancho considerado é fabricado de aço AISI 1020 ($E = 200 \text{ GPa}$; $G = 77 \text{ GPa}$; $Y = 351,6 \text{ MPa}$) e está representado na Figura 4, como modelado no programa *SolidWorks*. Mais abaixo, na Figura 5, estão mostradas as cotas na vista frontal e da seção transversal do gancho delimitada pela linha tracejada na sua porção inferior:



Figura 4: Modelo do gancho feito no *SolidWorks*.

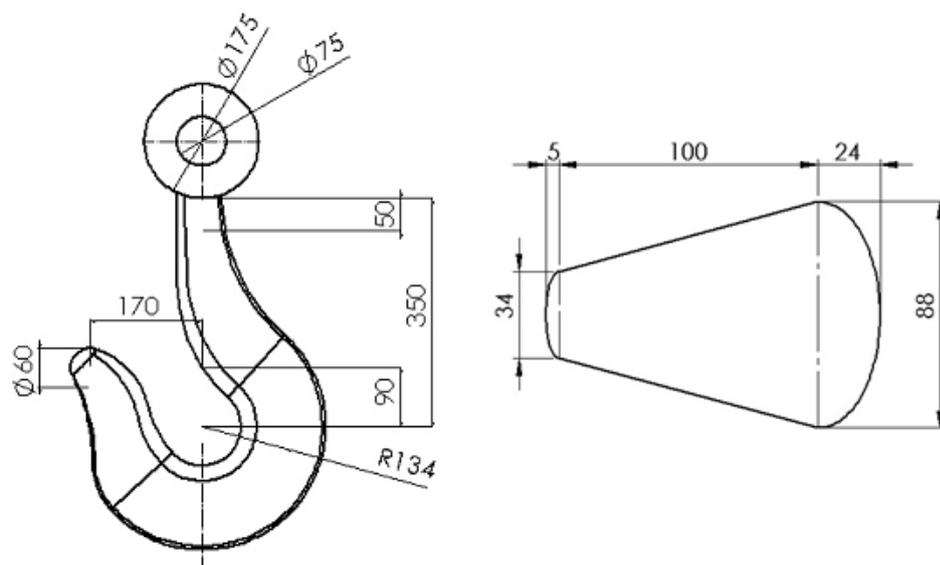


Figura 5: Vista frontal e de seção do gancho.

2.2.2 Especificações da Viga em U

A viga em U é uma viga curva com características semelhantes à do gancho (espessa e com curvatura acentuada), mas com razão entre raio de curvatura inicial e diâmetro maior. Ela é feita de Liga de Aço ($E = 210 \text{ GPa}$; $G = 79 \text{ GPa}$; $Y = 62 \text{ MPa}$), tem comprimento da seção reta $L = 100 \text{ mm}$ e sua geometria está mostrada nas Figuras 6 e 7:

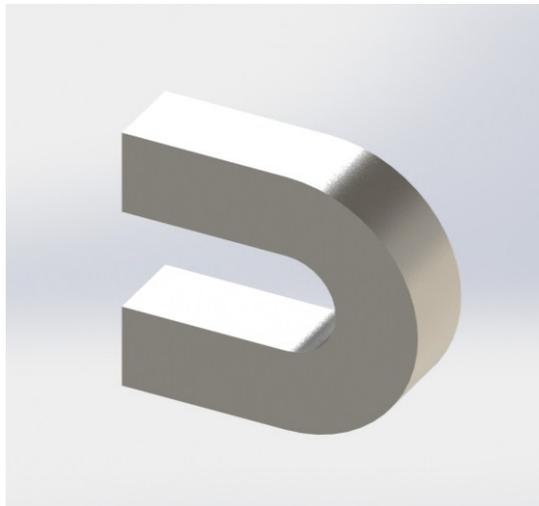


Figura 6: Modelo da viga em U feita no *SolidWorks*.

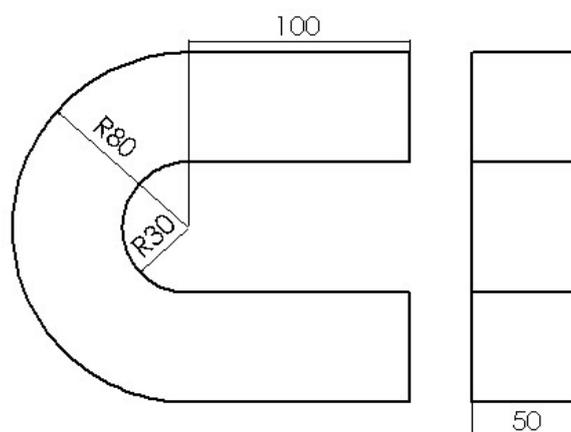


Figura 7: Vistas frontal e lateral da viga em U.

2.2.3 Especificações do Anzol

O anzol é uma peça visualmente semelhante ao gancho, mas diferentemente da viga em U já que tem uma razão entre raio de curvatura e espessura muito maior. Observar-se-á que ele tem características de uma viga reta. Foi selecionado um anzol de Liga de Aço ($E = 210 \text{ GPa}$; $G = 79 \text{ GPa}$; $Y = 62 \text{ MPa}$) cuja representação está a representada a seguir, nas Figuras 8 e 9:



Figura 8: Modelo do anzol¹ feito no *SolidWorks*

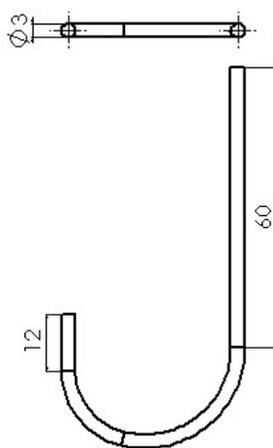


Figura 9: Vistas superior e frontal do anzol.

¹ O corte que forma a ponta do anzol só foi representado para fins estéticos. Quando se aplica um carregamento no ponto mais inferior do anzol, essa extremidade se comporta como corpo rígido e pode ser excluída da análise. As imagens posteriores não mostram essa ponta pois ela torna a geração da malha mais complexa, prejudicando dessa forma a simulação sem influenciar na análise de tensões.

2.2.4 Especificações da Fuselagem de Avião

A viga selecionada representa a caverna da fuselagem de um avião. Ela é um elemento estrutural que tem uma espessura razoável, mas que apresenta, comparativamente às outras geometrias, um raio de curvatura muito maior. Como mostrado na Tabela 1, pode-se considerar que a viga se comporta como uma viga reta. No entanto, esse exemplo difere do caso do anzol exatamente por ter uma espessura muito maior, não sendo, portanto, uma viga delgada.

A fuselagem é feita de Liga de Alumínio 1060 ($E = 69 \text{ GPa}$, $G = 27 \text{ GPa}$, $Y = 27,6 \text{ MPa}$) e sua geometria está mostrado nas Figuras 10 e 11:



Figura 10: Modelo da Caverna da Fuselagem de um avião feito no *SolidWorks*.

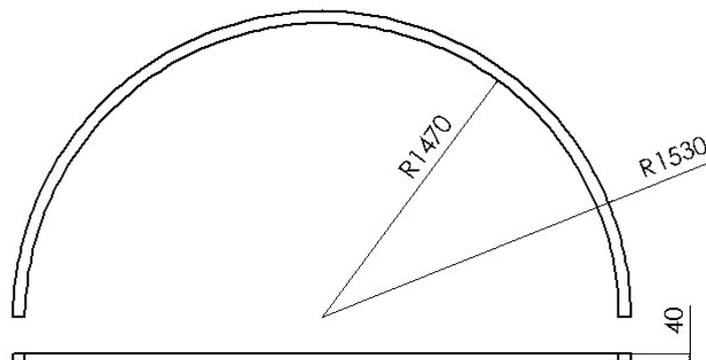


Figura 11: Vistas frontal e inferior da fuselagem.

2.3 Resultados Analíticos dos Deslocamentos (Comparação)

Substituindo-se os valores dos parâmetros de cada viga nas equações de deslocamentos, determinou-se os resultados finais para os deslocamentos associados a cada termo da equação da energia de deformação. Os resultados estão apresentados na Tabela 2, que mostra, nas quatro primeiras linhas, a contribuição de cada integral no valor total do deslocamento, que está mostrado na última linha da tabela:

Tabela 2: Resultados comparativos dos deslocamentos para cada geometria.

TERMO DA EQUAÇÃO DE ENERGIA DE DEFLEXÃO	DESLOCAMENTOS							
	GANCHO R/d = 0,94		VIGA EM U R/d = 1,1		ANZOL R/d = 6,67		FUSELAGEM R/d = 25	
	δ [mm]	% sobre δ total	δ [mm]	% sobre δ total	δ [mm]	% sobre δ total	δ [mm]	% sobre δ total
$\frac{1}{2} \int_0^x \frac{M^2}{AEe} dx$	0,243325	71,8%	0,256294	94,3%	3,762493	99,9%	96,04054	100,0%
$\frac{1}{2} \int_0^x \frac{FV^2R}{AG} dx$	0,04917	14,5%	0,0049868	1,8%	0,0016	0,0%	0,01309	0,0%
$\frac{1}{2} \int_0^x \frac{N^2R}{AE} dx$	0,015414	4,6%	0,0015633	0,6%	0,000529	0,0%	0,004268	0,0%
$\int_0^x \frac{MN}{AE} dx$	0,030829	9,1%	0,0088114	3,2%	0,0000011	0,0%	0,0000085	0,0%
$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}$	0,338739	100,0%	0,271656	100,0%	3,764586	100,0%	96,05789	100%

Verifica-se a evolução da influência do primeiro termo na composição do deslocamento total de cada viga expresso na última linha da tabela. Percebe-se também a diminuição da influência dos termos associados aos esforços cortante e normal, representados, respectivamente, na segunda e na terceira linha da tabela. Essa evidência está envolvida com o aumento da linearidade

da distribuição de tensões ao longo da seção reta de vigas curvas conforme aumenta a sua razão de curvatura para a espessura. Por esta conclusão, no limite, para $R \rightarrow \infty$, tem-se uma viga reta que possui distribuição perfeitamente linear de tensões ao longo da sua espessura.

2.4 Resultados Numéricos

Nos próximos tópicos serão mostrados os resultados dos deslocamentos obtidos pelas simulações feitas no *SolidWorks*. Além disso, uma comparação entre os valores encontrados irá mostrar a eficácia do método empregado no cálculo dos deslocamentos.

Foi utilizado o gerador padrão de malha do programa. Na Tabela 3 estão apresentados os parâmetros das malhas utilizadas nas simulações para cada geometria:

Tabela 3: Parâmetros das malhas utilizadas para o cálculo dos deslocamentos.

PARÂMETROS DA MALHA	GEOMETRIA DE VIGA			
	GANCHO	VIGA EM U	ANZOL	FUSELAGEM
Formato do Elemento	Tetraédrico de Quatro Nós			
Tamanho do Elemento [mm]	9,252884	4,88508	0,556365	11,225
Tolerância [mm]	0,476442	0,244254	0,0278182	0,561249
Pontos Jacobianos	16	16	16	16
Número de Nós	77768	76447	58508	97396
Número de Elementos	51830	52203	37286	60724

2.4.1 Deslocamentos no Gancho

Segundo o Teorema de Castigliano, a solução dos deslocamentos foi obtida no ponto de aplicação da força. Naturalmente, portanto, seleccionou-se o ponto nodal correspondente para obtenção do deslocamento no gancho:

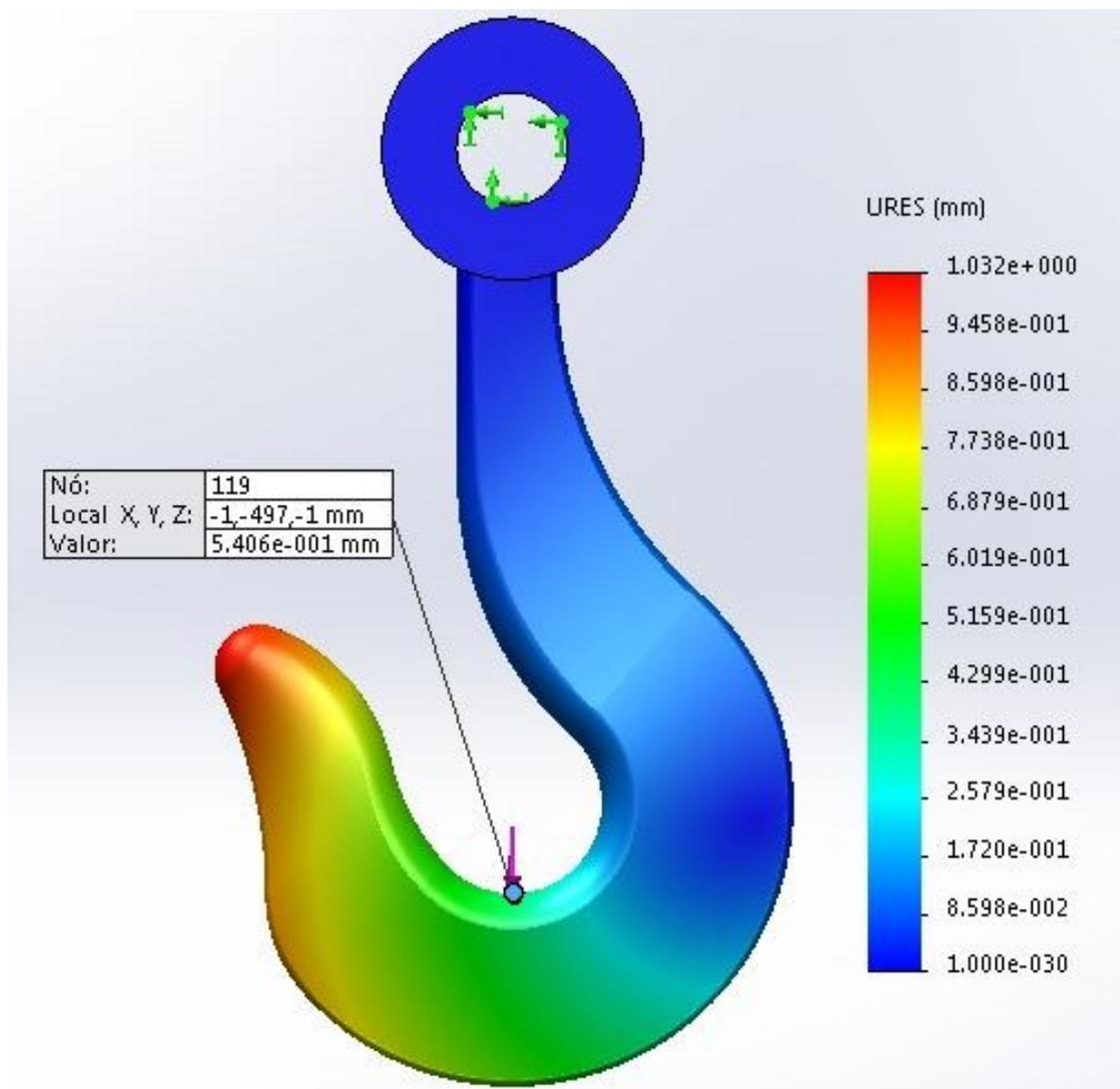


Figura 12: Resultado numérico do deslocamento no gancho.

Adicionalmente, foi calculado o erro relativo em relação à solução exata:

$$Erro = \frac{\delta_{solução\ numérica} - \delta_{exato}}{\delta_{exato}} = \frac{0,540600 - 0,338739}{0,338739} = 59,59\%$$

O elevado erro obtido com a análise resulta do acoplamento do modelo. A mudança de curvatura da porção inferior do gancho para a haste de fixação, como pode ser observado na Figura 5, desloca o ponto de avaliação. Esta afirmação é verificada tomando-se o deslocamento em outro ponto da malha:

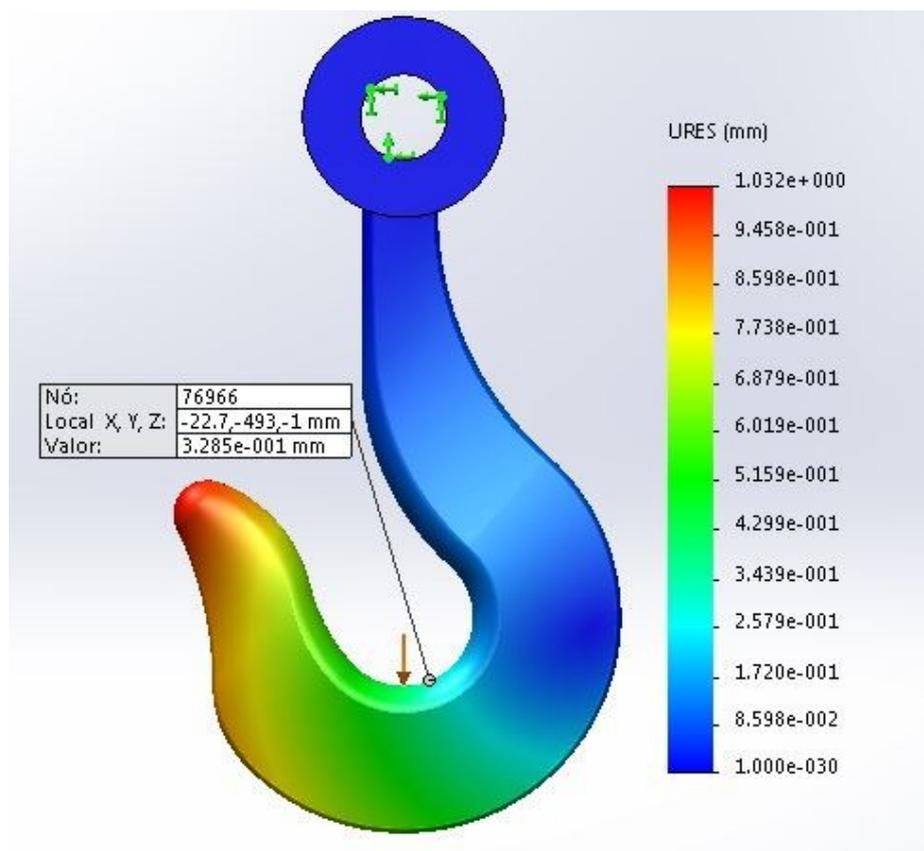


Figura 13: Resultado numérico mais próximo do valor analítico do deslocamento no gancho.

Recalculando o erro entre as soluções:

$$Erro = \frac{\delta_{solução\ numérica} - \delta_{exato}}{\delta_{exato}} = \frac{0,328500 - 0,338739}{0,338739} = 3,02\%$$

Comprovando-se assim o deslocamento do ponto de avaliação por conta do acoplamento.

2.4.2 Deslocamentos na Viga em U

O resultado do deslocamento no ponto de aplicação da força e erro associado está mostrado na Figura 14:

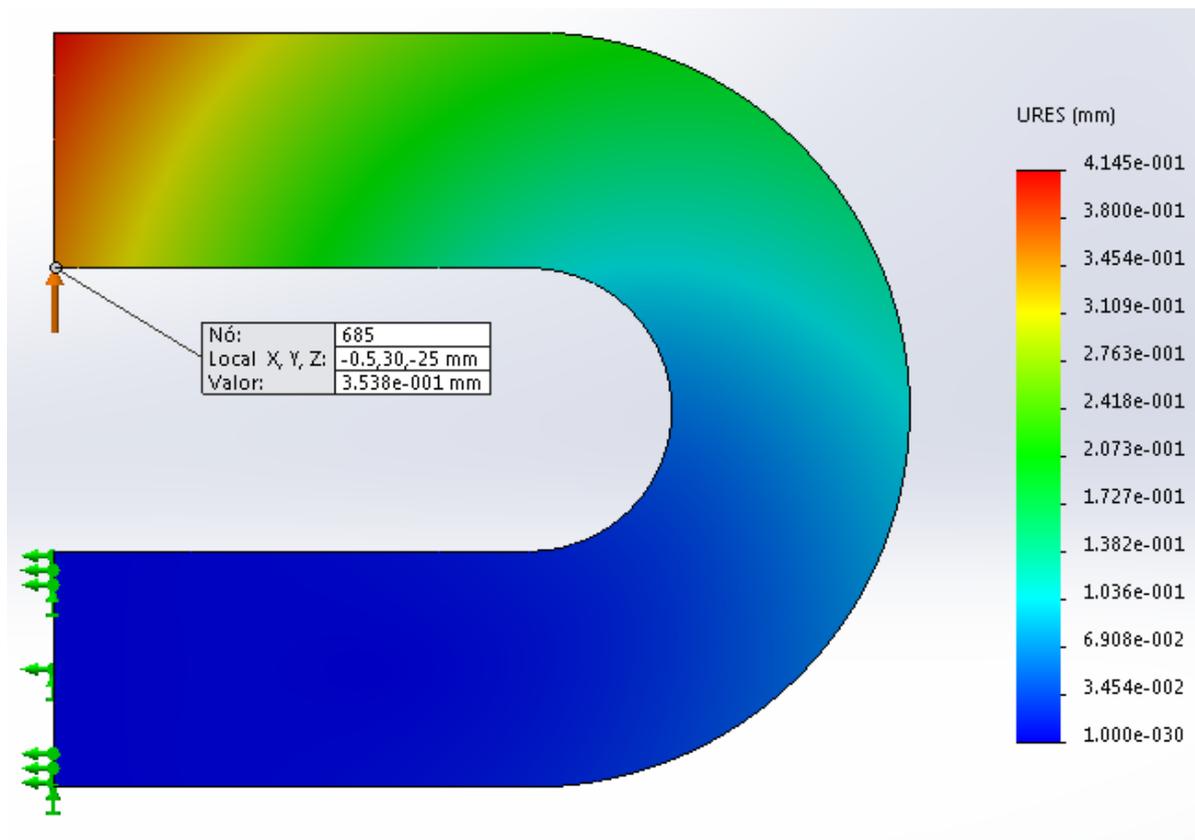


Figura 14: Resultado numérico do deslocamento na viga em U.

Além do resultado obtido, calculou-se o erro relativo em relação à solução exata:

$$Erro = \frac{\delta_{solução\ numérica} - \delta_{exato}}{\delta_{exato}} = \frac{0,3538000 - 0,2716556}{0,2716556} = 30,24\%$$

Novamente, verifica-se que o erro obtido foi elevado. Como pode ser observado nas Figuras 6 e 7, existe um acoplamento entre um trecho curvo e outro reto na viga. Dele, decorre o deslocamento do ponto na qual a deflexão é avaliada.

Verificando-se esta hipótese por meio da avaliação em outro ponto afastado do ponto nodal na qual é feita a aplicação da força:

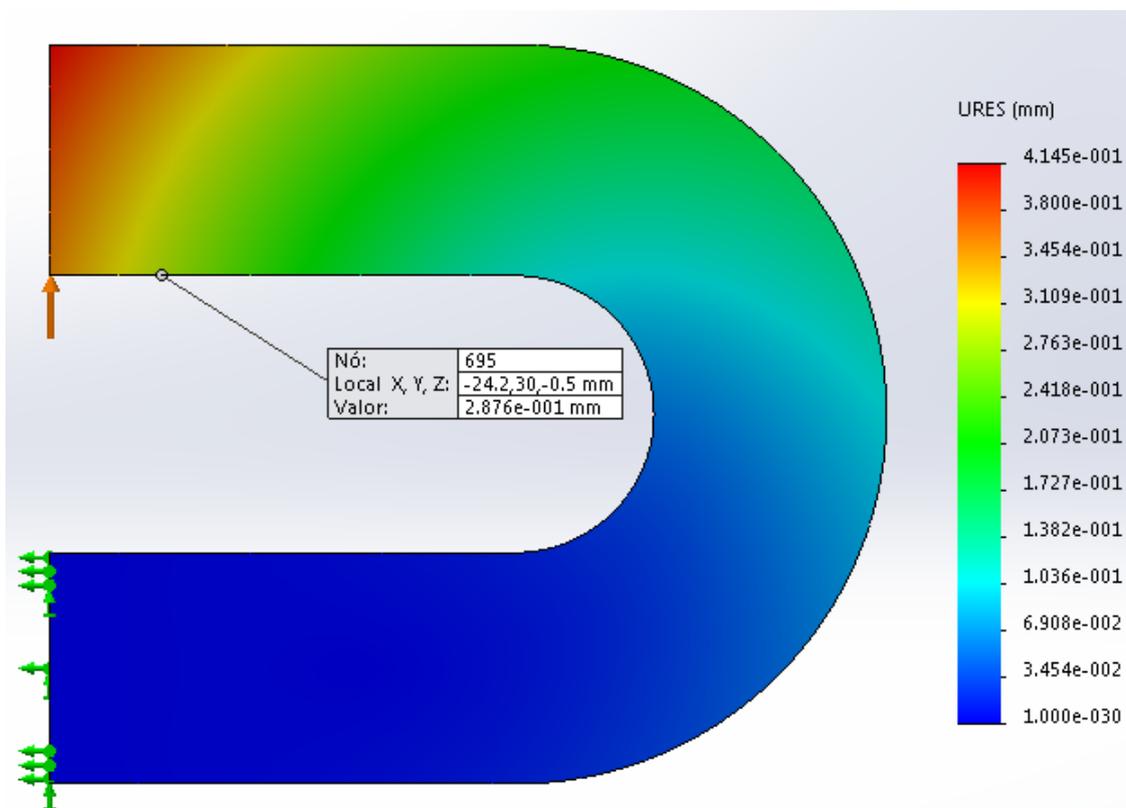


Figura 15: Resultado numérico mais próximo do valor analítico do deslocamento na viga em U.

Recalculando-se o erro, obtém-se um valor mais próximo da solução exata, confirmando desta maneira a influência do acoplamento.

$$Erro = \frac{\delta_{solução\ numérica} - \delta_{exato}}{\delta_{exato}} = \frac{0,2876000 - 0,2716556}{0,2716556} = 5,87\%$$

2.4.3 Deslocamentos no Anzol

Resultado do deslocamento no ponto de aplicação da força e erro relativo em relação à solução analítica:

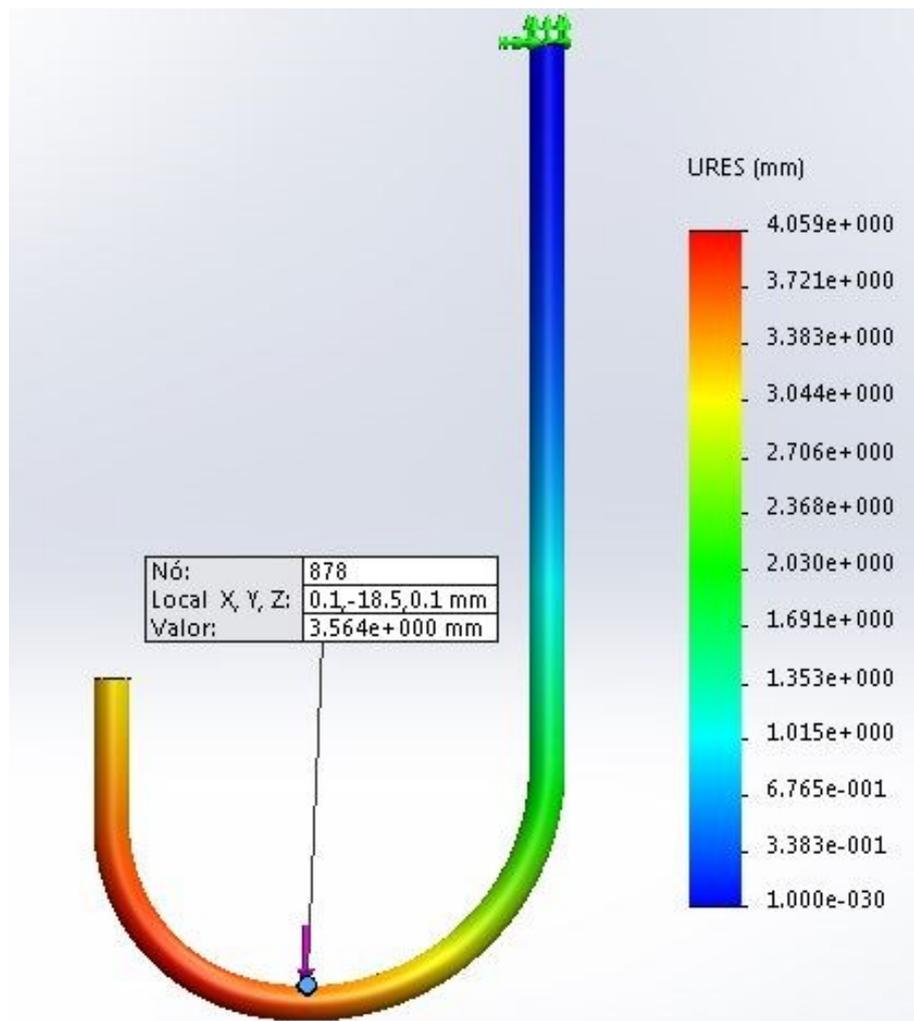


Figura 16: Resultado numérico do deslocamento no anzol.

$$Erro = \frac{\delta_{exato} - \delta_{solução\ numérica}}{\delta_{exato}} = \frac{3,7645856 - 3,564000}{3,7645856} = 5,33\%$$

2.4.4 Deslocamentos na Fuselagem de Avião

Resultado do deslocamento no ponto de aplicação da força e erro relativo em relação à solução exata:

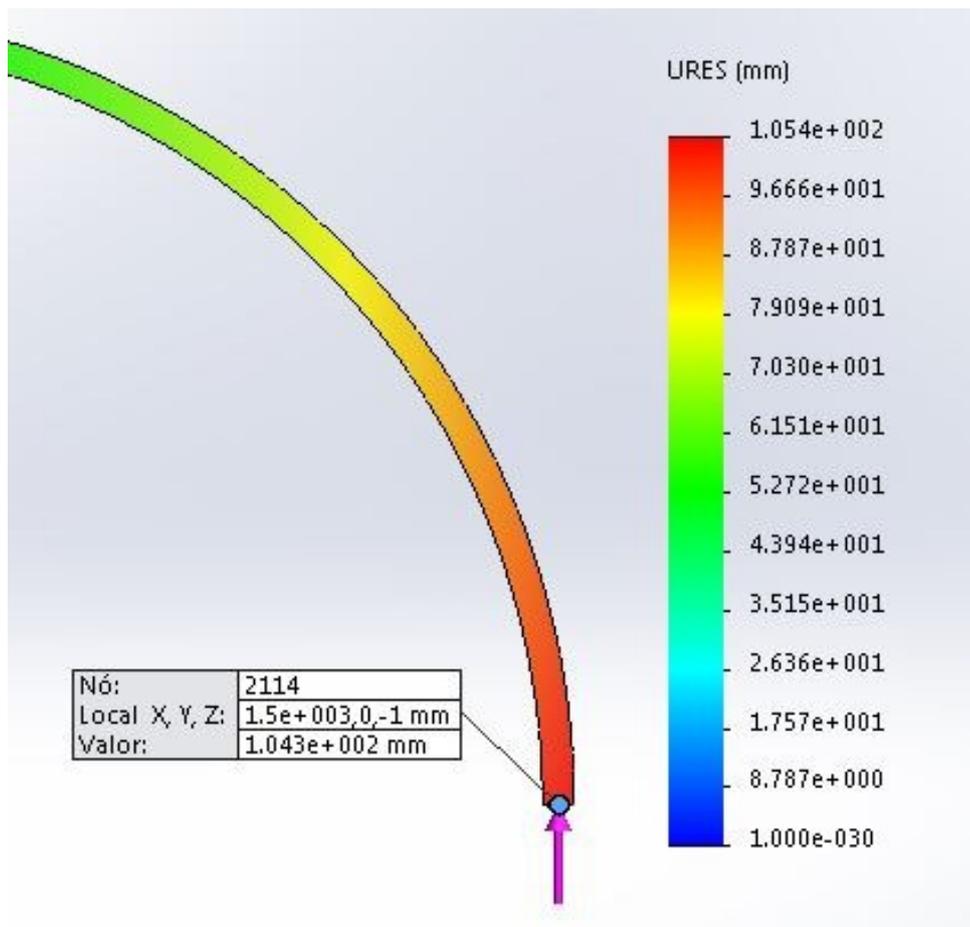


Figura 17: Resultado numérico do deslocamento na fuselagem.

$$Erro = \frac{\delta_{solução\ numérica} - \delta_{exato}}{\delta_{exato}} = \frac{104,300000 - 96,057895}{96,057895} = 8,58\%$$

3. Tensões em Vigas Curvas

Da mesma forma utilizada para as deflexões no capítulo 2, também aqui é inicialmente apresentado o método analítico de resolução, cujas soluções são comparadas com os resultados obtidos das simulações numéricas com o *software SolidWorks*.

3.1 Método Analítico

No cálculo das tensões as seguintes hipóteses são consideradas:

- i. Seções transversais planas permanecem planas após a aplicação de um carregamento;
- ii. As tensões radial σ_{rr} e de cisalhamento $\sigma_{r\theta}$ são suficientemente pequenas em relação à tensão circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$;
- iii. Por causa da diferença no tamanho das fibras nas porções interna e externa da viga, a distribuição de deformações e, conseqüentemente, de tensões, não é linear;
- iv. O eixo centroidal não coincide com o eixo neutro.

Timoshenko e Goodier [6] apresentaram uma solução baseada na teoria da elasticidade para o cálculo das tensões em uma viga curva de seção transversal retangular. Já em [2], é demonstrado como se encontrar a solução para o cálculo da tensão circunferencial para vigas curvas com seção transversal em geral. O resultado obtido é fornecido pela equação abaixo:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{N}{A} + \frac{M(A - rA_m)}{Ar(RA_m - A)} \quad (39)$$

na qual N é o esforço normal, M é o momento fletor, A é a área transversal e r é a coordenada radial na qual se deseja calcular a tensão circunferencial. É interessante notar que, como a tensão varia com o inverso da posição radial, tem-se uma distribuição hiperbólica das tensões ao longo da seção transversal. Além disso, R é o raio de curvatura inicial da viga $A_m = \int_A \frac{dA}{r}$ é um parâmetro geométrico dependente da seção transversal utilizada. Em [2], são apresentadas expressões para A_m referentes às principais geometrias de seções transversais de vigas utilizadas em engenharia. Nesta equação o primeiro termo refere-se à contribuição do esforço normal atuante na seção reta da viga e o segundo é referente ao momento fletor.

Equações para estes parâmetros são representadas em função da coordenada angular da seção reta. Para que a análise tenha um viés prático, adotou-se o valor máximo para o momento fletor e para o esforço normal; dessa maneira, foi possível encontrar as tensões circunferenciais críticas nas vigas. Com essa abordagem, os valores encontrados também puderam ser diretamente comparados com os valores obtidos nas simulações numéricas mostradas posteriormente para testar a eficiência do método.

3.2 Resultados Analíticos das Tensões (Comparação)

Na Tabela 4 constam os parâmetros e as soluções obtidas para as tensões circunferenciais $\sigma_{\theta\theta}$ em cada caso. Na última linha está representada a razão entre as tensões máximas na fibra interna e externa de cada geometria de viga.

Tabela 4: Parâmetros e resultados analítico para as tensões circunferenciais máximas nas fibras interna e externa de cada geometria.

PARÂMETROS E RESULTADOS	TENSÕES			
	GANCHO	VIGA EM U	ANZOL	FUSELAGEM
Força Aplicada P [N]	190900	9500	50	300
R [mm]	116	55	20	1500
A [mm^2]	7874,03	2500	7,07	2400
Am [mm]	73,83	49,04	0,354	1,6
$\sigma_{\theta\theta int}$ [MPa]	249,9	106,2	406,6	30,13
$\sigma_{\theta\theta ext}$ [MPa]	-102,2	-49,04	-350	-38,13
$\frac{\sigma_{\theta\theta int}}{\sigma_{\theta\theta ext}}$	2,45	2,15	1,16	1,03

A equação (39) mostra que a tensão circunferencial varia hiperbolicamente com a coordenada radial. Nota-se, entretanto, pela última linha da tabela (que mostra a razão entre o valor das tensões nos pontos interno e externo da seção reta), que a distribuição de tensões ao longo da seção transversal das vigas tende a apresentar um comportamento linear conforme aumenta razão entre raio de curvatura inicial e espessura da viga.

3.3 Método Numérico para Obtenção das Tensões

Conhecer a rotina utilizada pelo software foi importante na reprodução do problema no que diz respeito à elaboração da malha utilizada na simulação estática. O elemento escolhido como padrão foi o tetraédrico de quatro nós.

A precisão do método dos elementos finitos depende diretamente da quantidade de elementos e de nós presentes na malha. Ao passo que o número de elementos e de nós tende a infinito – ou seja, que o tamanho dos elementos finitos tende a zero, a solução aproximada do método converge para a solução exata do problema.

Com o propósito de verificar esses conceitos, uma malha adicional – além da já apresentada no cálculo dos deslocamentos – foi gerada. Os parâmetros das malhas, resultados e erros associados estão apresentados em tabelas comparativas para cada viga. Além disso, foram mapeadas as tensões ao longo das seções transversais das geometrias para verificar como se dá a distribuição de tensões. Os resultados evidenciarão a teoria de que a distribuição em algumas vigas, que podem ser tratadas como retas, é aproximadamente linear, enquanto que em vigas com curvatura acentuada a distribuição é hiperbólica, como já pode ser observado na Tabela 4.

3.3.1 Tensões no Gancho – Solução por Elementos Finitos

A Tabela 5 apresenta os parâmetros das duas malhas geradas. Em seguida, na Figura 18, é mostrada a segunda malha. Os resultados das simulações numéricas estão apresentados na Figuras 19 e 20.

Tabela 5: Parâmetros das malhas geradas para simulação com o gancho.

PARÂMETROS E RESULTADOS	GEOMETRIA	
	GANCHO	
	Malha 1	Malha 1
Formato do Elemento	Tetraédrico de quatro nós	Tetraédrico de quatro nós
Tamanho do Elemento [mm]	19,0577	9,52884
Tolerância [mm]	0,952884	0,476442
Pontos Jacobianos	4	16
Número de Nós	12800	77768
Número de Elementos	7795	51830

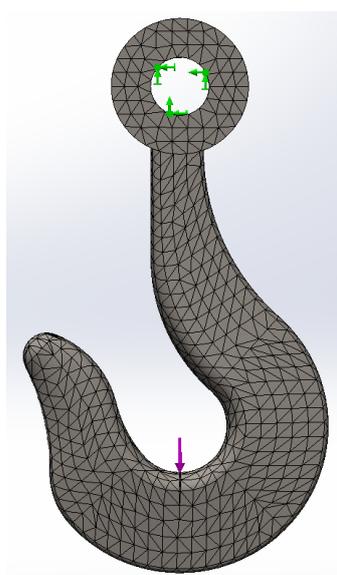


Figura 18: Representação da primeira malha gerada para o gancho.

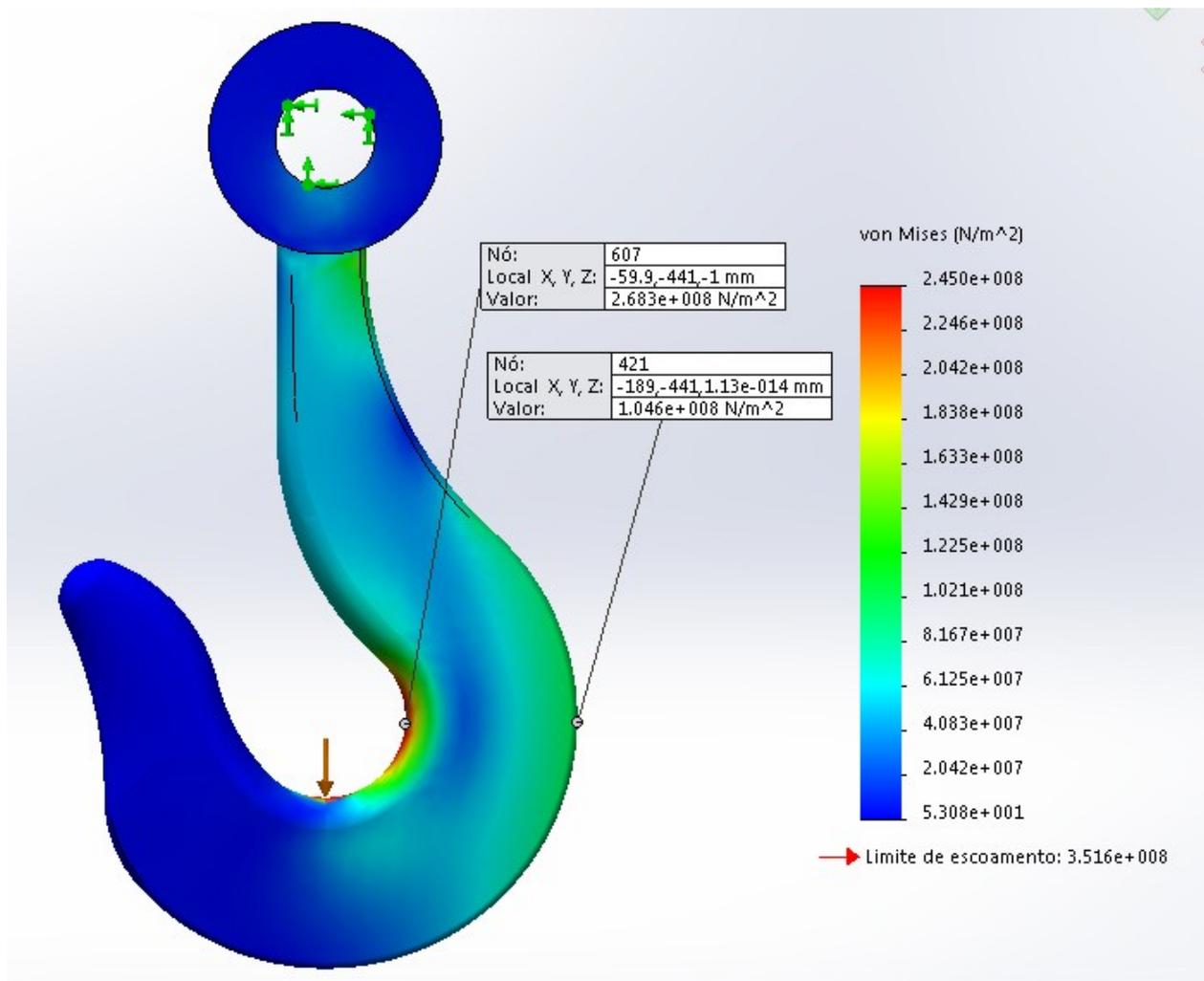


Figura 19: Resultado numérico das tensões no gancho utilizando a primeira malha.

Calculando o erro entre a solução analítica e a numérica nas coordenadas $\theta = 90^\circ$ para as coordenadas radiais interna e externa, obtém-se:

$$Erro_{fibra\ interna} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{int}} - \sigma_{\theta\theta exata_{int}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{int}}} = \frac{268,3 - 249,93}{249,93} = 7,35\%$$

$$Erro_{fibra\ externa} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{ext}} - \sigma_{\theta\theta exata_{ext}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}}} = \frac{104,6 - 102,2}{102,2} = 2,32\%$$

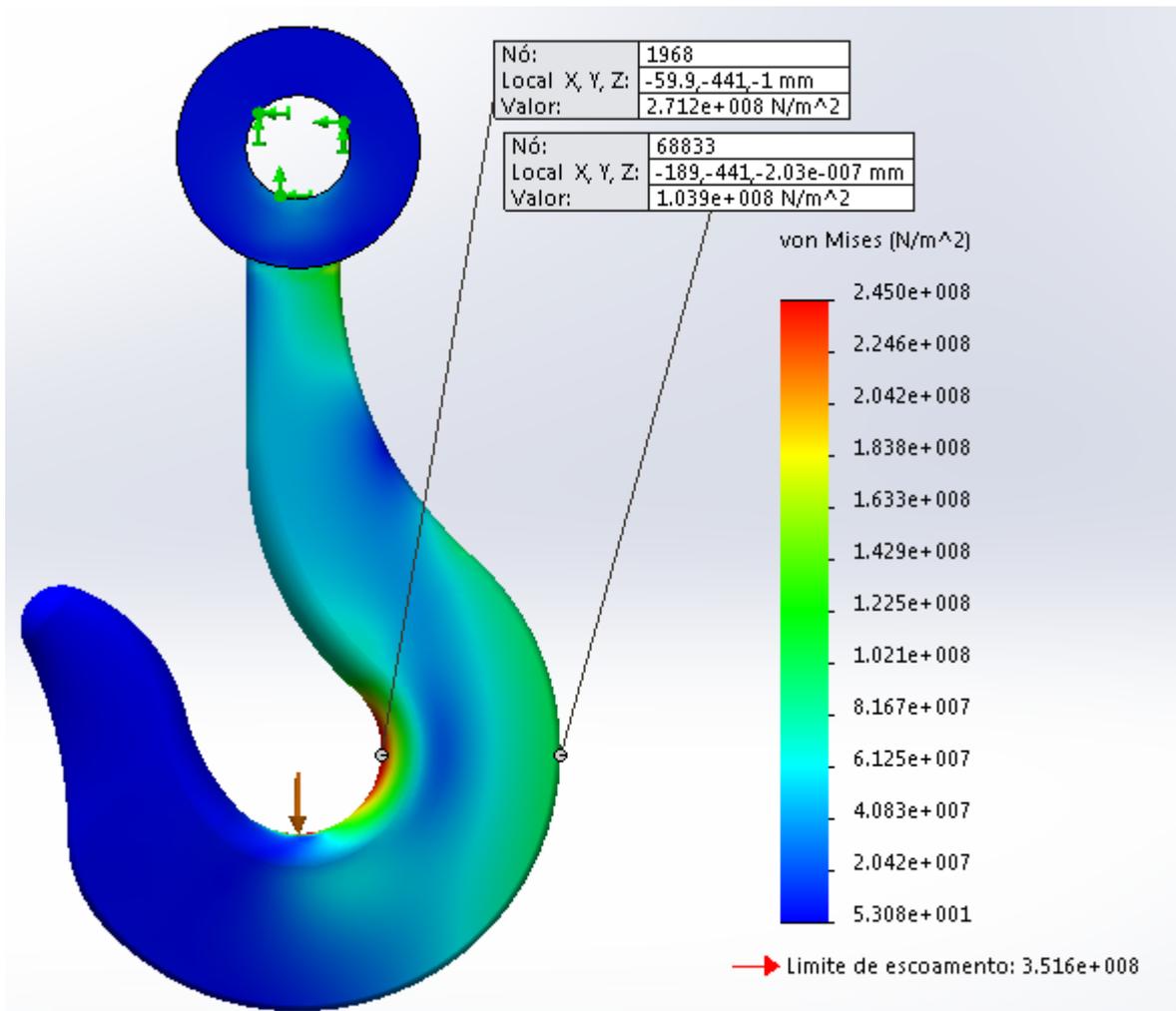


Figura 20: Resultado numérico das tensões no gancho utilizando a segunda malha.

Nesse caso, o erro entre a solução analítica e a numérica é:

$$Erro_{fibra\ interna} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{int}} - \sigma_{\theta\theta exata_{int}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{int}}} = \frac{271,2 - 249,93}{249,93} = 8,51\%$$

$$Erro_{fibra\ externa} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{ext}} - \sigma_{\theta\theta exata_{ext}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}}} = \frac{103,9 - 102,2}{102,2} = 1,66\%$$

Apesar da segunda malha ter uma qualidade superior à primeira, o erro do resultado numérico em relação ao valor calculado é maior. Isso pode ter acontecido por conta da utilização de

premissas simplificadoras, tais como o desprezo da tensão radial. Essa componente pode contribuir positivamente para a tensão equivalente, justificando o crescimento da tensão obtida para a fibra interna e consequentemente o erro associado.

Além dos resultados obtidos, na Figura 21 está representado um gráfico gerado por meio do mapeamento das tensões ao longo da seção transversal do gancho na mesma coordenada angular dos nós em que foram obtidas as tensões.

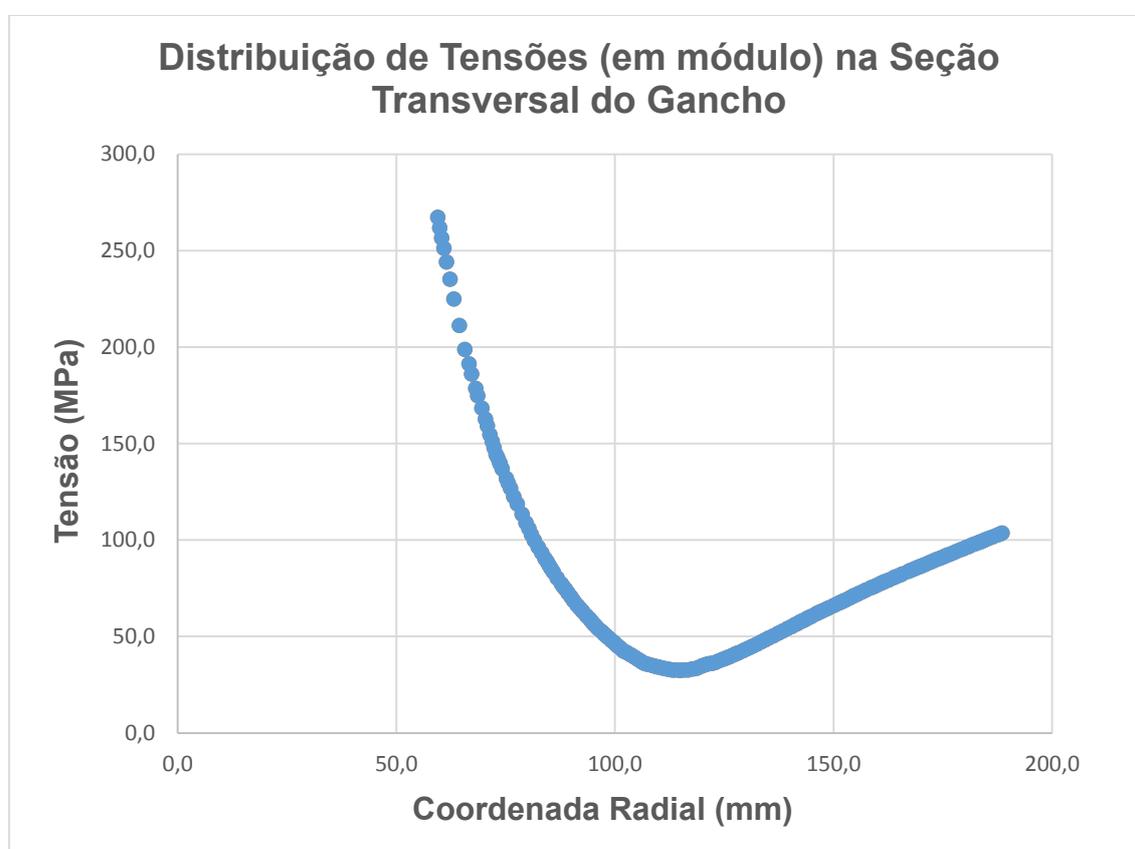


Figura 21: Distribuição de tensões ao longo da seção reta do gancho.

É visível que a distribuição de tensões ao longo não segue o padrão de uma viga elástica reta, na qual a distribuição de tensões ao longo da viga, desde a fibra interna até a externa, é totalmente linear. Esse resultado faz sentido de acordo com a equação (39), na qual verifica-se que a tensão varia hiperbolicamente com a posição radial na qual ela é calculada.

Também nota-se a incongruência do eixo neutro com o eixo baricêntrico do gancho. No resultado que mostra o mapa de tensões ao longo de toda a geometria pode-se observar como a linha neutra se aproxima da fibra interna, como encontrado anteriormente no cálculo de R_n para se determinar as tensões circunferenciais analiticamente.

3.3.2 Tensões na Viga em U – Solução por Elementos Finitos

Na Tabela 6 estão apresentados os parâmetros das duas malhas geradas. Em seguida, na Figura 22, é mostrada a segunda malha. As Figuras 23 e 24 apresentam as soluções para as tensões máximas na fibra interna e externa, respectivamente.

Tabela 6: Parâmetros das malhas geradas para simulação com a viga em U.

PARÂMETROS E RESULTADOS	GEOMETRIA	
	VIGA EM U	
	Malha 1	Malha 2
Formato do Elemento	Tetraédrico de quatro nós	Tetraédrico de quatro nós
Tamanho do Elemento [mm]	9,77016	4,88508
Tolerância [mm]	0,488508	0,244254
Pontos Jacobianos	4	16
Número de Nós	12774	76447
Número de Elementos	8161	52203

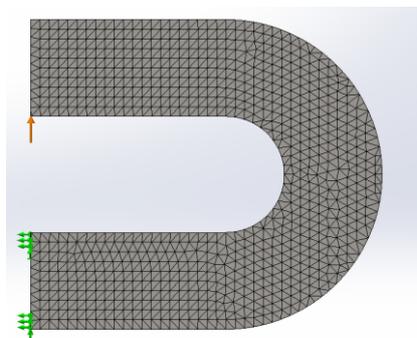


Figura 22: Representação da primeira malha gerada para a viga em U.

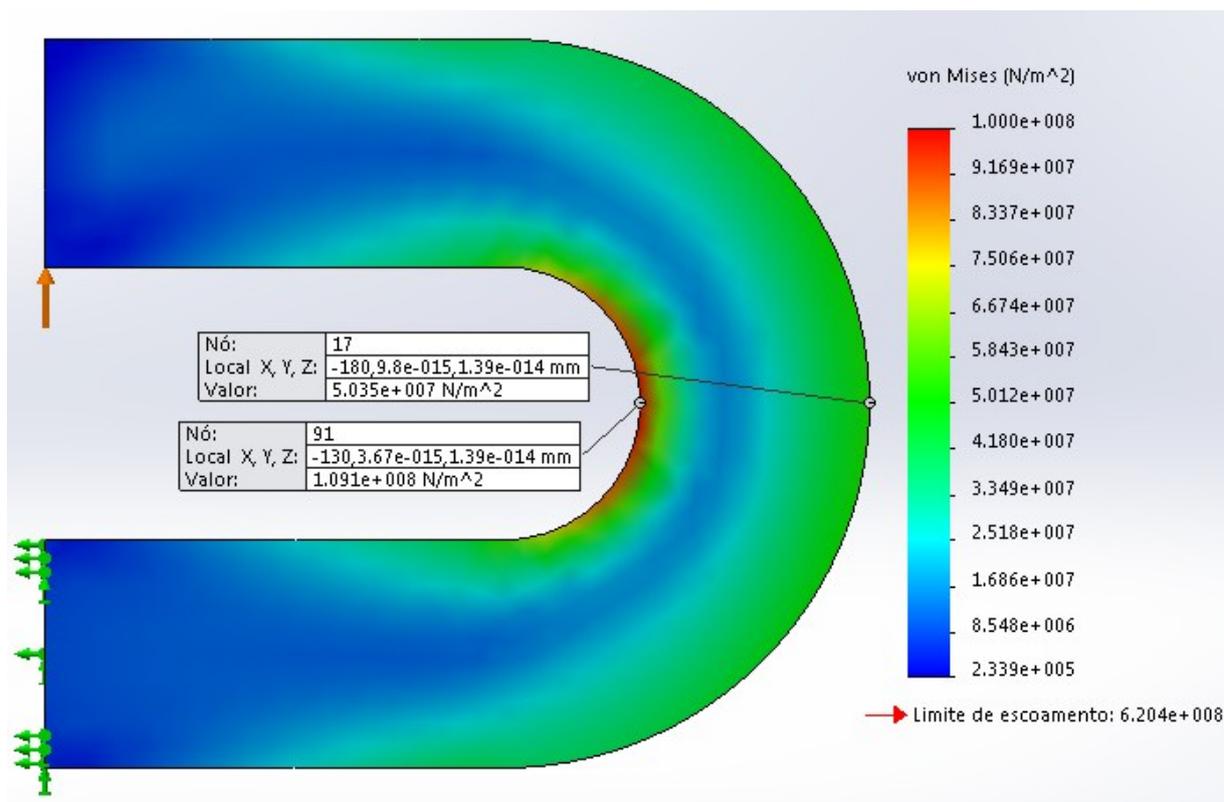


Figura 23: Resultado numérico das tensões na viga em U utilizando a primeira malha.

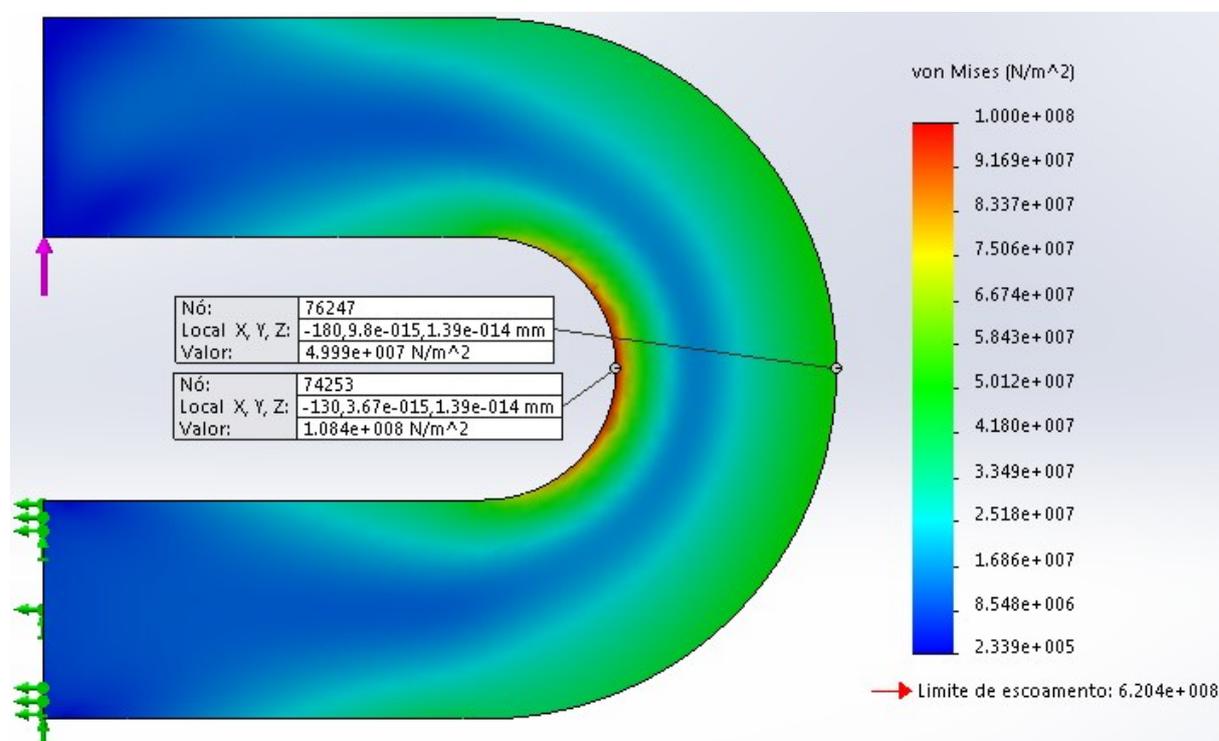


Figura 24: Resultado numérico das tensões na viga em U utilizando a segunda malha.

Calculando-se o erro entre a solução analítica e a numérica para as tensões máximas, obtém-se:

- Para a primeira malha:

$$Erro_{fibra\ interna} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{int}} - \sigma_{\theta\theta exata_{int}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{int}}} = \frac{109,1 - 106,18}{106,18} = 2,75\%$$

$$Erro_{fibra\ externa} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{ext}} - \sigma_{\theta\theta exata_{ext}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}}} = \frac{50,35 - 49,32}{49,32} = 2,09\%$$

- Para a segunda malha:

$$Erro_{fibra\ interna} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{int}} - \sigma_{\theta\theta exata_{int}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{int}}} = \frac{108,4 - 106,18}{106,18} = 2,09\%$$

$$Erro_{fibra\ externa} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{ext}} - \sigma_{\theta\theta exata_{ext}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}}} = \frac{49,99 - 49,32}{49,32} = 1,36\%$$

Nesse caso, assim como nos próximos, o erro diminui conforme aumenta a qualidade da malha. Esse resultado pode ser decorrente da confirmação da premissa de que tensões radiais, nessas geometrias, são desprezíveis.

A gráfico da Figura 25 foi feito repetindo o mesmo procedimento realizado anteriormente para obter as tensões ao longo da seção transversal da viga em U:

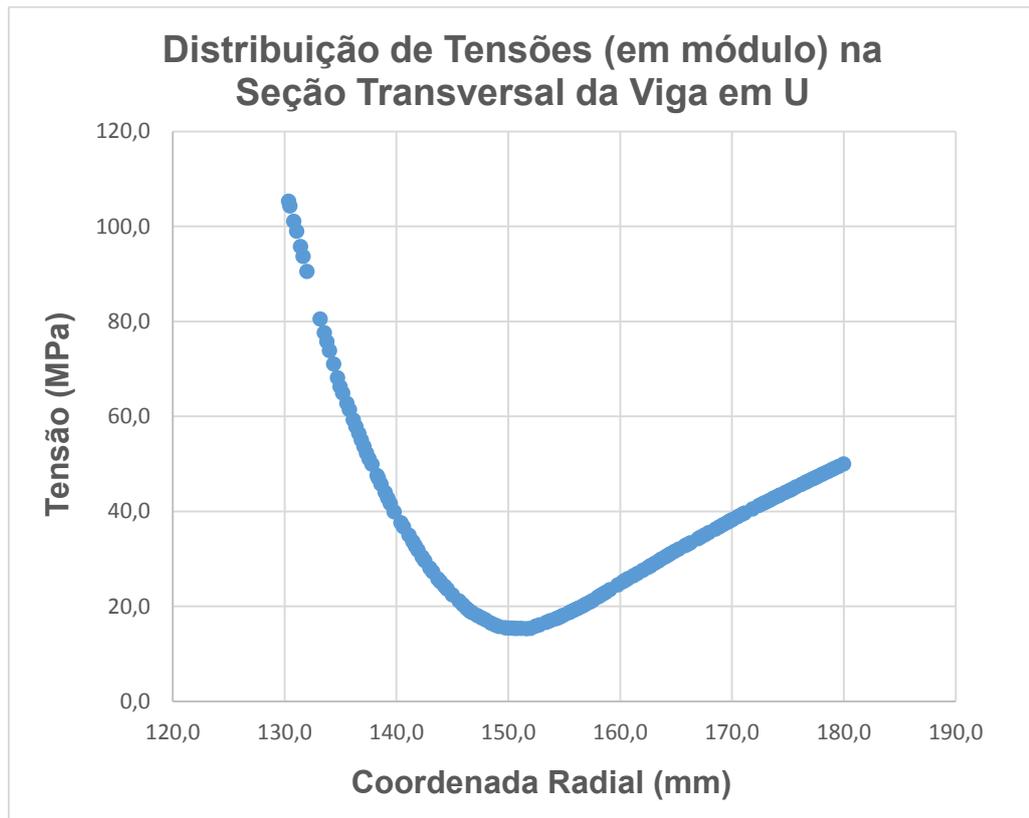


Figura 25: Distribuição de tensões ao longo da seção reta da viga em U.

Assim como no caso do gancho, a distribuição de tensões ao longo da seção reta varia hiperbolicamente da fibra interna até a fibra externa.

Além disso, a análise do mapa de tensões na geometria evidencia que a fibra neutra se aproxima da fibra interna, como esperado para uma viga espessa de curvatura acentuada.

3.3.3 Tensões no Anzol – Solução por Elementos Finitos

Na Tabela 6 são apresentados os parâmetros das duas malhas utilizadas. As soluções para a primeira e a segunda malha estão mostrados nas Figuras 27 e 28, respectivamente:

Tabela 7: Parâmetros das malhas geradas para simulação com a fuselagem.

PARÂMETROS E RESULTADOS	GEOMETRIA	
	ANZOL	
	Malha 1	Malha 1
Formato do Elemento	Tetraédrico de quatro nós	Tetraédrico de quatro nós
Tamanho do Elemento [mm]	0,967591	0,556365
Tolerância [mm]	0,0483796	0,0278182
Pontos Jacobianos	4	16
Número de Nós	11512	58508
Número de Elementos	6528	37286

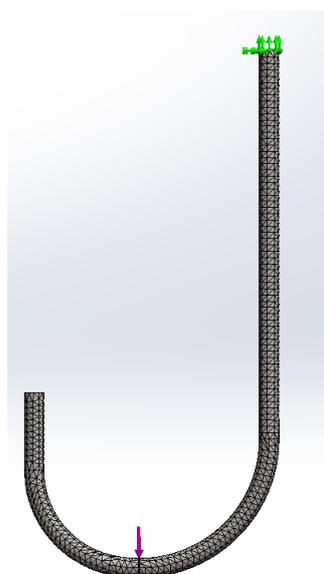


Figura 26: Representação da primeira malha gerada para o anzol.

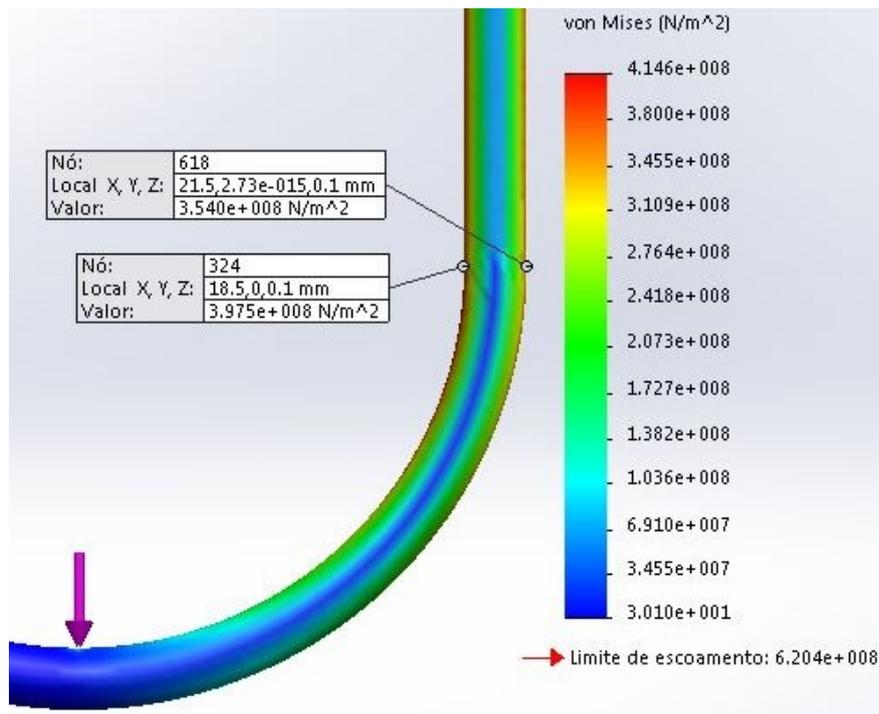


Figura 27: Resultado numérico das tensões no anzol utilizando a primeira malha.

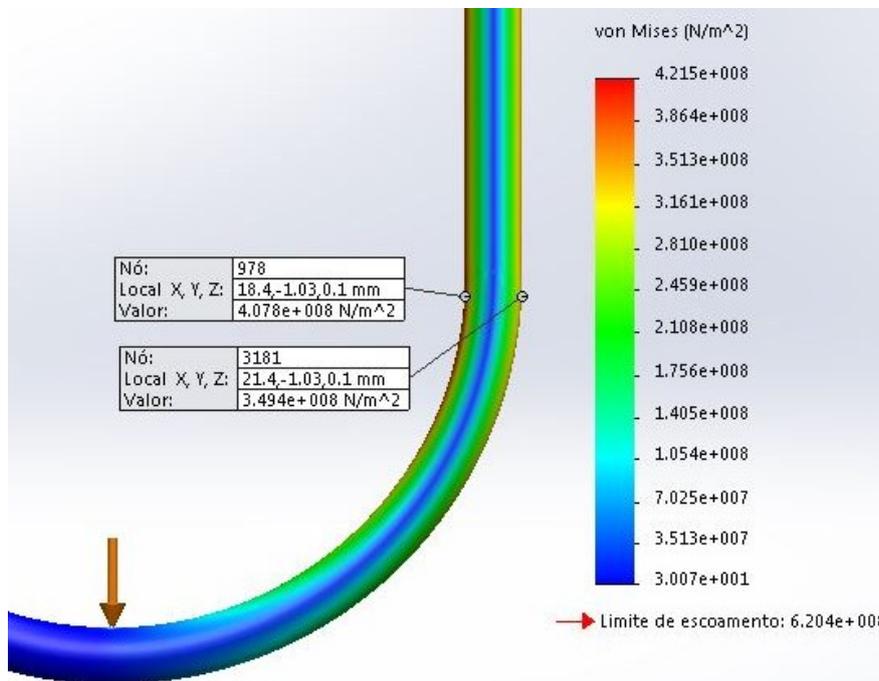


Figura 28: Resultado numérico das tensões no anzol utilizando a segunda malha.

Calculando o erro entre a solução analítica e a numérica, obtém-se:

- Para a primeira malha:

$$Erro_{fibra\ interna} = \frac{\sigma_{\theta\theta exata_{int}} - \sigma_{\theta\theta numérica_{int}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{int}}} = \frac{406,7 - 397,5}{406,7} = 2,261\%$$

$$Erro_{fibra\ externa} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{ext}} - \sigma_{\theta\theta exata_{ext}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}}} = \frac{354,0 - 350,0}{350,0} = 1,158\%$$

- Para a segunda malha:

$$Erro_{fibra\ interna} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{int}} - \sigma_{\theta\theta exata_{int}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{int}}} = \frac{407,8 - 406,7}{406,7} = 0,27\%$$

$$Erro_{fibra\ externa} = \frac{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}} - \sigma_{\theta\theta numérica_{ext}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}}} = \frac{350,0 - 349,4}{350,0} = 0,16\%$$

O pequeno erro relativo entre as soluções é um argumento a favor da validação dos métodos. Observa-se também que o aumento da qualidade da malha traz soluções para as tensões nas coordenadas radiais interna e externa mais aproximadas. Este resultado faz sentido, já que o anzol pode ser tratado como viga reta.

Nas Figuras 29 e 30 está representada a distribuição de tensões ao longo de toda a espessura do anzol, demonstrando seu comportamento linear.

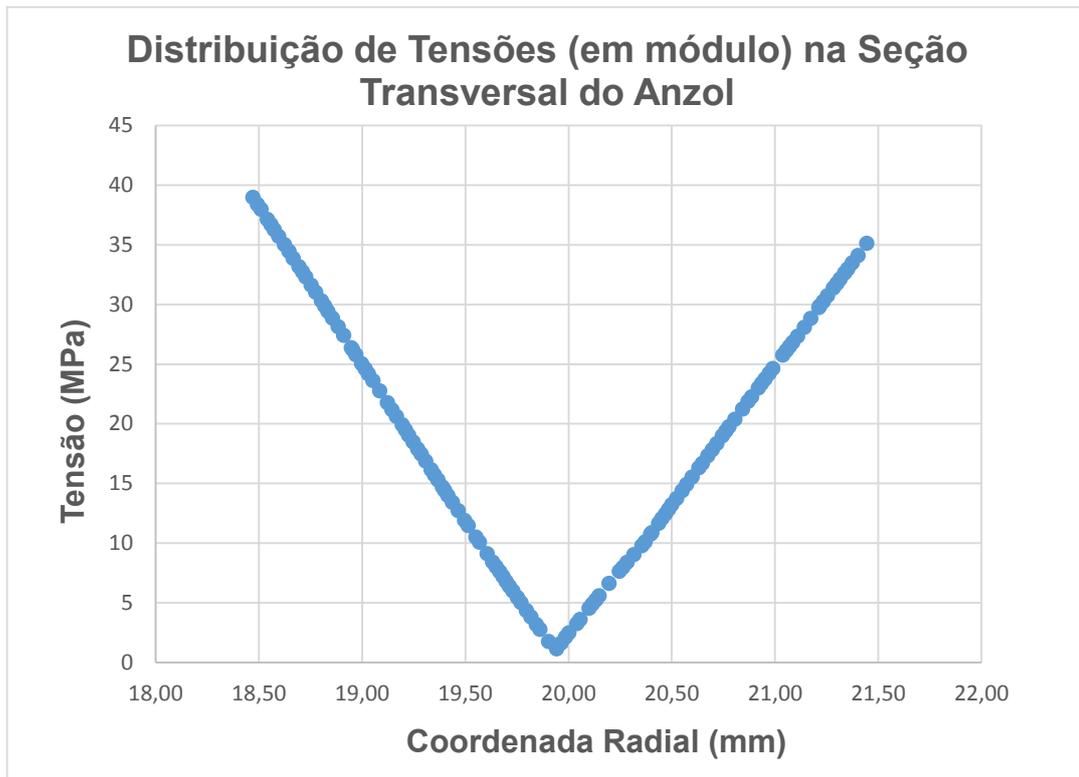


Figura 29: Distribuição de tensões ao longo da seção reta do anzol.

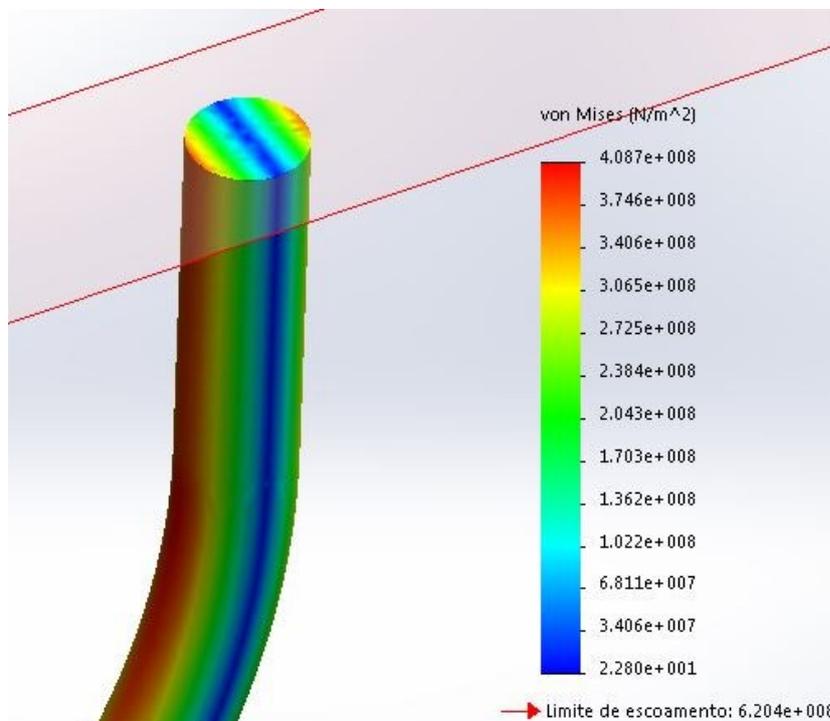


Figura 30: Vista em corte do anzol, mostrando graficamente a distribuição de tensões e a aproximação do eixo neutro com o eixo baricêntrico.

3.3.4 Tensões na Fuselagem – Solução por Elementos Finitos

A Tabela 8 apresenta os parâmetros das duas malhas geradas. Em seguida, na Figura 31, é mostrada a segunda malha. As Figuras 32 e 33 apresentam as soluções para as tensões máximas na fibra interna e externa, respectivamente.

Tabela 8: Parâmetros das malhas geradas para simulação com a fuselagem.

PARÂMETROS E RESULTADOS	GEOMETRIA	
	FUSELAGEM	
	Malha 1	Malha 1
Formato do Elemento	Tetraédrico de quatro nós	Tetraédrico de quatro nós
Tamanho do Elemento [mm]	22,45	11,225
Tolerância [mm]	1,1225	0,561249
Pontos Jacobianos	4	16
Número de Nós	15586	97396
Número de Elementos	8348	60724

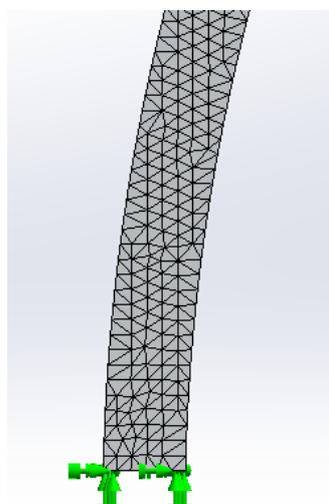


Figura 31: Representação em detalhe da primeira malha utilizada para simulações com a fuselagem.

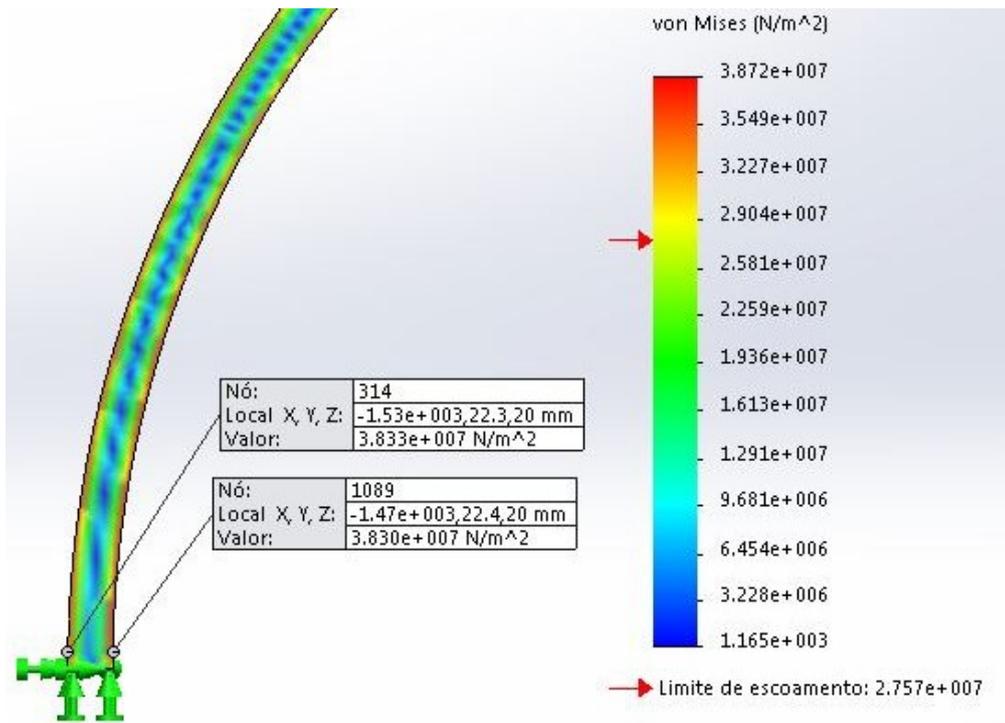


Figura 32: Resultado numéricos das tensões na fuselagem utilizando a primeira malha.

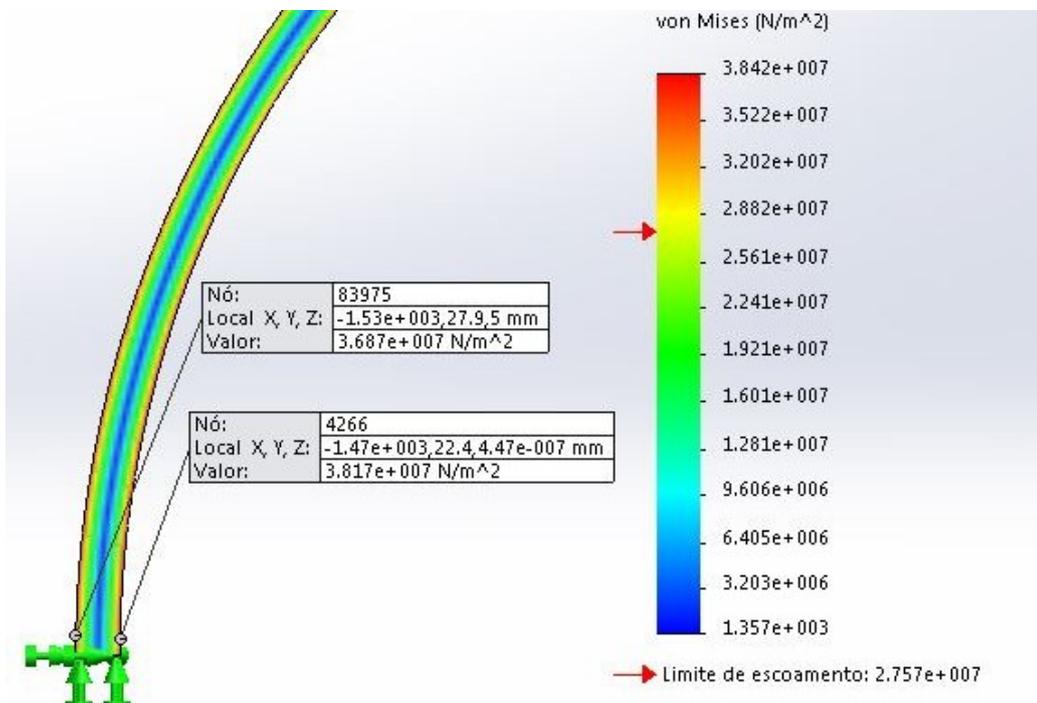


Figura 33: Resultado numéricos das tensões na fuselagem utilizando a segunda malha.

Calculando o erro entre a solução analítica e a numérica, obtem-se:

- Para a primeira malha:

$$Err_{ofibra\ interna} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{int}} - \sigma_{\theta\theta exata_{int}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{int}}} = \frac{38,17 - 38,13}{38,13} = 0,44\%$$

$$Err_{ofibra\ externa} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{ext}} - \sigma_{\theta\theta exata_{ext}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}}} = \frac{38,33 - 36,88}{36,88} = 3,93\%$$

- Para a segunda malha:

$$Err_{ofibra\ interna} = \frac{\sigma_{\theta\theta numérica_{int}} - \sigma_{\theta\theta exata_{int}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{int}}} = \frac{38,30 - 38,13}{38,13} = 0,10\%$$

$$Err_{ofibra\ externa} = \frac{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}} - \sigma_{\theta\theta numérica_{ext}}}{\sigma_{\theta\theta exata_{ext}}} = \frac{36,88 - 36,87}{36,88} = 0,03\%$$

Nota-se, como esperado, que o resultado converge para a solução exata do problema conforme aumenta o grau de refino da malha.

Apesar de ter praticamente a mesma espessura da viga em U, a distribuição de tensões também é linear ao longo da seção reta da fuselagem. Isso se dá pela alta proporção entre o raio de curvatura inicial e a espessura da viga. Essa conclusão pode ser tomada a partir das Figuras 34 e 35:

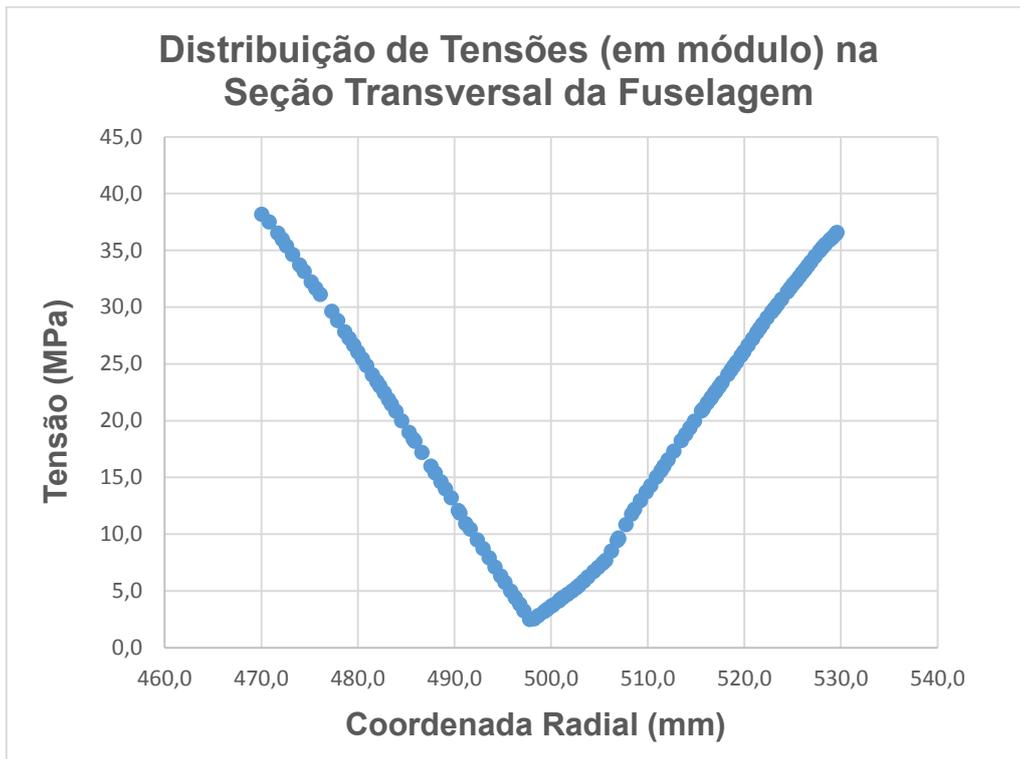


Figura 34: Distribuição de tensões ao longo da seção reta da fuselagem.

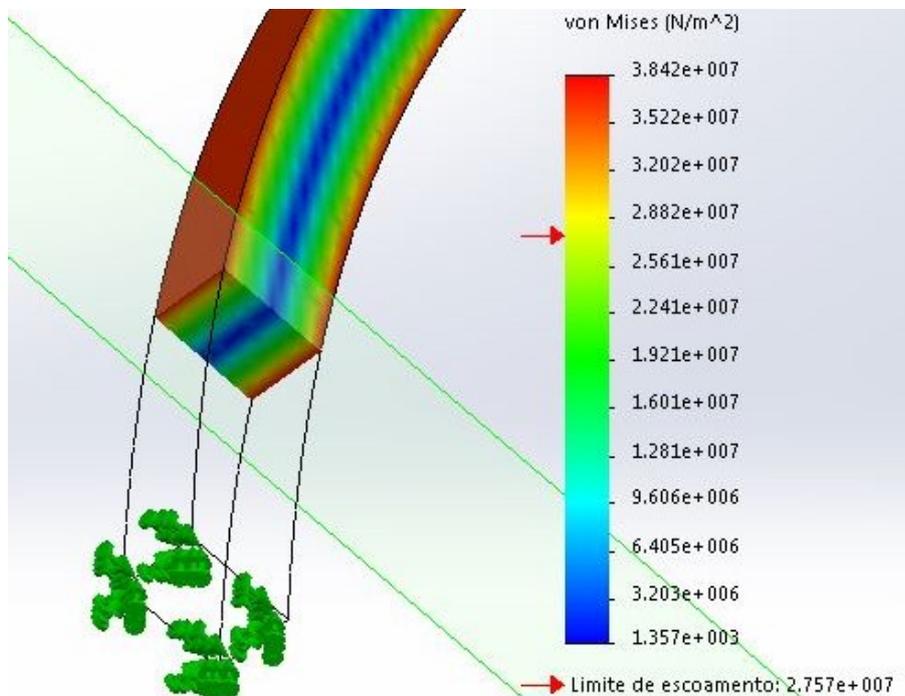


Figura 35: Vista em corte da fuselagem, mostrando graficamente a distribuição de tensões e a aproximação do eixo neutro com o eixo baricêntrico.

4. Conclusão

A análise comparativa dos resultados das simulações numéricas corroborou o procedimento utilizado para se calcular tensões e deflexões de vigas curvas de quaisquer geometrias. Observou-se também que, ao passo que aumenta o raio de curvatura inicial em relação ao diâmetro, a viga tende a se comportar como viga reta. Esse resultado pode ser verificado nas Figuras 29 e 30 para o anzol; e 34 e 35 para a fuselagem de avião.

O modelo numérico validou as hipóteses tomadas na elaboração da equação (2), que expressa a energia de deformação de uma viga curva assumindo que seções planas permanecem planas após a aplicação de um carregamento e que as tensões radiais e de cisalhamento são desprezíveis em relação às tensões circunferenciais. É importante ressaltar que nenhuma das geometria utilizadas tinha a seção transversal em formato de H, I ou T, de modo que essa última hipótese se torna aceitável [4].

Por fim, os resultados obtidos para as tensões evidenciaram que, de acordo com a equação (39), a distribuição de tensões ao longo da seção reta de uma viga curva com raio de curvatura inicial acentuado varia hiperbolicamente ao longo de toda espessura. Entretanto, em concordância com a equação (6) e com a Tabela 1, a distribuição tende a variar linearmente com a coordenada radial conforme aumenta a razão R/d .

5. Bibliografia

- [1] BATHE, Klaus-Jürgen, - “Finite Element Procedures” Prentice-Hall Inc, 1996.
- [2] BORESI, Arthur P.; SCHMIDT, Richard J., - “Advanced Mechanics of Materials”, Sixth edition, John Wiley & Sons, 2003.
- [3] DUMONT, C., - “Stress Concentration Around an Open Circular Hole in a Plate Subjected to Bending Normal to the Plane of the Plate”, NACA Tech. Note 740, 1939.
- [4] GERE, James M; GOODNO, Barry J. - “Mecânica dos Materiais”, Editora Pioneira, 2010
- [5] REISSNER, E. - “The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates”, Trans. ASME, vol. 67, 1945.
- [6] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. - “Theory of Elasticity”, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [7] YOUNG, Warren C.; BUDYNAS, Richard G., - “Roark’s Formulas for Stress and Strain”, Seventh edition, McGraw-Hill, 2001.

Apêndice A: Solução Analítica dos Deslocamentos

A.1: Deslocamentos no Gancho

Do diagrama de corpo livre:

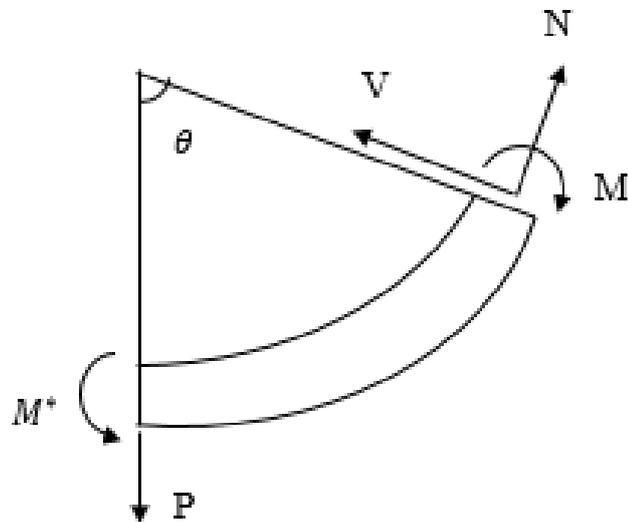


Figura 36: Diagrama de corpo livre do gancho.

obtem-se:

$$N = P \cos \theta$$

$$V = P \sin \theta$$

$$M = PR \cos \theta + M^*$$

Das equações (2) e (3):

$$\int_0^\theta \frac{M}{AEe} R \cos \theta d\theta = \int_0^\theta \frac{(PR \cos \theta + M^*)(R \cos \theta)}{AEe} d\theta$$

$$\int_0^\theta \frac{M}{AEe} R \cos \theta d\theta = \frac{R[\sin \theta (2M^* + PR \cos \theta) + 2M^* + PR\theta]}{2AEe}$$

$$\int_0^\theta \frac{F^*VR}{AG} \sin \theta d\theta = \int_0^\theta \frac{F^*PR \sin^2 \theta}{AG} = \frac{F^*PR(\theta - \sin \theta \cos \theta)}{2AG}$$

$$\int_0^\theta \frac{NR}{AE} \cos \theta d\theta = \int_0^\theta \frac{PR \cos^2 \theta}{AE} d\theta = \frac{PR(\theta + \sin \theta \cos \theta)}{2AE}$$

$$\int_0^\theta \frac{MN}{AE} d\theta = \int_0^\theta \frac{(2PR \cos^2 \theta + M^* \cos \theta)}{AE} d\theta = \frac{\sin \theta (M^* + PR \cos \theta) + PR\theta}{AE}$$

Agora, para as rotações, utilizando-se a equação (4):

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{M^2}{AEe} d\theta = \int_0^\theta \frac{PR \cos \theta + M^*}{AEe} d\theta = \frac{(M^* \theta + PR \sin \theta)}{AEe}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{F^*V^2R}{AG} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{F^*(P \sin \theta)^2 R}{AG} d\theta = \frac{F^*P^2R(\theta - \sin \theta \cos \theta)}{4AG}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{N^2R}{AE} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{(P \cos \theta)^2 R}{AE} d\theta = \frac{P^2R(\theta + \sin \theta \cos \theta)}{2AE}$$

$$MN = P^2R \cos^2 \theta + M^*P \cos \theta \Rightarrow \int_0^\theta \frac{P \cos \theta}{AE} d\theta = \frac{P \sin \theta}{AE}$$

A.2: Deslocamentos na Viga em U

Do diagrama de corpo livre da viga em U

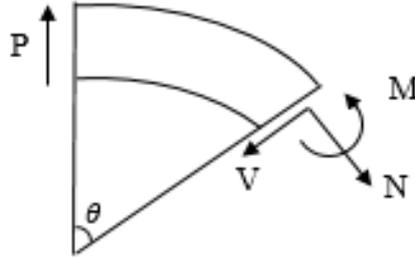


Figura 37: Diagrama de corpo livre da viga em U.

determina-se:

$$N = P \sin \theta$$

$$V = P \cos \theta$$

$$M = P(L + R) \sin \theta$$

Das equações (2) e (3), obtém-se:

$$\int_0^\theta \frac{M}{AEe} R \sin \theta d\theta = \int_0^\theta \frac{P(L + R)^2 \sin^2 \theta}{AEe} d\theta = \frac{P(L + R)^2 (\theta - \sin \theta \cos \theta)}{2AEe}$$

$$\int_0^\theta \frac{F^* V R}{AG} \sin \theta d\theta = \int_0^\theta \frac{F^* P R \cos^2 \theta}{AG} d\theta = \frac{F^* P R (\theta + \sin \theta \cos \theta)}{2AG}$$

$$\int_0^\theta \frac{NR}{AE} \cos\theta d\theta = \int_0^\theta \frac{PR \sin^2\theta}{AE} d\theta = \frac{PR(\theta - \sin\theta \cos\theta)}{2AE}$$

$$\int_0^\theta \frac{MN}{AE} d\theta = \int_0^\theta \frac{2P(L+R)\sin^2\theta}{AE} d\theta = \frac{PR(\theta - \sin\theta \cos\theta)}{AE}$$

Aplicando-se um momento M^* no sentido horário no ponto de aplicação da força P na Figura 37 e utilizando-se agora a equação (4) para as rotações:

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{M^2}{AEe} d\theta = \int_0^\theta \frac{PR \cos\theta + M^*}{AEe} d\theta = \frac{(M^*\theta + PR \sin\theta)}{AEe}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{F^* V^2 R}{AG} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{F^* (P \sin\theta)^2 R}{AG} d\theta = \frac{F^* P^2 R (\theta - \sin\theta \cos\theta)}{4AG}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{(P \cos\theta)^2 R}{AE} d\theta = \frac{P^2 R (\theta + \sin\theta \cos\theta)}{2AE}$$

$$MN = P^2 R \cos^2\theta + M^* P \cos\theta \Rightarrow \int_0^\theta \frac{P \cos\theta}{AE} d\theta = \frac{P \sin\theta}{AE}$$

A.3: Deslocamentos no Anzol

Do diagrama de corpo livre:

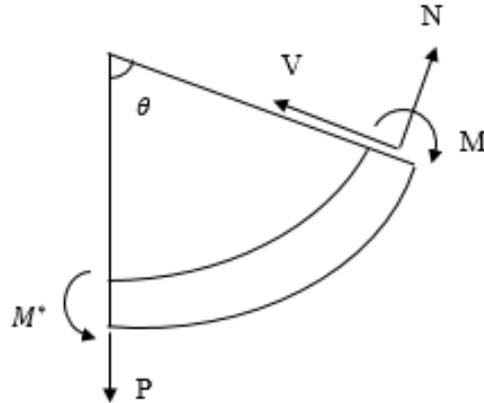


Figura 38: Diagrama de corpo livre do anzol.

encontra-se:

$$N = P \sin \theta$$

$$V = P \cos \theta$$

$$M = PR \sin \theta + M^*$$

Aplicando-se as equações (2) e (3):

$$\int_0^\theta \frac{M}{AEe} R \sin \theta d\theta = \int_0^\theta \frac{(PR \sin \theta + M^*)(R \sin \theta)}{AEe} d\theta$$

$$= \frac{PR^2}{2AEe}(\theta - \sin\theta\cos\theta) - \frac{M^*R\cos\theta}{AEe}$$

além disso, de acordo com a equação (6):

$$\int_0^\theta \frac{M}{AEe} R \sin\theta d\theta = \frac{(PR^3 - 2M^*R^2\cos\theta)}{2EI}(\theta - \sin\theta\cos\theta)$$

Calculando os demais termos da equação (2), obtem-se

:

$$\int_0^\theta \frac{F^*VR}{AG} \sin\theta d\theta = \int_0^\theta \frac{F^*PR\cos^2\theta}{AG} = \frac{F^*PR(\theta + \sin\theta\cos\theta)}{2AG}$$

$$\int_0^\theta \frac{NR}{AE} \sin\theta d\theta = \int_0^\theta \frac{PR\sin^2\theta}{AE} d\theta = \frac{PR(\theta - \sin\theta\cos\theta)}{2AE}$$

$$\int_0^\theta \frac{MN}{AE} d\theta = \int_0^\theta \frac{(2PR\sin^2\theta + M^*\sin\theta)}{AE} d\theta = \frac{PR}{AE}(\theta - \sin\theta\cos\theta) - \frac{M^*\cos\theta}{AE}$$

As rotações são obtidas aplicando-se a equação (4):

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{M^2}{AEe} d\theta = \int_0^\theta \frac{PR\cos\theta + M^*}{AEe} d\theta = \frac{(M^*\theta + PR\sin\theta)}{AEe}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{F^* V^2 R}{AG} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{F^* (P \sin \theta)^2 R}{AG} d\theta = \frac{F^* P^2 R (\theta - \sin \theta \cos \theta)}{4AG}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{(P \cos \theta)^2 R}{AE} d\theta = \frac{P^2 R (\theta + \sin \theta \cos \theta)}{2AE}$$

$$MN = P^2 R \cos^2 \theta + M^* P \cos \theta \Rightarrow \int_0^\theta \frac{P \cos \theta}{AE} d\theta = \frac{P \sin \theta}{AE}$$

A.4: Deslocamentos na Fuselagem

Do diagrama de Corpo Livre:

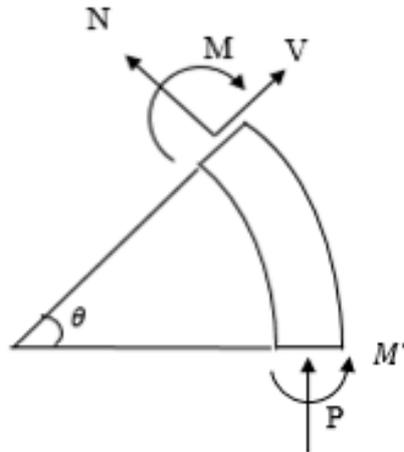


Figura 39: Diagrama de corpo livre da fuselagem.

é possível se encontrar:

$$V = -P \sin \theta$$

$$N = -P \cos \theta$$

$$M = PR(1 - \cos \theta) + M^*$$

Os deslocamentos são obtidos a partir das equações (2) e (3):

$$\int_0^\theta \frac{M}{AEe} R(1 - \cos \theta) d\theta = \int_0^\theta \frac{PR^2(1 - \cos \theta)^2 + M^*R(1 - \cos \theta)}{AEe} d\theta$$

$$\int_0^\theta \frac{M}{AEe} R(1 - \cos\theta) d\theta = \frac{R[-4\sin\theta(M^* + 2PR) + 4M^*\theta + 6PR\theta + PR\sin(2\theta)]}{4AEe}$$

e, de acordo com a equação (6):

$$\int_0^\theta \frac{M}{AEe} R(1 - \cos\theta) d\theta = \frac{R^2[-4\sin\theta(M^* + 2PR) + 4M^*\theta + 6PR\theta + PR\sin(2\theta)]}{4EI}$$

$$\int_0^\theta \frac{F^*VR}{AG} (-\sin\theta) d\theta = \int_0^\theta \frac{F^*PR\sin^2\theta}{AG} d\theta = \frac{F^*PR(\theta - \sin\theta\cos\theta)}{2AG}$$

$$\int_0^\theta \frac{NR}{AE} (-\cos\theta) d\theta = \int_0^\theta \frac{PR\cos^2\theta}{AE} d\theta = \frac{PR(\theta + \sin\theta\cos\theta)}{2AE}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{\partial}{\partial P} \left\{ \frac{[PR(1 - \cos\theta) + M^*][(-P\cos\theta)]}{AE} \right\} d\theta &= \int_0^\theta \frac{2PR(\cos^2\theta - \cos\theta) - M^*P\cos\theta}{AE} d\theta \\ &= \frac{PR(2\theta - 4\sin\theta + 2\sin(2\theta)) - 2M^*P\sin\theta}{2AE} \end{aligned}$$

Agora, para as rotações, utilizando-se a equação (4):

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{M^2}{AEe} d\theta = \int_0^\theta \frac{PR(1 - \cos\theta) + M^*}{AEe} d\theta = \frac{PR(\theta - \sin\theta) + M^*\theta}{AEe}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{F^*V^2R}{AG} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{F^*(-P\sin\theta)^2R}{AG} d\theta = \frac{F^*P^2R(\theta - \sin\theta\cos\theta)}{4AG}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{N^2 R}{AE} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{(-P \cos \theta)^2 R}{AE} d\theta = \frac{P^2 R (\theta + \sin \theta \cos \theta)}{2AE}$$

$$MN = 2PR(\cos^2 \theta - \cos \theta) - M^* P \cos \theta \Rightarrow \int_0^\theta \frac{-P \cos \theta}{AE} d\theta = -\frac{P \sin \theta}{AE}$$

Apêndice B: Solução Analítica das Tensões

B.1: Tensões no Gancho

Conforme mostrado na Figura 40, a seção transversal do gancho é composta de três formas geométricas distintas. Inicialmente determinou-se as áreas, a posição do baricentro e o valor do parâmetro A_m .

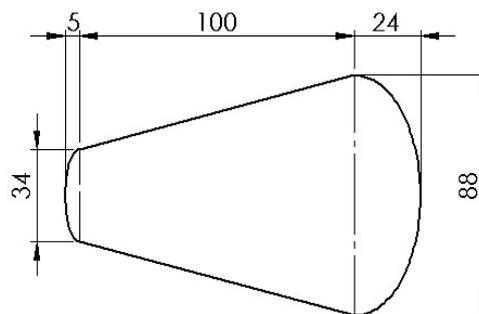


Figura 40: Representação das três áreas que compõem a seção transversal do gancho.

- A_1 : Área semi-elíptica de comprimento $2b = 88$ mm; altura $h = 24$ mm; distância $a = 84$ mm do eixo:

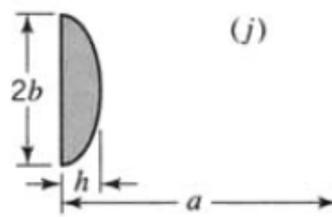


Figura 41: Área A_1 da composição que forma a área transversal do gancho.

$$A_1 = \frac{\pi b_1 h_1}{2} = 1658,76 \text{ mm}^2$$

$$R_1 = a_1 - \frac{4h_1}{3\pi} = 73,71 \text{ mm}$$

$$A_{m1} = 2b_1 + \frac{\pi b_1}{h_1} \left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - h_1^2} \right) - \left(\frac{2b_1}{h_1} \sqrt{a_1^2 - h_1^2} \right) \sin^{-1} \left(\frac{h_1}{a_1} \right)$$

$$A_{m1} = 22,64 \text{ mm}$$

- A_2 : Área trapezoidal com lados (paralelos ao eixo) $b_{12} = 88 \text{ mm}$ e $b_{22} = 34 \text{ mm}$; distância $a_2 = 84 \text{ mm}$ de b_{12} ao eixo; distância $c = 184 \text{ mm}$ de b_{22} ao eixo:

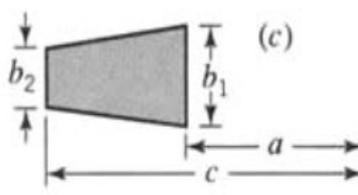


Figura 42: Área A_2 da composição que forma a área transversal do gancho.

$$A_2 = \frac{b_{12} + b_{22}}{2} (c_2 - a_2) = 6100,00 \text{ mm}^2$$

$$R_2 = \frac{a_2(2b_{12} + b_{22}) + c_2(b_{12} + 2b_{22})}{3(b_{12} + b_{22})} = 126,62 \text{ mm}^2$$

$$A_{m2} = \frac{b_{12}c_2 - b_{22}a_2}{c_2 - a_2} \ln \left(\frac{c}{a} \right) - b_{12} + b_{22}$$

$$A_{m2} = 50,57 \text{ mm}$$

- A_3 : Área do segmento circular com ângulo $\theta = 0,5721$ rad; raio $b_3 = 31,4$ mm; distância $a_3 = 157,6$ mm do centro de curvatura do segmento ao eixo:

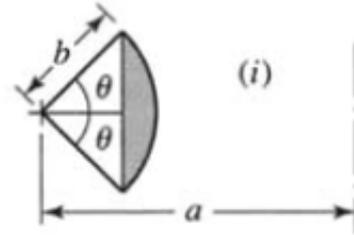


Figura 43: Área A3 da composição que forma a área transversal do gancho.

$$A_3 = b_3^2 \theta - \frac{b_3^2}{2} \sin 2\theta = 115,27 \text{ mm}^2$$

$$R_3 = a_3 - \frac{4b_3 \sin^3 \theta}{3(2\theta - \sin 2\theta)} = 186,01 \text{ mm}$$

$$A_{m3} = 2a_3\theta + 2b_3 \sin \theta - \pi \sqrt{a_3^2 - b_3^2} - 2 \sqrt{a_3^2 - b_3^2} \left[\sin^{-1} \left(\frac{b_3 - a_3 \cos \theta}{a_3 - b_3 \cos \theta} \right) \right]$$

$$A_{m3} = 0,62 \text{ mm}$$

A posição do baricentro é encontrada calculando-se:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n R_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (40)$$

Portanto:

$$R = \frac{6100(126,62) + 115,27(186,01) + 1658,76(73,81)}{7874,03} = 116,36 \text{ mm}$$

A aplicação de uma carga de 190,9 kN e a substituição de todos os parâmetros na equação (39), considerando as fibras interna e externa para uma posição angular $\theta = 0^\circ$, resulta em:

$$\sigma_{\theta\theta_{int}} = \frac{190900}{7874,03} + \frac{116,37(190900)[7874,03 - 60(73,83)]}{7874,03(60)[116,37(73,83) - 7874,03]} = 249,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta\theta_{ext}} = \frac{190900}{7874,03} + \frac{116,37(190900)[7874,03 - 189(73,83)]}{7874,03(189)[116,37(73,83) - 7874,03]} = -102,2 \text{ MPa}$$

B.2: Tensões na Viga em U

A seção transversal da viga em U é simplesmente retangular. A posição do baricentro é obtida diretamente da sua geometria.

- Seção quadrangular de lado 50 mm com raio de curvatura $R = 55 \text{ mm}$:

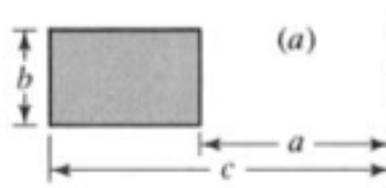


Figura 44: Modelo de área da seção transversal da viga em U.

$$A = b(c - a) = 2500 \text{ mm}^2$$

$$A_m = b \ln \frac{c}{a} = 49,04 \text{ mm}$$

Aplicando-se a equação (39) para a carga $P = 9,5 \text{ kN}$ e a posição angular $\theta = 90^\circ$ nas coordenadas radiais interna e externa, encontra-se:

$$\sigma_{\theta\theta_{int}} = \frac{9500}{2500} + \frac{155(9500)[2500 - 30(49,04)]}{2500(30)[55(49,04) - 2500]} = 106,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta\theta_{ext}} = \frac{9500}{2500} + \frac{155(9500)[2500 - 80(49,04)]}{2500(80)[55(49,04) - 2500]} = -49,32 \text{ MPa}$$

B.3: Tensões no Anzol

- Seção circular de diâmetro $2b = 3\text{mm}$ e raio de curvatura $R = 20\text{mm}$:

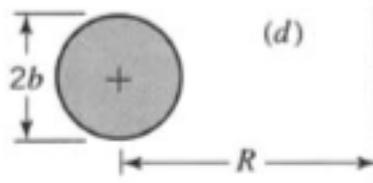


Figura 45: Modelo da área da seção transversal do anzol.

$$A = \frac{\pi(2b)^2}{4} = 7,07 \text{ mm}^2$$

$$A_m = 2\pi \left(R - \sqrt{R^2 - b^2} \right) = 0,354 \text{ mm}$$

Da equação (39), considerando-se uma carga $P = 50 \text{ N}$ e a posição $\theta = 90^\circ$ nas coordenadas radiais interna e externa, encontra-se:

$$\sigma_{\theta\theta_{int}} = \frac{50}{7,07} + \frac{20(50)[7,07 - 18,5(0,354)]}{7,07(18,5)[20(0,354) - 7,07]} = 406,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta\theta_{ext}} = \frac{50}{7,07} + \frac{20(50)[7,07 - 21,5(0,354)]}{7,07(21,5)[20(0,354) - 7,07]} = -350,0 \text{ MPa}$$

B.4: Tensões na Fuselagem

- Seção retangular de espessura $c - a = 60 \text{ mm}$, largura $b = 40 \text{ mm}$ e raio de curvatura $R = 1,5 \text{ m}$:

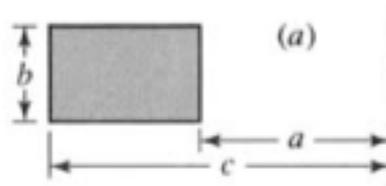


Figura 46: Modelo da área da seção transversal da fuselagem.

$$A = b(c - a) = 0,0024 \text{ m}^2$$

$$A_m = b \ln \frac{c}{a} = 0,04 \ln \frac{1,53}{1,47} \approx 0,0016 \text{ m}$$

Utilizando-se a equação (39) com a carga $P = 300 \text{ N}$ e a posição angular $\theta = 180^\circ$ nas fibras interna e externa, obtém-se:

$$\sigma_{\theta\theta_{int}} = \frac{300}{2,4} + \frac{1,5(300 \times 2)[0,0024 - 1,47(0,0016)]}{0,0024(1,47)[1,5(0,0016) - 0,0024]} = 38,13 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta\theta_{ext}} = \frac{300}{2,4} + \frac{1,5(300 \times 2)[0,0024 - 1,47(0,0016)]}{0,0024(1,47)[1,5(0,0016) - 0,0024]} = 38,13 \text{ MPa}$$