



**Anderson Reis de Vargas**

**O teorema de Miquel revisitado por Clifford**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro  
Abril de 2016



**Anderson Reis de Vargas**

## **O teorema de Miquel revisitado por Clifford**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marcos Craizer**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Nicolau Saldanha**

Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. Daniel Felipe Neves Martins**

Departamento de Matemática - Colégio Pedro II

**Prof. Ralph Costa Teixeira**

Instituto de Matemática - UFF

**Prof. Márcio de Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 05 de Abril de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Anderson Reis de Vargas

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina em 2005.

Trabalhou na Universidade Federal do Rio de Janeiro como professor contratado nos anos de 2006 e 2007, onde lecionou nos cursos de Física e Química disciplinas de Cálculo I, II e III, além de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica.

De 2007 a 2011, trabalhou na Fundação Centro de Ciências e Educação Superior à Distância do Estado do Rio de Janeiro, como tutor presencial e tutor coordenador.

Em 2008 foi professor de na rede pública de Ensino Fundamental do Município do Rio de Janeiro e na rede pública de Ensino Médio do Estado do Rio de Janeiro.

Desde 2009, é professor do Colégio Pedro II - *Campus* São Cristóvão II.

#### Ficha Catalográfica

Vargas, Anderson Reis de

O teorema de Miquel revisitado por Clifford / Anderson Reis de Vargas; orientador: Marcos Craizer. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2016.

v., 64 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Geometria. 3. Teorema de Miquel. 4. Clifford. 5. História da Matemática. 6. GeoGebra. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

## Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Marcos Craizer, por acreditar no meu projeto e me dar forças para seguir em frente, rumo ao doutorado.

À minha família, que acompanha meus passos, acredita no meu trabalho e sempre me deu apoio.

Aos amigos de Floripa que estão a todo momento me pressionando para acabar pelo menos um mestrado. Aline, Juliana e Renata, que viram meus sonhos nascendo e os acompanham desde 2001, o meu enorme OBRIGADO por fazerem parte da minha vida.

Aos amigos do Rio que estão do meu lado todos os dias, no bar, no cinema, na jogatina: a irmã de viagem, de compras, de filmes, de séries, de livros, Helena; o irmão mais velho ciumento, Daniel; o casal que ainda me faz crer no casamento, Adriano e Manuel; minha amiga e comadre Ana Angelita e meus afilhados, Francisco e Juana; a amiga que me atura em casa, Paula; e todos os outros que dividem um lugar na minha vida.

Aos professores da graduação que foram fundamentais na minha formação acadêmica e pessoal: Carmem, Pinho, Lício, entre outros.

Aos colegas de mestrado por dividirem essa mesma batalha e compartilharem as informações, já que eu não estive muito presente nas aulas.

Finalmente, aos meus novos amores, Mignon e Pierrot, que ficavam mendigando carinho enquanto eu tentava estudar ou escrever esse trabalho.

## Resumo

Vargas, Anderson Reis de; Craizer, Marcos. **O teorema de Miquel revisitado por Clifford**. Rio de Janeiro, 2016. 64p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar e demonstrar os teoremas de Miquel que tratam de retas, círculos e suas interseções, assim como a versão de Clifford para os mesmos. Mais especificamente do teorema referente ao pentágono que afirma que dado um pentágono, o prolongamento dos seus lados formam cinco triângulos e os círculos circunscritos a esses triângulos se intersectam dois a dois e os pontos de interseção distintos dos vértices estão sobre uma mesma circunferência. Os teoremas de Miquel são demonstrados de forma original, com exceção do teorema citado, cuja prova é igual àquela do artigo original, a menos de mudanças de notação e maior detalhamento de argumentos. A versão de Clifford para esse teorema é provada apenas com o uso de argumentos de geometria euclidiana, diferente do proposto em seu artigo, que lança mão de ferramentas da geometria projetiva e das curvas algébricas para chegar à sua tese. Também é feita uma demonstração para a generalização do teorema acima ao se tomar  $n$  retas. Além disso, este trabalho apresenta uma proposta de atividades pedagógicas com o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra, como ferramenta facilitadora à visualização e dedução dos teoremas mais importantes do trabalho.

## Palavras-chave

Geometria; Teorema de Miquel; Clifford; História da Matemática; GeoGebra;

## Abstract

Vargas, Anderson Reis de; Craizer, Marcos (Advisor). **Miquel's Theorem revisited by Clifford**. Rio de Janeiro, 2016. 64p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work aims to present and demonstrate Miquel's theorems dealing with straight lines, circles and their intersections, as well as Clifford's version of the same theorems. More specifically regarding the theorem that makes reference to the pentagon, which asserts that given a pentagon, the extension of its sides form five triangles and the circles circumscribed to these triangles intersect two by two, and the intersection points, not considering the vertices, are on the same circumference. Miquel's theorems are presented in an original way, with the exception of the above theorem, which is equal to the original one, apart from little changes of notation and more detailed arguments. Clifford's version of this theorem is presented with the use of Euclidean geometry arguments differing from the one proposed in his article, which makes use of tools of projective geometry and algebraic curves to get to his thesis. There is also a demonstration for the generalization of the above theorem when  $n$  straight lines are taken. In addition, this work proposes a pedagogical activity using the dynamic geometry software GeoGebra, as a facilitating tool for viewing and deduction of the most important theorems presented in this work.

## Keywords

Geometry; Miquel's Theorem; Clifford; History of Mathematics; GeoGebra;

## Sumário

1	Introdução	11
2	Considerações históricas	13
2.1	A geometria ao longo dos séculos	13
2.2	Auguste Miquel	16
2.3	William Kingdom Clifford	17
3	Miquel e Clifford	19
3.1	Os Teoremas de Miquel	19
3.2	Algumas propriedades da parábola e a versão de Clifford para o Teorema de Miquel	27
3.3	Teorema de Miquel para mais de cinco retas	38
4	O uso do software GeoGebra na compreensão dos Teoremas de Miquel	49
4.1	Atividade 1	50
4.2	Atividade 2	52
4.3	Atividade 3	54
4.4	Atividade 4	56
4.5	Atividade 5	58
5	Conclusão e desdobramentos	62
	Referências bibliográficas	63

## Lista de figuras

3.1	Teorema de Miquel	20
3.2	Teorema de Miquel - Recíproca 1	21
3.3	Teorema de Miquel - Recíproca 2	22
3.4	Teorema de Miquel - Recíproca 2 - outra versão	23
3.5	Teorema de Miquel para o pentágono	23
3.6	Teorema de Miquel para o pentágono - demonstração	24
3.7	Observação 1	25
3.8	Observação 1 (prova)	26
3.9	Observação 2	27
3.10	Propriedade de reflexão da parábola	28
3.11	Demonstração da propriedade de reflexão	29
3.12	Subtangente e subnormal	30
3.13	Demonstração (i)	31
3.14	Demonstração (v)	32
3.15	Demonstração (vi)	33
3.16	Três tangentes a uma parábola	34
3.17	Teorema 2.2.2	35
3.18	Teorema 2.2.4	37
3.19	Teorema 2.2.4 - demonstração	37
3.20	Lema dos quatro círculos	39
3.21	Lema dos quatro círculos com colinearidade	41
3.22	Caso de três retas	42
3.23	Caso de quatro retas	42
3.24	Caso de cinco retas	43
3.25	Caso de seis retas	44
4.1	Atividade 1	51
4.2	Atividade 2	53
4.3	Teorema de Miquel para triângulos	54
4.4	Atividade 3	55
4.5	Atividade 4	58
4.6	Atividade 5	59
4.7	Teorema de Miquel para o pentágono	60

## Lista de tabelas

2.1	Classificação dos trabalhos de Clifford por Smith	18
4.1	Atividade 1	50
4.2	Atividade 2	52
4.3	Atividade 3	54
4.4	Atividade 4	56
4.5	Atividade 5	58

*A [...] reason in favour of the pursuit of advanced mathematics, even when there is no promise of practical application, is this, that mathematics, like poetry and music, deserves cultivation for its own sake.*

**Florian Cajori**, *A History of Mathematics*.

# 1

## Introdução

Este trabalho teve início durante uma pesquisa também em geometria sobre Álgebras de Clifford. Enquanto estava lendo a biografia de Clifford, escrita por Tucker (CLIFFORD, 1967), dei uma lida em diagonal em alguns artigos cujos títulos haviam chamado a minha atenção. Lembro de ter olhado para “*Synthetic Proof of Miquel’s Theorem*” e pensado “nunca ouvi falar desse cara”. Perguntei para muitas pessoas e ninguém o conhecia. Os dois primeiros parágrafos me levaram a crer que seria um bom tema para um artigo. Por isso, fiz algumas anotações para investigar melhor, mas isso ficou na gaveta durante dois anos, de onde saiu quando percebi que seria um ótimo tema para a minha dissertação.

A geometria euclidiana ocupou a mente dos matemáticos durante mais de dois milênios até a descoberta das geometrias não euclidianas, e continua ocupando até hoje. Muitas vezes, os resultados mais simples se mostram os mais surpreendentes e belos. E essa é uma característica que sempre me atraiu na geometria.

Quando comecei a pesquisar sobre Miquel tudo que encontrava se referia unicamente ao Teorema 3.1.1 sobre três círculos que se intersectam num ponto. Somente lendo o seu artigo original tive acesso ao resultado sobre o pentágono e assim pude fazer a conexão com o artigo de Clifford já mencionado acima.

Os dois primeiros teoremas de Miquel falam simplesmente de retas e círculos, conceitos abordados no Ensino Fundamental e Médio e, por isso, podem ser abordados em sala de aula, pelo menos no Ensino Médio. Já a versão de Clifford diz respeito à parábola, conceito também abordado no Ensino Médio, embora não como está definida neste trabalho. Porém, ainda pode ser trabalhado nesse nível de ensino a fim de despertar a curiosidade dos alunos para a geometria. Com esse objetivo, faço aqui uma proposta de utilização de software de geometria dinâmica GeoGebra para levar os alunos a deduzirem esses resultados.

No primeiro capítulo há um breve histórico da geometria desde Apolônio até o século XIX, no que se refere às seções cônicas, visto que uma parte do trabalho trata de parábolas, que são ponto chave no artigo de Clifford. Além disso, tentamos dar uma ideia de que os resultados de geometria euclidiana ainda são interessantes como tema de estudo e merecem atenção.

O capítulo 2 dedica-se exclusivamente aos teoremas de Miquel e de Clifford. Inicialmente, todos os resultados do artigo de Miquel são apresentados

e demonstrados de forma detalhada. Em seguida, definimos parábola e abordamos todas as propriedades úteis à demonstração da versão de Clifford para o teorema de Miquel que versa sobre o pentágono. Finalmente provamos esse teorema e expomos ainda a generalização proposta por Clifford e sua demonstração.

O último capítulo apresenta uma proposta de atividade pedagógica, como já foi comentado, contendo cinco exercícios para serem desenvolvidos pelos alunos com a mediação do professor tendo como ferramenta o GeoGebra. Essas atividades baseiam-se nos resultados mais importantes contidos no segundo capítulo, em nível crescente de dificuldade. Além disso, cada atividade apresenta um quadro no qual explicitamos seus objetivos, os pré-requisitos para sua total compreensão e execução, além do nível de dificuldade na sua execução.

Um dos objetivos do trabalho era apresentar a prova sintética (nesse caso, projetiva) dada por Clifford, no entanto, isso não foi possível por falta de tempo. Tentei apresentar uma demonstração sintética original e confesso não ter as ferramentas necessárias para tal empreendimento, mas acredito que poderei desenvolver isso futuramente. Vale ressaltar que abandonamos esse objetivo por acreditarmos que o trabalho apresentado já cumpriu a maior parte do projeto original.

## 2

### Considerações históricas

Acreditamos que observações históricas enriquecem um trabalho. Por isso, pretendemos nesse capítulo fazer uma breve narrativa sobre os estudos das cônicas desde Apolônio até o século XIX, além de relatar os avanços da geometria nesse meio tempo.

#### 2.1

##### A geometria ao longo dos séculos

Entre os séculos 300 e 200 a.C., o grego Apolônio de Perga apresentou um vasto trabalho matemático, pelo qual foi comparado a Euclides, sendo considerado um grande geômetra. Foi reconhecido sobretudo por seus estudos sobre as seções cônicas. Há registros anteriores a Apolônio sobre esse tema, contudo, segundo Burton (2005), foi Apolônio quem nomeou tais curvas por *parábola*, *elipse* e *hipérbole*.

Apolônio trabalhou com o conceito de seção cônica através do cone seccionado por um plano mas, “nunca deu um nome ao foco de uma cônica - este foi um termo matemático introduzido por Kepler somente em 1604 - nem fez menção à noção de diretriz em seu trabalho” (BURTON, 2005, p.211, tradução nossa).

No fim do século IX, o matemático árabe Thâbit ibn Qurra se ocupou do estudo sobre cônicas, principalmente do cálculo de áreas. Além dele, muitos outros matemáticos árabes foram imprescindíveis para a manutenção dos textos de Apolônio, através de suas traduções.

No início do século XVII, Kepler contribuiu enormemente para o estudo das cônicas quando trabalhava no movimento planetário. Além disso, sua forma de trabalhar com somas infinitas foi uma precursora do conceito de integral e isso aparece através de muitos cálculos de volumes dedicados a superfícies originadas pela rotação de cônicas.

Em 1656, o matemático inglês John Wallis utilizou a nova metodologia de Descartes em seu trabalho *Tractatus de Sectionibus Conicis* (BURTON, 2005) para identificar a elipse, a parábola e a hipérbole através de equações de grau dois, desvinculando assim daquele conceito de seção de um cone.

Não é preciso comentar como as cônicas foram importantes no trabalho de Newton sobre o movimento dos corpos celestes nos *Principia Mathematica* (1686), no qual prova como o movimento de um corpo celeste se dá de forma elíptica, em que um dos focos é o ponto de força de atração do corpo. Mais

exatamente, os planetas solares percorrem órbitas elípticas em torno do Sol, que ocupa o lugar de um dos focos dessa órbita. Também no século XVII, em França, Blaise Pascal foi um grande contribuinte no estudo das cônicas, legando mais de quatrocentas proposições a partir do seu conhecido *Teorema do hexágono místico*. Este teorema permite encontrar facilmente uma tangente à uma cônica em um ponto dado (BURTON, 2005, p.449). Juntamente com Desargues, desenvolveu a geometria projetiva sintética.

Segundo Eves (1969), Desargues contribuiu originalmente para a geometria sintética do século XVII com seu trabalho sobre as seções cônicas. No entanto, seu trabalho ficou marginalizado pela geometria analítica de Descartes e só voltou à tona dois séculos depois pelas mãos de matemáticos como Poncelet, Chasles e Steiner.

Desargues utilizou a técnica projetiva resgatada pelos artistas da Renascença. Dessa forma, se observarmos um círculo obliquamente, ele parecerá uma elipse. Desargues se interessava em estudar as propriedades que essas cônicas projetivas apresentavam. Para isso cria a noção de *ponto no infinito* - visto que alguns pontos somem quando projetados - e *reta no infinito* (KATZ, 1998, p.460).

Nas palavras de Kline, “Desargues enfatizou a projeção e a seção porque viu nelas um procedimento geral para provar teoremas sobre todas as cônicas de uma vez, dado que já tenham sido provados para o círculo” (KLINE, 1972, p.300, tradução nossa). Kline ainda afirma que Desargues fez assim nascer um ramo da geometria no qual as propriedades métricas são substituídas simplesmente por localização e interseções de retas e as figuras formadas por tais interseções, mas em vez de pensar nessa técnica como uma nova geometria, há aí uma chance de tornar mais eficientes os métodos da geometria euclidiana.

Segundo Gregersen (2011), em 1822 Poncelet publicou *Traité des propriétés projectives des figures* (Tratado sobre as propriedades projetivas das figuras, tradução nossa), no qual ele deixa claro que qualquer seção cônica é de alguma maneira equivalente a um círculo. Contudo, a linguagem utilizada por Poncelet em seu trabalho era pouco elegante e os matemáticos consideraram sua teoria um tanto quanto obscura. A fim de melhorá-la, matemáticos como Möbius e Plücker, a reformularam baseados nos conceitos da geometria algébrica e a desenvolveram.

O problema dos pontos no infinito na teoria de Desargues, já citado, foi resolvido por Plücker ao introduzir as coordenadas homogêneas em 1831 (KATZ, 1998, p.787). Dessa forma, os pontos e as curvas foram representadas algebricamente, substituindo a noção geométrica intuitiva por uma representação concreta.

Até aqui, toda a geometria exposta é euclidiana. Segundo Burton (2005), desde o século V, tenta-se provar o quinto postulado de Euclides a partir dos nove axiomas por ele definidos. Até o fim do século XVIII, tudo que se conseguiu foram formas equivalentes ao quinto postulado e nenhuma prova de que ele deriva dos axiomas. John Playfair (1748-1819) apresentou seu trabalho intitulado “*Elementos de Geometria*”, no qual enuncia o quinto postulado como o conhecemos hoje, a saber, “dada uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta paralela à reta dada passando pelo ponto”.

No fim do século XVII, o padre italiano Saccheri, fez a primeira tentativa de negar o quinto postulado e pela técnica de *reductio ad absurdum* chegar a uma contradição lógica. Essa foi a primeira pedra da fundação das geometrias não euclidianas, embora seu trabalho tenha ficado esquecido até o fim do século XIX, após Gauss, Bolyai e Lobachevsky terem sido nomeados como precursores de tais geometrias.

No início do século XIX, os três matemáticos supracitados desafiaram o quinto postulado ao propor a existência de mais que uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela. Eles mostraram que com essa substituição e a preservação dos outros axiomas, uma nova geometria não era só possível mas era consistente e, além disso, poderia ser conveniente para descrever determinados fenômenos do mundo físico. Mais drástica foi a intervenção de Riemann, que sugeriu uma geometria na qual não há paralelas, considerando a superfície de uma esfera como espaço. Nesse caso, além da mudança do quinto postulado foram necessárias readaptações de vários axiomas, a fim de que a nova geometria fosse consistente.

Futuramente Klein propõe a unificação e classificação das geometrias existentes até então, utilizando o conceito da estrutura algébrica de grupo em seu *Erlangen Programm*. Nesse momento não só está claro que as geometrias não euclidianas são consistentes como a comunidade matemática está preocupada com seus desenvolvimentos.

Mas por que falar das geometrias não euclidianas? Bem, queremos aqui evidenciar que o século XIX foi muito rico em todas as áreas da matemática e, em particular, na geometria. Contudo, apesar de tantas novidades, a geometria euclidiana continuou tendo seu lugar, mostrando que sempre há temas belíssimos que podem ser (re)estudados. Em meio as descobertas das geometrias não euclidianas, os matemáticos se ocuparam com muitos problema euclidianos.

Muitos temas foram tratados a partir de demonstrações utilizando argumentos de geometria sintética, como por exemplo, problemas de máximo e mínimos. Steiner abordou o famoso teorema isoperimétrico, provando que

entre todas as figuras planas com um perímetro dado, o círculo é aquela que contém a maior área, e para isso, utilizou geometria sintética.

Assim fez Clifford ao abordar o Teorema de Miquel para o pentágono. Ele reescreveu o teorema, associando-o às parábolas, e o provou utilizando geometria projetiva através da teoria de curvas de Plücker. Além disso, generalizou e provou, com os mesmos argumentos, o teorema para um número qualquer de retas.

## 2.2

### Auguste Miquel

Auguste Miquel nasceu em 1816 na cidade de Albi, na França, e viveu até 1851. Estudou em Toulouse e seguiu para Paris. Em 1836 teve sua primeira publicação no jornal matemático *Le Géomètre*, um jornal que teve curta duração e pouca projeção. Dois anos mais tarde, conseguiu publicar alguns artigos no *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouvilles, os quais exploravam propriedades de curvas e as interseções de círculos e esferas (22). Todos os seus trabalhos podem ser listados em poucas linhas:

- Sur quelques questions relatives à la Théorie des courbes (MIQUEL, 1838);
- Théorèmes de Géométrie (MIQUEL, 1838a);
- Théorèmes sur les Intersections des cercles et des sphères (MIQUEL, 1838b);
- Mémoire de géométrie (MIQUEL, 1844);
- Mémoire de Géométrie (deuxième partie) (MIQUEL, 1845);
- Mémoire de Géométrie (troisième partie) (MIQUEL, 1846).

Como podemos perceber, o trabalho de Miquel não é muito vasto, contudo seu resultado sobre o pentágono é muito interessante para ser estudado, e esta também é a opinião de Clifford.

## 2.3

### William Kingdom Clifford

William Kingdom Clifford nasceu em 1845, na cidade de Exeter, Inglaterra, e teve uma vida muito curta, falecendo em 1879, aos 33 anos. Isso não tornou sua obra pequena, muito pelo contrário, trabalhou em diferentes áreas e conseguiu acrescentar grande originalidade à ciência da época (para mais detalhes biográficos, ver (MACFERLANE, 1916). Segundo Monty Chisholm (2009), Clifford esteve lúcido até o momento de sua morte e pôde escrever muitas mensagens de despedida para os amigos e a família. Entre elas, deixou instruções específicas para sua esposa Lucy sobre seu trabalho acadêmico, que ele considerava uma das coisas mais importantes de sua vida.

Todos os seus artigos matemáticos, publicados ou não por ele, ou ainda não finalizados foram compilados por Robert Tucker com a ajuda de Lucy Clifford. Além dos artigos, ele deixou três livros inacabados e instruções para alguns amigos próximos cumprirem a tarefa de terminá-los.

Joe Rooney (2007) classificou os trabalhos de Clifford em três categorias: os trabalhos populares, ou seja, trabalhos de divulgação voltados para o público leigo; os de caráter filosófico; e os trabalhos matemáticos.

#### – Trabalhos populares:

- *Seeing and Thinking* (1874) é o único exemplo que Rooney cita como popular, mas segundo Tucker há muitos outros textos como, por exemplo, as notas das aulas ministradas a um grupo de senhoras de Kensington chamadas “Lectures on Geometry”.

#### – Trabalhos filosóficos:

- *Lectures and Essays* (1879), publicado em dois volumes, finalizado por Leslie Stephen e Frederick Pollock a pedido de Clifford. O segundo volume contém o artigo “*The Ethics of Belief*” (1877), considerado o seu trabalho mais importante em Filosofia.
- *The Common Sense of the Exact Sciences* (1885), deixado por Clifford para ser finalizado por Richard Charles Rowe que faleceu em 1884 antes de cumprir essa tarefa. Esse trabalho foi então repassado para Karl Pearson que terminou o trabalho um ano após a morte de Rowe.

#### – Trabalhos matemáticos:

- *Elements of Dynamic Vol I* (1878).
- *Elements of Dynamics Vol II* (1887), finalizado por Robert Tucker.

- *Mathematical Papers* (CLIFFORD, 1967) (1882), compilado por Robert Tucker com a supervisão de Lucy Clifford. Esse material apresenta todos os 51 artigos matemáticos escritos por Clifford.

<b>Artigos sobre Análise</b>	<b>Artigos sobre Geometria</b>
Lógica Matemática	Geometria Projetiva e Sintética
Teoria das Equações e da eliminação	Aplicação de Álgebra Superior à Geometria
Funções Theta e Integrais Abelianas	Teoria Geométricas da Transformação de funções Elípticas
Invariantes e covariantes	Cinemática
Miscelânea	Conceitos Generalizados do Espaço

Tabela 2.1: Classificação dos trabalhos de Clifford por Smith

Stephen Smith, convidado por Robert Tucker a escrever a Introdução de *Mathematical Papers*, descreveu os trabalhos mais importantes contidos nessa obra. A fim de facilitar o acesso aos artigos, ele propôs uma classificação para os mesmos de acordo com a área matemática a que pertencem, como mostra a Tabela 1.1. Não fica claro no texto de Smith se houve alguma interferência de Clifford nessa classificação ou se foi uma iniciativa própria.

Como podemos observar na Tabela 1.1, Clifford deu grande atenção à geometria projetiva e sintética, suficiente para estes trabalhos poderem ser agrupados na classificação de Smith. Isso mostra que apesar das novidades trazidas à tona pelas geometrias não euclidianas, resultados da geometria euclidiana continuaram e continuam sendo tema de estudo, e as demonstrações sintéticas ainda têm seu lugar.

## 3

### Miquel e Clifford

#### 3.1

##### Os Teoremas de Miquel

Como vimos na Seção 1.2, em 1838, Auguste Miquel publicou três artigos no *Journal de mathématiques pures et appliquées*, o segundo deles (MIQUEL, 1838a) com apenas três teoremas de Geometria que envolvem triângulos e circunferências circunscritas. Dos seis artigos publicados por Miquel, somente este figura no presente trabalho.

Esta seção tem por objetivo apresentar os três teoremas e suas demonstrações. O primeiro teorema apresenta duas recíprocas que não estão provadas no artigo por serem muito simples, mas estão aqui com suas devidas demonstrações. A demonstração do terceiro teorema é feita exatamente como no artigo, feitas as devidas adaptações para as notações modernas, enquanto as outras estão feitas de forma diferente.

**Teorema 3.1.1 (Teorema de Miquel)** *Considere as circunferências<sup>1</sup>  $A$ ,  $C$  e  $D$  que se cruzam num ponto  $B$ . Tome um ponto  $E$  sobre  $A$  e sejam  $F$  e  $G$  os pontos de interseção de  $A$  com as circunferências  $C$  e  $D$ , respectivamente. Sejam ainda os pontos  $H$  e  $I$  as interseções das retas  $\overleftrightarrow{EF}$  e  $\overleftrightarrow{EG}$  com as circunferências  $C$  e  $D$ , respectivamente. Se  $J$  é a interseção entre as circunferências  $C$  e  $D$ , então os pontos  $H$ ,  $I$  e  $J$  são colineares (15).*

##### Demonstração:

Todos os passos a seguir podem ser acompanhados na Figura 3.1.

Consideremos o triângulo  $EIH$ . Assim,  $G\hat{I}H$  é externo e  $m(G\hat{I}H) = m(\hat{E}) + m(\hat{H})$ .

Da circunferência  $D$ , temos que  $m(G\hat{I}H) = m(G\hat{B}J)$ . Mas,  $m(G\hat{B}J) = m(J\hat{B}F) + m(F\hat{B}G)$ .

Da circunferência  $C$ ,  $m(J\hat{B}F) = m(J\hat{H}F)$  e da circunferência  $A$  temos  $m(F\hat{B}G) = m(\hat{E})$ .

Assim,  $m(\hat{E}) + m(\hat{H}) = m(J\hat{H}F) + m(\hat{E})$ , ou seja,  $m(\hat{H}) = m(J\hat{H}F)$ .

Portanto,  $\hat{H}$  e  $J\hat{H}F$  são opostos pelo vértice e, conseqüentemente,  $I$ ,  $H$  e  $J$  são colineares.



<sup>1</sup>Ao longo do trabalho as palavras “círculo” e “circunferência” serão utilizadas como sinônimos. Além disso, nesse teorema elas estão representadas por seus centros.

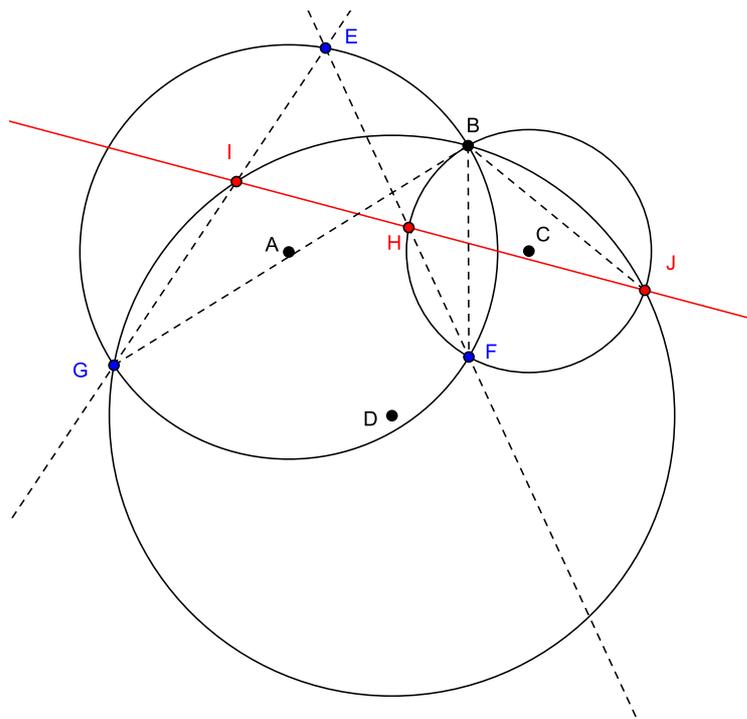


Figura 3.1: Teorema de Miquel

**Teorema 3.1.2 (Recíproca 1)** *Sejam três circunferências  $A$ ,  $C$  e  $D$  que se cruzam no ponto  $B$ . Seja  $J$  a interseção entre as circunferências  $C$  e  $D$ . Tomemos os pontos  $H$  e  $I$  sobre as circunferências  $C$  e  $D$ , respectivamente, tais que  $H$ ,  $I$  e  $J$  sejam colineares. Assim, se  $F$  e  $G$  são as outras interseções entre as circunferências  $A$  e  $C$ ; e  $A$  e  $D$ , respectivamente; então as retas  $\overleftrightarrow{FH}$  e  $\overleftrightarrow{GI}$  se intersectam em um ponto  $E$  que está sobre a circunferência  $A$ .*

**Demonstração:**

Todos os passos a seguir podem ser acompanhados na Figura 3.2.

Seja  $E$  a interseção entre as retas  $\overleftrightarrow{FH}$  e  $\overleftrightarrow{GI}$ .

Assim, temos:

$$m(\widehat{EHI}) = m(\widehat{FHJ}) = m(\widehat{FBJ}) = m(\widehat{GBJ}) - m(\widehat{GBF})$$

Considere  $E'$  a interseção entre a circunferência  $A$  e o segmento  $\overline{GE}$ . Então, pelo argumento dos ângulos inscritos utilizado no teorema anterior segue que:

$$m(\widehat{EHI}) = m(\widehat{GIJ}) - m(\widehat{GE'F})$$

Ou ainda,

$$m(\widehat{EHI}) = m(\widehat{E}) + m(\widehat{EHI}) - m(\widehat{GE'F})$$

Portanto,

$$m(\hat{E}) = m(\hat{G\hat{E}'F})$$

e, conseqüentemente,  $E$  está sobre a circunferência  $A$ .

■

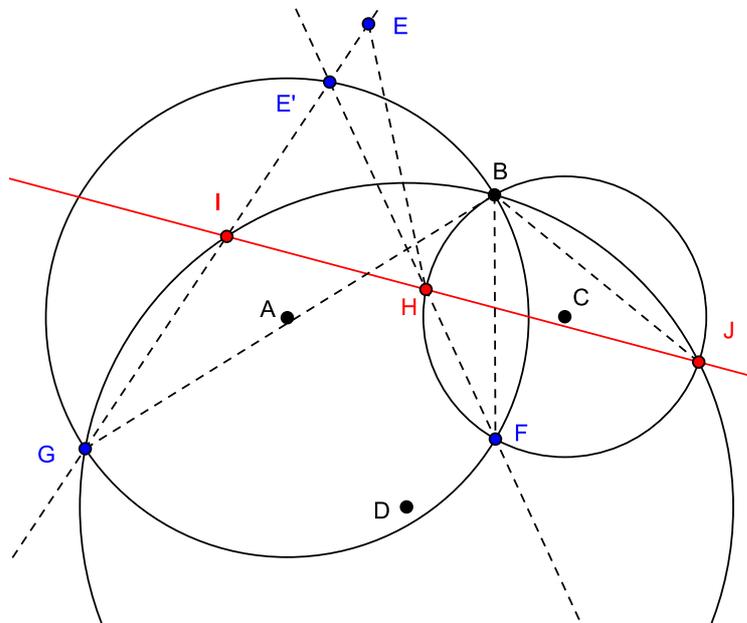


Figura 3.2: Teorema de Miquel - Recíproca 1

**Teorema 3.1.3 (Recíproca 2)** *Considere três pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , sobre as três retas suporte aos lados do triângulo  $ABC$ , não coincidentes com os vértices. Se construirmos um círculo por um dos vértices e pelos dois pontos sobre as retas suporte a este vértice, então os três círculos assim determinados se cruzam num ponto  $G$ .*

**Demonstração:**

Todos os passos a seguir podem ser acompanhados na Figura 3.3.

Seja  $G$  a interseção entre o círculo que contém os pontos  $A$ ,  $D$  e  $F$  e o círculo que contém os pontos  $B$ ,  $D$  e  $E$ . Vamos provar que o quadrilátero  $CEFG$  é circunscritível e, portanto,  $G$  é a interseção dos três círculos.

De fato,

$$\begin{aligned} m(\hat{C\hat{E}G}) &= 180^\circ - m(\hat{B\hat{E}G}) = \\ &180^\circ - m(\hat{B\hat{D}G}) = m(\hat{A\hat{D}G}) = m(\hat{A\hat{F}G}) = 180^\circ - m(\hat{C\hat{F}G}) \end{aligned}$$

Logo,

$$m(\hat{C\hat{E}G}) + m(\hat{C\hat{F}G}) = 180^\circ$$

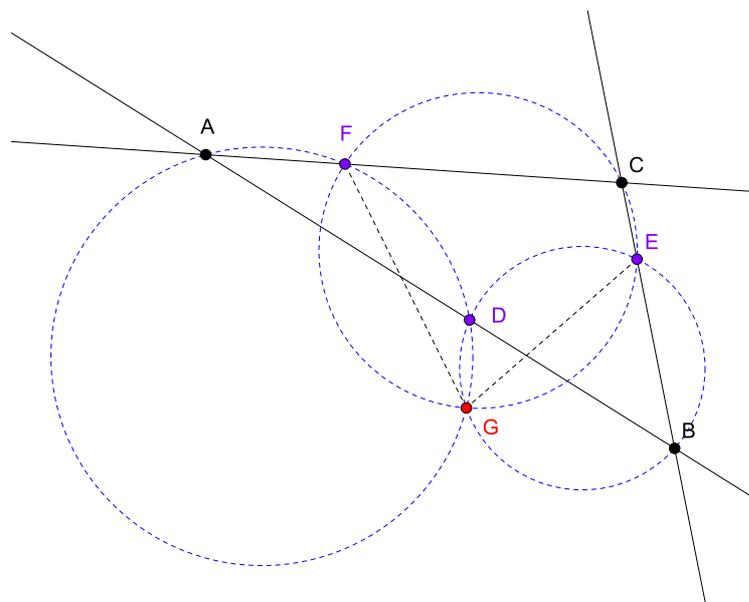


Figura 3.3: Teorema de Miquel - Recíproca 2

■

O segundo Teorema de Miquel será utilizado no próximo teorema e também será útil na próxima seção com uma pequena modificação, que aparece em forma de exercício no livro de Geometria adotado pelo Profmat (MUNIZ NETO, 2013, p.135). Assim sendo, preferimos apresentar a versão modificada e não a original contida no artigo.

**Teorema 3.1.4** *Considere, no plano, quatro retas que se intersectam duas a duas tais que não há três passando por um mesmo ponto. Então os círculos circunscritos aos quatro triângulos que tais retas determinam passam todos por um mesmo ponto.*

**Demonstração:**

Observe a Figura 3.4 e note que o triângulo  $ABC$  e os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  satisfazem as condições do Teorema 3.1.3. Logo, existe  $G$  que é a interseção dos três círculos circunscritos.

De forma análoga, o triângulo  $CDE$  e os pontos  $A$ ,  $B$  e  $F$  satisfazem as condições do Teorema 3.1.3 e  $G$  pertence também ao círculo circunscrito ao triângulo  $ABC$ .

■

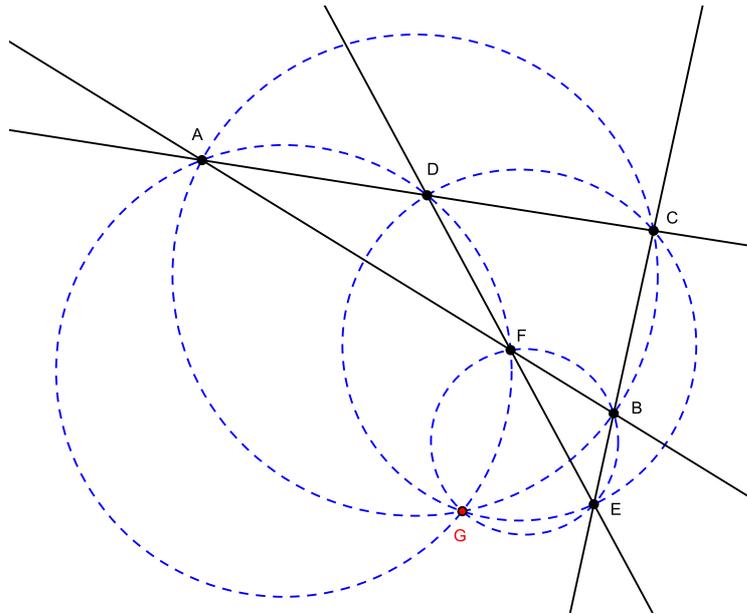


Figura 3.4: Teorema de Miquel - Recíproca 2 - outra versão

**Teorema 3.1.5 (Teorema de Miquel para o pentágono)**

Seja  $ABCDE$  um pentágono e sejam  $F, G, H, I$  e  $J$ , as interseções dos prolongamentos dos seus lados, de forma que se tenham formado os triângulos  $ABJ, BCI, CDH, DEF$  e  $AEG$ . Considere os círculos circunscritos a esses triângulos. Então os pontos  $K, L, M, N$  e  $O$ , que são as interseções de dois círculos consecutivos, diferentes dos vértices, estão sobre uma circunferência (Figura 3.5).

**Demonstração:**

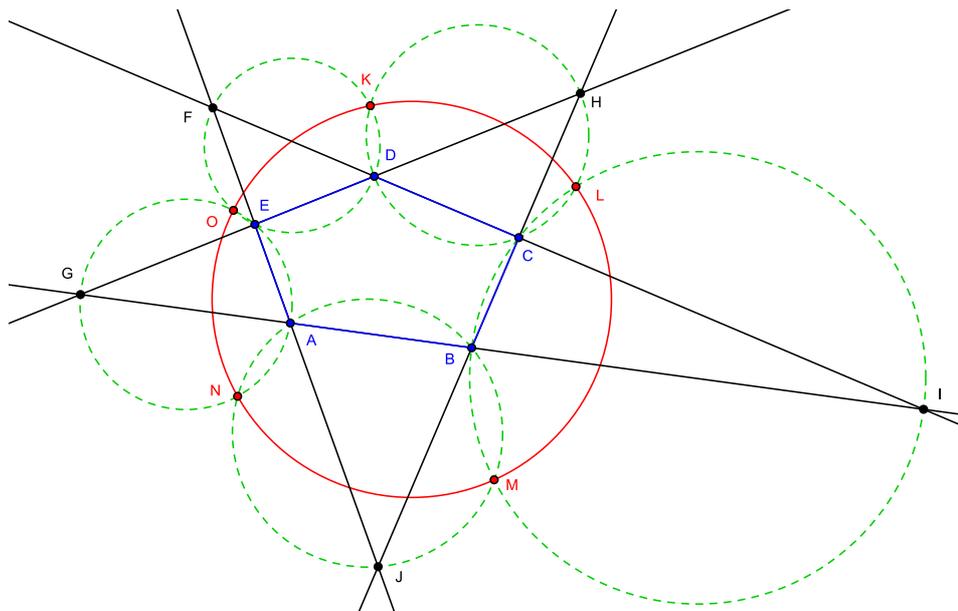


Figura 3.5: Teorema de Miquel para o pentágono

Considere a circunferência que contém os pontos  $N$ ,  $L$  e  $O$ . Vamos mostrar que  $K$  pertence a essa circunferência.

Tomemos a circunferência circunscrita ao triângulo  $GBH$ . Observe os quadriláteros  $GHJA$  e  $HGIC$ . Do Teorema 3.1.4, temos que essa circunferência passa pelos pontos  $N$  e  $L$  (Figura 3.6).

Como as circunferências  $NLH$ ,  $NLO$  e  $NEO$  se cruzam no ponto  $N$  e a reta  $\overleftrightarrow{EH}$  passa pela interseção  $G$  entre as circunferências  $NLH$  e  $NEO$ ; as retas  $\overleftrightarrow{OE}$  e  $\overleftrightarrow{HL}$  se cruzam no ponto  $P$  sobre a circunferência  $NLO$  (Teorema 3.1.2) (Figura 3.6).

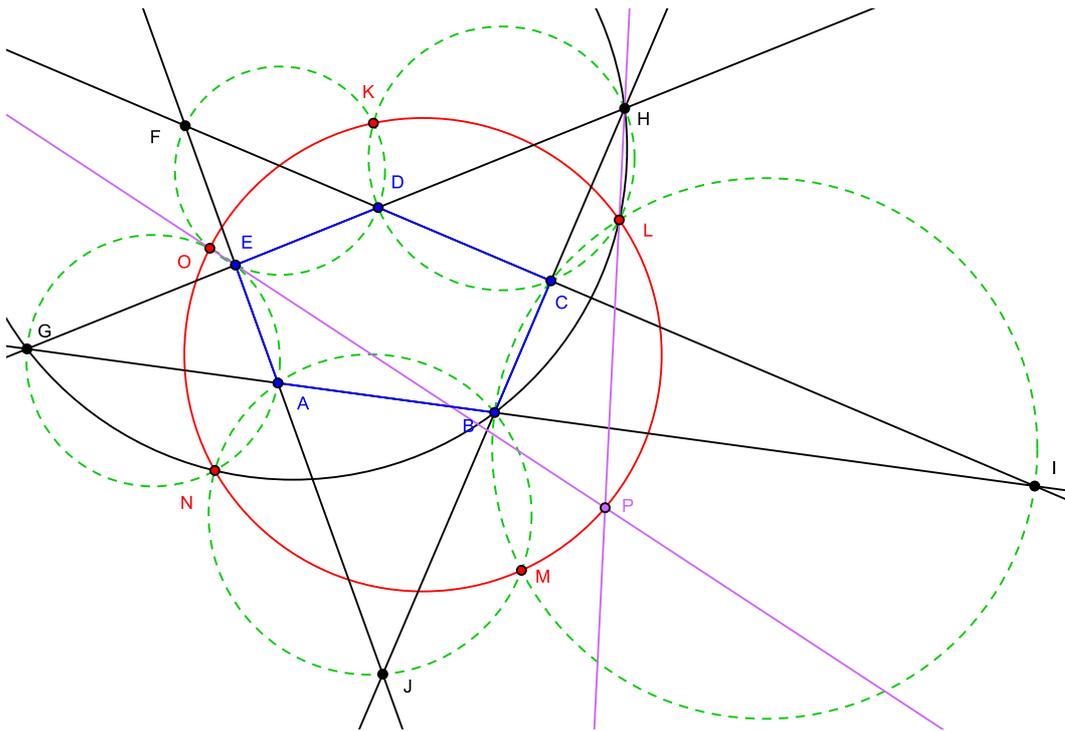


Figura 3.6: Teorema de Miquel para o pentágono - demonstração

Observe que os pontos  $O$ ,  $L$  e  $D$  estão sobre as retas suporte do triângulo  $EPH$ . Logo, pelo Teorema 3.1.3, as circunferências  $POL$ ,  $EDO$  e  $HLD$  se cruzam num ponto. Conseqüentemente, a circunferência  $NLO$  passa pelo ponto  $K$ , interseção das circunferências  $EDF$  e  $CDH$ .

Analogamente, mostramos que  $NLO$  passa por  $M$  e, portanto, os pontos  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  e  $O$  estão sobre uma circunferência. ■

Observe que o fato de mencionar as interseções dos prolongamentos dos lados deixa implícito que não há lados paralelos. Por isso, faremos duas observações e veremos se o teorema continua valendo e se o argumento acima se aplica quando há paralelismo.

**Observação 1:**

Suponha que o pentágono  $ABCDE$  possua dois pares de lados paralelos, a saber,  $AB$  e  $DE$ ,  $BC$  e  $AE$  (ver Figura 3.7). Nesse caso, afirmamos que há apenas três círculos formados pelo lado e o prolongamento dos dois lados adjacentes a este. Além disso, os círculos assim formados se tangenciam dois a dois e os pontos de interseção são os vértices  $C$  e  $D$ .

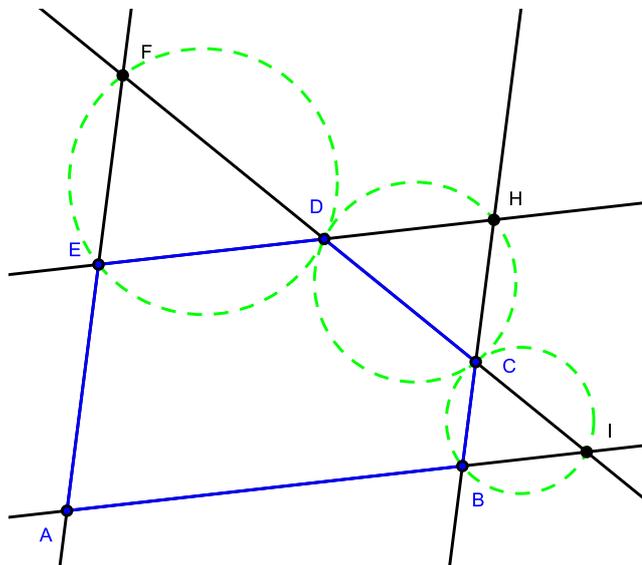


Figura 3.7: Observação 1

De fato, sejam  $G$  e  $J$  os centros dos círculos  $DEF$  e  $CDH$ , respectivamente (Figura 3.8). Considere as semirretas  $\overrightarrow{DG}$  e  $\overrightarrow{DJ}$ . Vamos mostrar que  $D$ ,  $G$  e  $J$  são colineares.

Do paralelismo de  $\overleftrightarrow{AE}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$  temos que  $\overleftrightarrow{EF}$  e  $\overleftrightarrow{CH}$  são paralelas e, conseqüentemente,  $D\hat{E}F \cong C\hat{H}D$  e  $D\hat{F}E \cong H\hat{C}D$ , pois são alternos internos. Seja  $R$  e  $r$  os raios dos círculos circunscritos aos triângulos  $DEF$  e  $CDH$ , respectivamente. Logo, pela Lei dos Senos, segue que:

$$\frac{\overline{DE}}{\text{sen}(D\hat{F}E)} = \frac{\overline{DF}}{\text{sen}(D\hat{E}F)} = 2R$$

e

$$\frac{\overline{DH}}{\text{sen}(D\hat{C}H)} = \frac{\overline{DC}}{\text{sen}(D\hat{H}C)} = 2r$$

Portanto, da congruência dos ângulos,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DC}} = \frac{R}{r}$$

Observe que  $\overline{DG} = \overline{GE} = R$  e  $\overline{DJ} = \overline{JH} = r$ . Logo,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DJ}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{JH}}$$

Contudo,  $DGE$  e  $DJH$  são isósceles. Daí e da semelhança segue que  $G\hat{D}E \cong J\hat{D}H$ , ou seja, são ângulos opostos pelo vértice e  $G$ ,  $D$  e  $J$  são colineares. Portanto, concluímos que os círculos são tangentes em  $D$ .

Analogamente, os círculos  $BCI$  e  $CDH$  são tangentes em  $C$ .

Não é possível formar nenhum outro círculo devido ao paralelismo dos lados.

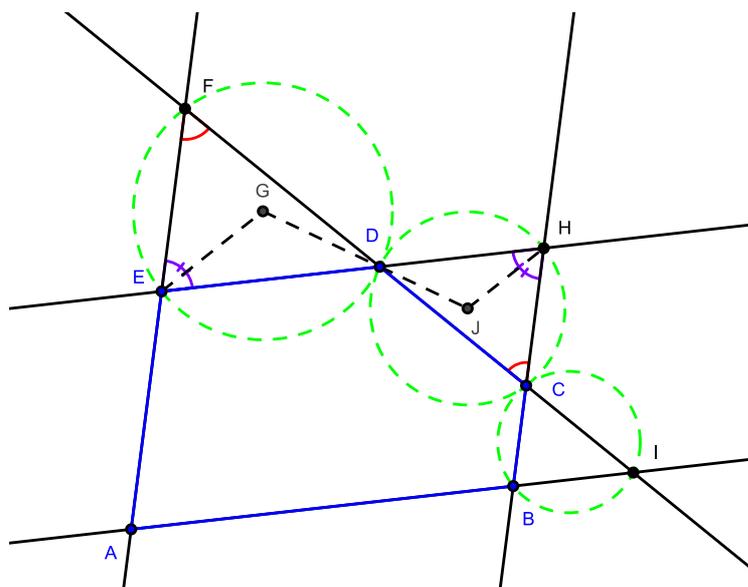


Figura 3.8: Observação 1 (prova)

Se considerarmos retas como círculos com um ponto no infinito, vemos que o teorema continua valendo, em que os pontos  $F$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $I$  e o ponto no infinito estão sobre um círculo.

### Observação 2:

Suponha que o pentágono  $ABCDE$  possua um único par de lados paralelos, a saber,  $AB$  e  $CD$  (ver Figura 3.9).

Nesse caso, afirmamos que há quatro círculos formados pelo lado e o prolongamento dos dois lados adjacentes a este, visto que os lados paralelos não permitem a formação de um círculo.

Da observação 1, temos que  $AEG$  e  $DEH$  são tangentes no vértice  $E$ .

Seja  $K$  a interseção entre os círculos  $ABF$  e  $AEG$ , e  $L$  a interseção entre os círculos  $CDI$  e  $DEH$ . Logo os três pontos de interseção dos círculos dois a



delas não aparece no artigo de Clifford, pois segundo o próprio, é de conhecimento geral. A segunda possui uma prova sintética dada por Clifford, mas aqui será abordada pela ótica de Miquel, com o uso exclusivo de argumentos da Geometria Euclidiana.

Para tal fim, faz-se necessário definir alguns elementos básicos e preciosos referentes à parábola.

**Definição 3.2.1** *Seja  $F$  um ponto e  $d$  uma reta no plano. Definimos a parábola como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $F$  e  $d$ . Nesse caso,  $F$  é chamado Foco da parábola e  $d$  sua diretriz.*

**Definição 3.2.2** *Seja  $P$  um ponto sobre uma parábola. A reta tangente à parábola em  $P$  é a única reta, não paralela à reta focal (reta perpendicular à diretriz que contém o foco), que intersecta a parábola apenas no ponto  $P$ . O ponto  $P$  é chamado ponto de tangência da reta com a parábola (DELGADO et al, 2013, p.163).*

Queremos falar a seguir sobre a propriedade de reflexão que existe na parábola. Para isso, precisamos definir ângulo entre reta e curva. Diremos então que o ângulo entre uma reta e uma curva no ponto  $P$  é, por definição, o ângulo entre essa reta e a reta tangente à curva em  $P$ .

**Proposição 3.2.1 (Propriedade de reflexão da parábola)**

*Considere uma parábola de foco  $F$  e uma reta tangente à parábola no ponto  $P$ . Seja  $\alpha$  o ângulo entre a tangente e o segmento  $FP$  e seja  $\beta$  o ângulo entre a tangente e a reta que contém  $P$  e é paralela à reta focal. Então  $\alpha = \beta$ . (Ver Fig.3.10)*

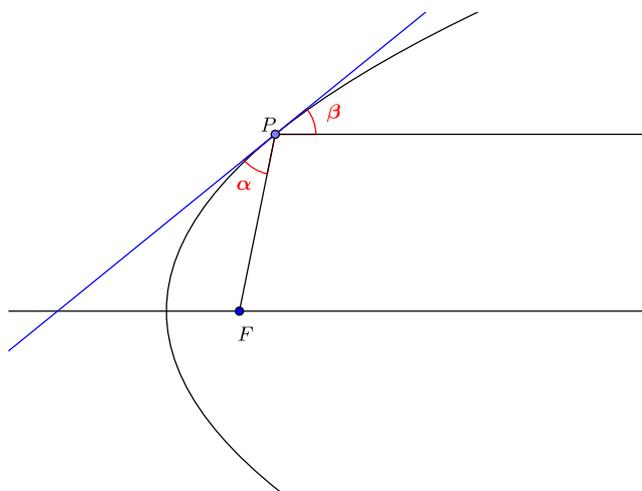


Figura 3.10: Propriedade de reflexão da parábola

### Demonstração:

Faremos aqui uma demonstração utilizando Geometria Analítica e as equações de Delgado (2013, p.143). Assim sendo, considere a parábola de equação  $y^2 = 4px$ , com foco  $F = (p, 0)$ , em que  $p$  é a distância do foco ao vértice, que nesse caso é a origem. Seja  $P = (x_0, y_0)$  um ponto da parábola.

Se  $P$  é o vértice da parábola, então a reta tangente à parábola em  $P$  é o eixo vertical, que é perpendicular ao segmento  $PF$  e, portanto,  $\alpha = \beta$ .

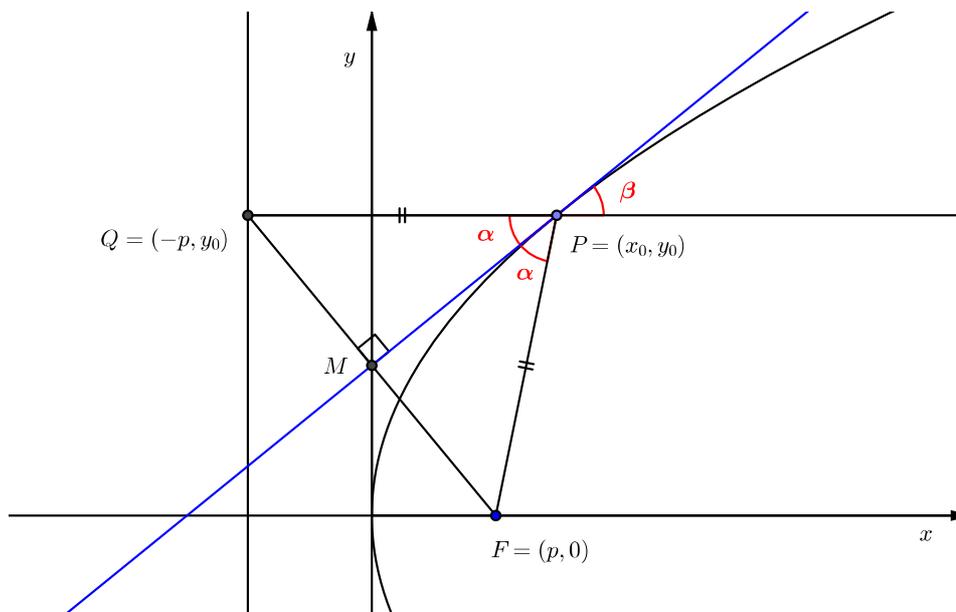


Figura 3.11: Demonstração da propriedade de reflexão

Suponhamos então que  $P$  é diferente do vértice. Dessa forma, utilizando conhecimentos de cálculo, sabemos que a equação da reta tangente à parábola no ponto  $P$  é dada por:

$$y = \frac{2p}{y_0} (x - p)$$

Seja  $Q$  o pé da perpendicular por  $P$  à diretriz. Logo,  $Q = (-p, y_0)$  e a equação da reta que passa por  $F$  e  $Q$  é dada por:

$$y = -\frac{y_0}{2p} (x - p)$$

Observe que o coeficiente angular da primeira é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da segunda. Logo, as retas são perpendiculares, ou seja, mais especificamente, a reta tangente à parábola em  $P$  é perpendicular ao segmento  $FQ$ .

Da Definição 3.2.1 temos que  $FP \cong PQ$ , e portanto o triângulo  $FPQ$  é isósceles com base  $FQ$ . Assim, a reta tangente à parábola em  $P$  passa pelo ponto médio  $M$  de  $FQ$  e  $MPQ \cong MPF$ .

No entanto,  $M\hat{P}Q$  é oposto pelo vértice ao ângulo de medida  $\beta$ . Consequentemente,  $\alpha = \beta$ .

■

**Definição 3.2.3** *Seja  $P$  um ponto da parábola diferente do vértice. Sejam  $Q$  e  $R$  os pontos em que a tangente e a normal em  $P$  intersectam o eixo da parábola; e seja  $S$  o pé da perpendicular de  $P$  a esse eixo. Dessa forma, os segmentos  $QS$  e  $RS$  são chamados subtangente e subnormal, respectivamente (Fig. 3.12).*

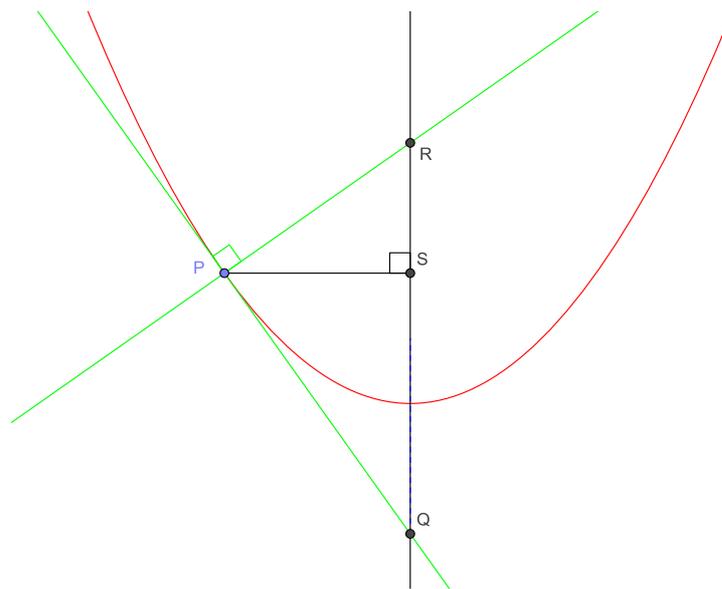


Figura 3.12: Subtangente e subnormal

Esta definição, assim como a proposição seguinte, fazem parte de um exercício do livro de Cálculo de George Simmons (1987, p.191). Esta proposição será útil para demonstrar o primeiro resultado apresentado por Clifford e citado no início desta seção.

**Proposição 3.2.2** *Considere os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  como na definição 3.2.3. Então:*

- (i) *O vértice  $V$  é o ponto médio da subtangente.*
- (ii) *Considerando a equação da parábola  $x^2 = 4py$ , a subnormal tem comprimento constante  $2p$ .*
- (iii)  *$P$  e  $R$  são equidistantes do foco  $F$ .*
- (iv)  *$P$  e  $Q$  são equidistantes de  $F$  e assim,  $F$  é o ponto médio do segmento  $QR$ .*



que:

$$\begin{aligned}
 \overline{PS}^2 = \overline{RS} \cdot \overline{SQ} &\Rightarrow \overline{RS} \cdot \overline{SQ} = \overline{PF}^2 - \overline{SF}^2 \\
 &\Rightarrow \overline{RS} \cdot \overline{SQ} = \overline{FQ}^2 - \overline{SF}^2 = (\overline{FQ} + \overline{SF})(\overline{FQ} - \overline{SF}) \\
 &\Rightarrow \overline{RS} \cdot \overline{SQ} = \overline{SQ} \cdot (\overline{FQ} - \overline{SF}) \\
 &\Rightarrow \overline{RS} = \overline{FD} = 2p
 \end{aligned}$$

(iii) De fato (Fig. 3.13), de (i) e (ii) segue que:

$$\overline{RF} = \overline{RS} + \overline{FS} = \overline{FD} + \overline{DQ} = \overline{FQ} = \overline{FP}$$

(iv) De (iii) e (i) segue que:

$$\overline{FR} = \overline{FP} = \overline{PP'} = \overline{FQ}$$

(v) Considere a Figura 3.14.

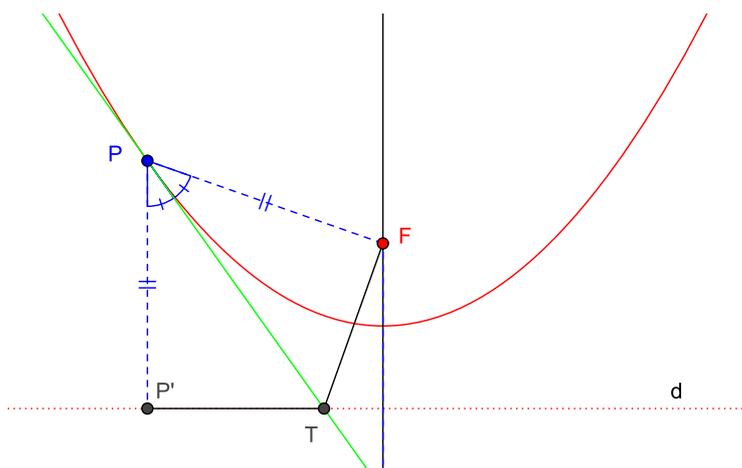


Figura 3.14: Demonstração (v)

Sabemos que  $FP \cong PP'$  e  $F\hat{P}T \cong P'\hat{P}T$ . Assim, pelo caso  $(LAL)$  de congruência de triângulos, temos que  $FPT \cong P'PT$ . Donde segue que  $P\hat{F}T \cong P\hat{P}'T$ . Contudo,  $P\hat{P}'T$  é reto pois  $P'$  é o pé da perpendicular à reta  $d$  por  $P$ . Portanto,  $P\hat{F}T$  é reto.

(vi) Sabemos que  $FPQP'$  é um losango, donde segue que  $FP'$  e  $PQ$  são perpendiculares e se cruzam no ponto médio  $U$ , isto é,  $P\hat{U}F$  é reto.

Agora, considere a reta  $r$  tangente ao vértice  $V$ . Sabemos que  $r$  é paralela à diretriz  $d$ . Como  $V$  é ponto médio de  $FD$ , temos que  $r$  corta  $FP'$  no ponto médio, ou seja,  $U$  pertence à reta  $r$ . ■





De (3.2.3) e (3.2.4), segue que:

$$m(\widehat{FPQ}) + m(\widehat{FRQ}) = \gamma + \theta + \alpha + \epsilon \quad (3.2.6)$$

Considerando o quadrilátero  $FPQR$  e os resultados de (3.2.5) e (3.2.6), temos que

$$m(\widehat{F}) + m(\widehat{Q}) = m(\widehat{P}) + m(\widehat{R}) = 180^\circ.$$

Portanto,  $FPQR$  é circunscritível. Em outras palavras,  $F$  pertence ao círculo circunscrito ao triângulo  $PQR$ .

■

### Teorema 3.2.2

Considere uma parábola de foco  $A$  e diretriz  $d$ , e quatro retas tangentes a essa parábola em quatro pontos distintos. Então,  $A$  é o ponto de interseção entre os círculos circunscritos a cada um dos quatro triângulos formados por essas retas (ver Figura 3.17).

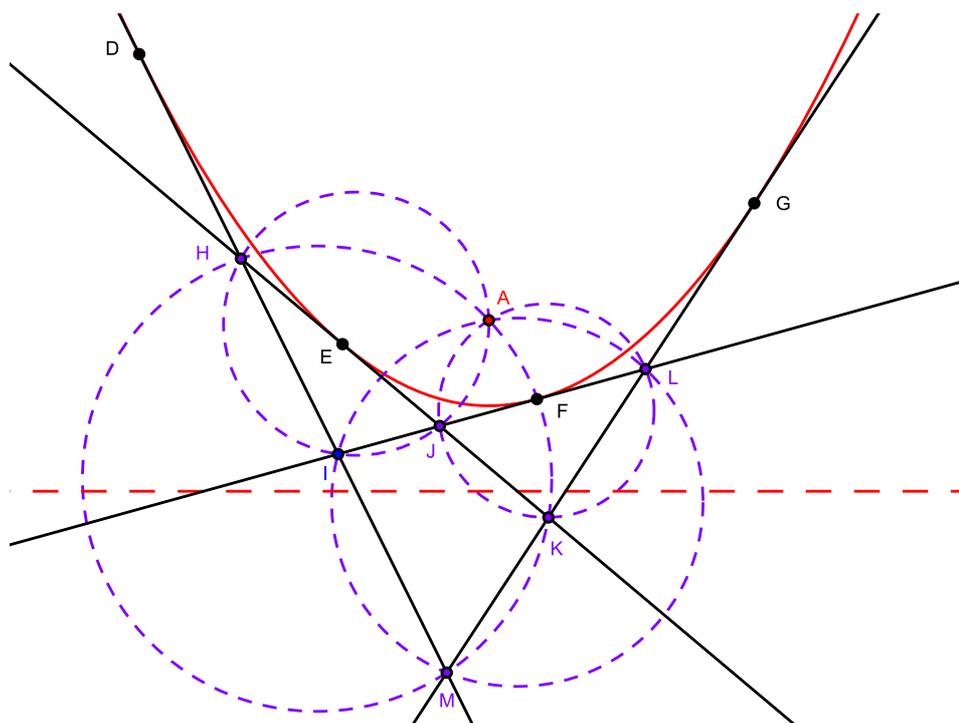


Figura 3.17: Teorema 2.2.2

### Demonstração:

O resultado segue diretamente dos Teoremas 3.1.4 e 3.2.1.

■

Neste momento temos as ferramentas necessárias para provar a primeira afirmação de Clifford, aquela que é de conhecimento geral e teoricamente não necessita de demonstração.

**Teorema 3.2.3** *Considere, no plano, quatro retas que se intersectam duas a duas e tais que não há três passando por um mesmo ponto. Então existe uma, e somente uma, parábola tangente às quatro retas dadas.*

**Demonstração:**

Dos Teoremas (3.1.4) e (3.2.1) temos determinado o foco da parábola e para que ela seja única, devemos determinar sua diretriz.

Da Proposição (3.2.2-vi), temos que a perpendicular a uma reta dada, passando por  $F$ , pertence à reta  $r$  tangente à parábola no seu vértice. Logo, a partir de duas retas dadas encontramos a reta  $r$  e esta é única.

O eixo da parábola é a perpendicular a  $r$  passando por  $F$ . A partir da qual encontramos o vértice  $V$  da parábola, dado pela interseção entre seu eixo e a reta  $r$ .

A diretriz  $d$  é paralela à  $r$  de forma que  $d(F, V) = d(V, d)$ .

Da unicidade de  $r$  segue a unicidade de  $d$ .

Portanto, existe uma única parábola tangente às retas dadas. ■

Finalmente, podemos enunciar e provar a versão de Clifford para o Teorema de Miquel para o pentágono 3.3.1. Observe que o Teorema de Miquel nada falava sobre parábolas, tratava apenas de retas e círculos. Quando Clifford acrescenta essa informação, ele mostra que na verdade essas parábolas possuem propriedades que independem de sua natureza, visto que essa é uma propriedade inerente apenas a retas e círculos.

**Teorema 3.2.4** *Considere, no plano, cinco retas que se intersectam duas a duas e tais que não há três passando por um mesmo ponto. Então existem cinco parábolas, cada uma tangente a quatro das retas dadas. Além disso, os focos dessas cinco parábolas estão sobre uma mesma circunferência (ver Figura 3.18).*

**Demonstração:**

Primeiramente, das cinco retas distintas, podemos tomar quatro delas de cinco maneiras. Pelo Teorema 3.2.3, cada grupo de quatro retas terá exatamente uma parábola tangente. Dessa forma temos formadas cinco parábolas.

Pelo Teorema 3.2.1, os focos pertencem aos círculos circunscritos aos triângulos formados pelas retas tangentes.

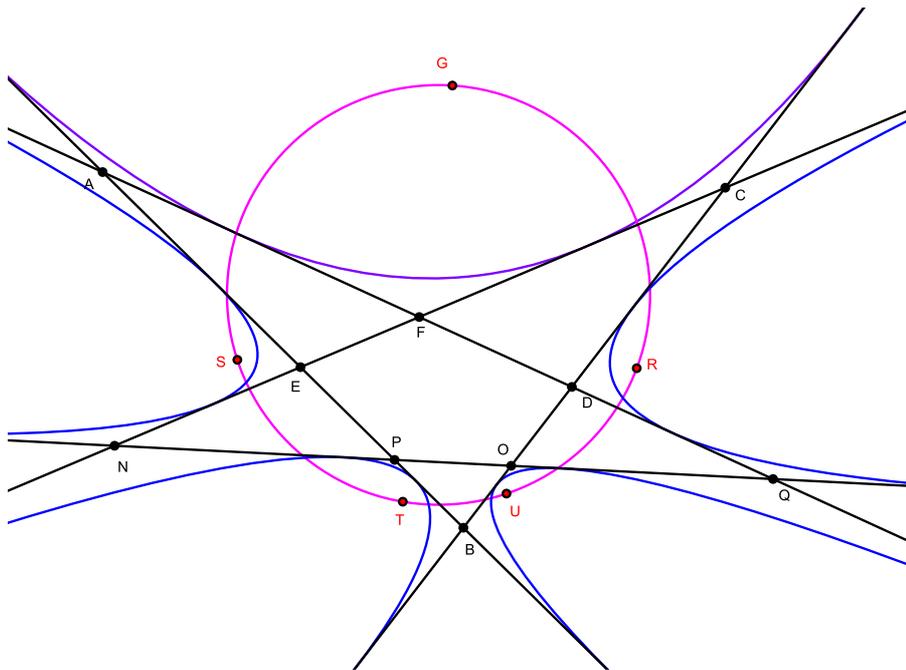


Figura 3.18: Teorema 2.2.4

Observe ainda que as cinco retas formam um pentágono, e pelo Teorema 3.1.5, os focos pertencem a uma circunferência (Figura 3.19). ■

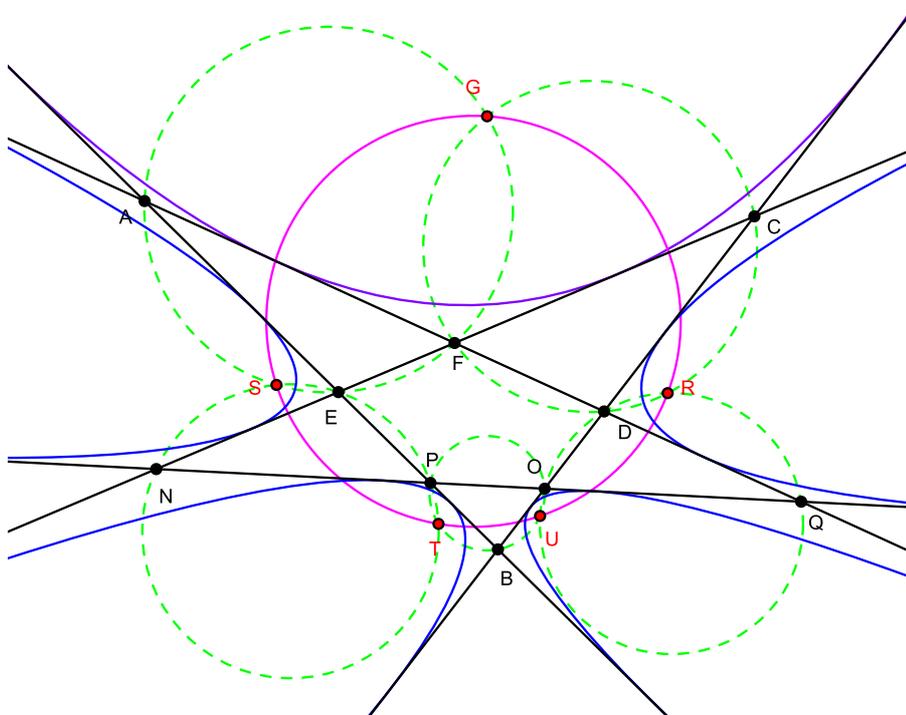


Figura 3.19: Teorema 2.2.4 - demonstração

### 3.3

#### Teorema de Miquel para mais de cinco retas

Clifford afirma no fim de seu artigo que esse teorema pode ser generalizado com respeito ao número de retas e propõe novamente uma demonstração com argumentos de geometria projetiva, ou seja, uma prova sintética. É sobre tal generalização que trata o próximo teorema.

A demonstração proposta aqui, como nos teoremas anteriores, utilizará apenas argumentos de geometria euclidiana.

#### Teorema 3.3.1

(i) *Dadas três retas, existe um círculo que contém as suas interseções.*

(ii) *Dadas quatro retas, podemos formar quatro conjuntos de três retas cada. Por (i), cada conjunto possui um círculo associado que contém seus pontos, determinando assim quatro círculos que se cruzam num ponto (Teorema 3.1.4).*

(iii) *Dadas cinco retas, podemos formar cinco conjuntos de quatro retas cada. Por (ii), a cada conjunto está associado um ponto, obtendo assim cinco pontos que estão sobre um círculo (Teorema 3.1.5).*

(iv) *Dadas seis retas, podemos formar seis conjuntos de cinco retas cada. Por (iii), cada conjunto possui um círculo associado, determinando assim seis círculos que se cruzam num ponto.*

*E o processo continua, ou seja, se  $n \geq 2$  temos que  $2n$  retas determinam  $2n$  círculos que se cruzam num ponto enquanto com  $2n + 1$  retas obtém-se  $2n + 1$  pontos que estão sobre um círculo.*

*As retas dadas se intersectam duas a duas e não há três passando pelo mesmo ponto, em cada um dos casos acima.*

A demonstração desse teorema será baseada numa ideia proposta por Henri Lebesgue em seu artigo de 1916 (LEBESGUE, 1916). Para tal fim será necessário incluirmos um de seus lemas.

#### Lema 3.3.1 (Lema dos quatro círculos)

*Considere  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  quatro círculos e os pontos  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$  as interseções entre  $C_i$  e  $C_j$ , com  $i \neq j$ . Se os pontos  $A_{ij}$  estão sobre um círculo então o mesmo ocorre com os pontos  $B_{ij}$ .*

**Demonstração:**

Por economia de notação, utilizaremos como interseções os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  que, por hipótese, estão sobre um círculo, ou seja, o quadrilátero  $ABCD$  é circunscritível (Figura 3.20), ou seja,

$$m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{BCD}) = 180^\circ \quad (3.3.7)$$

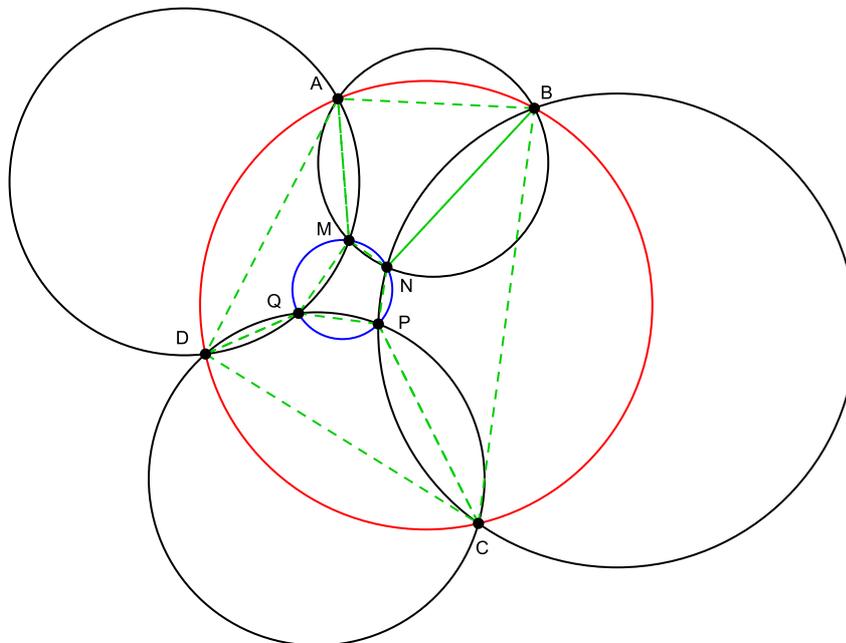


Figura 3.20: Lema dos quatro círculos

Considere agora as outras interseções, os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$ , tal qual na figura 3.20. Logo, os quadriláteros  $AMNB$ ,  $BNPC$ ,  $CPQD$  e  $DQMA$  são circunscritíveis. Daí segue que:

$$m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{BNM}) = 180^\circ \quad (3.3.8)$$

$$m(\widehat{DAM}) + m(\widehat{MQD}) = 180^\circ \quad (3.3.9)$$

$$m(\widehat{BCP}) + m(\widehat{PNB}) = 180^\circ \quad (3.3.10)$$

$$m(\widehat{PCD}) + m(\widehat{DQP}) = 180^\circ \quad (3.3.11)$$

Somando os respectivos membros das equações 3.3.8 a 3.3.11, temos:

$$m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{PNM}) + m(\widehat{MQP}) = 720^\circ \quad (3.3.12)$$

Das equações 3.3.7 e 3.3.12 segue que:

$$m(\widehat{PNM}) + m(\widehat{MQP}) = 540^\circ$$

A fim de facilitar a visualização, estamos utilizando a notação para ângulos em sentido anti-horário a fim de que  $M\hat{N}P$  não seja o mesmo que  $P\hat{N}M$ , mas  $m(M\hat{N}P) + m(P\hat{N}M) = 360^\circ$ .

Assim,

$$\begin{aligned} m(M\hat{N}P) + m(P\hat{Q}M) &= 360^\circ - m(P\hat{N}M) + 360^\circ - m(M\hat{Q}P) \\ &= 720^\circ - (m(P\hat{N}M) + m(M\hat{Q}P)) \\ &= 720^\circ - 540^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

Portanto,  $MNPQ$  é circunscritível. ■

Vejamos agora a ideia utilizada na demonstração de Lebesgue (1916). Embora o Lema 3.3.1 fale somente de círculos, podemos considerar também como hipótese que os pontos são colineares. Isso não precisaria ser mencionado pensando na reta como o círculo de raio infinito. Contudo, não queremos introduzir isso no texto, a fim de deixá-lo claro a qualquer leitor que não entenda esse conceito. Portanto, vamos estabelecer um novo lema.

**Lema 3.3.2** *Considere  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  quatro círculos e os pontos  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$  as interseções entre  $C_i$  e  $C_j$ , com  $i \neq j$ . Se os pontos  $A_{ij}$  são colineares então os pontos  $B_{ij}$  estão sobre um círculo.*

### Demonstração:

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  os pontos de interseção colineares entre os quatro círculos dados e considere  $M, N, P$  e  $Q$  as outras interseções. Temos que os quadriláteros  $ABNM, BCPN, CDQP$  e  $ADQM$  são circunscritíveis (observe a Figura 3.21). Logo, são equivalentes,

$$\begin{aligned} m(A\hat{M}Q) + m(Q\hat{D}A) &= 180^\circ \\ m(A\hat{M}N) + m(N\hat{M}Q) + m(Q\hat{D}C) &= 180^\circ \\ m(A\hat{M}N) + m(N\hat{M}Q) + 180^\circ - m(C\hat{P}Q) &= 180^\circ \\ m(A\hat{M}N) + m(N\hat{M}Q) - (360^\circ - m(Q\hat{P}C)) &= 0 \\ m(A\hat{M}N) + m(N\hat{M}Q) + m(Q\hat{P}C) &= 360^\circ \\ m(A\hat{M}N) + m(N\hat{M}Q) + m(Q\hat{P}N) + m(N\hat{P}C) &= 360^\circ \\ m(A\hat{M}N) + m(N\hat{M}Q) + m(Q\hat{P}N) + 180^\circ - m(C\hat{B}N) &= 360^\circ \\ m(A\hat{M}N) + m(N\hat{M}Q) + m(Q\hat{P}N) - m(C\hat{B}N) &= 180^\circ \\ m(A\hat{M}N) + m(N\hat{M}Q) + m(Q\hat{P}N) - (180^\circ - m(N\hat{B}A)) &= 180^\circ \\ m(N\hat{M}Q) + m(Q\hat{P}N) + m(A\hat{M}N) + m(N\hat{B}A) - 180^\circ &= 180^\circ \\ m(N\hat{M}Q) + m(Q\hat{P}N) &= 180^\circ \end{aligned}$$

Portanto,  $MNPQ$  é circunscritível.

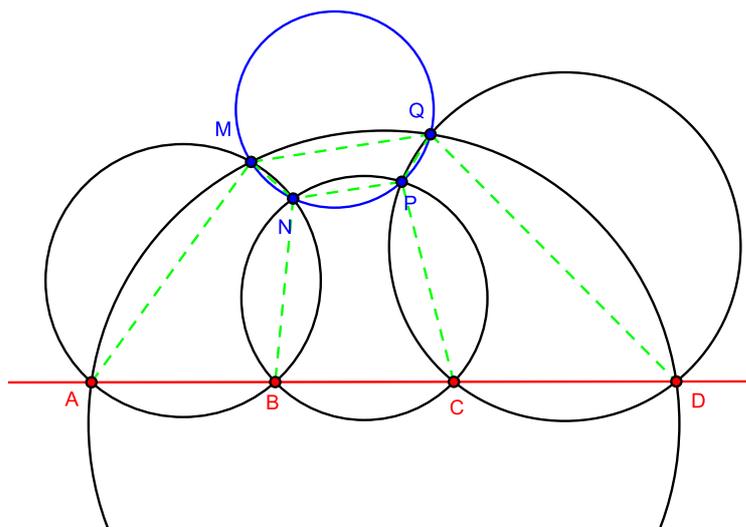


Figura 3.21: Lema dos quatro círculos com colinearidade

■

### Demonstração do Teorema 3.3.1:

Faremos a demonstração por indução sobre o número de retas e, em particular para os casos (i) a (iv) a fim de fixar e compreender a notação empregada. Além disso, esses casos já dão o primeiro passo da indução. Em seguida, será feita a demonstração para o caso de  $2n + 2$  e  $2n + 3$  retas.

Se  $n = 2$  temos, temos os casos (ii) e (iii).

#### Caso (i)

O primeiro caso é fato conhecido da geometria euclidiana, que dados três pontos existe um único círculo que os contém. Então nada há para provar. Mas comecemos então a definir a notação que utilizaremos.

Dadas três retas  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , que se intersectam duas a duas e não há três passando pelo mesmo ponto, encontramos então três pontos, a saber  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  e  $P_{23}$ . O círculo que passa pelos três pontos será denotado por  $C_{123}$  (ver Figura 3.22).

#### Caso (ii)

Dadas quatro retas  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ , que se intersectam duas a duas e não há três passando pelo mesmo ponto, definimos  $\binom{4}{2} = 6$  pontos de interseção, a saber,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{14}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{24}$ ,  $P_{34}$ . Para encontrar o número de círculos formados não podemos fazer uma combinação  $\binom{6}{3}$ , visto que não estamos interessados em quaisquer círculos. Observe que só nos interessam os círculos circunscritos a triângulos formados pelos pontos de interseção das retas. Assim

sendo, os círculos serão aqueles que contêm pontos do tipo  $P_{ij}$ ,  $P_{ik}$  e  $P_{jk}$ , em que os índices variam de 1 a 4 e  $i \neq j$ ,  $i \neq k$  e  $j \neq k$  (ver Figura 3.23).

Por exemplo, os pontos  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  e  $P_{23}$ , estão sobre o círculo  $C_{123}$ , ou seja, os pontos  $P_{ij}$ ,  $P_{ik}$  e  $P_{jk}$  determinam o círculo  $C_{ijk}$ . Observe ainda que a ordem dos índices é indiferente. Construimos então quatro círculos, a saber,  $C_{123}$ ,  $C_{124}$ ,  $C_{134}$  e  $C_{234}$ . Como já provamos no Teorema 3.1.4, eles se intersectam num único ponto, que denotaremos por  $P_{1234}$ .

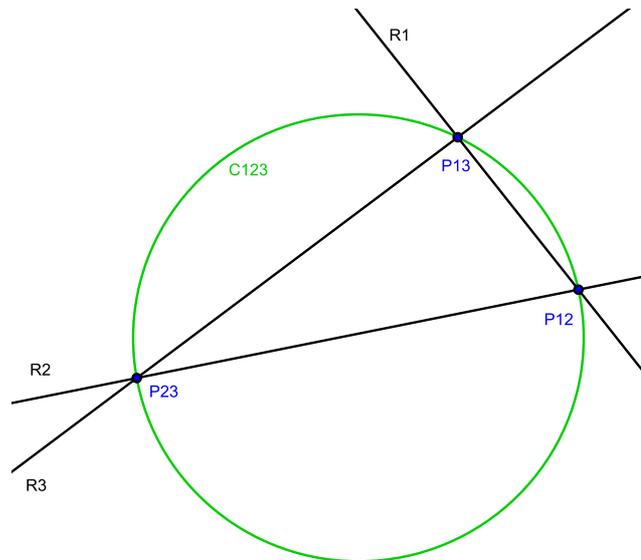


Figura 3.22: Caso de três retas

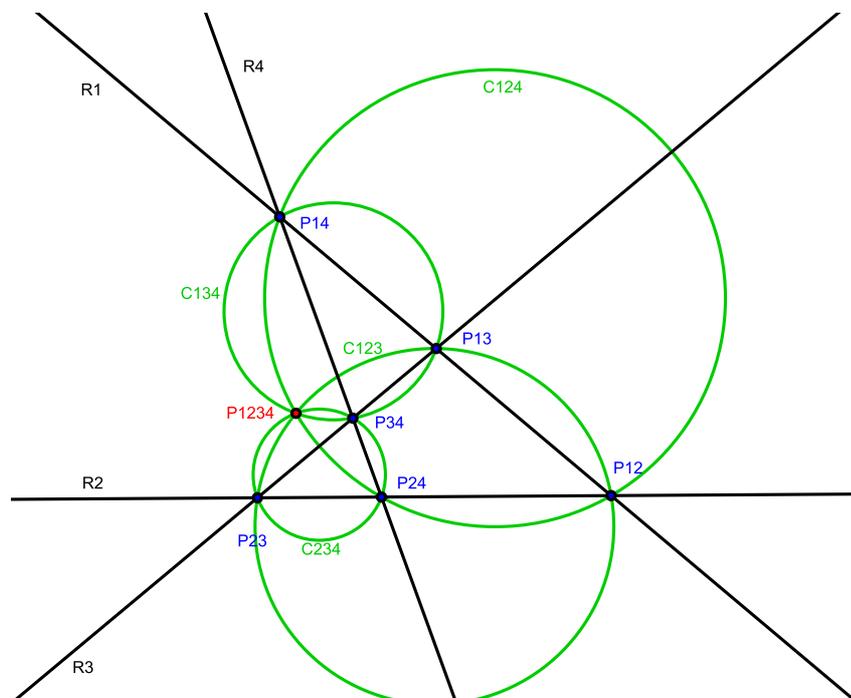


Figura 3.23: Caso de quatro retas

### Caso (iii)

Dadas cinco retas  $R_1, R_2, R_3, R_4$  e  $R_5$ , que se intersectam duas a duas e não há três passando pelo mesmo ponto, definimos  $\binom{5}{2} = 10$  pontos de interseção, a saber,  $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{23}, P_{24}, P_{25}, P_{34}, P_{35}$  e  $P_{45}$ . Vimos no caso anterior que os círculos serão aqueles que contém pontos do tipo  $P_{ij}, P_{ik}$  e  $P_{jk}$ , em que os índices variam de 1 a 5 e  $i \neq j, i \neq k$  e  $j \neq k$  (ver Figura 3.22). Portanto, queremos escolher 3 índices num conjunto de 5 índices, logo há  $\binom{5}{3} = 10$  círculos, a saber,  $C_{123}, C_{124}, C_{125}, C_{134}, C_{135}, C_{145}, C_{234}, C_{235}, C_{245}$  e  $C_{345}$ .

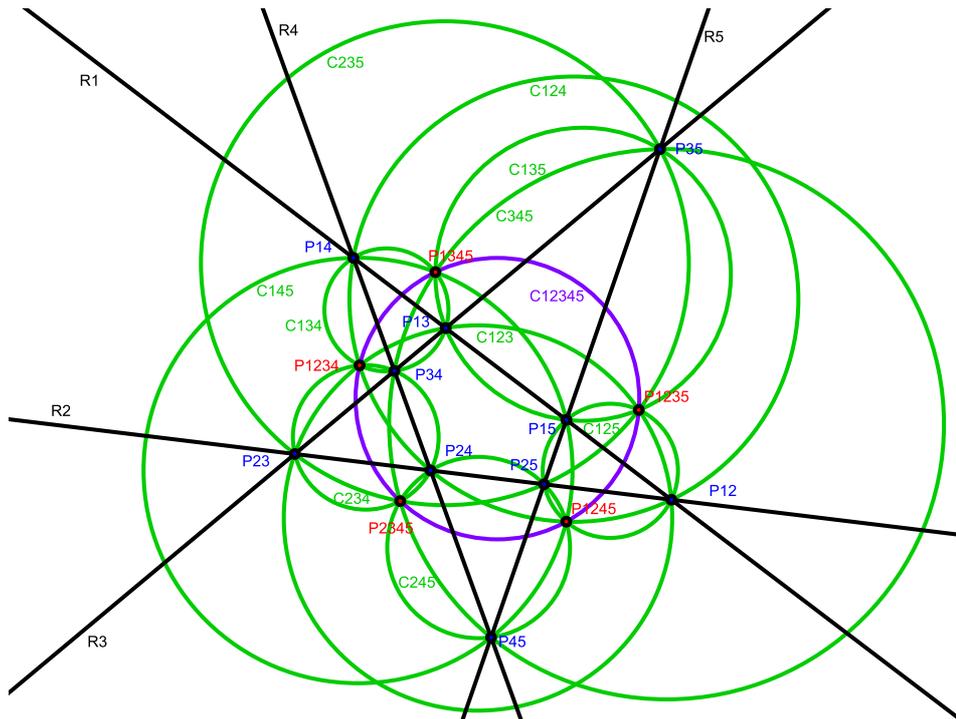


Figura 3.24: Caso de cinco retas

Pelo caso anterior, sabemos que quatro círculos associados a quatro retas se intersectam num ponto, encontrando assim, cinco pontos  $P_{1234}, P_{1235}, P_{1245}, P_{1345}$  e  $P_{2345}$ . Note que para saber quantos pontos são determinados nesse momento, estamos tomando 4 índices de 4, ou seja,  $\binom{5}{4} = 5$ .

Finalmente, pelo Teorema 3.1.5, sabemos que esses cinco pontos estão sobre um círculo  $C_{12345}$ .

Vejamos o mesmo caso com a ideia de Lebesgue.

Considere os círculos  $C_{123}, C_{134}, C_{145}$  e  $C_{125}$ . Fazendo as interseções temos:  $C_{123} \cap C_{134} = \{P_{13}, P_{1234}\}$ ,  $C_{134} \cap C_{145} = \{P_{14}, P_{1345}\}$ ,  $C_{145} \cap C_{125} = \{P_{15}, P_{1245}\}$  e  $C_{125} \cap C_{123} = \{P_{12}, P_{1235}\}$ . Como  $P_{13}, P_{14}, P_{15}$  e  $P_{12}$ , estão sobre a reta  $R_1$ , pelo Lema 3.3.2, segue que os pontos  $P_{1234}, P_{1345}, P_{1245}$  e  $P_{1235}$  estão sobre um círculo.

Nesse caso fizemos os pontos estarem sobre a reta  $R_1$ . Fazemos agora com que eles estejam sobre  $R_2$ . Para isso, tomemos os círculos  $C_{123}$ ,  $C_{125}$ ,  $C_{245}$  e  $C_{234}$ . Fazendo as interseções temos:  $C_{123} \cap C_{125} = \{P_{12}, P_{1235}\}$ ,  $C_{125} \cap C_{245} = \{P_{25}, P_{1245}\}$ ,  $C_{245} \cap C_{234} = \{P_{24}, P_{2345}\}$  e  $C_{234} \cap C_{123} = \{P_{23}, P_{1234}\}$ . Como  $P_{12}$ ,  $P_{25}$ ,  $P_{24}$  e  $P_{23}$ , estão sobre a reta  $R_2$ , pelo Lema 3.3.2, segue que os pontos  $P_{1235}$ ,  $P_{1245}$ ,  $P_{2345}$  e  $P_{1234}$  estão sobre um círculo.

No entanto, os dois círculos encontrado possuem três pontos em comum, ou seja, são coincidentes e, conseqüentemente, é o círculo  $C_{12345}$ .

### Caso (iv)

Dadas seis retas, que se intersectam duas a duas e não há três passando pelo mesmo ponto, vamos efetuar seis passos, sendo que o primeiro deles é a definição das próprias retas, associando-as a  $R_i$ , com  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

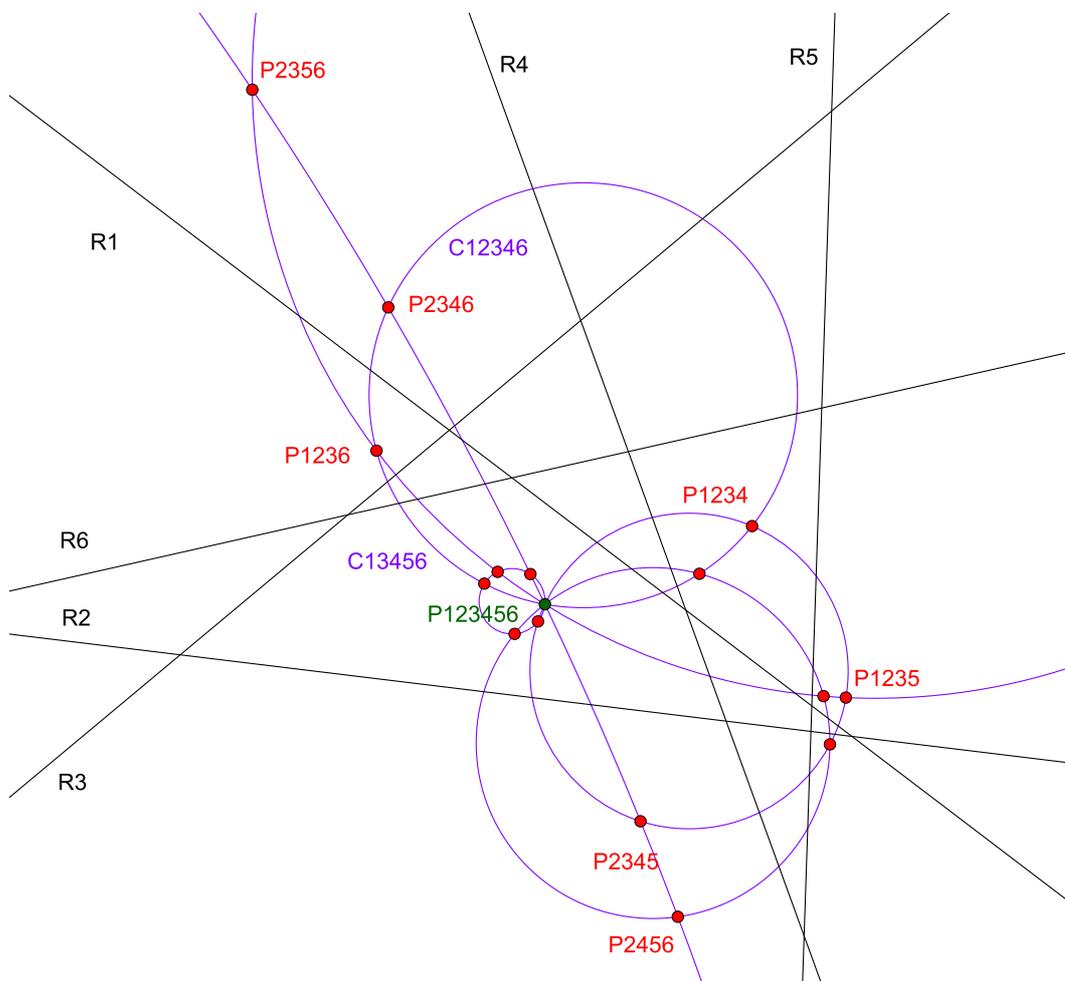


Figura 3.25: Caso de seis retas

No segundo passo determinamos os pontos de interseção entre essas retas em que  $\{P_{ij}\} = R_i \cap R_j$  com  $i \neq j$  e  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . O total de pontos será dado por  $\binom{6}{2} = 15$ .

O terceiro passo consiste em encontrar os círculos  $C_{ijk}$  que contém os pontos  $P_{ij}$ ,  $P_{ik}$  e  $P_{jk}$ . Para saber o número de círculos assim formados, vemos as possibilidades de escolher 3 índices distintos num conjunto de 6 algarismos, desconsiderando a ordem, ou seja,  $\binom{6}{3} = 20$ .

No quarto passo, utilizamos o caso (ii) para encontrar os pontos determinados por 4 círculos daqueles obtidos no passo anterior. Obtemos então  $\binom{6}{4} = 15$  pontos do tipo  $\{P_{ijkl}\} = C_{ijk} \cap C_{ijl} \cap C_{ikl} \cap C_{jkl}$ , em que  $i, j, k$  e  $l$  são todos distintos são valores de 1 a 6.

O quinto passo lança mão do caso (iii), em que cinco dos pontos do passo anterior estão sobre um círculo  $C_{ijklm}$ . Há então  $\binom{6}{5} = 6$  círculos assim determinados.

Queremos provar que estes seis círculos se intersectam no ponto  $P_{123456}$ .

Vamos fixar os índices 5 e 6.

Considere os círculos  $C_{56123}$ ,  $C_{563}$ ,  $C_{564}$  e  $C_{56124}$ . Logo, temos as seguintes interseções:  $C_{56123} \cap C_{563} = \{P_{1356}, P_{2356}\}$ ,  $C_{563} \cap C_{564} = \{P_{56}, P_{3456}\}$ ,  $C_{564} \cap C_{56124} = \{P_{1456}, P_{2456}\}$  e  $C_{56124} \cap C_{56123} = \{P_{1256}, A\}$ , em que  $A$  é um ponto que ainda desconhecemos. Pelo caso anterior temos que  $P_{1356}$ ,  $P_{56}$ ,  $P_{1456}$  e  $P_{1256}$  estão sobre o círculo  $C_{156}$ , e daí, pelo Lema 3.3.1, segue que os pontos  $P_{2356}$ ,  $P_{3456}$ ,  $P_{2456}$  e  $A$  estão sobre um círculo. Contudo,  $C_{23456}$  contém estes três pontos, ou seja,  $A \in C_{23456}$ .

Por outro lado, temos ainda que  $P_{2356}$ ,  $P_{56}$ ,  $P_{2456}$  e  $P_{1256}$  estão sobre o círculo  $C_{256}$ , donde segue que  $P_{1356}$ ,  $P_{3456}$ ,  $P_{1456}$  e  $A$  estão sobre um círculo. Entretanto,  $C_{13456}$  contém estes três pontos, ou seja,  $A \in C_{13456}$ .

Ainda pela definição de  $A$ , temos que  $A \in C_{12356}$  e  $A \in C_{12456}$ .

Agora, fixemos os índices 1 e 2.

Considere os círculos  $C_{12356}$ ,  $C_{123}$ ,  $C_{124}$  e  $C_{12456}$ . Logo, temos as seguintes interseções:  $C_{12356} \cap C_{123} = \{P_{1235}, P_{1236}\}$ ,  $C_{123} \cap C_{124} = \{P_{12}, P_{1234}\}$ ,  $C_{124} \cap C_{12456} = \{P_{1245}, P_{1246}\}$  e  $C_{12456} \cap C_{12356} = \{P_{1256}, A\}$ . Analogamente, temos que  $P_{1235}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{1245}$  e  $P_{1256}$  estão sobre o círculo  $C_{125}$ , e daí, pelo Lema 3.3.1, segue que os pontos  $P_{1236}$ ,  $P_{1234}$ ,  $P_{1246}$  e  $A$  estão sobre um círculo. Contudo,  $C_{12346}$  contém estes três pontos, ou seja,  $A \in C_{12346}$ .

Por outro lado, temos ainda que  $P_{1236}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{1246}$  e  $P_{1256}$  estão sobre o círculo  $C_{126}$ , donde segue que  $P_{1235}$ ,  $P_{1234}$ ,  $P_{1245}$  e  $A$  estão sobre um círculo. Entretanto,  $C_{12345}$  contém estes três pontos, ou seja,  $A \in C_{12345}$ .

Provamos então que  $A$  é um ponto comum aos seis círculos de interesse, ou seja,  $A = P_{123456}$ .

### Caso de 7 retas

Fixemos os índices 1, 6 e 7. Colocaremos no início da sequência para facilitar a visualização.

Considere os círculos  $C_{67123}$ ,  $C_{67134}$ ,  $C_{67145}$  e  $C_{67125}$ . Fazendo as interseções temos:  $C_{67123} \cap C_{67134} = \{P_{1367}, P_{123467}\}$ ,  $C_{67134} \cap C_{67145} = \{P_{1467}, P_{134567}\}$ ,  $C_{67145} \cap C_{67125} = \{P_{1567}, P_{124567}\}$  e  $C_{67125} \cap C_{67123} = \{P_{1267}, P_{123567}\}$ . Como  $P_{1367}$ ,  $P_{1467}$ ,  $P_{1567}$  e  $P_{1267}$ , estão sobre o círculo  $C_{167}$ , pelo Lema 3.3.1, segue que os pontos  $P_{123467}$ ,  $P_{134567}$ ,  $P_{124567}$  e  $P_{123567}$  estão sobre um círculo.

Fixando os índices 2, 6 e 7.

Consideremos os círculos  $C_{67213}$ ,  $C_{67215}$ ,  $C_{67245}$  e  $C_{67234}$ . Fazendo as interseções temos:  $C_{67213} \cap C_{67215} = \{P_{1267}, P_{123567}\}$ ,  $C_{67215} \cap C_{67245} = \{P_{2567}, P_{124567}\}$ ,  $C_{67245} \cap C_{67234} = \{P_{2467}, P_{234567}\}$  e  $C_{67234} \cap C_{67123} = \{P_{2367}, P_{123467}\}$ . Como  $P_{1267}$ ,  $P_{2567}$ ,  $P_{2467}$  e  $P_{2367}$ , estão sobre o círculo  $C_{267}$ , 3.3.1, segue que os pontos  $P_{123567}$ ,  $P_{124567}$ ,  $P_{234567}$  e  $P_{123467}$  estão sobre um círculo.

Fixemos agora os índices 1, 2 e 6.

Considere os círculos  $C_{12637}$ ,  $C_{12634}$ ,  $C_{12645}$  e  $C_{12657}$ . Fazendo as interseções temos:  $C_{12637} \cap C_{12634} = \{P_{1236}, P_{123467}\}$ ,  $C_{12634} \cap C_{12645} = \{P_{1246}, P_{123456}\}$ ,  $C_{12645} \cap C_{12657} = \{P_{1256}, P_{124567}\}$  e  $C_{12657} \cap C_{12634} = \{P_{1267}, P_{123567}\}$ . Como  $P_{1236}$ ,  $P_{1246}$ ,  $P_{1256}$  e  $P_{1267}$ , estão sobre o círculo  $C_{126}$ , pelo Lema 3.3.1, segue que os pontos  $P_{123467}$ ,  $P_{123456}$ ,  $P_{124567}$  e  $P_{123567}$  estão sobre um círculo.

Finalmente, fixamos os índices 1, 2 e 7.

Considere os círculos  $C_{12736}$ ,  $C_{12734}$ ,  $C_{12745}$  e  $C_{12756}$ . Fazendo as interseções temos:  $C_{12736} \cap C_{12734} = \{P_{1237}, P_{123467}\}$ ,  $C_{12734} \cap C_{12745} = \{P_{1247}, P_{123457}\}$ ,  $C_{12745} \cap C_{12756} = \{P_{1257}, P_{124567}\}$  e  $C_{12756} \cap C_{12734} = \{P_{1267}, P_{123567}\}$ . Como  $P_{1237}$ ,  $P_{1247}$ ,  $P_{1257}$  e  $P_{1267}$ , estão sobre o círculo  $C_{127}$ , pelo Lema 3.3.1, segue que os pontos  $P_{123467}$ ,  $P_{123457}$ ,  $P_{124567}$  e  $P_{123567}$  estão sobre um círculo.

Observe que os quatro círculos formados são coincidentes. Portanto os pontos  $P_{123456}$ ,  $P_{123457}$ ,  $P_{123467}$ ,  $P_{123567}$ ,  $P_{124567}$ ,  $P_{134567}$  e  $P_{234567}$  estão sobre um círculo, a saber,  $C_{1234567}$ .

### Hipótese de indução:

Suponha que para  $n \geq 2$  temos que:

- Dadas  $2n$  retas, que se intersectam duas a duas e não há três passando pelo mesmo ponto, então são determinados  $2n$  círculos associados a essas retas, que se cruzam num ponto  $P_{12\dots(2n)}$ ;
- Dadas  $2n+1$  retas, que se intersectam duas a duas e não há três passando pelo mesmo ponto, então são determinados  $2n+1$  pontos que estão sobre um círculo  $C_{12\dots(2n+1)}$ .

### Argumento indutivo

Queremos provar que as afirmações valem para  $n + 1$ , ou seja, devemos considerar dois casos, a saber, para  $2n + 2$  e  $2n + 3$  retas.

Com o objetivo de simplificar a notação, chamaremos de  $P_i^*$  o ponto que não possui o índice  $i$ , o seja,  $P_{12\dots(i-1)(i+1)\dots n}$ , quando não houver dúvidas sobre o valor de  $n$  (o mesmo para os círculos).

Considere  $2n + 2$  retas que se intersectam duas a duas e não há três passando pelo mesmo ponto. Queremos provar que são determinados  $2n + 2$  círculos associados a essas retas, que se cruzam num ponto  $P_{12\dots(2n+2)}$ .

Para cada  $i = 3, 4, \dots, 2n, 2n + 1$ , considere os círculos  $C_2^*, C_{2i(i+1)}^*$ ,  $C_{1i(i+1)}^*$  e  $C_1^*$ . Então,

$$C_2^* \cap C_{2i(i+1)}^* = \{P_{2i}^*, P_{2(i+1)}^*\}$$

$$C_{2i(i+1)}^* \cap C_{1i(i+1)}^* = \{P_{12i(i+1)}^*, P_{i(i+1)}^*\}$$

$$C_{1i(i+1)}^* \cap C_1^* = \{P_{1i}^*, P_{1(i+1)}^*\}$$

$$C_1^* \cap C_2^* = \{P_{12}^*, A\}$$

Observe que salvo  $A$ , os pontos de interseção possuem  $2n$  ou  $2n - 2$  índices. Pela hipótese de indução, temos que eles estão sobre um círculo. Os pontos  $P_{2i}^*, P_{12i(i+1)}^*, P_{1i}^*$  e  $P_{12}^*$  estão sobre  $C_{12i}^*$ . Logo, pelo Lema 3.3.1, os pontos  $P_{2(i+1)}^*, P_{i(i+1)}^*, P_{1(i+1)}^*$  e  $A$  estão sobre um círculo. No entanto,  $C_{i+1}^*$  contém estes três pontos, ou seja,  $A \in C_{i+1}^*$ .

Por outro lado, os pontos  $P_{2(i+1)}^*, P_{12i(i+1)}^*, P_{1(i+1)}^*$  e  $P_{12}^*$  estão sobre  $C_{12(i+1)}^*$ . Logo, pelo Lema 3.3.1, os pontos  $P_{2i}^*, P_{i(i+1)}^*, P_{1i}^*$  e  $A$  estão sobre um círculo. Contudo,  $C_i^*$  contém estes três pontos, ou seja,  $A \in C_i^*$ .

Por definição de  $A$  temos que  $A \in C_1^*$  e  $A \in C_2^*$ . Portanto, provamos que  $A \in C_i^*$  para  $i = 1, 2, \dots, 2n + 1, 2n + 2$ . Ou seja, concluímos que os  $2n + 2$  círculos formados se cruzam no mesmo ponto  $A = P_{12\dots(2n+2)}$ .

Considere  $2n + 3$  retas que se intersectam duas a duas e não há três passando pelo mesmo ponto. Queremos provar que são determinados  $2n + 3$  pontos associados a essas retas, que estão sobre um círculo  $C_{12\dots(2n+3)}$ .

Para  $i = 1, 2, 3, \dots, 2n$ , fixemos os índices  $1, 2, \dots, i - 1, i + 4, \dots, 2n + 2$  e  $2n + 3$ ; e consideremos os círculos  $C_{(i+2)(i+3)}^*, C_{i(i+3)}^*, C_{i(i+1)}^*$  e  $C_{(i+1)(i+2)}^*$ . Então,

$$C_{(i+2)(i+3)}^* \cap C_{i(i+3)}^* = \{P_{i(i+2)(i+3)}^*, P_{i+3}^*\}$$

$$C_{i(i+3)}^* \cap C_{i(i+1)}^* = \{P_{i(i+1)(i+3)}^*, P_i^*\}$$

$$C_{i(i+1)}^* \cap C_{(i+1)(i+2)}^* = \{P_{i(i+1)(i+2)}^*, P_{i+1}^*\}$$

$$C_{(i+1)(i+2)}^* \cap C_{(i+2)(i+3)}^* = \{P_{(i+1)(i+2)(i+3)}^*, P_{i+2}^*\}$$

Observe que o primeiro ponto de cada interseção possui  $2n$  índices. Logo, pela hipótese de indução, os quatro pontos estão sobre um círculo. Daí e pelo Lema 3.3.1, segue que os outros pontos  $P_i^*$ ,  $P_{i+1}^*$ ,  $P_{i+2}^*$  e  $P_{i+3}^*$  também estão sobre um círculo, para  $i = 1, 2, 3, \dots, 2n$ .

Note ainda que todos os círculos encontrados são coincidentes, visto que os círculos encontrados para  $i = k$  e  $i = k + 1$  possuem três pontos em comum. Portanto, os  $2n + 3$  pontos  $P_i^*$  estão sobre um círculo, a saber,  $C_{12\dots(2n+3)}$ .

■

## 4

### O uso do software GeoGebra na compreensão dos Teoremas de Miquel

A demonstração em geometria pode ser muito difícil quando a construção não é factível ou, apesar de ser, demanda um gasto muito grande de tempo e energia. Além disso, a falta de maturidade dos alunos em muitos conteúdos provoca, geralmente, uma tendência à dependência das figuras para conjecturar e criar estratégias. Nesse ponto, é “consenso entre educadores matemáticos que o uso do computador no ensino de geometria pode contribuir para a visualização geométrica” (ALVES; SOARES, 2003), ou seja, pode enriquecer a experiência intuitiva do aluno. Outro fator importante sobre o uso de software é mencionado por Alves:

“Através dos recursos de animação de alguns softwares geométricos, o aluno pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas, além de modificar algumas de suas características. Há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossível com as tecnologias tradicionais (papel e lápis e quadro e giz, por exemplo) e que se tornam facilmente exequíveis com o uso do computador.” (ALVES; SOARES, 2003)

Naturalmente, devemos levar em consideração que o uso do computador deve ser um mediador entre o ataque ao problema e a formalização de conceitos e resultados, assim como suas demonstrações. Faz-se necessário a atuação contínua do professor no sentido de orientar os alunos na direção da formalização, pois este pode se dar por convencido apenas com a visualização de uma conjectura.

Neste capítulo, mostramos uma proposta para desenvolver os teoremas de Miquel, discutidos no capítulo anterior, assim como a versão de Clifford, utilizando o software de geometria dinâmica conhecido por GeoGebra. Alguns desses teoremas são facilmente construídos com régua e compasso, no entanto, a falta de precisão dessas construções pode ser um fator determinante no processo intuitivo de conjecturar. Assim, a precisão do software nos garante uma visualização completa dos resultados. Outros teoremas possuem processos demasiado longos, mesmo com o uso do software, e ainda estão relacionados a cônicas que sabemos não ter construção com régua e compasso (a menos do círculo).

Dessa forma, podemos dizer que as atividades propostas visam levar ao aluno, meios de criar conjecturas sobre os teoremas de Miquel, através da visualização de construções pertinentes e seu processo dinâmico, para

que posteriormente os resultados sejam formalmente fixados através de suas demonstrações.

O trabalho consiste em cinco atividades que seguem a linha de pensamento de Miquel e um crescimento linear de dificuldade, além de acrescentar em cada construção novos elementos.

É necessário que o aluno tenha noções de Geometria Euclidiana, no que diz respeito a reta, círculo, triângulo e cônicas, em particular a parábola. Alguns resultados e propriedades serão utilizados supondo a mediação do professor, em caso dos alunos não terem esses conhecimentos. Assim, pode ser aplicada em qualquer disciplina de um curso de graduação em matemática ou engenharia, ou ainda no terceiro ano do Ensino Médio. Nesse caso, o tempo de trabalho deve ser mais lento, visto que se fala muito pouco de cônicas no Ensino Médio e nada sobre suas propriedades geométricas. Contudo, pode-se focar nas propriedades de retas e círculos, caso a turma não tenha qualquer conhecimento sobre parábola. Quanto ao tempo necessário para realizar todas as atividades, dependerá do nível da turma em geometria e seu conhecimento do software (mesmo a atividade levando em consideração total desconhecimento dele) e, portanto, pode variar de três a nove horas.

Em cada uma das atividades, inserimos uma tabela que apresenta o(s) objetivo(s) dessa atividade, os pré-requisitos matemáticos para a compreensão da mesma e o nível de dificuldade, a fim de de ter uma ideia sobre o tempo de execução e a dificuldade para executar todos os procedimentos.

#### 4.1

##### Atividade 1

<b>Objetivo</b>	Deduzir o Teorema 3.2.1
<b>Pré-requisitos</b>	Conceito de reta e círculo
<b>Nível de dificuldade</b>	Baixo

Tabela 4.1: Atividade 1

1. Abra o software GeoGebra.
2. Se os eixos cartesianos estiverem aparentes, com o botão direito do mouse na Janela de Visualização clique na opção “Eixos”.
3. Na barra de ferramentas, clique no ícone “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”.
4. Clique na Janela de Visualização. Aparecerá o centro do círculo que você deseja construir. Afaste o mouse e veja que o círculo se formará e o raio

crescerá até que você clique novamente e defina o ponto que lhe pertence. Você terá formado então um círculo de centro  $A$  tal que  $B$  é um de seus pontos.

5. Com a mesma ferramenta construa outros dois círculos, com centros distintos e diferentes de  $A$ , que contenham o ponto  $B$ . Você terá formado os círculos de centro  $C$  e  $D$ , respectivamente.
6. Na barra de ferramentas, clique no ícone “Ponto” e, em seguida, posicione o mouse sobre o círculo de centro  $A$ , de forma que apareça seu rótulo (uma pequena caixa com o nome do círculo e as informações de construção). Clique sobre o círculo. Aparecerá assim o ponto  $E$ .
7. Utilizando novamente a ferramenta “Ponto”, marque a interseção entre os círculos de centro  $A$  e  $C$  e entre os círculos de centro  $A$  e  $D$ . Aparecerão, respectivamente, os pontos  $F$  e  $G$ .
8. Na barra de ferramentas, clique no ícone “Reta” e, em seguida nos pontos  $E$  e  $F$ . Faça o mesmo com os pontos  $E$  e  $G$ . Serão formadas assim duas retas.

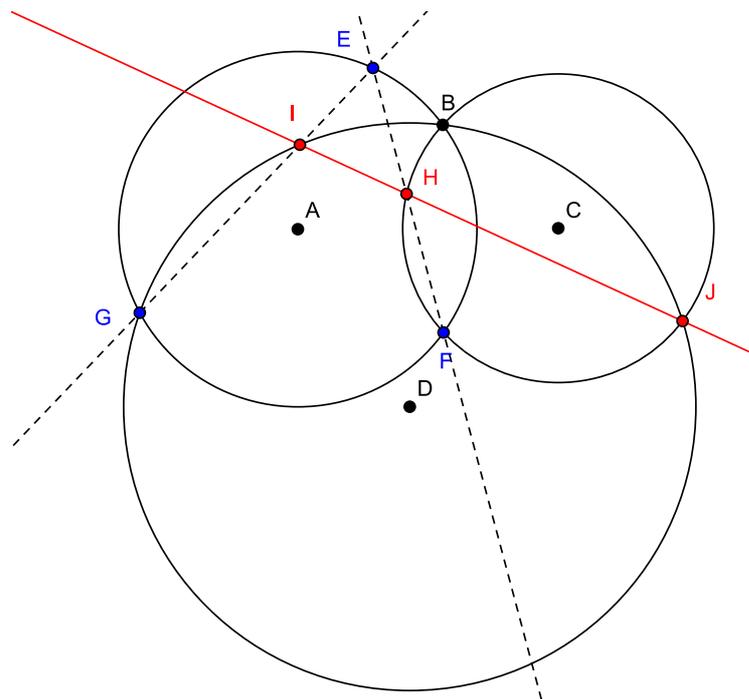


Figura 4.1: Atividade 1

9. Com a ferramenta “Ponto”, marque a interseção entre a reta  $\overleftrightarrow{EF}$  e o círculo de centro  $C$  e a interseção entre a reta  $\overleftrightarrow{EG}$  e o círculo de centro  $D$ . Surgirão, respectivamente, os pontos  $H$  e  $I$ .

10. Utilize mais uma vez a ferramenta “Reta” para construir  $\overleftrightarrow{HI}$ .

Observe sua construção, pois ela deverá estar parecida com a Figura 4.1.

### Mediação do Professor:

- O que podemos observar sobre a reta  $\overleftrightarrow{HI}$  com respeito aos círculos de centro  $C$  e  $D$ ?
- Na barra de ferramentas, clique sobre o ícone “Mover”. Selecione o ponto  $E$  com o mouse e arraste-o. O que podemos conjecturar?
- De fato, a reta  $\overleftrightarrow{HI}$  intersecta os círculo de centro  $C$  e  $D$  no mesmo ponto, ou seja, no ponto de interseção entre eles.
- Este resultado é conhecido como Teorema de Miquel e foi apresentado por Auguste Miquel no ano de 1838 em um artigo intitulado “Théorèmes de Géométrie” no *Journal de mathématiques pures et appliquées*.
- Finalmente o professor enuncia o Teorema 3.1.1.

#### **Teorema 4.1.1 (Teorema de Miquel)**

Considere as circunferências (não há aqui diferença entre círculo e circunferência; e estas serão nomeadas por seus centros)  $A$ ,  $C$  e  $D$  que se cruzam num ponto  $B$ . Tome um ponto  $E$  sobre  $A$  e sejam  $F$  e  $G$  os pontos de interseção de  $A$  com as circunferências  $C$  e  $D$ , respectivamente. Sejam ainda os pontos  $H$  e  $I$  as interseções das retas  $\overleftrightarrow{EF}$  e  $\overleftrightarrow{EG}$  com as circunferências  $C$  e  $D$ , respectivamente. Se  $J$  é a interseção entre as circunferências  $C$  e  $D$ , então os pontos  $H$ ,  $I$  e  $J$  são colineares (MIQUEL, 1838a).

## 4.2

### Atividade 2

<b>Objetivo</b>	Verificar a recíproca do Teorema 3.2.1
<b>Pré-requisitos</b>	Conceito de reta e círculo
<b>Nível de dificuldade</b>	Baixo

Tabela 4.2: Atividade 2

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra.
2. Utilize a ferramenta “Ponto” para criar três pontos não colineares na Janela de Visualização, a saber,  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

3. Utilize a ferramenta “Reta” para traçar as três retas que passam pelos pontos anteriormente determinados. Você terá formado um triângulo  $ABC$ .
4. Novamente, com a ferramenta “Ponto”, marque os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  sobre as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ , respectivamente.
5. Clique sobre a seta do ícone “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” e escolha “Círculo definido por Três Pontos”. Em seguida, selecione os pontos  $A$ ,  $D$  e  $F$ , formando o círculo  $ADF$ . Analogamente, construa os círculos  $BDE$  e  $CEF$ .

Sua construção deve estar da seguinte forma:

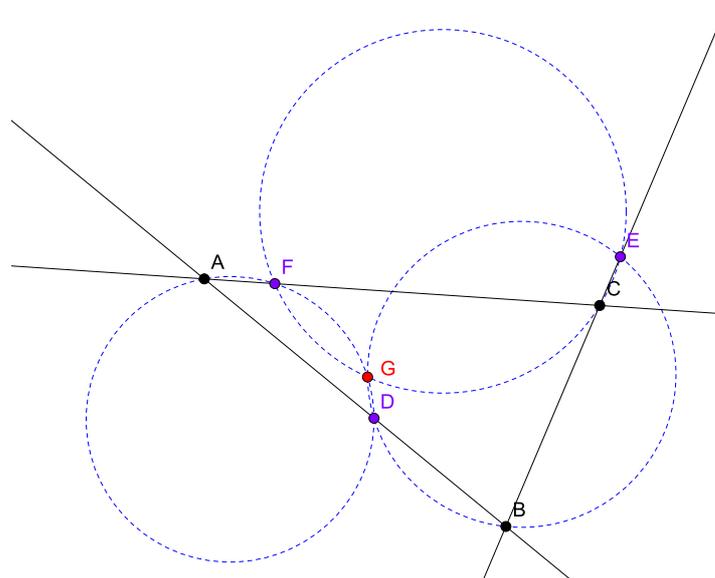


Figura 4.2: Atividade 2

### Mediação do Professor:

- O que podemos observar sobre a interseção das circunferências?
- Utilize a ferramenta “Mover” para arrastar qualquer um dos pontos e observe o que ocorre com a interseção entre as circunferências. O que se pode conjecturar?
- De fato, as três circunferências se cruzam num ponto  $G$  e este resultado aparece como recíproca do Teorema de Miquel no mesmo artigo supracitado.
- Finalmente o professor enuncia a recíproca.

**Teorema 4.2.1 (Recíproca do Teorema de Miquel):**

Considere três pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , sobre as três retas suporte aos lados do triângulo  $ABC$ , não coincidentes com os vértices. Se construirmos um círculo por um dos vértices e pelos dois pontos sobre as retas suporte a este vértice, então os três círculos assim determinados se cruzam num ponto  $G$  (MIQUEL, 1838a).

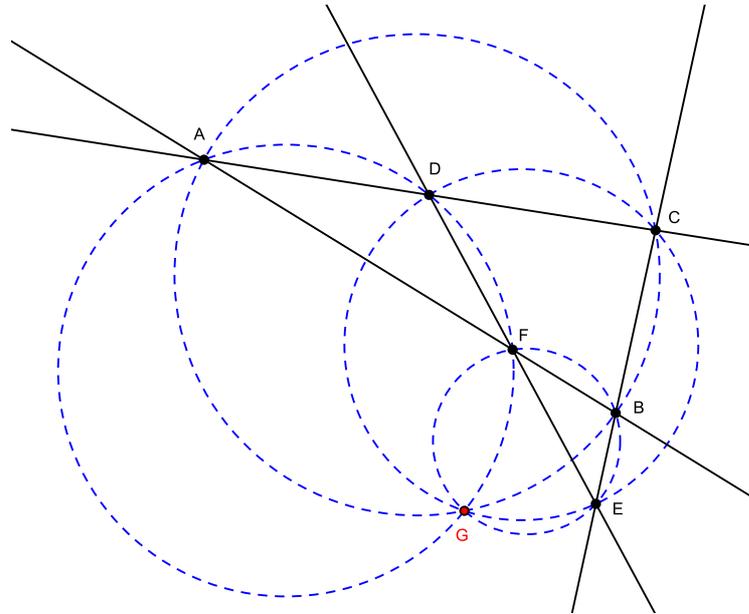


Figura 4.3: Teorema de Miquel para triângulos

Este Teorema ainda pode ser visto de outras formas e para cumprir nosso objetivo maior que se refere à parábola, vamos reescrevê-lo, na forma como aparece em “Geometria” (MUNIZ NETO, 2013), exercício número três da seção 3.5 (ver Figura 4.3).

“Considere, no plano, quatro retas que se intersectam duas a duas e tais que não há três passando por um mesmo ponto. Então, os círculos circunscritos aos quatro triângulos que tais retas determinam passam todos por um mesmo ponto”.

### 4.3

#### Atividade 3

<b>Objetivo</b>	Deduzir o Teorema 3.2.2
<b>Pré-requisitos</b>	Conceito de parábola, foco, diretriz, reta tangente à parábola e círculo
<b>Nível de dificuldade</b>	Médio

Tabela 4.3: Atividade 3

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra.
2. Utilize a ferramenta “Ponto” para criar um ponto  $A$  na Janela de Visualização.
3. Utilize a ferramenta “Reta” para criar uma reta que não contenha o ponto  $A$ . Além disso, vamos torná-la tracejada. Para isso, selecione a reta e com o botão direito clique em “Propriedades”. Abrirá uma caixa de Preferências.
4. Clique no ícone “Estilo” e mude o estilo da linha para o desejado. Em seguida, feche a caixa de Preferências.
5. Clique sobre a seta do ícone “Elipse” e selecione a ferramenta “Parábola”. Clique sobre o ponto  $A$  e a reta existente. Você terá construído uma parábola que contém  $A$  como foco e a reta como diretriz.
6. Esconda os pontos que aparecem na reta. Para isso, selecione um ponto e com o botão direito do mouse, clique em “Exibir Objeto”. Repita o procedimento para o outro ponto.
7. Com a ferramenta “Ponto”, marque quatro pontos distintos sobre a parábola.

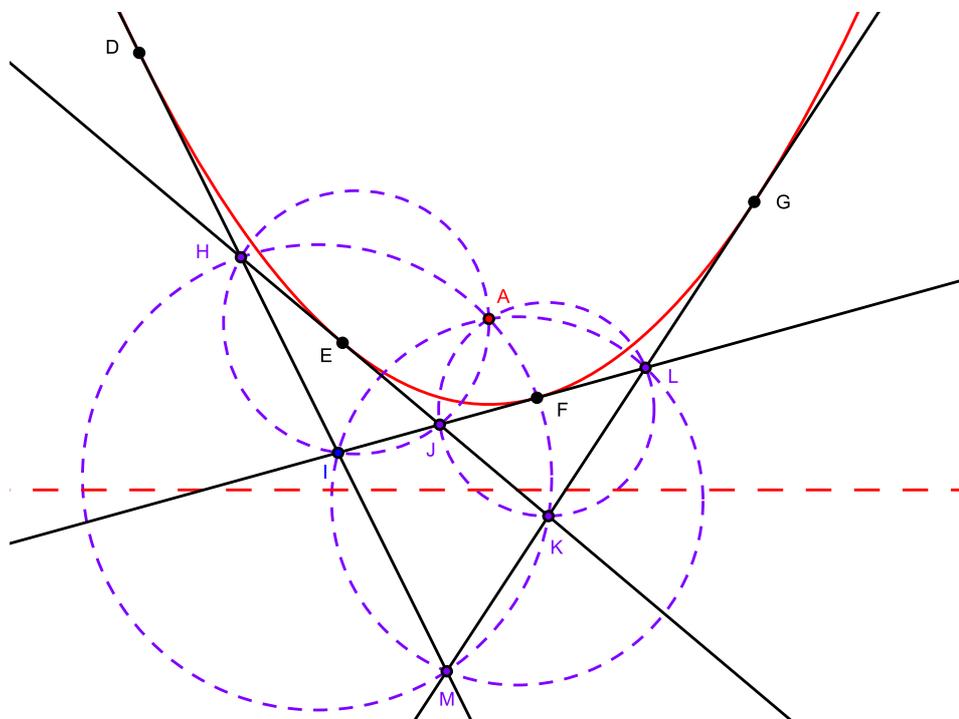


Figura 4.4: Atividade 3

8. Clique sobre a seta do ícone “Reta Perpendicular” e selecione a ferramenta “Reta Tangente”. Selecione um dos pontos que você marcou e a parábola. Repita o procedimento com os outros três pontos. Você terá assim quatro retas tangentes à parábola.
9. As quatro retas tangentes se intersectam formando quatro triângulos. Com a ferramenta “Ponto”, marque os vértices desses triângulos.
10. Utilize a ferramenta “Círculo definido por Três Pontos” para traçar os círculos circunscritos a esses triângulos.

Sua construção deve estar parecida com a Figura 4.4.

### Mediação do Professor:

- O que podemos observar sobre a interseção das circunferências?
- Utilize a ferramenta “Mover” para arrastar qualquer um dos pontos, inclusive o foco  $A$ , e observe o que ocorre com a interseção entre as circunferências. O que se pode conjecturar?
- De fato, as quatro circunferências determinadas pelas retas tangentes à parábola se cruzam num mesmo ponto, a saber, o foco da parábola.
- Finalmente o professor enuncia o Teorema.

#### **Teorema 4.3.1**

*Considere uma parábola de foco  $A$  e diretriz  $d$ , e quatro retas tangentes a essa parábola em quatro pontos distintos. Então,  $A$  é o ponto de interseção entre os círculos circunscritos a cada um dos quatro triângulos formados por essas retas.*

## **4.4**

### **Atividade 4**

<b>Objetivo</b>	Construir uma parábola tangente a quatro retas dadas
<b>Pré-requisitos</b>	Conceito de parábola, foco, diretriz, vértice, eixo focal, reta tangente à parábola, perpendicularidade, ponto médio, círculo e Atividades anteriores
<b>Nível de dificuldade</b>	Alto

Tabela 4.4: Atividade 4

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra.
2. Utilize a ferramenta “Reta” para construir quatro retas que se intersectam duas a duas, tais que não há três passando pelo mesmo ponto. Nomeie as interseções com  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ .
3. Utilize a ferramenta “Círculo por Três Pontos” para construir círculos circunscritos a dois dos triângulos formados pelas retas (note que não é necessário construir os quatro círculos possíveis, pois o Teorema 3 já nos garante a interseção entre todos usando apenas dois),
4. Com a ferramenta “Ponto”, marque a interseção desses círculos, digamos  $G$ , que será o foco de uma parábola, pelo Teorema 4. Esconda os círculos com o botão esquerdo do mouse, utilizando “Exibir Objeto”.
5. Mude a cor do ponto  $G$  para vermelho. Para isso, abra a caixa de Preferências com o botão direito do mouse. Escolha o ícone “Cor” e clique na cor vermelha. Feche a caixa de Preferências.
6. Com a ferramenta “Reta Perpendicular”, trace as perpendiculares às quatro retas iniciais passando por  $G$ . Em seguida, marque cada um dos pés dessas perpendiculares.
7. Trace a reta que passa por dois desses pontos. Observe que são todos colineares. Além disso, essa reta é tangente ao vértice da parábola. Mude sua cor para vermelho e seu estilo para pontilhado. Esconda as retas que passam por  $G$  e os pés das perpendiculares.
8. Trace uma reta por  $G$  perpendicular à reta pontilhada e marque o ponto  $L$ , de interseção entre elas. Este será o vértice da parábola e a reta assim construída, seu eixo de simetria.
9. Clique sobre a seta do ícone “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” e escolha a ferramenta “Compasso”. Selecione os pontos  $G$  e  $L$  para definir a abertura do compasso e o ponto  $L$  como centro. Marque o ponto  $M$  de interseção entre o círculo formado e o eixo de simetria.
10. Clique sobre a seta do ícone “Reta Perpendicular” e escolha a ferramenta “Reta Paralela”. Selecione o ponto  $M$  e a reta pontilhada. A reta assim formada é a diretriz da parábola. Mude sua cor para vermelho. Esconda o ponto  $M$ .

11. Clique sobre a seta do ícone “Elipse” e selecione a ferramenta “Parábola”. Clique sobre o ponto  $G$  e a reta vermelha. Você terá construído uma parábola que contém  $G$  como foco e a reta vermelha como diretriz.

Sua construção deve estar da seguinte forma:

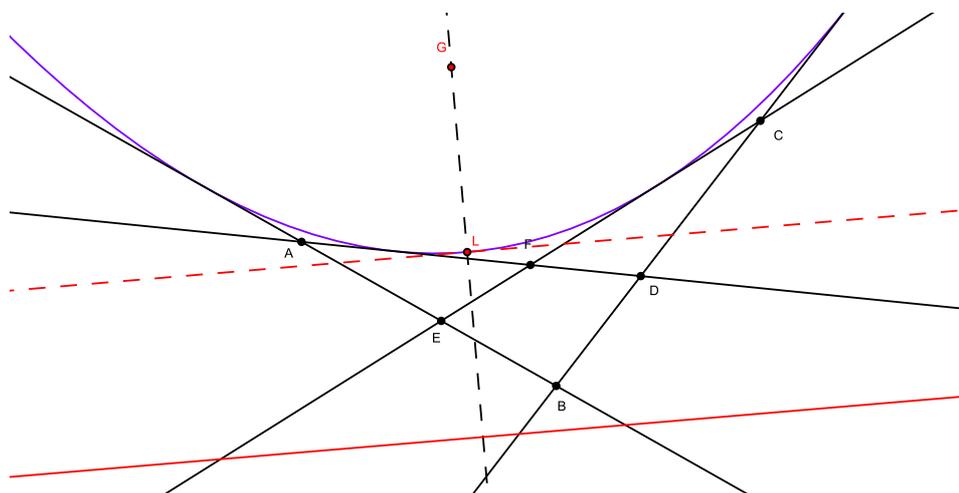


Figura 4.5: Atividade 4

### Mediação do Professor:

Podemos pensar por que a construção da parábola tangente às quatro retas dadas é única. Observe que o Teorema 4.3.1 garante a unicidade do foco e a construção da reta que contém os pés das perpendiculares também é única e isto garante a unicidade da diretriz. Um ponto e uma reta determinam uma única parábola.

## 4.5

### Atividade 5

<b>Objetivo</b>	Deduzir o Teorema 3.2.4
<b>Pré-requisitos</b>	Conceito de parábola, foco, diretriz, vértice, reta tangente à parábola, perpendicularidade, ponto médio e círculo
<b>Nível de dificuldade</b>	Alto

Tabela 4.5: Atividade 5

1. Utilize o mesmo arquivo da Atividade 4 e continue de onde parou.
2. Esconda as retas vermelhas e os eixos de simetria. Também esconda o ponto  $L$ .

3. Trace uma nova reta de forma que não haja duas paralelas nem três concorrentes.
4. Nesse momento, suas retas devem estar nomeadas como  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $n$ . Esconda a reta  $a$  e repita os passos da Atividade 4 para as retas  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $n$ . Você terá um novo ponto, a saber,  $R$ . Temos que  $R$  é foco de uma parábola tangente às retas  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $n$ . Não é preciso construir a parábola, pois estamos interessados somente nos focos. Repita esse processo para as retas  $b$ ,  $c$  e  $d$ , obtendo respectivamente, os pontos  $S$ ,  $T$  e  $U$ .
5. Construa o círculo que contém os pontos  $S$ ,  $T$  e  $U$ .

Sua construção deve ficar assim:

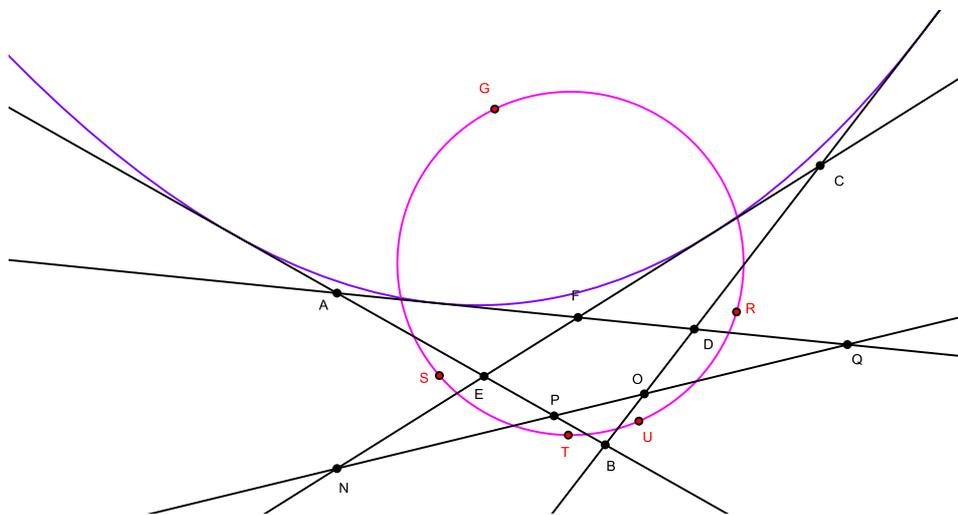


Figura 4.6: Atividade 5

### Mediação do Professor:

- O que podemos observar sobre a relação entre os focos?
- Utilize a ferramenta “Mover” para arrastar qualquer um dos pontos das retas aparentes e observe o que ocorre com os focos (pontos vermelhos). O que se pode conjecturar?
- De fato, os focos das cinco parábolas formadas estão sobre uma mesma circunferência.
- Finalmente o professor enuncia o Teorema.

#### **Teorema 4.5.1**

Seja  $ABCDE$  um pentágono e sejam  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$  e  $J$ , as interseções dos prolongamentos dos seus lados, de forma que se tenham formado os triângulos  $ABJ$ ,  $BCI$ ,  $CDH$ ,  $DEF$  e  $AEG$ . Considere os círculos circunscritos a

esses triângulos. Então os círculos se intersectam dois a dois e os pontos de interseção distintos dos vértices estão sobre uma mesma circunferência.

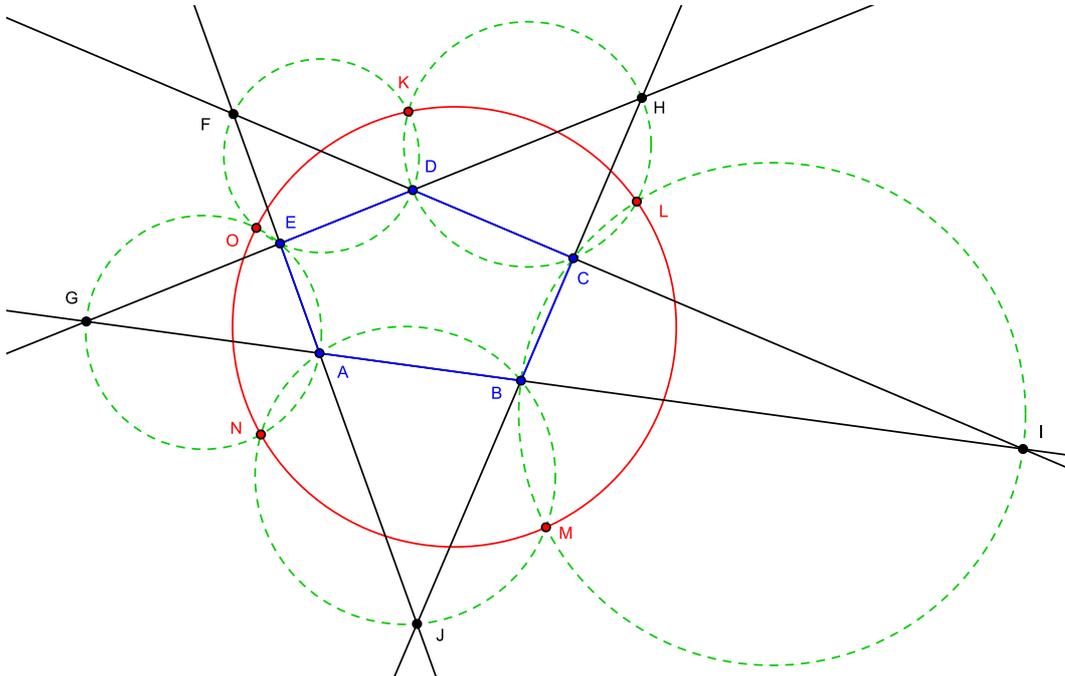


Figura 4.7: Teorema de Miquel para o pentágono

Observe que este Teorema explica perfeitamente o comportamento dos focos das parábolas da Atividade 4, visto que cada ponto de interseção entre dois círculos representa o foco de uma parábola tangente a quatro das retas suporte aos lados do pentágono  $ABCDE$ .

É importante que o professor ressalte que embora a Atividade se refira à parábola, o Teorema mostra que essa propriedade dos focos é na verdade dependente exclusivamente das retas e dos círculos.

Se essas Atividades estiverem sendo efetuadas com alunos de graduação, vale a pena apresentar a generalização desse resultado proposta por Clifford com respeito ao número de retas, da seguinte forma:

- (i) Dadas três retas, existe um círculo que contém as suas interseções.
- (ii) Dadas quatro retas, podemos formar quatro conjuntos de três retas cada. Por (i), cada conjunto possui um círculo associado que contém seus pontos, determinando assim quatro círculos que se cruzam num ponto (Teorema 4.3.1).
- (iii) Dadas cinco retas, podemos formar cinco conjuntos de quatro retas cada. Por (ii), a cada conjunto está associado um ponto, obtendo assim cinco pontos que estão sobre um círculo (Teorema 4.5.1).

- (iv) Dadas seis retas, podemos formar seis conjuntos de cinco retas cada. Por (iii), cada conjunto possui um círculo associado, determinando assim seis círculos que se cruzam num ponto.

E o processo continua, ou seja, se  $n \geq 2$  temos que  $2n$  retas determinam  $2n$  círculos que se cruzam num ponto enquanto com  $2n + 1$  retas obtém-se  $2n + 1$  pontos que estão sobre um círculo.

## 5

### Conclusão e desdobramentos

Embora Miquel não tenha tido a projeção de outros matemáticos da época, este trabalho mostra que ele realmente tinha um grande interesse por geometria, tendo chamado a atenção de outros com maior visibilidade, como foi o caso de Clifford.

Concluimos que mesmo depois de milênios de estudos em geometria euclidiana, sempre podemos encontrar temas relevantes de estudo, como é o caso do teorema de Miquel para o pentágono e a relação direta que ele possui com os focos das parábolas. Também é impressionante a generalização do mesmo, mostrando que muitas vezes um resultado que se aplica a certo número de objetos pode ser estendido para qualquer número deles.

Ainda podemos levantar uma questão importante: por que nunca ouvimos falar sobre isso nenhum dos cursos de geometria da graduação? Como vimos na proposta pedagógica, o GeoGebra fornece as ferramentas necessárias para conjecturar e analisar perfeitamente os teoremas aqui trabalhados e não possui nenhum pré-requisito de matemática avançada. Além disso, os teoremas que tratam exclusivamente de círculos e retas podem ser trabalhados ainda no Ensino Médio, caso haja tempo ou em turmas de aprofundamento. É comum nas escolas que a geometria fique em segundo plano e, por isso, temas como esse nunca são colocados como uma possibilidade. Acredito que seja uma proposta viável, embora não a tenha experimentado na prática.

Uma das frustrações que tive ao fazer este trabalho foi não conseguir demonstrar o teorema utilizando geometria sintética (nos moldes de Clifford) e nem compreender o artigo de Clifford. Por isso, acredito que possa dar continuidade e finalmente ter sucesso nesse desafio. Já tive algumas ideias que não se mostraram suficientes, mas parecem úteis de alguma forma. Então continuarei tentando, para pelo menos escrever um artigo sobre o tema.

## Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, G.S.; SOARES, A.B. **Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae**. Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, p. 275-286, 2003.
- [2] BURTON, D.M. **The History of Mathematics: an Introduction**. Sixth Edition. McGraw-Hill, New York, 2005.
- [3] CLIFFORD, W.K. **Mathematical Papers**. Ed. Robert Tucker, 1882. Reimpresso por Chelsea Publishing Company, New York, 1967.
- [4] CLIFFORD, W.K. **Synthetic Proof of Miquel's Theorem**. In **Mathematical Papers**,. Ed. Robert Tucker, 1882. Reimpresso por Chelsea Publishing Company, New York, p.38-55, 1967.
- [5] CHISHOLM, M. **Science and Literature Linked: The Story of William and Lucy Clifford. 1845-1929**. Advances in Applied Clifford Algebras, 19 p.657-671, 2009.
- [6] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. Coleção Profmat, 11. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2013.
- [7] EVES, H. **An Introduction to the History of Mathematics**. Third Edition. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969.
- [8] GREGERSEN, E. **The Brittanica Guide to the History of Mathematics**. Brittanica Educational Publishing, New York, 2011.
- [9] KATZ, V.J. **A History of Mathematics: an Introduction**. Second Edition. Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 1998.
- [10] KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. Vol. I. Oxford University Press, Ney York, 1972.
- [11] LEBESGUE, H. **Sur deus théorèmes de Miquel et de Clifford**. Nouvelles annales de mathématiques, vol. 4, número 16, p. 481-495, 1926.
- [12] MUNIZ NETO, A.C. **Geometria**. Coleção Profmat, 9. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2013.

- [13] MACFERLANE, A. **Lectures on Ten Mathematicians of the Nineteenth Century**. Mathematical Monographs, No. 17. Ed. M. Merriman e R. Woodward, 1916.
- [14] MIQUEL, A. **Sur quelques questions relatives à la Théorie des courbes**. Journal de mathématiques pures et appliquées, série 1, tomo 3, p. 202-208, 1838.
- [15] MIQUEL, A. **Théorèmes de Géométrie**. Journal de mathématiques pures et appliquées, vol. 3, p. 485-487, 1838. 3.1.1
- [16] MIQUEL, A. **Théorèmes sur les Intersections des cercles et des sphères**. Journal de mathématiques pures et appliquées, vol. 3, p. 517-522, 1838.
- [17] MIQUEL, A. **Mémoire de géométrie**. Journal de mathématiques pures et appliquées, vol. 9, p. 20-27, 1844.
- [18] MIQUEL, A. **Mémoire de Géométrie (deuxième partie)**. Journal de mathématiques pures et appliquées, vol. 10, p. 347-350, 1845.
- [19] MIQUEL, A. **Mémoire de Géométrie (troisième partie)**. Journal de mathématiques pures et appliquées, vol. 11, p. 65-75, 1846.
- [20] ROONEY, J. **William Kingdom Clifford**. M. Cecarelli. Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science, Springer, Holanda, p. 79-116, 2007.
- [21] SIMMONS, G. **Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2**. McGraw-Hill, São Paulo, 1987.
- [22] <http://www.numericana.com/fame/bio.htm>, acessado em 05/02/2016. 2.2