



**Clauson Carvalho da Silva**

**Representação Estocástica para Soluções do  
Problema de Dirichlet para Equações  
Diferenciais Parciais Elípticas**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Carlos Tomei

Rio de Janeiro  
Março 2016



**Clauson Carvalho da Silva**

**Representação Estocástica para Soluções do  
Problema de Dirichlet para Equações  
Diferenciais Parciais Elípticas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Carlos Tomei**

Orientador

Departamento de Matemática-PUC-Rio

**Prof. Diogo Manuel Fernandes Bessam**

Co-Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Hugo Alexander de la Cruz Cansino**

Escola de Matemática Aplicada-FGV

**Prof. Ricardo José Alonso Plata**

Departamento de Matemática-PUC-Rio

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador do Centro Técnico Científico  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 18 de março de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Clauson Carvalho da Silva**

Possui graduação em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RIO), Rio de Janeiro, Brasil.

#### Ficha Catalográfica

Carvalho da Silva, Clauson

Representação Estocástica para Soluções do Problema de Dirichlet para Equações Diferenciais Parciais Elípticas/ Clauson Carvalho da Silva; orientador: Carlos Tomei; co-orientador: Prof. Diogo Manuel Fernandes Bessam. — Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2016.

v., 59 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Dissertação 2. Problema de Dirichlet  
3. Equações Diferenciais Parciais Elípticas 4. Difusões de Itô 5. Gerador Infinitesimal 6. Fórmula de Dynkin 7. Representação Estocástica I. Tomei, Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

## Agradecimentos

Agradeço à minha família, aos professores e funcionários do departamento de matemática da PUC-Rio, amigos e ao Oeste.

Agradeço também à banca examinadora por sugestões e melhoramentos no presente documento, ao CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro.

## Resumo

Carvalho da Silva, Clauson; Tomei, Carlos; . **Representação Estocástica para Soluções do Problema de Dirichlet para Equações Diferenciais Parciais Elípticas**. Rio de Janeiro, 2016. 59p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Como motivação, apresentaremos alguns problemas que ilustram a conexão entre a teoria da probabilidade e algumas equações diferenciais parciais. Suas soluções mesclam os dois assuntos e provocam a suspeita de que alguns processos estocásticos e operadores diferenciais caminham juntos. Em seguida, exibiremos a teoria das difusões de Itô. Mostraremos algumas de suas características, como a propriedade de Markov e cada um destes processos possuirá o que chamaremos de gerador infinitesimal da difusão. Este será um operador diferencial de segunda ordem cujo estudo detalhado revela características do processo. Apresentaremos também a fórmula de Dynkin. Com essas ferramentas probabilísticas, encontraremos uma representação estocástica para a solução do problema de Dirichlet para operadores diferenciais elípticos, generalizando as soluções dos problemas inicialmente propostos.

## Palavras-chave

Problema de Dirichlet; Equações Diferenciais Parciais Elípticas; Difusões de Itô; Gerador Infinitesimal; Fórmula de Dynkin; Representação Estocástica.

## Abstract

Carvalho da Silva, Clauson; Tomei, Carlos (Advisor); . **Stochastic Representation for Solutions of the Dirichlet Problem for Elliptic Partial Differential Equations** . Rio de Janeiro, 2016. 59p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Firstly, for motivation purposes, we briefly present a few problems mixing notions of probability theory and of partial differential equations (PDE). In discussing the solution to such problems it will become apparent that some stochastic process and differential equations walk together. Next, we introduce a class of stochastic processes called the Ito diffusions, and some of its features such as the Markov property. Each such process has an associated linear operator – the, so called, infinitesimal generator. This operator acts as a second-order differential operator on smooth functions, and controls the LOCAL behavior of these diffusions. We discuss these features together with Dynkin's formula – a convenient relation derived from the infinitesimal generator, which informs us about the AVERAGE behavior of the diffusion. Finally, we apply these probabilistic tools to find a formula for the solution of the Dirichlet problem for a somewhat general linear elliptic second order PDE. This formula connects the solution of the PDE to the aggregated/average behavior and associated (Ito) diffusion. This type of stochastic representation generalizes the solution method of the problems firstly discussed.

## Keywords

Dirichlet Problem; Elliptic partial differential equations; Itô Diffusions; Infinitesimal generator of a diffusion; Dynkin's Fórmula; Stochastic Representation.

## Sumário

Lista de Figuras	8
1 Introdução	10
2 Mesclando os tópicos	11
2.1 Um passeio na equação de Laplace	11
2.2 Um passeio na equação de Laplace 2.0	14
2.3 A situação inversa	15
3 Difusões de $It\hat{o}$	19
3.1 Definição	19
3.2 Propriedade de Markov para difusões de $It\hat{o}$	22
3.3 Propriedade do Valor Médio (generalizada)	25
3.4 Gerador de uma difusão de $It\hat{o}$	27
3.5 Fórmula de Dynkin	30
4 O problema de Dirichlet para operadores elípticos	32
4.1 O problema de Dirichlet e resultados auxiliares	32
4.2 Representação estocástica da solução do problema de Dirichlet	34
A Esperança Condicional	37
B Filtros, martingais e tempos de parada	39
C Passeio aleatório	43
D O movimento Browniano	47
E Integral de $It\hat{o}$ e EDE's	50

## Lista de Figuras

2.1	Exemplo de $\bar{A} \in \mathbb{Z}^2$ .	12
2.2	Realização do movimento Browniano no retângulo.	15
2.3	Discretização do retângulo R.	16
3.1	Realizações do movimento Browniano começando em 0 ( $n = 1$ ). A curva azul representa $E[B(t)]$ .	20
3.2	Realizações do movimento Browniano geométrico com parâmetros $r = 9/8$ , $\alpha = 1/2$ e $x = 1$ . A curva azul representa $E[N(t)]$ .	21
3.3	Realizações do processo de Ornstein-Uhlenbeck com parâmetros $\mu = 2$ e $\sigma = x = 1$ . A curva azul representa $E[X(t)]$ .	21
C.1	Passeio aleatório começando em 0 ( $d=1$ ).	43
C.2	Passeio aleatório começando em (0,0) ( $d=2$ ).	44

*EinsZweiDreiVierFünfSechsSiebenAchtNeunZehn.*

**Guilherme Almeida da Silva**

# 1

## Introdução

Relações entre diferentes ramos da matemática são comuns. Há quem acredite que todas as áreas da matemática estão conectadas e são apenas formas distintas de enxergar uma ciência maior. Um importante exemplo contemporâneo é a demonstração do Último Teorema de Fermat, na qual Andrew Wiles evidenciou a conexão entre curvas elípticas e formas modulares (“Fermat’s Last Theorem” de Simon Singh é um ótimo livro sobre a história e demonstração deste teorema). Neste trabalho, evidenciaremos uma conexão bem menos pretensiosa, mas ainda assim, muito bonita.

Ao passar por cursos introdutórios de probabilidade ou equações diferenciais parciais (EDP’s), um aluno de matemática pode nem suspeitar que exista uma conexão entre tais tópicos. Entretanto, em cursos mais avançados e livros de pós-graduação, é possível encontrar problemas com origem em uma dessas áreas, cujas soluções utilizam ferramentas da outra e vice-versa. Ainda assim, a conexão entre tais assuntos pode não ficar clara.

Na teoria da probabilidade, encontramos as chamadas equações diferenciais estocásticas (EDE’s). A pesquisa sobre o assunto é muito viva e produtiva uma vez que possui aplicações em outros campos da ciência como finanças, biologia e mecânica. Em matemática, essa ferramenta possui conexões, entre outros assuntos, com as equações diferenciais parciais de segunda ordem.

As soluções de determinadas EDE’s são chamadas difusões de Itô. Se tratam de processos estocásticos e nos permitem abordar o problema de Dirichlet para EDP’s elípticas de uma forma probabilística. Essa abordagem é também útil, do ponto de vista numérico, uma vez que permite explorar as soluções do problema de Dirichlet usando métodos de Monte Carlo.

O objetivo da presente dissertação é justamente representar a solução do problema de Dirichlet para EDP’s elípticas estocasticamente e assim tornar este elo entre a teoria da probabilidade e a teoria de EDP’s mais visível.

## 2

### Mesclando os tópicos

Neste capítulo, apresentaremos três problemas cujas soluções caminham na fronteira entre o campo das Equações Diferenciais e a Teoria da Probabilidade. Tais soluções provocam a suspeita de que alguns processos estocásticos e operadores diferenciais possuem uma relação mais profunda. Começamos com uma motivação discreta. Encontraremos uma fórmula para a solução da equação discreta de Laplace usando um processo estocástico discreto (passeio aleatório). O segundo problema aparece como uma generalização do primeiro para o caso contínuo. Baseados no problema discreto daremos um palpite para uma fórmula da solução da equação de Laplace com certas condições de fronteira usando um processo estocástico contínuo (movimento Browniano) e, no capítulo 4, utilizaremos suas propriedades para provar que nosso palpite se trata realmente de uma solução. O terceiro problema ilustra a situação inversa. Começamos com um problema de probabilidade, onde queremos medir a chance de certo evento, envolvendo o movimento Browniano, acontecer e encontraremos o resultado resolvendo a equação de Laplace e avaliando a solução em um ponto.

#### 2.1

##### Um passeio na equação de Laplace

Para mais informações sobre a presente seção ver pág. 14-22 em [1]. Ao longo dessa seção,  $A$  será um subconjunto limitado de  $\mathbb{Z}^d$ .

**Definição 2.1.** Definimos a *fronteira de  $A$*  como

$$\partial A = \{z \in \mathbb{Z}^d; \quad d(z, A) = \min\{d(z, a); a \in A\} = 1\},$$

onde  $d$  é a distância euclidiana em  $\mathbb{R}^d$ . Usaremos a notação  $\bar{A} = A \cup \partial A$ .

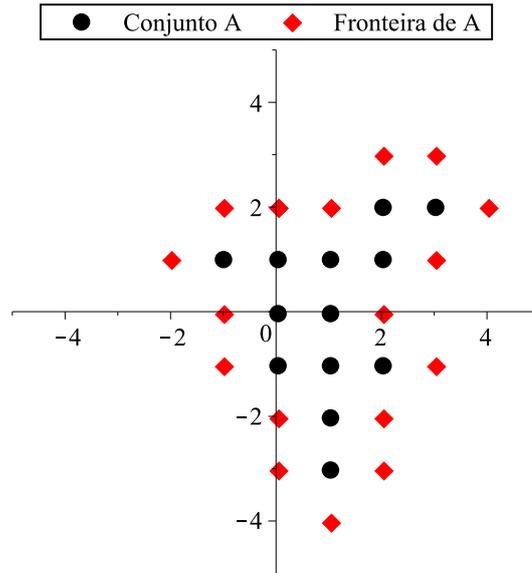


Figura 2.1: Exemplo de  $\bar{A} \in \mathbb{Z}^2$ .

**Definição 2.2.** Dada uma função  $G : \bar{A} \subset \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  definimos o *operador Laplaciano discreto*  $L$  como

$$L(G(x)) = \sum_{d(x,y)=1} \frac{G(y)}{2d} - G(x),$$

ou seja,  $L(G(x))$  é a diferença entre a média do valor de  $G$  ao redor de  $x$  e  $G(x)$ .

**Problema 2.1.** Dada uma função  $\phi : \partial A \rightarrow \mathbb{R}$ , encontrar uma função  $F : \bar{A} \subset \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça a equação discreta de Laplace

$$L(F(x)) = 0 \text{ em } A \tag{2.1.1}$$

com condição de fronteira  $F(x) = \phi(x)$  quando  $x \in \partial A$ .

Usaremos passeios aleatórios para construir uma solução para o problema. Dado  $z \in A$ , seja  $S_n^z$  o passeio aleatório em  $\mathbb{Z}^d$  começando em  $z$  (ver apêndice C para mais detalhes sobre o passeio aleatório) e o tempo de parada

$$\tau_A = \inf\{k \in \mathbb{N} ; S_k^z \notin A\}.$$

O tempo de parada definido acima pode ser visto como o primeiro tempo de saída de  $A$  ou como o primeiro tempo em que o processo atinge  $\partial A$ .

*Observação 2.1.* A variável aleatória  $\tau_A$  depende do ponto inicial  $z$ , portanto seria correto escrever  $\tau_{A,z}$ . Porém, escreveremos apenas  $\tau_A$  quando não houver

perigo de confusão. Para mais detalhes sobre tempos de parada, ver apêndice B.

A ideia é a seguinte: Queremos uma função que satisfaça

$$F(x) = \sum_{d(x,y)=1} \frac{F(y)}{2d}.$$

Dado  $x \in A$ . Sabemos que o passeio aleatório satisfaz  $P(S_1^x = y) = 1/2d$  sempre que  $d(x, y) = 1$ . Assim, se  $F$  é uma solução, então  $F(x) = E[F(S_1^x)]$ . Se  $d(x, \partial A) \geq 2$  repetimos isso para cada  $y$  tal que  $d(x, y) = 1$  veremos que  $F(x) = E[F(S_2^x)]$  e assim por diante. Isso nos mostra que o valor de  $F$  em  $x$  é sempre a média dos valores de  $F$  aplicados onde o passeio aleatório  $S_n^x$  pode estar em determinado tempo  $n$ . Se consideramos  $S_{n \wedge \tau_A}^x$  em vez de  $S_n^x$  o passeio aleatório estaria parando na fronteira e assim  $F(x) = E[F(S_{n \wedge \tau_A}^x)]$  para todo  $n > 0$ . Como sabemos que o processo atinge a fronteira do conjunto (a propriedade (iv) no apêndice C diz que  $P(\tau_A < \infty) = 1$ ) podemos tomar o limite com  $n \rightarrow \infty$ , e usar o teorema da convergência dominada para concluir que  $F(x) = E[F(S_{\tau_A}^x)]$ . Sendo  $F$  solução do problema,  $F = \phi$  em  $\partial A$  e assim

$$F(x) = E[\phi(S_{\tau_A}^x)]. \quad (2.1.2)$$

Porém, o que temos até o momento é uma heurística. Em seguida provaremos que a função definida por (2.1.2) é, de fato, uma solução.

Claramente,  $F = \phi$  em  $\partial A$ . Dado  $x \in A$ , temos

$$\begin{aligned} F(x) &= E[\phi(S_{\tau_A}^x)] = \sum_{y \in \partial A} P(S_{\tau_A}^x = y) \phi(y) \\ &= \sum_{y \in \partial A} \left( \frac{\sum_{d(z,x)=1} P(S_{\tau_A}^x = y | S_1^x = z)}{2d} \right) \phi(y) \\ &= \sum_{d(z,x)=1} \frac{\sum_{y \in \partial A} P(S_{\tau_A}^x = y | S_1^x = z) \phi(y)}{2d} \\ &= \sum_{d(z,x)=1} \frac{\sum_{y \in \partial A} P(S_{\tau_A}^z = y) \phi(y)}{2d} \\ &= \sum_{d(z,x)=1} \frac{F(z)}{2d}, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é não trivial e colocaremos os detalhes na observação C.1 e portanto,  $L(F(x)) = 0$  em  $A$ .

Acabamos de encontrar uma solução para um problema de equações de diferenças usando um processo estocástico e suas propriedades. De fato essa

solução é única (ver teorema 1.4.5 em [2]).

## 2.2

### Um passeio na equação de Laplace 2.0

Nesta seção, considere  $D \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado tal que a fronteira  $\partial D$  é  $C^2$ .

**Problema 2.2.** *Dada  $\phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e limitada. Encontrar uma função  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  para a equação de Laplace com condição de fronteira,*

$$\Delta F(x) = \sum_{i=1}^n F_{x_i x_i}(x) = 0 \text{ em } D \quad (2.2.1)$$

$$F(x) = \phi(x) \text{ em } \partial D. \quad (2.2.2)$$

Dado  $z \in D$ , considere  $B_t^z$  o movimento Browniano em  $\mathbb{R}^n$  começando em  $z$  (ver apêndice D) e o tempo de parada

$$\tau_D = \inf\{t \in [0, \infty) ; B_t^z \notin D\}.$$

Sabendo que a equação (2.1.1) é a discretização de (2.2.1) (ver [3] seção 6.3) e considerando a relação entre o passeio aleatório e o movimento Browniano (ver observação D.1), podemos dizer que o problema 2.1 é uma discretização do problema 2.2. Sendo assim, após o resultado obtido no caso discreto, suspeitamos que uma solução para o problema seria

$$F(x) = E[\phi(B_{\tau_D}^x)], \quad x \in D. \quad (2.2.3)$$

Considere o seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [1] (pág. 62) .

**Proposição 2.1.** *Uma função  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^2$  e satisfaz  $\Delta F(x) = 0$  em  $D$  se, e somente se, é contínua em  $D$  e possui a propriedade do valor médio em  $D$ , i.e, para todo  $x \in D$  e para toda bola  $B$  centrada em  $x$  e contida em  $D$  vale*

$$F(x) = \int_{\partial B} F(y) dS(y).$$

onde  $dS$  é a medida de superfície em  $\partial B \subset \mathbb{R}^n$  normalizada.

Portanto, para verificar se nosso palpite  $F$ , definido em (2.2.3), é solução do problema 2.2, devemos mostrar

- (i)  $F$  possui a propriedade do valor médio em  $D$ .

(ii)  $F = \phi$  em  $\partial D$  e  $F$  é contínua em  $\bar{D}$

Enquanto (i) é sempre verdade (mostraremos na seção 3.3), (ii) depende da fronteira de  $\partial D$  (a condição  $\partial U \in C^2$  é suficiente). No capítulo 4 mostraremos condições sobre a fronteira que garantem que  $F$  é solução do problema.

A equação de Laplace é um exemplo clássico e simples de equação diferencial parcial elíptica. A existência e unicidade da solução do problema 2.2 são garantidas por resultados clássicos da teoria de EDP's (ver [4] seção 2.1 ou [5] capítulo 4). Somente para domínios convenientes são encontradas fórmulas explícitas para a solução. O uso de ferramentas probabilísticas nos permite chegar na fórmula mais geral (2.2.3).

## 2.3

### A situação inversa

Vejamos agora uma situação, de certa forma, inversa. Apresentamos um problema de probabilidade e uma solução que se baseia fundamentalmente em resolver uma EDP e avaliar a solução em um ponto. “Hitting the Ends” (“Atingindo os Extremos” é uma aproximação em português) é um dos dez problemas propostos por Nick Trefethen em 2002 no que ficou conhecido como “O desafio dos cem dígitos”. Para cada um das dez questões, os participantes deveriam encontrar uma aproximação numérica para as soluções com certa precisão numérica e assim receberiam pontos por cada dígito correto. Eis o enunciado.

**Problema 2.3.** *Uma partícula realiza um movimento browniano com ponto inicial no centro de um retângulo  $10 \times 1$  até atingir a fronteira deste. Qual a probabilidade da partícula atingir a fronteira do retângulo em um dos lados de comprimento unitário?*

Para encontrar mais informações sobre o desafio e o problema “Hitting the Ends” ver [6].

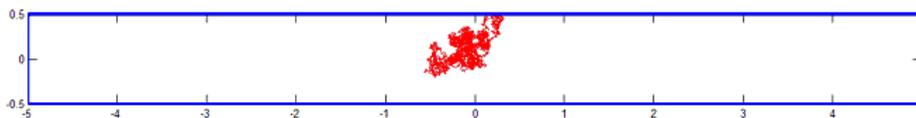


Figura 2.2: Realização do movimento Browniano no retângulo.

A resposta para o problema é aproximadamente  $3 \cdot 10^{-7}$ , e para encontrá-la tornaremos o problema determinístico da seguinte maneira:

Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h = \frac{1}{2n}$  e  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in (-5, 5) \text{ e } y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ . Defina ainda  $L_h = h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z}$ ,  $\partial R_1 = \{(x, y) \in \partial R; x = \pm 5\}$  e

$\partial R_0 = \partial R - \partial R_1$ . Assim,  $R$  será o retângulo, onde supomos que a partícula realizará o movimento Browniano, enquanto  $\partial R_1$  serão as arestas de lado unitário e  $\partial R_0$  as arestas maiores. Ver figura 2.3.

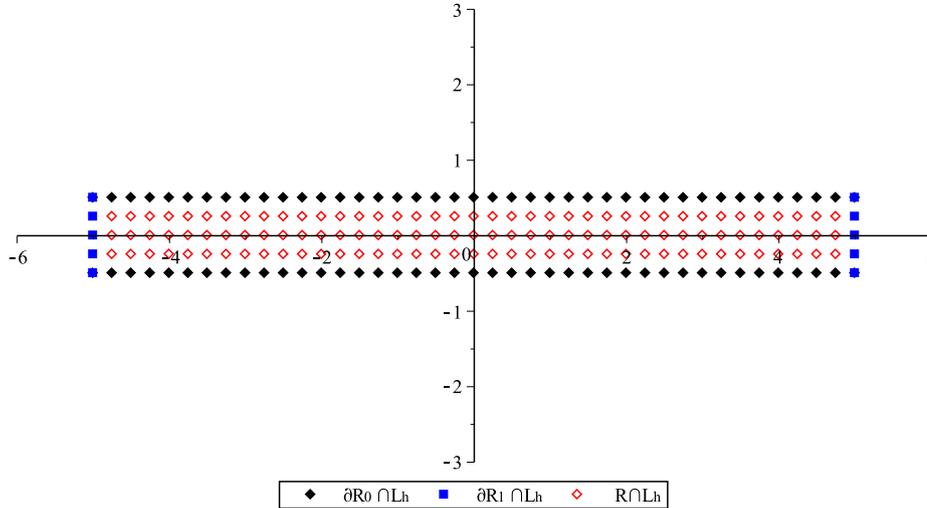


Figura 2.3: Discretização do retângulo  $R$ .

Dado  $S_n^{(x,y)}$  o passeio aleatório simétrico, cujos passos possuem comprimento  $h$  começando em  $(x, y) \in R \cap L_h$  e

$$\tau = \inf\{k \in \mathbb{N} ; S_k^{(x,y)} \in \partial R\},$$

considere  $u_h(x, y) = P(S_\tau^{(x,y)} \in \partial R_1)$ . Não é difícil perceber que a função  $u_h$  é solução da equação de diferenças

$$u_h(x, y) = \frac{1}{4}[u_h(x + h, y) + u_h(x - h, y) + u_h(x, y + h) + u_h(x, y - h)]$$

com condições de fronteira  $u_h|_{\partial R_1 \cap L_h} = 1$  e  $u_h|_{\partial R_0 \cap L_h} = 0$ .

Considerando a observação D.1, o problema está resolvido se encontramos  $\lim_{h \rightarrow 0} u_h(0, 0)$ . Modificando um pouco a equação de diferenças se percebe que esta é equivalente a discretização da equação de Laplace

$$\frac{u_h(x + h, y) - 2u_h(x, y) + u_h(x - h, y)}{h^2} + \frac{u_h(x, y + h) - 2u_h(x, y) + u_h(x, y - h)}{h^2} = 0$$

Seja  $u(x, y)$  solução de

$$\Delta u(x, y) = 0 \text{ em } R$$

com condições de fronteira  $u|_{\partial R_1} = 1$  e  $u|_{\partial R_0} = 0$ .

É possível mostrar que  $u_h$  converge pontualmente para  $u$  quando  $h \rightarrow 0$  (ver seção 10.3 em [6]). Portanto para resolver nosso problema, basta resolver a equação de Laplace com tais condições de fronteira e avaliar a solução na origem.

Usaremos separação de variáveis. Buscamos uma solução da forma

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)w_k(y)$$

onde  $\Delta v_k(x)w_k(y) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$v_k''(x)w_k(y) = -v_k(x)w_k''(y) \Rightarrow \frac{v_k''(x)}{v_k(x)} = \frac{w_k''(y)}{w_k(y)} = \lambda_k$$

onde  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  é constante.

Olhando para  $w_k$  queremos

$$\begin{cases} w_k''(y) + \lambda_k w_k(y) = 0 \\ w_k(-\frac{1}{2}) = w_k(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

Não é difícil ver que  $\lambda_k > 0$  e  $w_k(y) = A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}y) + B_k \sin(\sqrt{\lambda_k}y)$ , onde  $A_k, B_k \in \mathbb{R}$  constantes. As condições de fronteira implicam que  $w_k$  precisa ser par e portanto  $w_k(y) = A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}y)$ . Além disso,

$$w_k\left(-\frac{1}{2}\right) = w_k\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \left(2\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)^2$$

e podemos tomar  $w_k(y) = \cos(2(k + \frac{1}{2})\pi y)$ , sem perda de generalidade.

Agora tratemos de  $v_k$ . Queremos

$$u(5, y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(5)w_k(y) = u(-5, y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(-5)w_k(y) = 1$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(5) \cos(2(k + \frac{1}{2})\pi y) = 1.$$

Pela ortogonalidade das funções  $w_k$  temos  $v_k(5) = v_k(-5) = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)}$ .

Dessa forma, queremos que  $v_k$  resolva

$$\begin{cases} v_k''(x) = \lambda_k v_k(x) \\ v_k(5) = v_k(-5) = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \end{cases}$$

o que implica que,  $v_k(x) = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \frac{\cosh(2k+1)\pi x}{\cosh((k+\frac{1}{2})\pi 10)}$  (O Maple resolve essa equação diferencial). Concluimos que

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \frac{\cosh((2k+1)\pi x)}{\cosh((k+\frac{1}{2})\pi 10)} \cos\left(2\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi y\right).$$

O decaimento exponencial do valor absoluto dos termos da série nos permite derivar série termo a termo e mostrar que  $u$  realmente se trata de uma solução para a equação de Laplace.

Agora basta encontrar

$$p = u(0, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \operatorname{sech}(10(k+\frac{1}{2})\pi)$$

Acima, temos uma série alternada cujos valores absolutos dos termos tendem para zero monotonamente. Portanto a série converge e o limite está entre quaisquer duas somas parciais consecutivas. Sendo  $T_n$  as somas parciais desta série e calculando  $T_2$  e  $T_1$  (usando o Maple no nosso caso), já é possível perceber que

$$p \approx 3.8375 \cdot 10^{-7}. \quad (2.3.1)$$

Terminamos o capítulo considerando as seguintes perguntas:

- (i) Vimos dois problemas que misturam o movimento Browniano e a Equação de Laplace. Existe uma relação mais profunda entre este processo e esta equação diferencial parcial ?
- (ii) É possível utilizar abordagens parecidas para outras EDP's ? Existem outros processos que podem nos auxiliar nessa busca por fórmulas para soluções de EDP's ?

Os próximos capítulos revelam as respostas para essas questões.

### 3

## Difusões de Itô

Neste capítulo, definiremos as difusões de Itô e mostraremos que se tratam de uma classe de processos estocásticos que permitirá uma generalização das ideias usadas no capítulo anterior. A cada difusão de Itô  $X_t$  será associado um operador elíptico  $L$  que de certa forma carrega informação sobre a difusão. Em particular, para o movimento Browniano, o operador associado será  $L = \frac{1}{2}\Delta$ , onde  $\Delta$  é o operador Laplaciano. Mostraremos a Fórmula de Dynkin, que desempenhará um papel decisivo no capítulo seguinte.

### 3.1

#### Definição

**Definição 3.1.** Uma *difusão de Itô  $n$ -dimensional* é um processo estocástico que satisfaz uma equação diferencial estocástica da forma

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

onde  $B_t = B_t^0$  é o movimento Browniano com  $B_0^0 = 0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  tais que

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D(|x - y|); \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

para alguma constante  $D$ . Ver Teorema E.1 para existência e unicidade da solução.

*Observação.* Para melhor entendimento do significado da integral

$$\int_0^t \sigma(X_s)dB_s \tag{3.1.1}$$

e suas propriedades, ver apêndice E.

**Exemplo 3.1.** Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , o Movimento Browniano  $B_t^x$  é solução de

$$\begin{cases} dX_t = dB_t \\ X_t = x \end{cases}$$

Aqui,  $b = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  e  $\sigma = I_{n \times n}$ . Portanto, o movimento Browniano é uma difusão de Itô.

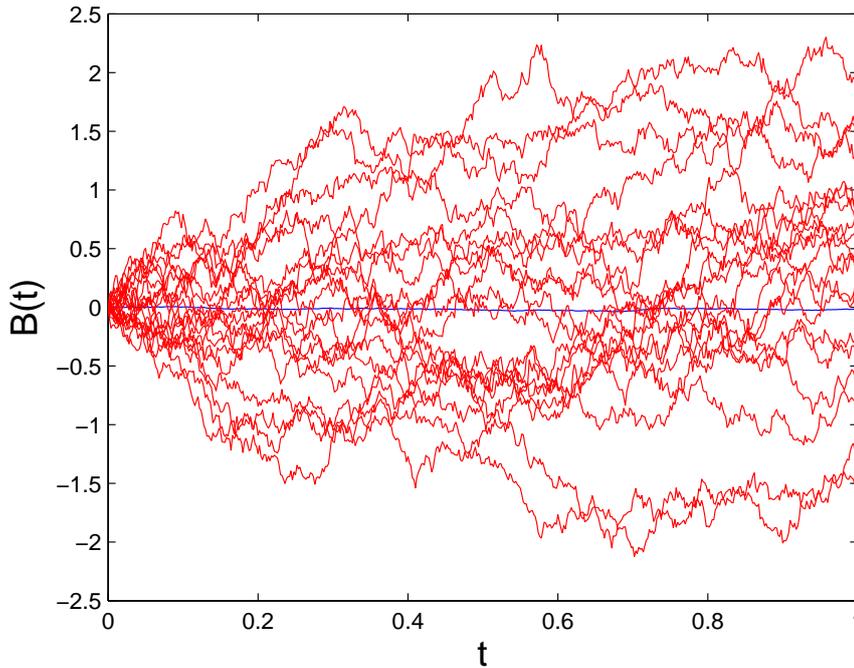


Figura 3.1: Realizações do movimento Browniano começando em 0 ( $n = 1$ ). A curva azul representa  $E[B(t)]$ .

**Exemplo 3.2.** Considere  $m = 1$ . Usando a fórmula de Itô (ver E.7) vemos que o processo  $N_t = x \cdot e^{(r - \frac{\alpha^2}{2})t + \alpha B_t}$  é solução de

$$\begin{cases} dN_t = r \cdot N_t dt + \alpha \cdot N_t dB_t \\ N_0 = x \end{cases}$$

onde  $r, \alpha, x \in \mathbb{R}$ . A difusão  $N_t$  é chamada *movimento Browniano geométrico*.

**Exemplo 3.3.** Considere  $m = 1$ . O processo de Ornstein-Uhlenbeck

$$X_t = x \cdot e^{\mu t} + \int_0^t \sigma \cdot e^{-\mu(s-t)} dB_s \tag{3.1.2}$$

é solução de

$$\begin{cases} dX_t = \mu \cdot X_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

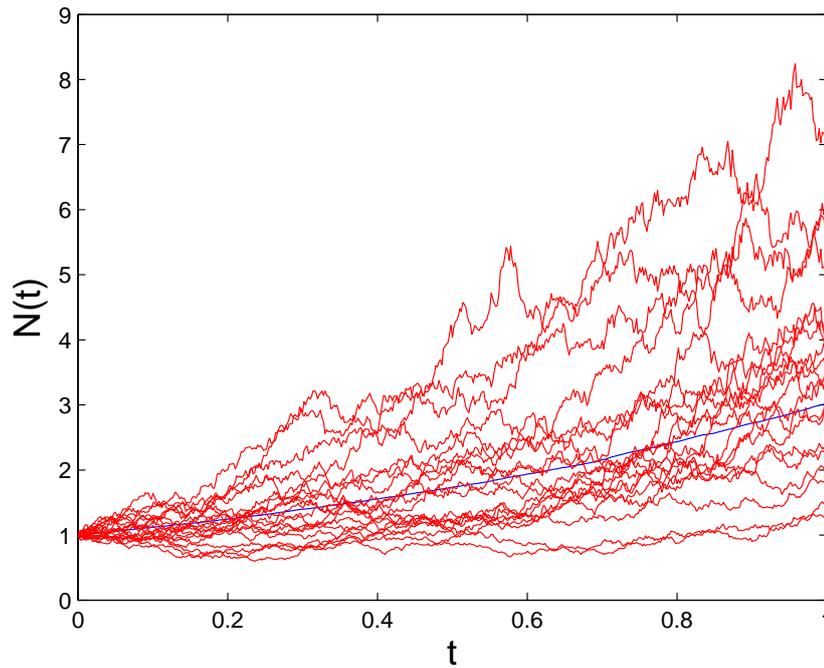


Figura 3.2: Realizações do movimento Browniano geométrico com parâmetros  $r = 9/8$ ,  $\alpha = 1/2$  e  $x = 1$ . A curva azul representa  $E[N(t)]$ .

onde  $\mu, \sigma, x \in \mathbb{R}$ .

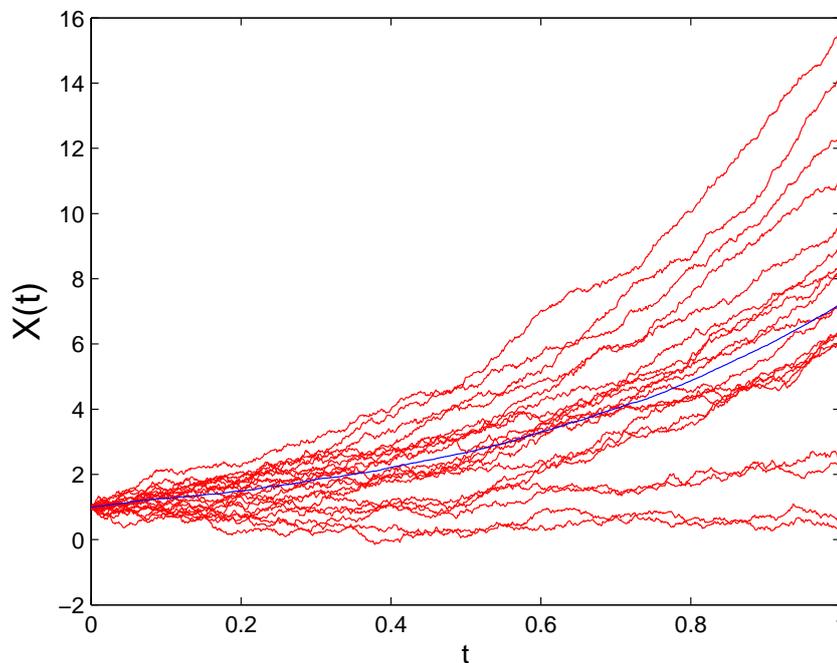


Figura 3.3: Realizações do processo de Ornstein-Uhlenbeck com parâmetros  $\mu = 2$  e  $\sigma = x = 1$ . A curva azul representa  $E[X(t)]$ .

### 3.2

#### Propriedade de Markov para difusões de Itô

Uma característica importante das difusões de Itô é que estas acabam por ser também processos de Markov. Isso significa que satisfazem uma propriedade que basicamente diz: o comportamento do processo no passado não influencia em seu comportamento futuro, apenas o presente importa. Nesta seção, omitiremos alguns detalhes técnicos das demonstrações visando maior clareza do texto.

**Notação:** Escreveremos

$$X_t^{s,x} := x + \int_s^t b(X_u^{s,x})du + \int_s^t \sigma(X_u^{s,x})dB_u \quad \forall t \geq s$$

para a solução de

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t & \forall t \geq s \\ X_s = x. \end{cases}$$

Denotaremos  $\mathcal{F}_t$  como a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\{B_s : s \leq t\}$ . Ainda, dado um tempo de parada  $\tau$  com respeito a  $\mathcal{F}_t$ ,  $\mathcal{F}_\tau$  será a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\{B_{s \wedge \tau} : s \geq 0\}$ . Assumiremos sempre que  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$  e que  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é completo.

**Proposição 3.1. Propriedade de Markov:** Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável e limitada. Então para quaisquer  $t, h \geq 0$  vale

$$E[f(X_{t+h}^x) | \mathcal{F}_t](\omega) = E[f(X_h^{X_t^x(\omega)})]$$

*Observação 3.1.* A igualdade acima é em quase todo ponto  $\omega$  uma vez que a esperança condicional é única a menos de um conjunto de medida nula (ver Proposição A.1).

#### Demonstração.

**Fato 1:** Dados  $s, h > 0$ .  $X_{s+h}^{s,x}$  e  $X_h^x$  possuem as mesmas funções de distribuição de dimensão finita.

Isso acontece pois  $X_t^x$  é solução de

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t & \forall t > 0 \\ X_0 = x \end{cases}$$

e  $X_{s+h}^{s,x}$  é solução de

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)d\tilde{B}_t & \forall t > s \\ X_s = x \end{cases}$$

onde  $\tilde{B}_r = B_{s+r} - B_s$ . Portanto são duas soluções fracas da mesma equação (ver Proposição E.9 para unicidade fraca).

**Fato 2:** Dados  $t, h > 0$ , então  $X_{t+h}^x = X_{t+h}^{t, X_t^x}$  q.t.p.

Isso acontece pois, dado com  $r \geq t$

$$\begin{aligned} X_r^x &= x + \int_0^r b(X_s^x)ds + \int_0^r \sigma(X_s^x)dB_s \\ &= X_t^x + \int_t^r b(X_s^x)ds + \int_t^r \sigma(X_s^x)dB_s \end{aligned}$$

e portanto,  $\{X_r^x\}_{r \geq t}$  é solução(forte) de

$$\begin{cases} dX_r = b(X_r)dt + \sigma(X_r)dB_t & \forall r > t \\ X_t = X_t^x \end{cases}$$

Em particular,  $X_{t+h}^x = X_{t+h}^{t, X_t^x}$  q.t.p concluindo a demonstração do fato 2.

Dados  $t, h > 0$ , seja  $g(z, \omega) = f(X_{t+h}^{t, z}(\omega))$ .

**Fato 3:** Para  $z$  fixo,  $g(z, \cdot)$  é variável aleatória independente de  $\mathcal{F}_t$ .

A difusão  $\{X_r^{t, z}\}_{r \geq t}$  é solução de

$$dX_r = b(X_r)dr + \sigma(X_r)d\tilde{B}_r \tag{3.2.1}$$

onde  $\tilde{B}_r = B_r - B_t$  é também o movimento Browniano (ver seção D).

Assim,  $X_{t+h}^{t, z}$  é mensurável com respeito a  $\sigma$ -álgebra  $\tilde{\mathcal{F}}_{t+h}$  gerada por  $\{B_r - B_t; t \leq r \leq t+h\}$ . Uma vez que, para todo  $r \in (t, t+h]$ ,  $B_r - B_t$  é independente de  $B_s$  para todo  $s \in [0, t]$  então  $X_{t+h}^{t, z}$  é independente de  $\mathcal{F}_t$  assim como  $f(X_{t+h}^{t, z})$ .

**Fato 4:** A função  $g$  é  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -mensurável e pode ser aproximada (q.t.p) por funções limitadas do tipo

$$g_n(z, \omega) = \sum \phi_k(z) \cdot \psi_k(\omega)$$

Levando em consideração esses quatro fatos e as propriedades da esperança condicional (ver apêndice A) temos

$$\begin{aligned}
 E[f(X_{t+h}^x)|\mathcal{F}_t](\omega) &= E[f(X_{t+h}^{t,X_t^x})|\mathcal{F}_t](\omega) \\
 &= E[g(X_t^x, \cdot)|\mathcal{F}_t](\omega) \\
 &= E[\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(X_t^x, \cdot)|\mathcal{F}_t](\omega) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \sum \phi_k(X_t^x) \cdot \psi_k | \mathcal{F}_t \right] (\omega) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \phi_k(X_t^x(\omega)) E[\psi_k | \mathcal{F}_t](\omega) \\
 &= E \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \phi_k(X_t^x(\omega)) \psi_k | \mathcal{F}_t \right] (\omega) \\
 &= E[g(X_t^x(\omega), \cdot)|\mathcal{F}_t](\omega) \\
 &= E[f(X_{t+h}^{t,X_t(\omega)})] \\
 &= E[f(X_h^{X_t^x(\omega)})]
 \end{aligned}$$

onde as igualdades acima são todas *q.t.p.* □

Com uma demonstração inteiramente análoga a anterior, podemos generalizar o resultado acima.

**Proposição 3.2. Propriedade forte de Markov:** *Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável e limitada e  $\tau$  um tempo de parada com respeito a  $\mathcal{F}_t$  tal que  $\tau < \infty$  q.t.p. Então*

$$E[f(X_{\tau+h}^x)|\mathcal{F}_\tau](\omega) = E[f(X_h^{X_\tau^x(\omega)})] \quad \forall h > 0.$$

onde  $\mathcal{F}_\tau$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\{B_{\tau \wedge s} : s \geq 0\}$ .

Usando indução em  $k \in \mathbb{N}$ , podemos generalizar ainda mais o resultado para

$$E[f_1(X_{\tau+h_1}^x) \cdots f_k(X_{\tau+h_k}^x)|\mathcal{F}_\tau](\omega) = E[f_1(X_{h_1}^{X_\tau^x(\omega)}) \cdots f_k(X_{h_k}^{X_\tau^x(\omega)})] \quad \forall h_i > 0$$

onde  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e mensurável para  $i = 1, \dots, k$ .

Considere  $\mathcal{H} = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n; X \in \mathcal{M}_\infty\}$ , onde  $\mathcal{M}_\infty$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\{X_t; t \geq 0\}$ . Para  $t > 0$  defina o operador *shift*

$$\theta_t : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

da seguinte maneira:

Se  $\dot{\eta} = g_1(X_{t_1}) \dots g_k(X_{t_k})$  ( $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mensuráveis), então

$$\theta_t \dot{\eta} = g_1(X_{t+t_1}) \dots g_k(X_{t+t_k}).$$

As demais funções de  $\mathcal{H}$  podem ser aproximadas (*q.t.p.*) por somas de funções do tipo  $\dot{\eta}$  e nesse caso para  $\eta \in \mathcal{H}$  arbitrária, o shift  $\theta_t$  fica definido como:

$$\theta_t \eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_t \eta_n$$

onde o limite é *q.t.p.* e para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\eta_n$  é soma de funções da forma  $\dot{\eta}$ .

Usando essa notação, a propriedade de Markov se escreve da seguinte maneira: para qualquer  $\eta \in \mathcal{H}$  limitada vale

$$E^x[\theta_\tau \eta | \mathcal{F}_\tau] = E^{X_\tau^x}[\eta] \tag{3.2.2}$$

onde  $(\theta_\tau \eta)(\omega) = (\eta)(\omega)$  quando  $\tau(\omega) = t$  e o expoente do valor esperado apenas serve para esclarecer o ponto inicial da difusão em cada lado da igualdade.

### 3.3 Propriedade do Valor Médio (generalizada)

Seja  $D$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in D$  e considere  $X_t^x$  difusão de Itô. Seja  $B$  uma bola aberta de centro em  $x$  tal que o fecho está em contido em  $D$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e contínua.

Definam-se

$$\begin{aligned} \tau_B &= \inf\{t > 0; X_t^x \notin B\}; \\ \tau_D &= \inf\{t > 0; X_t^x \notin D\}; \\ \varphi(x) &= E[f(X_{\tau_D}^x)]. \end{aligned}$$

Lembramos que  $\tau_D, \tau_B$  são tempos de parada com respeito ao filtro  $\mathcal{F}_{t+}$ , onde  $\mathcal{F}_t$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $B_s$ ,  $s \leq t$ . (ver Seção B). Além disso, se  $\tau_D < \infty$  *q.t.p.*, então, por continuidade,  $\tau_B < \infty$ , *q.t.p.*.

A propriedade forte de Markov nos permite obter o seguinte resultado

**Proposição 3.3.** *Se  $\tau_D < \infty$  q.t.p., então*

$$\varphi(x) = \int_{\partial B} \varphi(y) d\mu_B^x(y), \tag{3.3.1}$$

onde  $\mu_B^x(E) := P(X_{\tau_B}^x \in E)$ , para todo  $E \subset \partial B$  Borel mensurável.

Dizemos que  $\mu_B^x$  é a *medida harmônica* de  $X_t^x$  sobre  $\partial B$  e dizemos também que  $\varphi(\cdot) = E[f(X_{\tau_D}^x)]$  satisfaz a *propriedade do valor médio* (3.3.1).

A justificativa para esta nomenclatura é que a Proposição 3.3 consiste em uma generalização da propriedade clássica do valor médio (ver Proposição 2.1) como explicaremos em seguida. De fato, no caso particular do movimento Browniano,  $\mu_B^x = P(B_{\tau_B}^x \in \cdot)$  é uma medida probabilidade invariante por rotações nos Borelianos da esfera  $\partial B$ : dada uma rotação da esfera, equivalentemente, uma transformação ortogonal de  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , e um Boreliano  $E$  de  $\partial B$

$$\begin{aligned} P(B_{\tau_B}^x \in A(E)) &= P(A^{-1}B_{\tau_B}^x \in E) \\ &= P(B_{\tau_B}^x \in E), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a invariância do movimento Browniano para transformações ortogonais (ver propriedade (vi) na seção D). Então, concluímos que  $d\mu_G^x = dS$  onde  $dS$  é a usual medida de superfície de Lebesgue normalizada da esfera. Ver em [7], p. 78 para definição da medida de Lebesgue na esfera (que é invariante por rotações) e teorema 11.9 para unicidade da medida invariante por rotações. Assim, temos a propriedade clássica do valor médio

$$\varphi(x) = \int_{\partial B} \varphi(y) dS(y),$$

como pretendido.

Acabamos de mostrar que  $F$  definida em (2.2.3) satisfaz a condição (i) da seção 2.2.

**Demonstração.** Afirmamos que

$$(\theta_t f(X_{\tau_D}^x)) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}} = f(X_{\tau_D}^x) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}}. \quad (3.3.2)$$

De fato, defina

$$f_k = \sum_j f(X_{t_j}^x) \cdot \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(\tau_D)$$

onde  $t_j = \frac{j}{2^k}$  com  $j, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Claramente,  $f_k$  converge para  $f(X_{\tau_D}^x)$  *q.t.p.*, portanto

$$(\theta_t f(X_{\tau_D}^x)) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\theta_t f_k) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}} \quad (3.3.3)$$

Temos que  $(\theta_t \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(\tau_D)) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}} = \mathbb{1}_{[t+t_j, t+t_{j+1})}(\tau_D) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}}$ . Essa igualdade não é trivial, e sua justificativa se encontra na observação B.2. Assim,

$$\begin{aligned}
 (\theta_t f(X_{\tau_D}^x)) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\theta_t f_k) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_j f(X_{t+t_j}^x) \cdot \mathbb{1}_{[t+t_j, t+t_{j+1})}(\tau_D) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}} \\
 &= f(X_{\tau_D}^x) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}}
 \end{aligned}$$

Pela continuidade dos caminhos de  $X_t^x$ ,  $\tau_B < \tau_D$  *q.t.p.* e portanto  $\theta_{\tau_B} f(X_{\tau_D}^x) = f(X_{\tau_D}^x)$ . Além disso, pela propriedade de Markov forte

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= E[f(X_{\tau_D}^x)] \\
 &= E[E[\theta_{\tau_B} f(X_{\tau_D}^x) | \mathcal{F}_{\tau_B}]] \\
 &= E[E[f(X_{\tau_D}^{X_{\tau_B}^x})]] \\
 &= E[\varphi(X_{\tau_B}^x)] \\
 &= \int_{\partial B} \varphi(y) P(X_{\tau_B}^x \in dy),
 \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

### 3.4 Gerador de uma difusão de Itô

**Definição 3.2.** Dada uma difusão de Itô  $n$ -dimensional  $X_t$ . Definimos o gerador (*infinitesimal*) de  $X_t$  como

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[f(X_t^x)] - f(x)}{t}; \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

O conjunto de funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que o limite existe para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  será denotado por  $\mathcal{D}_A$ .

A proposição a seguir nos ajudará a encontrar uma expressão para o gerador.

**Proposição 3.4.** Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , seja  $Y_t^x$  um processo estocástico da forma

$$Y_t^x = x + \int_0^t u(s, \cdot) ds + \int_0^t v(s, \cdot) dB_s$$

com  $u$  e  $v$  satisfazendo as hipóteses da proposição E.8. Seja  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  e seja  $\tau$  um  $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada tal que  $E[\tau] < \infty$ . Assuma que quando  $Y_t^x(\omega) \in \text{supp}(f)$ ,  $u(t, \omega)$  e  $v(t, \omega)$  são limitadas. Então

$$E[f(Y_\tau^x)] = f(x) + E \left[ \int_0^\tau \left( \sum_{i=1}^n u_i(s, \omega) f_{x_i}(Y_s^x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{i,j}(s, \omega) f_{x_i x_j}(Y_s^x) \right) ds \right]$$

**Demonstração.** Pela fórmula de Itô (ver proposição E.8) e simplificando a notação para  $Y_t = Y_t^x$

$$df(Y_t) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_t) dY_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_t) dY_i dY_j \quad ,$$

onde

$$dY_i = u_i dt + v_{i1} dB_1 + \dots + v_{im} dB_m$$

e

$$dY_i \cdot dY_j = v_{i1} v_{j1} dt + \dots + v_{im} v_{jm} dt.$$

Temos assim,

$$df(Y_t) = \left( \sum_{i=1}^n f_{x_i}(Y_t) u_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{i,j} f_{x_i x_j} \right) dt + \sum_{i,j} f_{x_i}(Y_t) \cdot v_{ij} dB_j$$

e portanto,

$$f(Y_t) = f(x) + \int_0^t \left( \sum_{i=1}^n f_{x_i}(Y_s) u_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{i,j} f_{x_i x_j}(Y_s) \right) ds + \sum_{i,j} \int_0^t f_{x_i}(Y_s) \cdot v_{ij} dB_j.$$

Dessa forma,

$$E[f(Y_\tau)] = f(x) + E \left[ \int_0^\tau \left( \sum_{i=1}^n f_{x_i}(Y_s) u_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{i,j} f_{x_i x_j}(Y_s) \right) ds \right] + \sum_{i,j} E \left[ \int_0^\tau f_{x_i}(Y_s) \cdot v_{ij} dB_j \right].$$

Basta mostrar que o último somatório vale zero. De fato cada parcela do somatório vale zero.

Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável e  $|g| < M \in \mathbb{R}$  temos

$$E \left[ \int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_j \right] = E \left[ \int_0^k \mathbb{1}_{\{s < \tau\}} g(Y_s) dB_j \right] = 0$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$  temos que  $\int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_j \rightarrow \int_0^\tau g(Y_s) dB_j$  em  $L^2(P)$  e portanto

$$E \left[ \int_0^\tau g(Y_s) dB_j \right] = 0$$

Como desejado. □

Com esse resultado, provamos

**Teorema 3.1.** *Seja  $X_t$  uma difusão de Itô ( $dX_t = bdt + \sigma dB_t$ ). Se  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  então  $f \in \mathcal{D}_A$  e*

$$Af(x) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x) b_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{ij}(x) f_{x_i x_j}(x)$$

**Demonstração.**

Seja  $t > 0$ . Aplicamos a proposição 3.4 com  $\tau = t$  e temos,

$$E[f(X_t^x)] = f(x) + E \left[ \int_0^t \left( \sum_{i=1}^n b_i(X_s) f_{x_i}(X_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(X_s) f_{x_i x_j}(X_s) \right) ds \right]$$

Assim,

$$\begin{aligned} Af(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[f(X_t^x)] - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E \left[ \int_0^t \left( \sum_{i=1}^n b_i(X_s) f_{x_i}(X_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(X_s) f_{x_i x_j}(X_s) \right) ds \right]}{t} \\ &= E \left[ \frac{d \left( \int_0^t \sum_{i=1}^n b_i(X_s) f_{x_i}(X_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(X_s) f_{x_i x_j}(X_s) ds \right)}{dt} (0) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n b_i(x) f_{x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(x) f_{x_i x_j}(x) \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o teorema da convergência dominada e na terceira utilizamos o teorema fundamental do cálculo. □

Aplicando o último resultado aos exemplos dados na seção 3.1 temos que

(i)

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}(x) = \frac{1}{2} \Delta f(x)$$

quando  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  e  $X_t$  é o movimento Browniano  $n$ -dimensional.

(ii)

$$Af(x) = \frac{\alpha^2 x^2}{2} f''(x) + rx f'(x)$$

quando  $f \in C_0^2(\mathbb{R})$  e  $X_t$  é o movimento Browniano geométrico.

(iii)

$$Af(x) = \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \mu x f'(x)$$

quando  $f \in C_0^2(\mathbb{R})$  e  $X_t$  é o processo de Ornstein Uhlenbeck.

Para um melhor entendimento da relação entre uma difusão e seu gerador suponha  $f \in \mathcal{D}_A$ . Por definição

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[f(X_t^x)] - f(x)}{t} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

que equivale a dizer que

$$E[f(X_t^x)] - f(x) = t \cdot Af(x) + o(t) \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Pela propriedade de Markov,

$$E[f(X_{t+h}^x) | \mathcal{F}_t] - f(X_t^x) = E[f(X_h^{X_t^x})] - f(X_t^x)$$

portanto,

$$E[f(X_{t+h}^x) | \mathcal{F}_t] = f(X_t^x) + h \cdot Af(X_t^x) + o(h).$$

A expressão acima nos remete a expansão de Taylor de primeira ordem e assim o gerador nos permite uma aproximação para o comportamento médio variável aleatória  $f(X_t^x)$  para tempos próximos a  $t$ .

### 3.5 Fórmula de Dynkin

Seja  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  e  $\tau$  um tempo de parada com respeito a  $\{\mathcal{F}_t\}$  tal que  $E[\tau] < \infty$ . Então juntando o Teorema 3.1 e a demonstração da proposição 3.4 temos

$$E[f(X_\tau^x)] = f(x) + E \left[ \int_0^\tau Af(X_s^x) ds \right]. \quad (3.5.1)$$

Nesta dissertação, chamamos a (3.5.1) de *fórmula de Dynkin*.

*Observação 3.2.* Se  $\tau$  for o tempo de saída de um conjunto limitado e  $E^x[\tau] < \infty$ , então podemos considerar os últimos resultados para quaisquer funções  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Uma aplicação da fórmula de Dynkin:**

Seja  $B_t$  o movimento Browniano começando em  $a \in \mathbb{R}^n$  e assumamos que  $|a| < R$ . Qual o valor esperado para o primeiro tempo de saída  $\tau_K$  onde,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}, \quad \tau_K = \inf\{t \in (0, \infty); B_t \notin K\}?$$

Ideia: Quem é  $E[\tau_K]$  ?

Podemos pensar em  $E[\tau_K] = \int_{\Omega} \tau_K dP$ , porém não sabemos como operar com essa integral de forma fácil. Podemos também considerar que  $E[\tau_K] = E[\int_0^{\tau_K} ds]$  e essa abordagem parece ser acessível a partir da fórmula de Dynkin. Basta encontrar uma função  $f \in C^2$  para qual o Laplaciano seja constante.

Aparece um problema. Queremos calcular  $E[\tau_K]$  usando a fórmula de Dynkin, porém essa fórmula resulta de hipóteses sobre  $E[\tau_K]$  (este tem que ser finito). Para resolver tal problema podemos aproximar  $\tau_K$  por  $\sigma_k = \min(k, \tau_K)$  com  $k \in \mathbb{N}$ . Claramente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \tau_K$  (q.t.p.).

Considere  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ , tal que  $f(x) = |x|^2$  em  $K$ . Então  $\Delta f(x) = 2n$  em  $K$  e aplicando Dynkin, temos

$$E[f(B_{\sigma_k})] = |a|^2 + n \cdot E[\sigma_k]$$

e portanto,

$$\begin{aligned} E[\sigma_k] &= \frac{1}{n}(E^a[f(B_{\sigma_k})] - |a|^2) \\ &\leq \frac{1}{n}(R^2 - |a|^2) < \infty \end{aligned}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Pelo Lema de Fatou, temos que  $E[\tau_K]$  é finito e portanto podemos usar novamente a fórmula de Dynkin concluindo que

$$E[\tau_K] = \frac{1}{n}(R^2 - |a|^2).$$

Assim, usamos a fórmula de Dynkin para mostrar que os caminhos do movimento Browniano saem, em tempo finito, de uma bola  $K$  com probabilidade total. Conseguimos também calcular o tempo médio que o processo leva para sair.

## 4

### O problema de Dirichlet para operadores elípticos

Neste capítulo, usaremos a teoria das difusões de Itô para finalmente encontrar a representação estocástica da solução do Problema de Dirichlet para um operador elíptico  $L$ . Enunciaremos o problema e estabeleceremos condições suficientes sobre o operador  $L$  e a fronteira do domínio  $D$  que resultarão na existência e unicidade da solução do problema. Em seguida enunciaremos alguns resultados sobre matrizes de funções que nos ajudarão a encontrar a difusão de Itô  $X_t$  que possui  $L$  como gerador. Por fim, usaremos a fórmula de Dynkin, que nos permitirá obter uma fórmula para a solução.

#### 4.1

##### O problema de Dirichlet e resultados auxiliares

Considere o operador diferencial  $L$  da forma

$$Lu(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x)$$

com coeficientes reais definidos em um aberto  $D \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 4.1.** Dizemos que  $L$  é *elíptico* em  $D$  quando a matriz  $(a_{ij}(x))$  é positiva definida, i.e, é simétrica e

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0$$

para todo  $x \in D$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \neq 0$ .

Se existe  $\mu > 0$  tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2$$

para todo  $x \in D$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , então dizemos que  $L$  é *uniformemente elíptico* em  $D$ .

No que segue consideramos  $D$  um aberto e limitado em  $\mathbb{R}^n$ . Dado um operador elíptico  $L$ , considere o *problema de Dirichlet*:

Encontrar uma função  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  tal que

$$Lu(x) = f(x) \text{ em } D \tag{4.1.1}$$

$$u(x) = \phi(x) \text{ em } \partial D. \tag{4.1.2}$$

onde  $f \in C(D)$  e  $\phi \in C(\partial D)$ .

**Definição 4.2.** Uma *barreira*  $w_y(x)$  em um ponto  $y \in \partial D$  é uma função contínua não-negativa em  $\bar{D}$  tal que se  $x \neq y$  então  $w_y(x) > 0$ ,  $w_y(y) = 0$  e  $Lw_y(x) \leq -1$ .

*Observação 4.1.* Se existe uma bola  $B$  tal que  $B \cap D = \emptyset$  e  $B \cap \bar{D} = \{y\}$ , então

$$w_y(x) = k(|x_0 - y|^{-p} - |x - y|^{-p}), \quad (x_0 = \text{centro de } B) \tag{4.1.3}$$

é uma barreira em  $y$  quando  $k$  e  $p$  são suficientemente grandes. Além disso, não é difícil mostrar que quando  $\partial D$  é  $C^2$  então para todo  $y \in \partial D$  existe uma bola  $B$  tal que  $B \cap D = \emptyset$  e  $B \cap \bar{D} = \{y\}$ .

**Teorema 4.1.** *Considere  $L$  uniformemente elíptico em  $D$  e que*

- $c(x) \leq 0$  para todo  $x \in D$ ,
- $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  e  $f$  são uniformemente Hölder contínuas com expoente  $\alpha \in (0, 1]$  em  $\bar{D}$ ,
- cada ponto de  $\partial D$  possui uma barreira,
- $\phi$  é contínua em  $\partial D$ .

Então existe uma única solução  $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$  para o problema de Dirichlet.

Ver seção 10.3 em [8] para a demonstração da existência e seção 6.2 em [9] para a unicidade (que segue do chamado *princípio do máximo*).

A álgebra linear básica nos diz que se  $a$  é uma matriz  $n \times n$  positiva definida, então existe uma única matriz  $\sigma$  positiva definida tal que  $a = \sigma\sigma$ . Quando a matriz  $a$  depende de um parâmetro,  $a = a(x)$ , então  $\sigma = \sigma(x)$ .

O seguinte resultado nos mostra como a regularidade das entradas de  $a(x)$  implicam a regularidade das entradas de  $\sigma(x)$ . Dado  $\alpha \in (0, 1]$ , denotaremos por  $C^{m+\alpha}(D)$  o espaço das funções que estão em  $C^m(D)$ , cujas derivadas de ordem  $m$  são Hölder contínuas com expoente  $\alpha$ . Lembramos que quando  $\alpha = 1$  a condição de Hölder e a de Lipschitz são equivalentes.

**Proposição 4.1.** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Se  $a(x)$  é positiva definida para todo  $x \in D$  e se  $a_{ij} \in C^{m+\alpha}(D)$  para todo  $i, j$  e  $0 < \alpha \leq 1$ , então as entradas de  $\sigma(x)$  pertencem a  $C^{m+\alpha}(D)$ .*

Ver seção 6.1 em [9] para demonstração.

## 4.2

### Representação estocástica da solução do problema de Dirichlet

Seja  $D$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\partial D \in C^2$ ,  $L$  um operador uniformemente elíptico tal que  $a_{ij}$  e  $b_i$  são uniformemente Lipschitz em  $\bar{D}$  e  $c = 0$ .

Consideramos o problema de Dirichlet para  $f$  Hölder contínua em  $\bar{D}$  e  $\phi$  contínua em  $\partial D$ . Diante da Observação 4.1 podemos usar o teorema 4.1 que nos garante a existência de uma solução  $u$  que é única.

Trataremos agora de encontrar uma representação para essa solução usando uma difusão de Itô  $X_t$  que possui  $L$  como gerador.

**Teorema 4.2.** *A solução  $u$  do problema de Dirichlet pode ser representada pela seguinte fórmula*

$$u(x) = E[\phi(X_{\tau_D}^x)] - E \left[ \int_0^{\tau_D} f(X_s^x) ds \right]. \quad (4.2.1)$$

onde  $X_t$  é uma difusão de Itô que possui  $L$  como gerador.

**Demonstração.** Podemos aplicar a proposição 4.1 para encontrar uma matriz  $\sigma(x)$  Lipschitz tal que  $\sigma(x)\sigma(s) = a(x)$  para todo  $x \in D$ . Estendemos  $\sigma$  e  $b$  para todo o  $\mathbb{R}^n$  (é possível pois são Lipschitz). Agora, dado  $x \in D$  consideramos  $X_t^x$  a solução, que existe e é única (ver Teorema E.1), de

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $V_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^n; d(y, \partial D) < \epsilon\}$  e  $D_\epsilon = D - V_\epsilon$ . Tomamos  $\epsilon$  suficientemente pequeno para que  $x \in D_\epsilon$ . Seja  $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$  tal que  $v = u$  em  $D_{\epsilon/2}$ . Considere  $\tau_\epsilon$  o tempo de saída de  $D_\epsilon$ . Usando a Fórmula de Dynkin e o fato que  $L$  é o gerador de  $X_t^x$  em  $C_0^2(\mathbb{R}^n)$  (teorema 3.1), concluímos que para todo  $t > 0$

$$E[v(X_{\tau_\epsilon \wedge t}^x)] = v(x) + E \left[ \int_0^{\tau_\epsilon \wedge t} Lv(X_s^x) ds \right].$$

E portanto,

$$E[u(X_{\tau_\epsilon \wedge t}^x)] = u(x) + E \left[ \int_0^{\tau_\epsilon \wedge t} Lu(X_s^x) ds \right].$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  e usando o teorema da convergência limitada,

$$u(x) = E[u(X_{\tau_D \wedge t}^x)] - E \left[ \int_0^{\tau_D \wedge t} f(X_s^x) ds \right]$$

Se, além disso, mostramos que  $E[\tau_D] < \infty$  então podemos tomar o limite quando  $t \rightarrow \infty$  e usar o teorema da convergência limitada novamente e teremos

$$u(x) = E[\phi(X_{\tau_D}^x)] - E \left[ \int_0^{\tau_D} f(X_s^x) ds \right]$$

Para mostrar que  $E[\tau_D] < \infty$  considere a função  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$h(x) = -\exp(\lambda \cdot x_1) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva.

Temos que

$$L(h(x)) = -\lambda \cdot \exp(\lambda \cdot x_1) \left( \lambda \cdot \frac{a_{11}(x)}{2} + b_1(x) \right) \quad (4.2.2)$$

Podemos tomar  $\lambda$  grande o suficiente para  $L(h) \leq -1$  em  $D$ . Aplicando a fórmula de Dynkin temos

$$\begin{aligned} E[h(X_{\tau_D \wedge t}^x)] - h(x) &= E \left[ \int_0^{\tau_D \wedge t} Lh(X_s^x) ds \right] \\ &\leq -E[\tau_D \wedge t] \end{aligned}$$

para todo  $t > 0$ .

Se  $K > 0$  é uma cota superior para  $|h|$  em  $D$  então  $E[\tau_D \wedge t] \leq 2K$ . Fazendo  $t \rightarrow \infty$  e usando o teorema da convergência monótona temos  $E[\tau_D] \leq 2K < \infty$ .  $\square$

A solução (4.2.1) confirma a solução sugerida para o problema 2.2. De fato,  $F$  satisfaz  $\Delta F = 0$  se, e somente se, satisfaz  $\frac{\Delta}{2} F = 0$ . Quando  $L = \frac{\Delta}{2}$ , temos  $b = 0$  e  $a$  é a matriz identidade. Nessas condições,  $\sigma$  também é a matriz identidade e portanto a difusão de Itô  $X_t^x = B_t^x$  possui  $L$  como gerador. Dessa

forma,  $u(x) = E[\phi(B_{\tau_D}^x)] = F(x)$  é a solução do problema 2.2.

*Observação 4.2.* No caso mais geral em que  $c$  é não nulo, mas tal que:

$$c \leq 0, \text{ } c \text{ é uniformemente Hölder contínua em } \overline{D}$$

de modo a nos manter ainda no contexto de existência e unicidade do teorema 4.1, um argumento muito semelhante pode ser utilizado para mostrar que a única solução em  $C^2(D) \cap C(\overline{D})$  do problema de Dirichlet fica representada (ver seção 6.5 em [9]) por

$$u(x) = E \left[ \phi(X_{\tau_D}^x) \exp \left( \int_0^{\tau_D} c(X_s^x) ds \right) \right] - E \int_0^{\tau_D} f(X_t) \exp(c(X_s^x)) dt$$

A representação (4.2.1) nos permite analisar numericamente as soluções do problema de Dirichlet usando métodos estatísticos como Monte Carlo. Em dimensões altas o método de Monte Carlo é mais eficiente que os métodos numéricos convencionais como diferenças finitas. Além disso, uma mesma simulação da difusão de Itô permite a análise numérica para o problema com diferentes condições de fronteira, enquanto as iterações de diferenças finitas deveriam ser repetidas para cada função  $\phi$ .

Também é possível usar as difusões de Itô para encontrar a representação estocástica da solução do problema de Cauchy para equações parabólicas (ver capítulo 6 em [9] e seção 8.2 em [10]). Nesse caso, a representação estocástica da solução é clássica Fórmula de Feynman-Kac.

## A

### Esperança Condicional

**Definição A.1.** Seja  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$  um espaço de probabilidade e considere  $\mathcal{V}$  uma  $\sigma$ -álgebra contida em  $\mathcal{U}$ . Se  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma variável aleatória integrável, definimos a **esperança condicional de  $X$  em relação a  $\mathcal{V}$**  como qualquer variável aleatória  $E[X|\mathcal{V}]$  que satisfaça

- (i)  $E[X|\mathcal{V}]$  é  $\mathcal{V}$ -mensurável, e
- (ii)  $\int_A X dP = \int_A E[X|\mathcal{V}] dP$  para todo  $A \in \mathcal{V}$ .

Temos o seguinte resultado sobre existência e unicidade da esperança condicional cuja demonstração pode ser encontrada na seção 5.1 em [11].

**Proposição A.1.** *Seja  $X$  uma variável aleatória integrável. Então para cada  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , a esperança condicional  $E[X|\mathcal{V}]$  existe é única a menos de conjuntos  $\mathcal{V}$ -mensuráveis de probabilidade nula.*

**Notação:** Usaremos  $E[X|Y]$  no caso em que  $\mathcal{V}$  for a  $\sigma$ -álgebra gerada por uma variável aleatória  $Y$ . Ou seja  $E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)]$ .

**Exemplo A.1.** Considere uma variável aleatória discreta  $Y = \sum_{i=1}^m a_i \cdot \mathbb{1}_{\{A_i\}}$  definidas num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ . Portanto

$$Y = \begin{cases} a_1 & \text{em } A_1 \\ a_2 & \text{em } A_2 \\ \vdots & \\ a_m & \text{em } A_m \end{cases}$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_m$  são números reais distintos,  $A_1, A_2, \dots, A_m$  são eventos com probabilidade não nula e formam uma partição de  $\Omega$ .

Seja  $X$  uma outra variável aleatória integrável em  $\Omega$ . Temos que  $\sigma(Y)$  é finita e portanto, a condição (i) implica que  $E[X|Y]$  tem que ser uma variável aleatória discreta e constante em cada  $A_i$  (uma vez que esses eventos geram a  $\sigma$ -álgebra). A condição (ii) implica que

$$E[X|Y] = \begin{cases} \frac{1}{P(A_1)} \int_{A_1} X dP & \text{em } A_1 \\ \frac{1}{P(A_2)} \int_{A_2} X dP & \text{em } A_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{P(A_m)} \int_{A_m} X dP & \text{em } A_m \end{cases}$$

ou seja,  $E[X|Y] = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbb{1}_{\{A_i\}}}{P(A_i)} \int_{A_i} X dP$ .

Abaixo, listamos algumas propriedades da esperança condicional. Ver também seção 5.1 em [11] para as demonstrações.

Seja  $X$  variável aleatória integrável.

- (a)  $E[E[X|\mathcal{V}]] = E[X]$
- (b)  $E[X] = E[X|\mathcal{W}]$  quando  $\mathcal{W}$  é a  $\sigma$ -álgebra trivial.
- (c) Se  $X$  é  $\mathcal{V}$ -mensurável, então  $E[X|\mathcal{V}] = X$ .
- (d) Se  $a \in \mathbb{R}$  é constante, então  $E[aX + Y|\mathcal{V}] = aE[X|\mathcal{V}] + E[Y|\mathcal{V}]$
- (e) Se  $X$  é  $\mathcal{V}$ -mensurável e  $Y, XY$  integráveis, então  $E[XY|\mathcal{V}] = XE[Y|\mathcal{V}]$ .
- (f) Se  $X$  é independente de  $\mathcal{V}$ , então  $E[X|\mathcal{V}] = E[X]$ .
- (g) Se  $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ , então

$$E[X|\mathcal{W}] = E[E[X|\mathcal{V}]|\mathcal{W}] = E[E[X|\mathcal{W}]|\mathcal{V}].$$

- (h) Se  $X \leq Y$  *q.t.p* então  $E[X|\mathcal{V}] \leq E[Y|\mathcal{V}]$ .

*Observação.* Uma vez que a esperança condicional está definida a menos de um conjunto de medida nula, as igualdades acima são todas *q.t.p.*.

## B

### Filtros, martingais e tempos de parada

**Definição B.1.** Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade. A uma sequência de sigma álgebras  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

chamamos *filtro discreto*.

**Definição B.2.** Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade. A uma família de sigma álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  tal que

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \text{ para todo } 0 \leq s \leq t,$$

chamamos *filtro*.

**Definição B.3.** Seja  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  um processo estocástico em  $\mathbb{R}^n$  tal que, para todo  $t \geq 0$ ,  $E[|X_t|] < \infty$ . Considere  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  um filtro. Se

- (i)  $X_t \in \mathcal{F}_t$  para todo  $t \geq 0$  e
- (ii)  $X_s = E[X_t | \mathcal{F}_s]$  *q.t.p.*, para todo  $t \geq s \geq 0$

chamamos  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  de *martingal com respeito a  $\{\mathcal{F}_t\}$* .

*Observação B.1.* Usando as propriedades da esperança condicional se conclui facilmente que um martingal  $X_t$  possui média constante, i.e.,

$$E[X_t] = E[X_s] \quad \forall t, s \geq 0.$$

**Teorema B.1. Desigualdade de Doob para martingais contínuos.** *Se  $M_t$  é um martingal com caminhos contínuos q.t.p., i.e., o conjunto dos caminhos  $\omega$  para os quais  $M_t(\omega)$  é contínuo em  $t$  possui medida total. Então para todo  $p \geq 1, T \geq 0$  e todo  $\lambda > 0$*

$$P[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^p} \cdot E[|M_T|^p]$$

Este teorema está demonstrado em [12], Teorema II.1.7.

**Definição B.4.** Considere o filtro discreto  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq \mathbb{N}}$  no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . A uma variável aleatória  $\tau : \Omega \rightarrow \{\mathbb{N} \cup \infty\} \subset \mathbb{R}$  chamamos *tempo de parada discreto com respeito a  $\{\mathcal{F}_n\}$*  se

$$\{\tau = n\} = \{\omega; \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Exemplo.** Seja  $A \subset \mathbb{Z}^d$  limitado e considere o passeio aleatório começando em  $z \in A$ ,  $S_n^z$ . O *primeiro tempo de saída de  $A$*

$$\tau_{A,z} := \min\{n > 0; S_n^z \notin A\} \tag{B.0.1}$$

é um tempo de parada com respeito ao filtro  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  onde  $\mathcal{F}_n$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\{S_1, \dots, S_n\}$ . De fato,

$$\{\tau_{A,z} = n\} = \left( \bigcap_{k=0}^{n-1} \{S_k^z \in A\} \right) \cap \{S_n^z \in A\}^c$$

e como  $\{S_k^z \in A\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$  para todo  $k \in \{0, \dots, n\}$  então  $\{\tau_{A,z} = n\} \in \mathcal{F}_n$ .

**Definição B.5.** Dado o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , considere o filtro  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  contínuo à direita, i.e  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ , onde  $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{h>0} \mathcal{F}_{t+h}$ . A uma variável aleatória  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  chamamos *tempo de parada com respeito a  $\{\mathcal{F}_t\}$*  se

$$\{\omega; \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

A continuidade à direita do filtro nos dá o seguinte resultado

**Proposição B.1.** *A variável aleatória  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  é tempo de parada se e somente se  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Demonstração.** Se  $\tau$  é tempo de parada, então

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n>N} \{\tau < t + 1/n\} \in \bigcap_{n>N} \mathcal{F}_{t+1/n}$$

para cada  $N$ . Logo,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ . Por outro lado, se  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  para todo o  $t$ , então

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t,$$

pois  $\mathcal{F}_t$  é crescente.

□

As seguintes propriedades seguem diretamente das definições acima.

- (a) Tempos determinísticos  $t \geq 0$  são tempos de parada com respeito a qualquer filtro.
- (b) Se  $S$  e  $T$  são tempo de parada, então  $S \wedge T$  e  $S \vee T$  também o são.
- (c) Se  $T_n$  é uma sequência crescente de tempos de parada, então  $\sup_n T_n$  também o é.
- (d) Se  $T_n$  é uma sequência decrescente de tempos de parada, então  $\inf_n T_n$  também o é.
- (e) Se  $S$  é um tempo de parada e  $t \geq 0$ , então  $S + t$  também o é.

Os exemplos em que temos mais interesse são os do seguinte contexto:

- $X_t$  é um processo estocástico com caminhos contínuos *q.t.p.*;
- $X_t$  é adaptado a  $\mathcal{F}_t$ , i.e., para todo o  $t$ ,  $X_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável.

**Definição B.6.** Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ , defina-se o *primeiro tempo de saída*

$$\tau_A := \inf\{t > 0; X_t \notin A\},$$

e o *primeiro tempo de entrada*

$$T_A := \inf\{t > 0; X_t \in A\}.$$

Claramente,  $\tau_{A^c} = T_A$  e  $\tau_A = T_{A^c}$ .

Em geral, o primeiro tempo de saída (ou de entrada) para um Boreliano qualquer é um tempo de parada. Indicamos a seção II.2 em [13] para os detalhes desse resultado. De seguida mostramos os casos mais simples que são suficientes neste documento.

**Proposição B.2.** (a) Se  $A$  é um aberto, então  $T_A$  é um tempo de parada.

(b) Se  $A$  é um fechado, então  $\tau_A$  é um tempo de parada.

**Demonstração.** Seja  $A$  um aberto. Se  $T_A < t$ , então,  $X_s \in A$  para algum  $s < t$ . Por continuidade dos caminhos, existe um racional  $r < t$  com  $X_r \in A$ . Logo,

$$\{T_A < t\} = \bigcap_{r \text{ racional } < t} \{X_r \in K_m\} \in \mathcal{F}_t,$$

onde  $\{K_m\}$  é uma sequência crescente de fechados tais que  $A = \cup_m K_m$ . O que prova a primeira parte. Se  $A$  é fechado, seja  $A_n = \{x; d(x, A) < 1/n\}$ . Os  $A_n$ s são abertos, portanto  $T_{A_n}$  é uma sequência de crescente de tempos de parada e  $T := \sup_n T_{A_n}$  também é um tempo de parada. Como  $T_A \geq T_{A_n}$  para cada  $n$ , então  $T_A \geq T$ . Agora, ou  $T = \infty$  e logo  $T_A = \infty$ , ou  $T < \infty$  e, por continuidade dos caminhos,  $X_T = \lim X_{T_{A_n}}$ . Como  $X_{T_{A_n}}$  pertence ao fecho de  $A_m$  para  $n \geq m$ , então também  $X_T$  pertence a esse fecho, para cada  $m$ . Donde segue que  $X_T \in A$  ou  $T_A \leq T$ . Em qualquer caso,  $T_A = T$ , o que mostra a segunda parte.  $\square$

Assim, também o tempo de saída  $\tau_A$  é um tempo de parada, para  $A$  aberto ou fechado.

*Observação B.2.* Queremos mostrar que a igualdade

$$(\theta_t \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(\tau_D)) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}} = \mathbb{1}_{[t+t_j, t+t_{j+1})}(\tau_D) \cdot \mathbb{1}_{\{t < \tau_D\}}$$

é válida. Quando  $\omega \in \{t < \tau_D\}^c$  a igualdade é clara. Seja  $\omega \in \{t < \tau_D\}$ . Sejam também  $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  e  $\{\tilde{r}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  enumerações de  $[0, t_j) \cap \mathbb{Q}$  e  $[t_j, t_{j+1}) \cap \mathbb{Q}$  respectivamente. Temos

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(\tau_D)(\omega) &= \mathbb{1}_{\{\forall r \in [0, t_j) \cap \mathbb{Q} X_r^x \in D \& \exists s \in [t_j, t_{j+1}) \cap \mathbb{Q} X_s^x \notin D\}}(\omega) \\ &= \mathbb{1}_{\{\forall r \in [0, t_j) \cap \mathbb{Q} X_r^x \in D\}}(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{\exists s \in [t_j, t_{j+1}) \cap \mathbb{Q} X_s^x \notin D\}}(\omega) \\ &= \mathbb{1}_{\{\forall r \in [0, t_j) \cap \mathbb{Q} X_r^x \in D\}}(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{\forall s \in [t_j, t_{j+1}) \cap \mathbb{Q} X_s^x \in D\}^c}(\omega) \\ &= \mathbb{1}_{\{\forall r \in [0, t_j) \cap \mathbb{Q} X_r^x \in D\}}(\omega) \cdot \left| \mathbb{1}_{\{\forall s \in [t_j, t_{j+1}) \cap \mathbb{Q} X_s^x \in D\}}(\omega) - 1 \right| \\ &= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=1}^i \mathbb{1}_{\{X_{r_k}^x \in D\}}(\omega) \cdot \left| \prod_{k=1}^j \mathbb{1}_{\{X_{\tilde{r}_k}^x \in D\}}(\omega) - 1 \right| \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \theta_t \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(\tau_D)(\omega) &= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \theta_t \left( \prod_{k=1}^i \mathbb{1}_{\{X_{r_k}^x \in D\}}(\omega) \cdot \left| \prod_{k=1}^j \mathbb{1}_{\{X_{\tilde{r}_k}^x \in D\}}(\omega) - 1 \right| \right) \\ &= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \left( \prod_{k=1}^i \mathbb{1}_{\{X_{t+r_k}^x \in D\}}(\omega) \cdot \left| \prod_{k=1}^j \mathbb{1}_{\{X_{t+\tilde{r}_k}^x \in D\}}(\omega) - 1 \right| \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\forall u \in [t, t+t_j) \cap \mathbb{Q} X_u^x \in D \& \exists v \in [t+t_j, t+t_{j+1}) \cap \mathbb{Q} X_v^x \notin D\}}(\omega) \\ &= \mathbb{1}_{\{\forall u \in [0, t+t_j) \cap \mathbb{Q} X_u^x \in D \& \exists v \in [t+t_j, t+t_{j+1}) \cap \mathbb{Q} X_v^x \notin D\}}(\omega) \\ &= \mathbb{1}_{[t+t_j, t+t_{j+1})}(\tau_D(\omega)) \end{aligned}$$

## C Passeio aleatório

**Definição C.1.** Seja  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Considere  $\{S_n^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ , uma sequência de variáveis aleatórias definidas da seguinte maneira:  $S_0^x = x$  (q.t.p) e para  $n > 0$ ,

$$S_n^x = x + X_1 + X_2 + \dots + X_n = x + \sum_{i=1}^n X_i$$

onde,  $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas em  $\mathbb{Z}^d$  tais que

$$P(X_n = e_i) = P(X_n = -e_i) = \frac{1}{2d}, \text{ para } i = 1, \dots, d$$

e  $\{e_1, \dots, e_d\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^d$ .

A sequência  $\{S_n^x\}$  é um processo estocástico discreto chamado *passeio aleatório simples d-dimensional começando em x*.

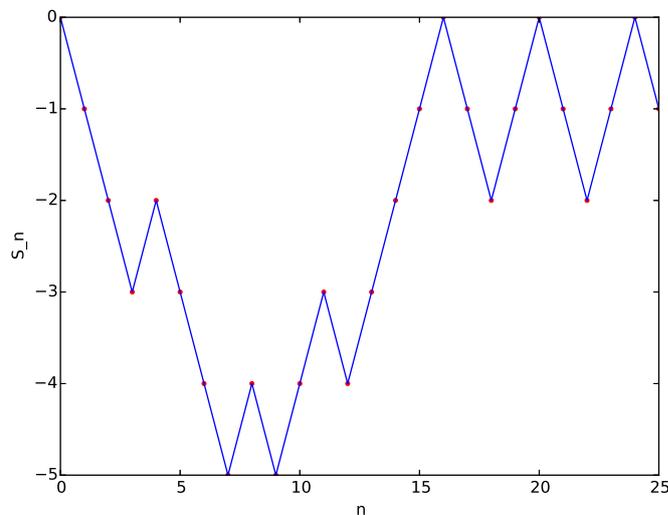


Figura C.1: Passeio aleatório começando em 0 (d=1).

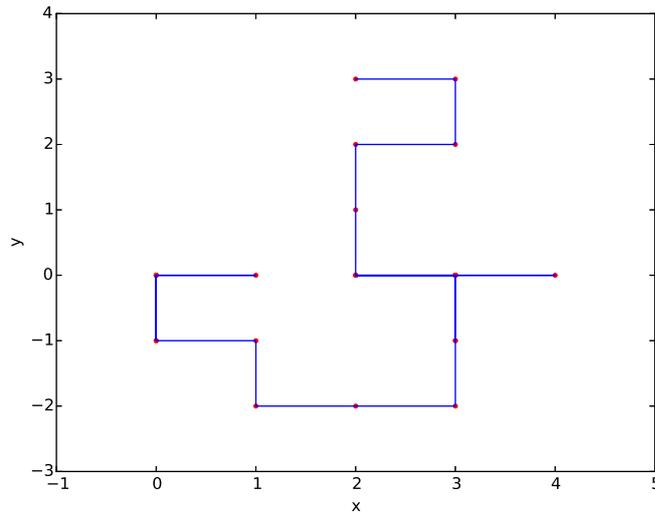


Figura C.2: Passeio aleatório começando em  $(0,0)$  ( $d=2$ ).

Abaixo, listamos algumas propriedades do passeio aleatório  $S_n^x$ .

(i)  $E[S_n^x] = x$ .

(ii) (*homogeneidade*) Para todo  $n, m, k \in \mathbb{N}$  e  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$P(S_{n+k}^z = y | S_n^z = x) = P(S_{m+k}^z = y | S_m^z = x)$$

(iii) (*simetria*) Para todo  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$P(S_{n+k}^z = y | S_n^z = x) = P(S_{n+k}^z = x | S_n^z = y)$$

(iv) Seja  $B \in \mathbb{Z}^d$  limitado. Então,

$$P(\tau_{B,x} < \infty) = 1, \text{ para todo } x \in B.$$

onde  $\tau_{B,x} = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n^x \notin B\}$  é o primeiro tempo de saída do conjunto  $B$  definido no apêndice B.

Essa propriedade pode ser vista como “O passeio sai de qualquer conjunto limitado em tempo finito”.

*Observação C.1.* Explicaremos a penúltima igualdade nas contas do fim da seção 2.1.

Queremos mostrar que, dados  $x \in A$ ,  $y \in \partial A$  e  $z \in \bar{A}$  com  $d(z, x) = 1$ , então  $P(S_{\tau_A}^x = y | S_1^x = z) = P(S_{\tau_A}^z = y)$ . Se  $z \in \partial A$  a igualdade é trivial. Considere  $z \in A$ . Temos,

$$P(S_{\tau_A}^x = y | S_1^x = z) = \frac{P(S_{\tau_A}^x = y \cap S_1^x = z)}{P(S_1^x = z)} = P(S_{\tau_A}^x = y, S_1^x = z) \cdot 2d.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \{S_{\tau_A}^x = y, S_1^x = z\} &= (\{\exists n > 2 \forall k \in \{2, \dots, n-1\} S_k^x \in A \& S_n^x = y\} \cup \{S_2^x = y\}) \cap \{S_1^x = z\} \\ &= \left( \left[ \bigcup_{n>2} \bigcap_{k=2}^{n-1} \{S_k^x \in A\} \cap \{S_n^x = y\} \right] \cap \{S_1^x = z\} \right) \cup (\{S_2^x = y\} \cap \{S_1^x = z\}) \\ &= \left[ \bigcup_{n>2} \bigcap_{k=2}^{n-1} \{z + X_2 + \dots + X_k \in A\} \cap \{z + X_2 + \dots + X_n = y\} \right] \\ &\quad \cap \{X_1 = z - x\} \cup (\{X_2 = y - z\} \cap \{X_1 = z - x\}) \end{aligned}$$

Seja  $\tilde{X}_{i-1} = X_i$ .

$$\begin{aligned} \{S_{\tau_A, x}^x = y, S_1^x = z\} &= \left[ \bigcup_{n>2} \bigcap_{k=2}^{n-1} \{z + X_2 + \dots + X_k \in A\} \cap \{z + X_2 + \dots + X_n = y\} \right] \\ &\quad \cap \{X_1 = z - x\} \cup (\{X_2 = y - z\} \cap \{X_1 = z - x\}) \\ &= \left[ \bigcup_{n>2} \bigcap_{k=2}^{n-1} \{z + \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_{k-1} \in A\} \cap \{z + \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_{n-1} = y\} \right] \\ &\quad \cap \{\tilde{X}_0 = z - x\} \cup (\{\tilde{X}_1 = y - z\} \cap \{\tilde{X}_0 = z - x\}) \\ &= \left[ \bigcup_{m>1} \bigcap_{l=1}^{m-1} \{z + \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_l \in A\} \cap \{z + \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_m = y\} \right] \\ &\quad \cap \{\tilde{X}_0 = z - x\} \cup (\{z + \tilde{X}_1 = y\} \cap \{\tilde{X}_0 = z - x\}) \\ &= (\tilde{S}_{\tau_A}^z = y) \cap \{\tilde{X}_0 = z - x\} \end{aligned}$$

onde o passeio aleatório  $\tilde{S}_m^z = z + \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_m$  para todo  $m \in \{1, 2, \dots\}$ .

Como  $\tilde{X}_0$  é independente de  $\tilde{S}_m^z$  para todo  $m \in \{1, 2, \dots\}$ , temos que

$$\begin{aligned}
P(S_{\tau_A, x}^x = y, S_1^x = z) &= P((\tilde{S}_{\tau_A}^z = y) \cap \{\tilde{X}_0 = z - x\}) \\
&= P(\tilde{S}_{\tau_A}^z = y) \cdot P(\tilde{X}_0 = z - x) \\
&= \frac{P(\tilde{S}_{\tau_A}^z = y)}{2d}
\end{aligned}$$

e portanto

$$P(S_{\tau_A}^x = y | S_1^x = z) = P(\tilde{S}_{\tau_A}^z = y) = P(S_{\tau_A}^z = y).$$

## D

### O movimento Browniano

**Definição.** Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , um *processo estocástico  $n$ -dimensional* é uma família de variáveis aleatórias  $n$ -dimensionais  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  definidas em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Um processo estocástico define um conjunto de distribuições

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k),$$

onde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k < \infty$  e  $F_i \in \mathbb{R}^n$  é um boreliano. O chamamos de *conjunto das distribuições de dimensão finita de  $\{X_t\}$* .

**Teorema D.1. Extensão de Kolmogorov.** Para cada  $k \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k < \infty$ , seja  $\nu_{t_1, \dots, t_k}$  medida de probabilidade em  $\mathbb{R}^k$  tal que

$$\nu_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)}) \quad (\text{D.0.1})$$

para todas as permutações  $\sigma$  sobre  $\{1, 2, \dots, k\}$  e

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \nu_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n) \quad (\text{D.0.2})$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Então existe um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e um processo estocástico  $\{X_t\}$  em  $\Omega$  tal que,

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k < \infty$  e todo boreliano  $F_i$ .

Ver [14] apêndice 1.

**Definição D.1.** Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  e defina

$$p(t, x, y) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \quad \text{para } y \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

Para  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  definimos as medidas

$$\nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) := \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

onde  $dy = dy_1 \dots dy_k$  é a notação para a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$  e por convenção  $p(0, x, y) dy = \delta_x(y)$ . Estendemos essa definição para todas as sequências finitas de  $t'_i$ s (não precisam ser crescentes) de forma que satisfaçam a condição (D.0.1). As medidas definidas acima satisfazem as hipóteses do teorema da extensão de Kolmogorov e portanto, existe um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e um processo estocástico  $\{B_t^x\}_{t \geq 0}$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tal que as distribuições de dimensão finita de  $B_t^x$  são dadas por tais medidas. Tal processo é chamado *movimento Browniano  $n$ -dimensional* começando em  $x$ .

A seguir, listaremos algumas das propriedades do movimento Browniano:

- (i)  $B_0^x = x$  (*q.t.p.*).
- (ii)  $E[\langle B_t^x - x, B_s^x - x \rangle] = n \cdot \min(s, t)$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) Dados  $t > s \geq 0$ ,  $B_t^x - B_s^x$  possui distribuição Normal multivariada  $\mathcal{N}(x, (t - s) \cdot I_n)$ , i.e, a distribuição de  $B_t^x - B_s^x$  possui densidade da forma

$$p(y) = \left( \frac{|A|}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot (y - x)^T A (y - x) \right)$$

onde  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $A = ((t - s) \cdot I_n)^{-1}$  onde  $I_n$  é a matriz identidade  $n$ -dimensional.

- (iv) O movimento Browniano possui incrementos independentes, i.e,

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

são independentes para quaisquer  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ .

- (v) Existe uma versão do movimento Browniano que possui caminhos contínuos (*q.t.p.*), i.e, existe um processo estocástico  $Y_t$  satisfazendo

$$P(\{\omega; B_t^x(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1 \quad \forall t$$

tal que o conjunto dos caminhos  $\omega$  para os quais  $Y_t(\omega)$  é contínuo em  $t$  possui medida total. Os processos  $Y_t$  e  $B_t^x$  possuem as mesmas funções de distribuição de dimensão finita e portanto, ao longo do texto, consideraremos que  $B_t^x$  é essa versão de caminhos contínuos.

- (vi) O movimento Browniano é invariante por transformações ortogonais, i.e, se  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação ortogonal então  $A(B_t^0)$  é o movimento Browniano começando em 0.
- (vii) Seja  $t_0 \geq 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Então  $\tilde{B}_t = B_{t_0+t}^x - B_{t_0}^x$  é o movimento browniano começando na origem.

As demonstrações destas propriedades podem ser encontradas seção 2.2 e no apêndice A de [10].

*Observação D.1.* Acima discutimos a existência de um processo estocástico, que chamamos movimento Browniano, utilizando o teorema da extensão de Kolmogorov e partindo de suas distribuições de dimensão finita. Vimos também algumas propriedades deste processo. Uma rota alternativa, seria partir do passeio aleatório e construir linhas poligonais convenientemente reescaladas que no limite (em um sentido apropriado) aproximam os caminhos do movimento Browniano. Esta aproximação é justificada pelo chamado teorema de Donsker. Para detalhes, ver seção 8. em [15].

## E

### Integral de Itô e EDE's

Para demonstrações dos resultados encontrados na presente seção, ver capítulos 3,4 e 5 em [10]. Considere o espaço de probabilidade  $(\omega, \mathcal{F}, P)$ . Queremos dar significado matemático a equações em  $X_t$  do tipo:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

onde  $B_t = B_t^0$  é o movimento Browniano com  $B_0^0 = 0 \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, \infty)$  e  $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções. Dizemos que uma solução para essa equação é um processo estocástico  $X_t^x$  tal que

$$X_t^x = x + \int_0^t b(s, X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^x)dB_s.$$

Mostraremos, em seguida, a interpretação de Itô para a última integral. Queremos dar significado a

$$\int_r^t f(s, \omega)dB_s(\omega)$$

para classes convenientes de processos  $\{f(s, \cdot), s \in [S, T]\}$ . Começaremos com uma classe simples de funções  $f$  e estenderemos o conceito para uma classe maior de funções. Assuma  $0 \leq S \leq T$  e que  $f$  é da forma

$$\phi(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $S \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$ . Para tais funções definimos:

$$\int_S^T \phi(t, \omega)dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}],$$

**Definição E.1.** Considere o conjunto  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$  a classe de funções  $f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

- (i)  $f$  is  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -mensurável onde  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $[0, \infty)$ .
- (ii)  $f(t, \cdot)$  é adaptado com respeito ao filtro  $\{\mathcal{F}_t\}$ , onde  $\mathcal{F}_t$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$ , i.e,  $f(t, \cdot)$  é  $CF_t$ -mensurável para todo  $t \in [0, \infty]$ .
- (iii)  $E[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt] < \infty$

As funções  $\phi \in \mathcal{V}$  da forma  $\phi(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$  serão chamadas *elementares* daqui em diante.

**Proposição E.1. Isometria de Itô** Se  $\phi(t, \omega)$  é limitada e elementar então

$$E \left[ \left( \int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left[ \int_S^T \phi(t, \omega)^2 dt \right].$$

**Demonstração.** De fato, sendo  $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ , temos

$$E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ E[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j) & \text{se } i = j \end{cases}$$

uma vez que  $e_i e_j \Delta B_i$  e  $\Delta B_j$  são independentes quando  $i < j$ . Portanto,

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] &= \sum_{i,j} E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \sum_j E[e_j^2] \cdot (t_{j+1} - t_j) \\ &= E \left[ \int_S^T \phi(t, \omega)^2 dt \right], \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Para qualquer função  $f \in \mathcal{V}$  podemos escolher funções elementares e limitadas  $\phi_n \in \mathcal{V}$  tais que

$$E \left[ \int_S^T (f - \phi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Para mais detalhes sobre essa aproximação, ver seção 3.1 em [10].

Defina

$$\mathcal{I}[f](\omega) := \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega).$$

O limite existe e é um elemento de  $L^2(P)$  uma vez que, pela isometria de Itô,  $\{\int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega)\}$  é uma sequência de Cauchy em  $L^2(P)$ . Portanto,

podemos definir a integral de Itô para uma função arbitrária  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  da seguinte forma:

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega) \quad (\text{limite em } L^2(P))$$

onde  $\{\phi_n\}$  é uma sequência de funções elementares tais que

$$E \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, temos:

**Proposição E.2. Isometria de Itô**

$$E \left[ \left( \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left[ \int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right], \text{ para toda } f \in \mathcal{V}(S, T).$$

**Proposição E.3.** Se  $f, f_n \in \mathcal{V}(S, T)$  para  $n = 1, 2, \dots$  e  $E[\int_S^T (f(t, \omega) - f_n(t, \omega))^2 dt] \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , então

$$\int_S^T f_n(t, \omega) dB_t(\omega) \rightarrow \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega), \text{ em } L^2(P)$$

Agora apresentamos algumas propriedades da integral de Itô.

**Proposição E.4.** Sejam  $f, g \in \mathcal{V}(0, T)$  e  $0 \leq S \leq U \leq T$ . Então

(i)  $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$  q.t.p. em  $\Omega$ .

(ii)  $\int_S^T cf + g dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$  q.t.p em  $\Omega$ .

(iii)  $E[\int_S^T f dB_t] = 0$ .

(iv)  $\int_S^T f dB_t$  é  $\mathcal{F}_T$ -mensurável.

Podemos ver a integral de Itô como um processo estocástico.

**Proposição E.5.** Seja  $f \in \mathcal{V}(0, T)$ . Então existe uma versão de

$$\int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega); \quad 0 \leq t \leq T,$$

que possui os caminhos contínuos q.t.p. Ou seja, existe um processo estocástico com caminhos contínuos q.t.p  $J_t$  em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tal que

$$P[J_t = \int_0^t f dB_s] = 1$$

para todo  $t, 0 \leq t \leq T$ .

Além disso, uma das vantagens da integral de Itô é que esta se trata de um Martingal.

**Proposição E.6.** *Seja  $f \in \mathcal{V}(0, T)$  para todo  $T$ . Então*

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega)$$

é um martingal com respeito a  $\mathcal{F}_t$  e (pela desigualdade de Doob B.1)

$$P[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot E[\int_0^T f(s, \omega)^2 ds]; \quad \lambda, T > 0.$$

Até aqui temos a integral de Itô para funções  $f \in \mathcal{V}$ . Vamos estender tal definição. Mudando a condição (ii) na definição de  $\mathcal{V}$  para

- (ii') Existe um filtro  $\mathcal{H}_t; t \geq 0$  tal que
  - a)  $B_t$  é um martingal com respeito a  $\mathcal{H}_t$
  - b)  $f(t, \cdot)$  é  $\mathcal{H}_t$ -adaptado.

Com essa condição, toda a construção anterior funciona da mesma maneira. Tal extensão se mostra útil uma vez que nos permite definir a integral de Itô multidimensional. A ideia é a seguinte:

Suponha que  $B_k(t, \omega)$  seja a  $k$ -ésima coordenada do movimento Browniano  $n$ -dimensional começando na origem  $(B_1, \dots, B_n)$ . Seja  $\mathcal{F}_t^{(n)}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $B_1(s_1, \cdot), \dots, B_n(s_n, \cdot); s_k \leq t$ . Então  $B_k$  é martingal com respeito a  $\mathcal{F}_t^{(n)}$  e portanto podemos tomar  $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$  para (ii'). Até agora temos integrais do tipo  $\int_0^t f(s, \omega) dB_k(s, \omega)$  para funções  $f$  que são  $\mathcal{F}_t^{(n)}$ -adaptadas. Por exemplo,

$$\int_0^t B_2 dB_1 \text{ ou } \int_0^t \text{sen}(B_1 + B_2) dB_2$$

e assim,

**Definição E.2.** Seja  $B = (B_1, \dots, B_m)$  o movimento browniano  $m$ -dimensional. Defina ainda  $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{n \times m}(S, T)$  conjunto das matrizes  $n \times m$ ,  $v = [v_{ij}(t, \omega)]$ , onde cada entrada  $v_{ij}(t, \omega)$  satisfazem (i) e (iii) da definição de  $\mathcal{V}$  e (ii)' com respeito a algum filtro  $\mathcal{H}_t$ . Se  $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{n \times m}(S, T)$  definimos

$$\int_S^T v dB = \int_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ \vdots \\ dB_m \end{pmatrix}$$

Vemos que a integral de Itô multidimensional é um vetor-coluna cuja  $i$ -ésima componente é a seguinte soma de integrais de Itô

$$\sum_{j=1}^m \int_S^T v_{ij}(s, \omega) dB_j(s, \omega).$$

Para notação, quando  $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{(m)}$  escreveremos  $\mathcal{V}^{n \times m}(S, T)$  e se  $m = 1$ ,  $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^n(S, T)$ . E também,

$$\mathcal{V}^{n \times m} = \mathcal{V}^{n \times m}(0, \infty) = \bigcap_{T>0} \mathcal{V}^{n \times m}(0, T)$$

Com a integral de Itô multidimensional podemos trabalhar sistemas de equações diferenciais estocásticas

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_t = x \end{cases}$$

onde  $B_t = B_t^0$  é o movimento Browniano com  $B_0^0 = 0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Uma solução para essa equação é um processo estocástico  $X_t^x$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$X_t^x = x + \int_0^t b(s, X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^x)dB_s.$$

**Proposição E.7. Fórmula de Itô 1-dimensional** *Sejam  $g(t, x) \in C^2([0, \infty)) \times \mathbb{R}$  e  $B_t$  o movimento Browniano 1-dimensional e  $X_t$  um processo estocástico que satisfaz*

$$dX_t = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dB_t$$

onde  $v$  satisfaz (i) e (iii) na definição E.1 e (ii'). Suponha ainda que  $u$  é adaptado com respeito a  $\mathcal{H}_t$  e

$$P \left[ \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \quad \forall t \geq 0 \right].$$

Então

$$Y_t = g(t, X_t)$$

satisfaz

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

onde  $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$  é calculado seguindo

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

Ou seja,

$$dY_t = \left( \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) \cdot u(t, \omega) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(t, X_t) \cdot v^2(t, \omega) \right) dt + g_x(t, X_t) \cdot v(t, \omega)dB_t.$$

**Proposição E.8. Fórmula de Itô  $n$ -dimensional** *Sejam  $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x)) : ([0, \infty)) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma aplicação  $C^2$  e  $B_t$  o movimento Browniano  $m$ -dimensional e  $X_t$  processo estocástico que satisfaz*

$$dX_t = udt + vdB_t$$

ou usando notação matricial,

$$\begin{cases} dX_1 &= u_1dt + v_{11}dB_1 + \dots + v_{1m}dB_m \\ \vdots &= \vdots \\ dX_n &= u_ndt + v_{n1}dB_1 + \dots + v_{nm}dB_m \end{cases}$$

onde  $v_{ij}$  satisfaz (i) e (ii) na definição E.1 e (ii)' para  $1 \leq i \leq n$ . Suponha ainda que  $u_{ij}$  é adaptado com respeito a  $\mathcal{H}_t$  e

$$P \left[ \int_0^t |u_{ij}(s, \omega)| ds < \infty \quad \forall t \geq 0 \right]$$

para  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq m$ .

Então a  $k$ -ésima coordenada de

$$Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_p(t)) = g(t, X_t)$$

satisfaz

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_i dX_j,$$

onde

$$dt \cdot dB_i = dB_i \cdot dt = 0, \quad dB_i \cdot dB_j = \delta_{ij}dt.$$

Ou seja,

$$dY_k = \left( \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t) + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t) \cdot u_i(t, \omega) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \cdot (vv^T)_{ij}(t, \omega) \right) dt + \sum_{i,l} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t) \cdot v_{il}(t, \omega)dB_l.$$

**Teorema E.1. (Existência e unicidade para equações diferenciais estocásticas.)** *Seja  $T > 0$  e  $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  funções mensuráveis satisfazendo*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$$

para alguma constante  $C$  e

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D(|x - y|); \quad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$$

para alguma constante  $D$ .

Seja  $Z$  uma variável aleatória independente de  $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$  e tal que

$$E[|Z|^2] < \infty.$$

Então a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, & 0 \leq t \leq T \\ X_0 = Z \end{cases}$$

Possui uma solução única com os caminhos contínuos q.t.p tal que

$X_t$  é  $\mathcal{F}_t^Z$ -adaptado onde  $\mathcal{F}_t^Z$  é gerada por  $Z$  e  $\{B_s; s \leq t\}$  e

$$E \left[ \int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty$$

A solução  $X_t$  encontrada acima é chamada *solução forte*, por que a versão  $B_t$  do movimento Browniano é dada anteriormente e a solução  $X_t$  construída a partir desta é  $\mathcal{F}_t^Z$ -adaptada. Se nos são dadas apenas as funções  $b$  e  $\sigma$  e buscamos um par de processos estocásticos  $((\tilde{X}_t, \tilde{B}_t), \mathcal{H}_t)$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{H}, P)$  que satisfaça

$$d\tilde{X}_t = b(t, \tilde{X}_t)dt + \sigma(t, \tilde{X}_t)d\tilde{B}_t, \quad 0 \leq t \leq T, \tilde{X}_0 = Z,$$

então  $\tilde{X}_t$  é chamada *solução fraca*. Aqui  $\mathcal{H}_t$  é um filtro tal que  $\tilde{X}_t$  é  $\mathcal{H}_t$ -adaptado e  $\tilde{B}_t$  é um martingal com respeito a  $\mathcal{H}_t$ .

**Proposição E.9.** *Se  $b$  e  $\sigma$  satisfazem as hipóteses da proposição anterior então temos que uma solução (fraca ou forte) é fracamente única, i.e, duas soluções possuem as mesmas funções de distribuição de dimensão finita.*

## Referências Bibliográficas

- [1] Gregory F. Lawler, *Random walk and the heat equation*, Student Mathematical Library, vol. 55, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [2] Gregory F. Lawler, *Intersections of random walks*, Probability and its Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- [3] James W. Demmel, *Applied numerical linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997.
- [4] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [5] Fritz John, *Partial differential equations*, fourth ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] Folkmar Bornemann, Dirk Laurie, Stan Wagon, e Jörg Waldvogel, *The SIAM 100-digit challenge*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2004, A study in high-accuracy numerical computing, With a foreword by David H. Bailey.
- [7] Gerald B. Folland, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [8] Avner Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [9] Avner Friedman, *Stochastic differential equations and applications. Vol. 1*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, Probability and Mathematical Statistics, Vol. 28.

- [10] Bernt Øksendal, *Stochastic differential equations*, sixth ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003, An introduction with applications.
- [11] R. Durrett, *Probability: theory and examples*, fourth ed., Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [12] Daniel Revuz e Marc Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [13] Richard F. Bass, *Probabilistic techniques in analysis*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, New York, 1995.
- [14] John Lamperti, *Stochastic processes*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, A survey of the mathematical theory, Applied Mathematical Sciences, Vol. 23.
- [15] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, second ed., Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, A Wiley-Interscience Publication.
- [16] D. R. Grimmett, G. R. e Stirzaker, *Probability and random processes*, third ed., Oxford University Press, New York, 2001.
- [17] Grigorios A. Pavliotis, *Stochastic processes and applications*, Texts in Applied Mathematics, vol. 60, Springer, New York, 2014, Diffusion processes, the Fokker-Planck and Langevin equations.