

### 3. Implementações numéricas

Este capítulo abordará o desenvolvimento de todas as partes do problema de otimização cônica quadrática, começando pela formulação da função objetivo e das restrições de igualdade (condições de equilíbrio). Também será apresentado o procedimento para transformar os critérios de ruptura como são convencionalmente conhecidos na forma cônica quadrática. A implementação da análise limite numérica neste trabalho foi realizada através da linguagem computacional MATLAB (2004).

Dentre as diversas formulações abordadas em 2.3.3, a deste trabalho é colocada segundo o teorema do limite inferior como um problema de programação cônica quadrática. A equação de equilíbrio é desenvolvida a partir do princípio das potências virtuais, configurando uma formulação fraca. No mais, a discretização é feita por elementos hexaédricos de oito nós nos quais as velocidades são interpoladas linearmente e o tensor de tensões é constante no elemento.

Esta escolha para o espaço de interpolação que garante velocidades contínuas entre elementos em um problema resolvido através do limite inferior já foi realizada por Krabbenhoft et al. (2005) para elemento triangulares bidimensionais. Araújo (1997) comparou o desempenho de dois elementos quadriláteros com interpolação das tensões distintas: tensão constante e tensão variando bilinearmente no elemento. As análises com os elementos quadriláteros bilineares para velocidades e constante para tensões geraram os melhores resultados. Desde então este elemento vem sendo utilizado para se resolver problemas de análise limite segundo o teorema do limite inferior (Farfán, 2000; Carrion Pachás, 2009; Cruz, 2013; Tapia Morales, 2013). Assim como nesses trabalhos, nesta formulação mista não há inserção de nenhum tipo de descontinuidades.

Na sequência deste capítulo, as atribuições das condições de contorno do problema e o método iterativo para calcular o fator de segurança serão explicados. O último item apresenta a base teórica para obtenção do mecanismo de colapso.

### 3.1. Função objetivo e variáveis

A formulação proposta segue o teorema do limite inferior. Como exposto em 2.3.2 objetiva-se maximizar o fator de colapso em um campo de tensões estaticamente admissível. O fator de colapso é um escalar multiplicador da carga aplicada. Este trabalho tem como foco a estabilidade de taludes, portanto a carga a ser majorada é simplesmente a força de corpo, ou seja o peso do talude. A função objetivo a ser maximizada nada mais é do que o próprio fator de colapso,  $\lambda$ :

$$\text{Maximizar } \lambda \quad (3.1)$$

As variáveis do problema são o fator de colapso e as seis componentes de tensões para cada ponto em que ela precisa ser conhecida. Como se verá no item 3.3, as tensões nos elementos,  $\hat{\sigma}^{\text{el.i}}$ , são consideradas constantes. Portanto, se E for o número de elementos totais do domínio, o vetor de variáveis de tensões,  $\hat{\sigma}$ , será um vetor de dimensão  $6E \times 1$ :

$$\hat{\sigma} = \left\{ \begin{matrix} \hat{\sigma}^{\text{el.1}} \\ \hat{\sigma}^{\text{el.2}} \\ \vdots \\ \hat{\sigma}^{\text{el.E}} \end{matrix} \right\}_{6E \times 1} \quad \therefore \hat{\sigma}^{\text{el.i}} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_x^{\text{el.i}} \\ \sigma_y^{\text{el.i}} \\ \sigma_z^{\text{el.i}} \\ \tau_{xy}^{\text{el.i}} \\ \tau_{xz}^{\text{el.i}} \\ \tau_{yz}^{\text{el.i}} \end{matrix} \right\}_{6 \times 1} \quad (3.2)$$

### 3.2. Condições de equilíbrio

O equilíbrio no domínio é garantido pelo princípio da taxa de trabalho virtual, ou princípio das potências virtuais. A expressão, na Eq.(3.3), é obtida ao se igualar a potência interna (Eq. (2.27)) com a potência externa (Eq.(2.26)).

Neste trabalho duas maneiras diferentes foram usadas para calcular o equilíbrio. A primeira a ser apresentada é a forma mais usual. Já a segunda torna o problema mais estável e por isso é mais eficaz na solução de problemas com geometria complexa ou ainda no caso de solos saturados ou não saturados, como verificou Cruz (2013).

### 3.2.1. Equação de equilíbrio convencional

Para aplicabilidade na estabilidade de taludes, a única força externa atuante é a força de corpo  $\mathbf{F}$ , que será majorada segundo o fator de colapso  $\lambda$ . Levando isso em consideração e colocando a equação na forma matricial, tem-se:

$$\int_V \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_V \delta \dot{\mathbf{u}}^T \lambda \mathbf{F} \, dV \quad (3.3)$$

Ao se discretizar o domínio em elementos finitos, tanto as velocidades,  $\dot{\mathbf{u}}$ , quanto as tensões,  $\boldsymbol{\sigma}$ , no elemento são aproximadas por interpolação dos valores nodais  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ . Visto que a taxa de deformação,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , é uma derivada das velocidades, ela também pode ser interpolada através dos valores nodais da velocidade.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (3.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla \mathbf{N}_u \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_u \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

Vale ressaltar que as funções de interpolação de tensões,  $\mathbf{N}_\sigma$ , são independentes das de velocidade,  $\mathbf{N}_u$ .  $\mathbf{B}_u$  é a matriz deformação-deslocamento. As funções escolhidas serão detalhadas no item 3.3.

Substituindo as Eqs. (3.4) em (3.3):

$$\int_V \delta \hat{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{B}_u^T \cdot \mathbf{N}_\sigma \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \, dV = \int_V \delta \hat{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{N}_u^T \cdot \lambda \mathbf{F} \, dV \quad (3.5)$$

Simplificando a Eq. (3.5) ao considerar  $\delta \hat{\mathbf{u}}$  arbitrário, tem-se:

$$\int_V \mathbf{B}_u^T \cdot \mathbf{N}_\sigma \, dV \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \int_V \mathbf{N}_u^T \cdot \mathbf{F} \, dV \quad (3.6)$$

Em uma forma ainda mais compacta, essa equação de equilíbrio pode ser escrita dessa maneira:

$$\mathbf{G} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \mathbf{f} \quad (3.7)$$

$\mathbf{G}$  é a matriz de equilíbrio e  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças nodais aplicadas:

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{B}_u^T \cdot \mathbf{N}_\sigma dV$$

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}_u^T \cdot \mathbf{F} dV$$
(3.8)

### 3.2.2. Equação de equilíbrio com força horizontal fictícia aplicada

Ao se formular a equação de equilíbrio como exposto no item 3.2.1, verificou-se que alguns problemas de geometria complexa ou com fluxo ficavam mal colocados. A solução para estabilizar o problema baseou-se no método de Sarma (1973). Este método de equilíbrio limite de Sarma tem como objetivo encontrar a aceleração sísmica crítica, aplicada como uma força horizontal nas fatias. No entanto, o método também pode ser utilizado para determinar o fator de segurança em uma condição estática, se os parâmetros de resistência do solo são reduzidos até que a força horizontal requerida para obter ruptura seja nula.

Aqui o procedimento é o mesmo. Além de o talude estar submetido ao seu próprio peso,  $\mathbf{F}$ , outra força externa atuante é a força de corpo horizontal fictícia,  $\mathbf{F}_h$ . Neste caso, será esta a força majorada pelo fator de colapso. Assim a equação do princípio da potência virtual:

$$\int_V \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{F} dV + \int_V \delta \dot{\mathbf{u}}^T \lambda \mathbf{F}_h dV$$
(3.9)

Mais uma vez, faz-se uso da discretização do domínio em elementos finitos, onde os valores de tensão e velocidade são interpolados pelos valores nodais segundo as Eqs. (3.4). A expressão simplificada é:

$$\int_V \mathbf{B}_u^T \cdot \mathbf{N}_\sigma dV \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \int_V \mathbf{N}_u^T \cdot \mathbf{F} dV + \lambda \int_V \mathbf{N}_u^T \cdot \mathbf{F}_h dV$$
(3.10)

De forma compacta, tem-se:

$$\mathbf{G} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f} + \lambda \mathbf{f}_h$$
(3.11)

Como se percebe,  $\mathbf{G}$ , a matriz de equilíbrio, e  $\mathbf{f}$ , o vetor de forças nodais devido ao peso próprio do material, são os mesmos das Eqs. (3.8).  $\mathbf{f}_h$  é o vetor de forças nodais devido à força de corpo horizontal aplicada.

### 3.3. Discretização espacial

O domínio foi discretizado em elementos hexaédricos de oito nós. As funções de interpolação usadas para aproximar as velocidades no domínio são funções lineares e estão apresentadas, em coordenadas locais (r,s,t) nas Eqs.(3.12):

$$\begin{aligned}
 N_{u1} &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) & N_{u5} &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) \\
 N_{u2} &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) & N_{u6} &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) \\
 N_{u3} &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) & N_{u7} &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) \\
 N_{u4} &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) & N_{u8} &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Como esclarece a última das Eqs. (3.4), a matriz que relaciona as taxas de deformação com as de deslocamento,  $\mathbf{B}_u$ , é o gradiente das funções de interpolação,  $\mathbf{N}_u$ . No entanto, para se calcular este gradiente, é preciso da matriz jacobina,  $\mathbf{J}$ . Essa matriz transforma as derivadas de uma função qualquer em relação às coordenadas locais,  $\mathbf{r}$ , em derivadas em relação às coordenadas globais,  $\mathbf{x}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \tag{3.13}$$

Para isso é preciso ter funções de forma, funções que são utilizadas para transformar as coordenadas locais em globais e vice-versa. As funções de forma escolhidas são as mesmas que as funções de interpolação lineares descritas em (3.12). A Figura 3.1a mapeia a ordem de numeração local do elemento assim como o eixo de coordenadas locais. Para maior detalhamento sobre a montagem da matriz  $\mathbf{B}$ , aconselha-se consultar, por exemplo, a Desai e Abel (1972, p.143). A matriz  $\mathbf{B}$  correspondente a um elemento terá dimensões de 6 X 24.

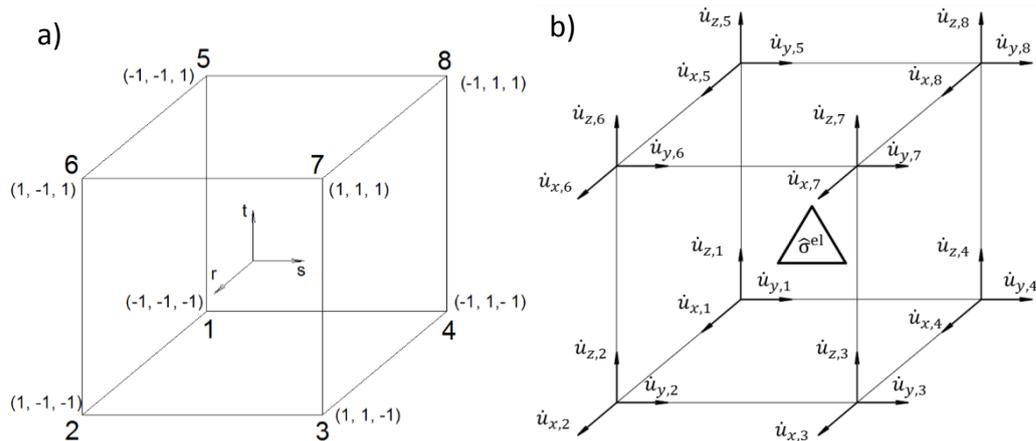


Figura 3.1 – a) Ordem de numeração local e eixo de coordenadas locais b) Discretização das velocidades e da tensão no elemento.

Já o tensor de tensões foi considerado constante para cada elemento. Desta maneira, para cada elemento há apenas um tensor de tensões correspondente (composto por seis componentes independentes, ver Eq.(3.2)). Quanto às velocidades, para cada nó há três componentes,  $\dot{u}_x$ ,  $\dot{u}_y$  e  $\dot{u}_z$  (Figura 3.1b).

Considerado os espaços de interpolação acima mencionados para as tensões e para as velocidades, a Eq. (3.8) relativa à matriz de equilíbrio,  $\mathbf{G}$ , pode ser simplificada, como:

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{B}_u^T dV \quad (3.14)$$

Vale lembrar que as matrizes até então mencionadas são matrizes globais, montadas a partir das matrizes elementares. Se  $E$  for o número de elementos e  $N$  o número de nós do domínio, após a montagem da matriz global,  $\mathbf{G}$  terá as dimensões de  $3N \times 6E$ .  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}_h$  terão a mesma dimensão, de  $3N \times 1$ .

A montagem dos vetores globais  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}_h$  é feita somando os valores da  $i$ -ésima linha do vetor local na  $n$ -ésima linha do vetor global. Enquanto que  $i$  corresponde ao grau de liberdade local, que varia de 1 a 24,  $n$  corresponde à numeração global referente a este grau de liberdade. Para a matriz  $\mathbf{G}$ , a correspondência para as linhas da matriz local para a global se procede da mesma maneira ao proposto para os vetores  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}_h$ . No entanto, as colunas da matriz do elemento permanecem justapostas na matriz global, formando uma matriz composta por blocos de matrizes elementares, disjuntos por colunas e acopladas por linhas de acordo com a incidência dos nós.

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \sum_E \mathbf{G}_e = \sum_E \int_{V_e} \mathbf{B}_{u,e}^T dV_e \\
\mathbf{f} &= \sum_E \mathbf{f}_e = \sum_E \int_{V_e} \mathbf{N}_{u,e}^T \cdot \mathbf{F} dV_e \\
\mathbf{f}_h &= \sum_E \mathbf{f}_{h,e} = \sum_E \int_{V_e} \mathbf{N}_{u,e}^T \cdot \mathbf{F}_h dV_e
\end{aligned} \tag{3.15}$$

### 3.4. Integração numérica

Todas as matrizes que compõem a equação de equilíbrio são obtidas a partir da integração no espaço de outras matrizes. Esta integração no volume é realizada numericamente através do método conhecido como quadratura de Gauss-Legendre.

Este método integra funções em intervalos definidos de -1 a 1, e para funções polinomiais, o seu resultado é exato. Com o mesmo princípio de outros métodos de integração numérica, a quadratura de Gauss-Legendre simplifica a integral ao fazer dela um somatório ponderado do valor da função a ser integrada avaliada em determinados pontos, ou seja:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^r W_i \cdot f(x_i) \tag{3.16}$$

onde  $x_i$  são os pontos onde o valor da função,  $f(x)$ , será calculada,  $r$  a quantidade desses pontos de integração e  $W_i$  são os pesos de ponderação. Na quadratura de Gauss-Legendre os pontos de interpolação,  $x_i$ , são as raízes dos polinômios de Legendre de grau  $r+1$ .

A integração numérica neste trabalho foi realizada com apenas dois pontos de integração em cada direção. Os pontos de integração e os pesos de integração nesse caso estão apresentados na Tabela 3.1.

Por se tratar de integrais no volume, a integração será:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s, t) dr ds dt = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 W_i W_j W_k f(r_i, s_j, t_k) \tag{3.17}$$

Tabela 3.1 – Pontos e pesos para a integração numérica.

i	Pontos de integração			Peso
	r <sub>i</sub>	s <sub>i</sub>	t <sub>i</sub>	W <sub>i</sub>
1	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1

Vale ressaltar que será necessário fazer uma transformação de coordenadas, pois enquanto a integração de Gauss-Legendre se aplica para coordenadas locais, com limites de integração de -1 a 1, a integração deve ser realizada no volume real. A matriz jacobiana será responsável por essa transformação. A Eq. (3.18) exemplificará o cálculo da integral para encontrar a matriz de equilíbrio de um elemento,  $\mathbf{G}_e$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e &= \int_{V_e} \mathbf{B}_{u,e}^T dV_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{u,e}^T(r, s, t) \cdot |\mathbf{J}(r, s, t)| dr ds dt = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 W_i W_j W_k \cdot \mathbf{B}_{u,e}^T(r_i, s_j, t_k) \cdot |\mathbf{J}(r_i, s_j, t_k)| \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.5. Critérios de Drucker-Prager na forma cônica quadrática

#### 3.5.1. Critério de Drucker-Prager para solo com poropressão nula

O critério de Drucker-Prager tridimensional colocado na forma cônica quadrática foi primeiramente desenvolvido em Makrodimopolous e Martin (2005). Através de uma transformação linear do tensor de tensões,  $\boldsymbol{\sigma}$  (Eq. (3.2)), em um vetor auxiliar  $\boldsymbol{\rho}$ , o critério de ruptura atenderá ao formato exigido pelo espaço cônico. A matriz  $\mathbf{D}$  e o vetor  $\mathbf{d}$  são responsáveis por essa transformação:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}$$

$$\begin{Bmatrix} z \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & 2\sqrt{3}/6 & -\sqrt{3}/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Ao pertencer ao espaço cônico quadrático, Eq.(3.20), o vetor  $\boldsymbol{\rho}$  reproduz o critério de ruptura de Drucker-Prager, Eq.(2.19), que deve ser satisfeita para cada tensor de tensões. A Eq. (3.21), que substituiu as componentes da Eq.(3.20) segundo a Eq.(3.19), se simplificada, iguala-se a Eq.(2.19) quando colocada em função das componentes do tensor de tensões:

$$\sqrt{\rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 + \rho_5^2 + \rho_6^2} \leq z \quad (3.20)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_z\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\sigma_x + \frac{2\sqrt{3}}{6}\sigma_y - \frac{\sqrt{3}}{6}\sigma_z\right)^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \leq -\alpha(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + k \quad (3.21)$$

Portanto, para que o problema de análise limite possa ser formulado como um problema de otimização cônica quadrática, o vetor de variáveis de tensões,  $\boldsymbol{\sigma}$ , deve ser substituído pelo vetor auxiliar  $\boldsymbol{\rho}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho} - \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{d} \quad (3.22)$$

A formulação completa como um problema de otimização será colocada no item 3.6.

### 3.5.2. Critério de Drucker-Prager considerando o efeito da poropressão

A pressão de água nos vazios do solo ( $u_w$ ), quando compressiva, diminui a tensão efetiva do solo e, por consequência a resistência ao cisalhamento do solo. Isto porque os critérios de ruptura são funções da tensão efetiva e não da tensão total do solo. Portanto, o critério de Drucker-Prager para solos saturados fica da seguinte maneira:

$$\sqrt{J_2} + \alpha(I_1 - 3u_w) - k \leq 0 \quad (3.23)$$

Neste trabalho, tensões compressivas são consideradas negativas, ao contrário da convenção da geotecnia. Os invariantes  $J_2$  e  $I_1$  foram definidos na seção 2.2.3 e aqui também são funções da tensão total. Nota-se que o invariante  $J_2$  terá o mesmo valor quando calculado em termos de tensão efetiva ou de tensão total. Portanto, será apenas no primeiro invariante em termos de tensões totais,  $\sigma$ , que a poropressão,  $u$ , deve ser diminuída, visto que:

$$\sigma' = \sigma - u_w \quad (3.24)$$

Este critério pode ser colocado na forma cônica quadrática, através da transformação linear do vetor de tensões totais,  $\sigma$ , para um vetor auxiliar,  $\rho$ . A transformação é similar à realizada na Eq.(3.19), mudando-se apenas o vetor  $\mathbf{d}$ :

$$\rho = \mathbf{D} \cdot \sigma + \mathbf{d}$$

$$\begin{Bmatrix} z \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & 2\sqrt{3}/6 & -\sqrt{3}/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k + 3u_w \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Para descrever a resistência de solos não saturados, Fredlund (1979, *apud* Fredlund e Rahardjo, 1993) estendeu o critério de Mohr-Coulomb, fazendo uso de duas variáveis de estado de tensões independentes: a tensão normal líquida,  $(\sigma - u_a)$ , e a sucção,  $(u_a - u_w)$ . Nesta equação, a tensão cisalhante,  $\tau$ , depende tanto da coesão efetiva,  $c'$ , quanto das duas componentes anteriormente mencionadas:

$$\tau = c' + (u_a - u_w) \tan \varphi^b + (\sigma - u_a) \tan \varphi' \quad (3.26)$$

O ângulo de atrito efetivo,  $\varphi'$ , está associado com a parcela  $(\sigma - u_a)$ , enquanto que  $\varphi^b$  está relacionado com a contribuição da sucção.  $u_a$  é a pressão do ar, que em todo este trabalho é considerada como igual a atmosférica. Pela equação, percebe-se que a sucção acrescenta resistência ao solo. Este comportamento é condizente com o observado na prática. A poropressão em solos não saturados gera tensões de tração entre os grãos, fazendo com que eles fiquem mais unidos, e portanto, mais resistente (Lu e Likos, 2004). Alguns autores denominam por coesão aparente,  $c_{ap}$ , o somatório dos dois primeiros termos da Eq.(3.26):

$$c_{ap} = c' + (u_a - u_w) \tan \varphi^b \quad (3.27)$$

Para incorporar o efeito da sucção no solo na análise limite, o parâmetro  $k$  do critério de Drucker-Prager foi calculado segundo as Eqs.(2.21), (2.23) ou (2.25), levando essa coesão aparente em consideração. O critério de ruptura e a sua transformação para a forma cônica quadrática, no entanto, permaneceram iguais ao exposto na Eq.(3.19).

### 3.6. Problema de otimização

Os itens anteriores desenvolveram todas as partes de um problema de otimização específico para averiguar a estabilidade de taludes segundo o teorema inferior da análise limite. Neste item, a função objetivo, as restrições de igualdade e as de desigualdades serão colocadas, levando em conta os conhecimentos prévios, de maneira a ordenar o problema que se propõe resolver.

Primeiramente, o problema será considerado como sendo de otimização não-linear convencional, no qual as variáveis são as tensões,  $\sigma$ , e o fator de colapso,  $\lambda$ . Portanto, a desigualdade a que está restrita será uma função não-linear. Relembrando, as equações de desigualdade são o critério de ruptura, neste caso o de Drucker-Prager, como descrito na Eq. (2.19) e serão aqui representadas por  $g(\sigma)$ .

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} & \quad \lambda \\ \text{Sujeito a:} & \quad \mathbf{G} \cdot \sigma = \lambda \mathbf{f} \\ & \quad g(\sigma_i) \leq 0, \quad i = 1 \dots E \end{aligned} \quad (3.28)$$

O tensor de tensões em cada elemento deve atender ao critério de ruptura. Portanto,  $E$  é o número de elementos do domínio, visto que se considera a tensão constante no elemento (item 3.3).

Visando fazer uso da programação cônica de segunda ordem, a restrição de desigualdade deve ser transformada de maneira a cumprir o formato de um cone quadrático, Eq.(3.19) e Eq.(3.20). Para tanto é necessário substituir o vetor de tensões pelo vetor auxiliar  $\rho$ , através da Eq.(3.22). Então o problema pode ser colocado como de otimização cônica quadrática:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar:} && \lambda \\
&\text{Sujeito a:} && \mathbf{G} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{d} = \lambda \mathbf{f} \\
&&& \boldsymbol{\rho}_i \in \mathcal{K}_i, \quad i = 1 \dots E
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$\mathcal{K}$  é o espaço cônico descrito no item (2.36). Ele corresponde ao critério de ruptura de Drucker-Prager para cada vetor de tensões elementar. Cada vetor  $\boldsymbol{\rho}_i$  pertence a um cone, totalizando E cones.

A forma do problema considerando a aplicação da força horizontal fictícia na equação de equilíbrio seria, para a forma convencional do critério de ruptura:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar:} && \lambda \\
&\text{Sujeito a:} && \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} + \lambda \mathbf{f}_h \\
&&& g(\boldsymbol{\sigma}_i) \leq 0, \quad i = 1 \dots E
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Transformando as tensões em variáveis que irão satisfazer o critério de Drucker-Prager na forma cônica quadrática, o problema em (3.31) pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar:} && \lambda \\
&\text{Sujeito a:} && \mathbf{G} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{\rho} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f} + \lambda \mathbf{f}_h \\
&&& \boldsymbol{\rho}_i \in \mathcal{K}_i, \quad i = 1 \dots E
\end{aligned} \tag{3.31}$$

### 3.7. Condições de contorno

As condições de contorno impostas para o estudo de estabilidade de taludes foram de velocidades nulas prescritas. Para tanto, é necessário eliminar, tanto na matriz  $\mathbf{G}$  quanto no vetor  $\mathbf{f}$  (e  $\mathbf{f}_h$ , se ele fizer parte da formulação), as linhas associadas aos graus de liberdade restritos. Isso é necessário para garantir a eliminação dos movimentos de corpo rígido (Borges, 1991, p.74).

### 3.8. Cálculo do fator de segurança

O fator de segurança é um conceito muito utilizado na geotecnia para averiguar a estabilidade de taludes. Apesar de poder ser definido de maneiras

diferentes, usualmente se considera o fator de segurança como a razão entre a tensão cisalhante resistente e a solicitante. Portanto, este fator também pode ser interpretado como um fator de redução (FR) dos parâmetros de resistência do material, coesão ( $c$ ) e ângulo de atrito ( $\varphi$ ), necessário para que o material fique na iminência de ruptura:

$$c_r = \frac{c}{FR} \quad (3.32)$$

$$\varphi_r = \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi}{FR} \right) \quad (3.33)$$

Como já foi apresentado, o resultado direto da análise limite não é o fator de segurança do corpo e sim o nível crítico de solicitação, dado pelo fator de colapso ( $\lambda$ ) multiplicado pela carga externa a ser majorada. Visando encontrar um fator de segurança para o problema, os parâmetros de resistência do solo foram divididos por um fator de redução.

O fator de segurança será o fator de redução para o qual a resolução da análise limite gera um fator de colapso igual a 1 (um), para o caso em que o peso do talude é a força a ser majorada. Esta condição de equilíbrio é descrita no item 3.2.1. No entanto, se a equação de equilíbrio estiver colocada como em 3.2.2, em que uma força horizontal fictícia é majorada, então o fator de segurança será encontrado quando for obtido um fator de colapso igual a zero.

Vale atentar que quando o fator de segurança é encontrado a equação de equilíbrio será a mesma para os dois casos comentados anteriormente. Essa equação corresponde à condição real a que o talude está submetido, ou seja, não há nenhuma força aplicada no talude além do seu próprio peso.

Esta técnica para encontrar o fator de segurança já foi empregada em Cruz (2013) e Tapia Morales (2013). Contudo, neste trabalho, este procedimento foi automatizado através do emprego do método de Newton-Raphson. Para cada valor estimado de FR, encontra-se um valor para o fator de colapso. No entanto, esta relação não é estipulada por uma função conhecida e sim pela resolução do problema de análise limite. Supõe-se que existe uma função contínua,  $g(FR)$ , cujo resultado é o valor de  $\lambda$  resultante da análise limite, ou seja  $g(FR) = \lambda$ .

O método de Newton-Raphson permite obter rapidamente a raiz de uma função  $h$ . Para o caso de o talude estar submetido apenas ao seu próprio peso majorado por  $\lambda$ ,  $h(\text{FR})$  é dado por:

$$h(\text{FR}) = g(\text{FR}) - 1 \quad (3.34)$$

Já se a força ampliada for a força horizontal fictícia, então:

$$h(\text{FR}) = g(\text{FR}) \quad (3.35)$$

O passo a passo do método está descrito na Figura 3.2. Para estimar o próximo valor a ser candidato a raiz da equação  $h(\text{FR})$ , é necessário calcular a derivada dessa função em relação a  $\text{FR}$ . Visto que a função  $h(\text{FR})$  é desconhecida, essa derivada é calculada numericamente:

$$h'(\text{FR}) = \frac{h(\text{FR} + d) - h(\text{FR})}{d} \quad (3.36)$$

$d$  é um acréscimo da ordem de  $10^{-5}$ . Vale lembrar que  $h(\text{FR})$  e  $h(\text{FR}+d)$  depende da resolução do problema de análise limite para fatores de redução iguais a  $\text{FR}$  e  $\text{FR}+d$ .

- 
- 1) Estimativa inicial do fator de redução,  $\text{FR}$
  - 2)  $\text{FR} \rightarrow c_r$  e  $\varphi_r$
  - 3) Resolução do problema de análise limite  $\rightarrow \lambda$
  - 4) Enquanto  $|h(\text{FR})| > \text{Tolerância}$

Cálculo da próxima estimativa de  $\text{FR}$ :

$$\Delta\text{FR} = \frac{-h(\text{FR})}{h'(\text{FR})}$$

$$\text{FR} = \text{FR} + \Delta\text{FR}$$

Repetir 2) e 3)

---

Figura 3.2 – Pseudo código de Newton-Raphson para encontrar o fator de segurança.

### 3.9. Mecanismo de colapso

O problema de análise limite pela formulação do limite inferior tem como variáveis as componentes das tensões para cada elemento e o fator de colapso. No entanto, é possível obter as velocidades nodais, resolvendo-se o problema dual, ou

ainda, solucionando as equações de condição de otimalidade. O mecanismo de colapso fica evidente ao se imprimir essas velocidades na geometria do problema.

O método de Lagrange será primeiramente abordado para que se possa entender as condições de otimalidade. Neste método, o problema é reescrito de maneira a gerar uma função a ser minimizada (ou maximizada, dependendo do problema original) sem restrições adicionais. Isto é realizado somando-se à função objetivo original as restrições multiplicadas por pesos. Esses pesos são chamados de multiplicadores de Lagrange. Este procedimento será exemplificado com o teorema do limite inferior da análise limite como descrito em (3.28). A função Lagrangeana,  $L$ , associada a ele será:

$$L(\boldsymbol{\sigma}, \lambda, \boldsymbol{\nu}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \lambda + \boldsymbol{\nu}^T(\lambda \mathbf{f} - \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}) + \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.37)$$

Os multiplicadores de Lagrange associados as restrições de igualdade são as componentes de  $\boldsymbol{\nu}$  e os que dizem respeito às restrições de desigualdade estão em  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ . A maximização da função  $L$  requer que no ponto crítico o gradiente seja nulo. As condições necessárias de otimalidade, condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), provém desse conhecimento. Além disso, elas estabelecem outras condições para as restrições de desigualdade: as condições de complementariedade. Para este exemplo, as condições de KKT seriam:

$$\mathbf{G}^T \cdot \boldsymbol{\nu} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T \cdot \nabla \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\nu}^T \cdot \mathbf{f} = 1 \quad (3.39)$$

$$\lambda \mathbf{f} = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) \leq \mathbf{0} \quad (3.41)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} \geq \mathbf{0} \quad (3.42)$$

$$\dot{\gamma}_j \cdot \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}_j) = 0, \quad j = 1 \dots m \quad (3.43)$$

Como se vê, essas equações são estritamente relacionadas ao teorema do limite superior. A condição de complementariedade, Eq.(3.43), estabelece que quando  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}_j) < 0$ , então  $\dot{\gamma}_j$  será nulo. Porém quando o tensor de tensões coincidir com a envoltória de ruptura, ou seja  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}_j) = 0$ ,  $\dot{\gamma}_j$  será um valor não negativo. Fazendo um paralelo com o teorema do limite superior, esta condição reflete como se comportam os multiplicadores plásticos. Quando o material ainda não plastificou, esses multiplicadores são nulos. Eles só aparecem, e são

necessariamente não negativos, como descrito em (3.42), quando o material plastifica.

Da mesma forma, os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade,  $\mathbf{v}$ , tem um significado físico. Eles são as velocidades no colapso, como sugerem as Eq.(3.38) e (3.39). A primeira delas descreve exatamente a lei de fluxo associada, em que as taxas de deformação são igualadas às derivadas do critério de ruptura multiplicado pelo multiplicador plástico, como em (2.6). A normalização do trabalho externo utilizada na formulação do teorema do limite superior está representada em (3.39).

Portanto, a resolução desse sistema de equações é uma das possibilidades para se obter o mecanismo de colapso do corpo, como feito por exemplo em Borges (1991). Porém, as velocidades também podem ser encontradas ao se solucionar o problema dual.

O teorema da dualidade em programação matemática permite relacionar dois problemas de maneira a que a solução de um ou de outro resulte no mesmo valor ótimo, ou seja o valor da função objetivo. Na análise limite, este valor ótimo é o fator de colapso. No entanto, enquanto um problema será minimizado o outro será maximizado.

O problema dual também tem por base o método de Lagrange para resolução de equações sujeitas a restrições. As variáveis do problema dual são os chamados multiplicadores de Lagrange.

Geralmente, a teoria da dualidade é apresentada com exemplos de problemas lineares. No entanto, sabendo que esses problemas são particularizações do problema cônico quadrático, a teoria abordada por esses exemplos continua válida. Uma boa referência para entender o desenvolvimento da formulação de um problema dual é o livro de introdução a otimização linear de Bertsimas e Tsitsiklis (1997). Não será do escopo desta dissertação apresentar essa teoria e sim fazer uso dela.

A formulação para encontrar a solução dual de (3.29) segundo a otimização cônica quadrática para a análise limite pode ser encontrada em Makrodimopoulos (2010). Neste trabalho a solução primal é colocada um pouco diferente de (3.29), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar:} & \quad \lambda \\
\text{Sujeito a:} & \quad \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{f} = \mathbf{0} \\
& \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{d} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
& \quad \boldsymbol{\rho}_i \in \mathcal{K}_i, \quad i = 1 \dots E
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Neste caso, a tensão não foi substituída e portanto, foi adicionada mais uma restrição de igualdade no problema para relacionar a tensão com o vetor auxiliar  $\boldsymbol{\rho}$ . Ao passo que  $\lambda$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  são variáveis livres,  $\boldsymbol{\rho}$  se restringe ao espaço cônico quadrático. Foi retirada da formulação original de Makrodimopoulos (2010) o vetor de forças fixas, identificado por  $\mathbf{q}_0$  em seu artigo e o vetor  $\mathbf{R}$ . Ambos são nulos para o caso de se avaliar a estabilidade de taludes sujeita apenas ao peso próprio, cujo material atende ao critério de ruptura de Drucker-Prager.

O problema dual associado a (3.30) será:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar:} & \quad \mathbf{d}^T \cdot \boldsymbol{\gamma} \\
\text{Sujeito a:} & \quad \mathbf{G}^T \cdot \boldsymbol{\nu} + \mathbf{D}^T \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \\
& \quad \mathbf{f}^T \cdot \boldsymbol{\nu} = 1 \\
& \quad \boldsymbol{\gamma}_i \in \mathcal{K}_i^*, \quad i = 1 \dots E
\end{aligned} \tag{3.45}$$

A primeira equação de restrição retrata bem a lei de fluxo associada e a segunda, a normalização do trabalho externo. Desta maneira, a variável  $\boldsymbol{\nu}$ , continua com o mesmo significado físico do que o verificado anteriormente: ela representa a velocidade de cada nó da malha. Assim, fica esclarecido que é possível determinar o mecanismo de colapso, plotando as variáveis  $\boldsymbol{\nu}$  do problema dual. Confirma-se também que a formulação colocada pelo teorema do limite inferior é a dual da formulação pelo limite superior e vice-versa.