

## 3

## Formulação matemática

### 3.1

#### Equacionamento

A célula de Hele-Shaw é definida como duas placas planas paralelas separadas por uma distância infinitamente pequena (Figura 3.1). Vários problemas da mecânica dos fluidos podem ser aproximados aos fluxos de Hele-Shaw e, portanto, a investigação desses fluxos é importante. A aproximação ao fluxo de Hele-Shaw é especialmente relevante para fluxos nos quais o número de Reynolds é tipicamente baixo.

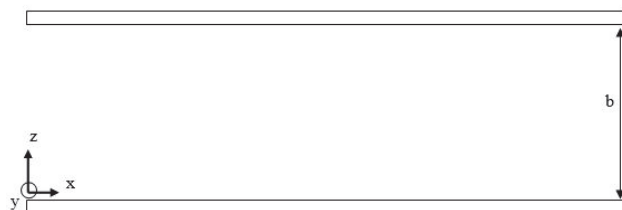


Figura 3.1: Desenho esquemático da célula de Hele-Shaw.

Sendo  $x$  e  $y$  as direções planares,  $z$  a direção perpendicular ao escoamento e  $b$  a distância entre as placas. Quando a distância entre as mesmas é muito pequena diz-se que  $b \rightarrow 0$ , e conseqüentemente nos permite a visualização de um escoamento laminar completamente desenvolvido em duas dimensões (bidimensional). O escoamento também é considerado permanente e incompressível. Na condição de não deslizamento na parede, as condições de contorno são:

$$\text{em } z = 0; \quad u = 0$$

$$\text{em } z = b; \quad u = 0$$

Uma vez que o escoamento é completamente desenvolvido, a velocidade não pode variar com  $x$ ; então, depende apenas de  $z$  de modo que  $u = u(z)$ . Além disso não há componentes de velocidade nas direções  $y$  e  $z$  ( $v = w = 0$ ).

Hipóteses:

- (1) Escoamento permanente  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ ;
- (2) Escoamento incompressível;
- (3) Escoamento laminar;
- (4) Nenhum escoamento ou variação das propriedades na direção  $y$ ,  
 $\left(v_y \text{ e } \frac{\partial}{\partial y} = 0\right)$ .

O próximo passo consiste em analisar a equação de conservação de massa e a equação de conservação de momento.

**Equação de conservação de massa:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3-1)$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3-2)$$

$$\rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \nabla \cdot \rho = 0 \quad \therefore \quad \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3-3)$$

$$v_x = v_x(z) \quad (3-4)$$

**Equação de conservação de momento em função de  $\tau$ :**

$$\left[ \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \right] \quad (3-5)$$

$$\begin{aligned} x : \quad & \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \\ z : \quad & \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{aligned} \quad (3-6)$$

Aplicando-se as hipóteses tem-se:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{d\tau_{zx}}{dz} = 0 \quad (3-7)$$

Onde  $p$  é a pressão e  $\tau$  é a tensão.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\tau_{zx}}{dz} = \text{constante} \quad (3-8)$$

Integrando obtém-se:

$$\tau_{zx} = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) z + c_1 \quad (3-9)$$

Utilizando as condições de contorno:

$$\tau_{zx}(b) = -\frac{\partial p}{\partial x} b = \tau_w \quad (3-10)$$

Onde  $\tau_w$  é a tensão na parede.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-\tau_w}{b} \quad (3-11)$$

Onde  $b$  é a folga.

Em uma forma geral:

$$\tau_{zx}(z) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) z \quad e \quad \tau_{zx}(z) = \frac{-\tau_w}{b} z \quad (3-12)$$

### Equações constitutivas:

As grandezas quantificadoras da ação (tensão) e da deformação relacionam-se através de leis chamadas leis constitutivas. A partir de como se relacionam pode-se identificar o tipo de material. Em geral pode-se agrupar o comportamento dos materiais em modelos constitutivos que incluem um ou mais comportamentos, como: elasticidade, viscoelasticidade, entre outros.

No presente trabalho utilizaram-se dois fluidos não newtonianos, modelados por equações constitutivas diferentes. Isso será melhor explicado no Capítulo 4.

Considerando um fluido pseudoplástico, ou seja, aquele cuja viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação aplicada, e utilizando o modelo de *power-law* com  $n < 1$ , onde  $n$  é o índice de comportamento, tem-se:

$$\eta = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (3-13)$$

Onde  $k$  é o índice de consistência e  $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial z}$ .

Assim,

$$\bar{\tau} = \eta \bar{\dot{\gamma}} \quad (3-14)$$

$$\tau_{zx} = k\dot{\gamma}^n = -k(-\dot{\gamma}_{zx})^n \quad (3-15)$$

Igualando as Equações 3-12 e 3-15:

$$\frac{-\tau_w}{b} z = -k(-\dot{\gamma}_{zx})^n \quad (3-16)$$

Considerando  $y = b$ , ou seja, o escoamento na parede:

$$\dot{\gamma}_{zx}(b) = \left( \frac{\tau_w}{k} \right)^{1/n} \quad (3-17)$$

Devido a importância de escoamentos entre placas paralelas em aplicações de engenharia, Bird e outros pesquisadores (4) desenvolveram uma tabela com a equação de vazão volumétrica para cinco equações constitutivas diferentes, uma delas o modelo de *power-law*.

$$Q = \frac{Wb^2}{(2/n) + 4} \left( \frac{\tau_w}{k} \right)^{1/n} \quad (3-18)$$

Onde  $Q$  é a vazão volumétrica e  $W$  é a largura da célula.

Considerando que a vazão volumétrica é dada por:

$$Q = \bar{u}A \quad (3-19)$$

Onde  $A$  é a área transversal e  $\bar{u}$  é a velocidade média.

Igualando as Equações 3-18 e 3-19, obtém-se:

$$\bar{u} = \frac{b}{(2/n) + 4} \left( \frac{\tau_w}{k} \right)^{1/n} \quad (3-20)$$

Substituindo 3-17 em 3-20, encontra-se a taxa de deformação na parede:

$$\dot{\gamma} = \frac{6\bar{u}}{b} \left( \frac{1 + 2n}{3n} \right) \quad (3-21)$$

Já considerando um fluido modelado por Carreau-Yasuda, como acontece para muitos polímeros, ou seja, um *power-law* com dois platoes newtonianos, um em baixas taxas de cisalhamento ( $\eta_0$ ) e outro em altas taxas de cisalhamento ( $\eta_\infty$ ), tem-se:

$$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)[1 + (\lambda\dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}} \quad (3-22)$$

Onde  $\lambda$  é o tempo característico e  $n$  é o índice de comportamento.

Considerando  $a = 2$  e  $\eta_\infty = 0$ , obtém-se:

$$\eta = \eta_0[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \quad (3-23)$$

Substituindo a Equação 3-23 na Equação 3-14:

$$\tau = \left[ \eta_0 [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \right] \dot{\gamma} \quad (3-24)$$

Substituindo  $\dot{\gamma} = -\frac{dv_x}{dz}$  na Equação 3-24:

$$\tau = \left[ \eta_0 \left[ 1 + \left( \lambda \left( -\frac{dv_x}{dz} \right) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right] \left( -\frac{dv_x}{dz} \right) \quad (3-25)$$

Igualando a Equação 3-12 e 3-25:

$$\frac{\tau_w}{b} z = \left[ \eta_0 \left[ 1 + \left( \lambda \left( -\frac{dv_x}{dz} \right) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right] \left( \frac{dv_x}{dz} \right) \quad (3-26)$$

Para o perfil de velocidade desse modelo não existe uma solução analítica na literatura. A partir da Equação 3-14 e das expressões reológicas do modelo em questão, pode-se constatar que após a devida substituição destas variáveis existe uma impossibilidade de integrar analiticamente a expressão resultante (Equação 3-26).

Neste trabalho, apesar de usar um dos fluidos sendo modelado por Carreau-Yasuda, só será considerada a região *power-law*, podendo assim ser analisado como um fluido pseudoplástico. Essa análise será melhor discutida no Capítulo 4.

## 3.2

**Análise Adimensional**

A análise adimensional é uma técnica utilizada para compreensão do escoamento de fluidos (na verdade, de muitos fenômenos científicos e de engenharia) antes de se fazer uma análise teórica ou experimental mais extensa. Esta técnica permite também a extração de tendências de dados que, de outra forma, permaneceriam desorganizados e incoerentes (13).

Para iniciar os cálculos adimensionais foi definida uma taxa de deformação característica  $\dot{\gamma}_c = 1$ , que corresponde à taxa de deformação do cruzamento das curvas, obtida quando a viscosidade do fluido newtoniano é igual a do fluido não newtoniano, Figuras 3.2 e 3.3 .

$$\begin{aligned}\tau_{newt} &= \mu \dot{\gamma} \\ \tau_{power-law} &= k \dot{\gamma}^n \\ \dot{\gamma}_c &= \left( \frac{\mu}{k} \right)^{1/(n-1)}\end{aligned}\tag{3-27}$$

A velocidade média adimensional,  $\bar{u}^*$ , é definida por:

$$\bar{u}^* \equiv \frac{\dot{\gamma}_{parede}}{\dot{\gamma}_c} \equiv \dot{\gamma}^*\tag{3-28}$$

ou

$$\bar{u}^* \equiv \dot{\gamma}^* = \left\{ \frac{6}{b} \left( \frac{k}{\mu} \right)^{1/n-1} \frac{2n+1}{3n} \right\} \bar{u}\tag{3-29}$$

A viscosidade característica  $\eta_c$ , assim como a taxa de deformação característica, equivale a viscosidade igual a do fluido newtoniano, como pode ser visto na Equação 3-30.

$$\eta_c = \mu\tag{3-30}$$

A viscosidade adimensional  $\eta^*(\dot{\gamma}^*)$  é definida como :

$$\begin{aligned}\eta^*(\dot{\gamma}^*) &= \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\mu} \\ \eta^*(\dot{\gamma}^*) &= \frac{k(\dot{\gamma})^{(n-1)}}{\mu} \\ \eta^*(\dot{\gamma}^*) &= \left(\frac{k}{\mu} \dot{\gamma}_c^{n-1}\right) \dot{\gamma}^{*n-1} \\ \eta^*(\dot{\gamma}^*) &= \left(\frac{\eta_c}{\mu}\right) \dot{\gamma}^{*n-1} \\ \eta^* &= \dot{\gamma}^{*n-1}\end{aligned}\tag{3-31}$$

Existem outros parâmetros adimensionais importantes como o número de Reynolds, Weber e de capilaridade reológico.

O número de Reynolds é caracterizado pela razão entre as forças viscosas e as forças inerciais. É definido de acordo com a Equação 3-32, onde  $\rho$  é a densidade e  $V$  é a velocidade do fluido deslocador,  $D_h$  é o diâmetro molhado e  $\eta$  é a viscosidade do fluido deslocador.

$$Re = \frac{\rho V D_h}{\eta}\tag{3-32}$$

O número de Weber, Equação 3-33, é representado pela razão entre as forças de inércia e as forças de tensão superficial. É importante no estudo das interfaces gás-líquido e líquido-líquido.

$$We = \frac{\rho V^2 b}{\sigma}\tag{3-33}$$

onde  $b$  é a folga,  $\sigma$  é a tensão interfacial e  $V$  é a velocidade do fluido deslocador.

O número de capilaridade é definido de acordo com a Equação 3-34. Esse número é representado pela razão entre as forças viscosas e as forças capilares.

$$Ca = \frac{\eta \dot{\gamma}_c b}{\sigma}\tag{3-34}$$

Onde  $\eta$  é a viscosidade do fluido deslocador e  $\dot{\gamma}_c = \left(\frac{\mu}{k}\right)^{1/(n-1)}$



A partir da análise adimensional é possível definir um conjunto de parâmetros que rege o escoamento e define a situação *finger-plug*.

Para o caso no qual o fluido newtoniano desloca o não newtoniano (Figura 3.2), espera-se que haja formação de *fingers* quando  $\bar{u}^* < 1$  e  $\eta^* > 1$ , caso contrário, espera-se observar a formação de uma interface estável, *plug*. Já para o caso do fluido não newtoniano deslocando o fluido newtoniano, espera-se que haja formação de *plug* quando  $\bar{u}^* < 1$  e  $\eta^* > 1$ , caso contrário, espera-se observar a formação de *fingers* (Figura 3.3). Como já foi mencionado, sabe-se que para fluidos newtonianos a transição *finger-plug* ocorre quando  $\dot{\gamma}_c = 1$ .

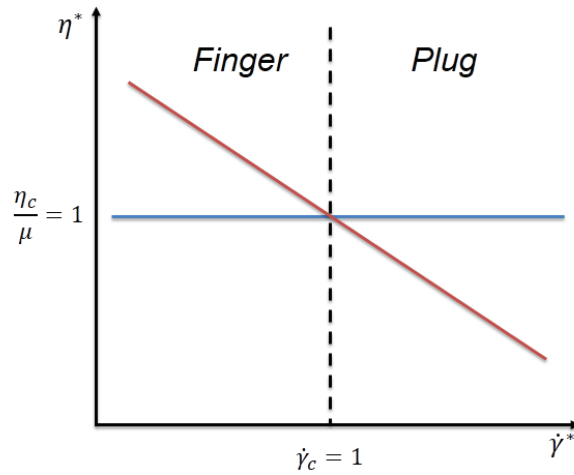


Figura 3.2: Modelo adimensional - Fluido newtoniano deslocando fluido não newtoniano.

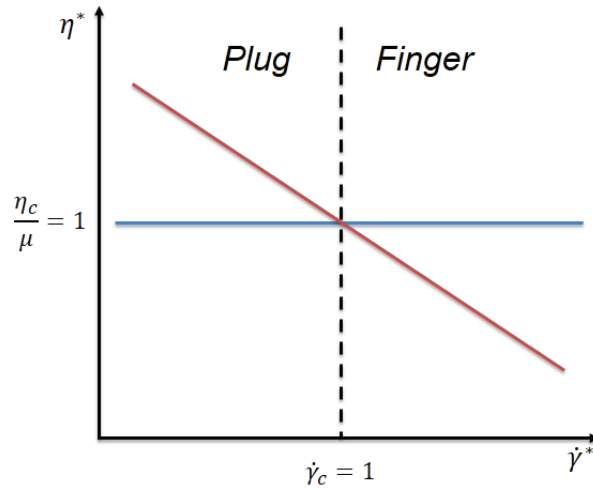


Figura 3.3: Modelo adimensional - Fluido não newtoniano deslocando fluido newtoniano.

## 3.3

**Analogia entre uma célula de Hele-Shaw homogênea e um meio poroso homogêneo**

A analogia entre o escoamento em um modelo de célula de Hele-Shaw homogênea e um meio poroso pode ser facilmente verificada. A homogeneidade da célula consiste na distância entre as placas de vidro ser constante,  $b$  (17).

Assumindo um sistema de coordenadas cartesianas com a origem no centro das placas e o eixo  $z$  perpendicular aos vidros variando do centro da célula  $z = 0$  até  $z = \pm b/2$ , Figura 3.4, o escoamento é sempre na direção paralela às placas de vidro.

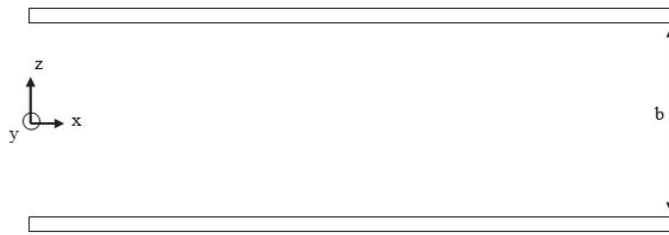


Figura 3.4: Modelo da seção de Hele-Shaw.

Considerando um escoamento em regime permanente, um fluido incompressível e desprezando os efeitos de inércia e as forças de corpo (gravidade), a partir das equações de Navier-Stokes obtém-se:

$$\rho \left( \frac{D\vec{V}}{Dt} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho g \quad (3-35)$$

Simplificando:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (3-36)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\mu$  é a viscosidade e  $\vec{V}$  é o vetor velocidade com componentes  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$ . Considerando as derivadas do vetor velocidade,  $\vec{V}$ , nas direções  $x$  e  $y$  muito menores comparadas à direção  $z$ ;  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  e  $v_z = 0$ .

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (3-37)$$

Integrando e aplicando as condições de contorno, obtém-se:

$$v_x = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\mu} \left[ z^2 - \frac{b^2}{4} \right] \quad (3-38)$$

A velocidade média:

$$\bar{V}_m = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v_x(z) dz \quad (3-39)$$

$$\bar{V}_m = -\frac{b^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (3-40)$$

O movimento de um fluido em um meio poroso pode ser definido a partir da lei de Darcy, que afirma que a velocidade do fluido é dada por:

$$\bar{V}_{Darcy} = -\frac{k}{\mu} \nabla p = \nabla \phi \quad (3-41)$$

Onde  $V_{Darcy}$  é a velocidade de Darcy,  $k$  é a permeabilidade,  $\mu$  é a viscosidade,  $\phi$  é a velocidade potencial e  $p$  a pressão.

Comparando  $\bar{V}_m$  e  $V_{Darcy}$ , conclui-se que o movimento bidimensional pode se estudado experimentalmente por um meio análogo usando a célula de Hele-Shaw. Logo a permeabilidade é dada por:

$$k = \frac{b^2}{12} \quad (3-42)$$