

7

Formulação para a Simulação da Zona Plástica

7.1.

Equações básicas

O modelo numérico é formulado em termos de dois campos. Um campo interpola deslocamentos no contorno Γ , dado como funções

$$u_i^d = u_{in} d_n \quad \text{ao longo de } \Gamma \quad (7.1)$$

de n^d parâmetros nodais de deslocamentos $\mathbf{d} = [d_n] \in \mathbb{R}^{n^d}$ localizados ao longo de Γ . Eles têm suporte local e satisfazem as condições de deslocamentos no contorno como premissa. Um segundo campo interpola tensões elásticas no domínio Ω , como mostrado na Equação (7.2), dada como uma série de funções de $n^* = n^d$ parâmetros de força $\mathbf{p}^* = [p_m^*] \in \mathbb{R}^{n^d}$. Eles têm suporte global e satisfazem as equações de equilíbrio no domínio, como uma premissa. Eles podem ser soluções fundamentais em termos de funções de tensão de Westergaard generalizadas ou de Kelvin. O algoritmo proposto é aplicado à solução de problemas com zonas plásticas pequenas ao redor das pontas das trincas, distribuídas dentro de um corpo bidimensional de contorno aberto ou fechado.

O problema numérico é formulado a partir do potencial de Hellinger-Reissner, baseado no pressuposto de dois campos, como implementado por Pian (1964) e generalizado por Dumont (1989), conduzindo assim a duas equações matriciais que expressam condições de equilíbrio nodal e de compatibilidade. Dumont (2011) mostra que uma simples, e matematicamente consistente forma de expressar essas equações é em termos de dois princípios de trabalho virtuais independentes entre si. No entanto, uma vez que a maioria dos problemas da mecânica da fratura é dada pela condição de contorno de Neumann, a presente análise é restrita para este caso particular, no qual apenas o princípio dos trabalhos virtuais em termos de deslocamentos é necessário.

Assume-se que a solução particular elástica σ_{ij}^p que corresponde às forças de corpo b_i é conhecida. O fenômeno elasto-plástico é simulado por meio de um conjunto de equações globalmente aplicados ao corpo elástico, com uma correção para as forças do domínio inicialmente desbalanceadas produto das zonas plásticas, como ilustrado na esquerda da Figura 30. Num determinado instante da análise numérica, a expressão do campo de tensões no domínio é

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p - \sigma_{ij}^{res} = \sigma_{ijm}^* p_m^* + \sigma_{ij}^p - \sigma_{ij}^{res} \quad (7.2)$$

onde σ_{ij}^p é uma solução particular elástica que corresponde às forças de corpo b_i e $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^*$ é o campo elástico expressado como uma série de soluções fundamentais σ_{ijm}^* multiplicado por parâmetros de força p_m^* , que são as variáveis desconhecidas. Além disso, o campo de tensões σ_{ij}^{res} , para o qual em princípio não existe expressão analítica, é subtraído para levar em conta a zona plástica. Em seguida, σ_{ij}^{res} que é diferente de zero dentro de um conjunto de subdomínios Ω_{pl} , em torno das pontas das trincas, e $\sigma_{ij}^{res} = 0$ no domínio complementar $\Omega - \Omega_{pl}$. Para forças de tração \bar{t}_i aplicadas em $\Gamma_\sigma \equiv \Gamma$ (condições de contorno tipo Neumann). O princípio dos trabalhos virtuais de deslocamentos é escrito como

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p - \sigma_{ij}^{res}) \delta u_{i,j}^d d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} \bar{t}_i \delta u_i^d d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \delta u_i^d d\Omega \quad (7.3)$$

Isto corresponde a uma formulação inicial de tensões, tal como referido na literatura técnica. Após substituições de u_i^d e σ_{ijm}^* de acordo com as interpolações assumidas, integrando por partes e aplicando o teorema de Green, a equação acima torna-se

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p) + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{U}^{*-T} \mathbf{d}^{*res} \quad (7.4)$$

onde

$$\mathbf{d}^{*res} \equiv \mathbf{d}_n^{*res} = \int_{\Omega_{pl}} u_{in,j}^* \sigma_{ij}^{res} d\Omega \quad (7.5)$$

é um vetor de deslocamentos nodais, equivalente ao campo de tensões σ_{ij}^{res} das zonas plásticas e

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}^p \equiv p_n - p_n^p = \int_{\Gamma} u_{in} (\bar{t}_i - \sigma_{ij}^p n_j) d\Gamma \quad (7.6)$$

é um vetor de forças nodais equivalentes. A matriz

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} u_{in} \sigma_{ijm}^* n_j d\Gamma \quad (7.7)$$

acaba por ser a mesma matriz potencial do método convencional dos elementos de contorno (que vem das soluções fundamentais de Kelvin) e $\mathbf{U}^* = [u_{mn}^*] \in \mathbb{R}^{n^* \times n^*}$ é a expressão matricial da transformação a partir dos parâmetros de força interna p_m^* introduzidos na Equação (7.2) nos parâmetros de deslocamentos nodais d_n da Equação (7.1).

$$\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d} \quad (7.8)$$

Outra expressão útil obtida a partir da Equação (7.4) (após cancelar $\delta \mathbf{d}^T$) é

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{H}^{-T} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p) + \mathbf{F}^{*-1} \mathbf{d}^{*res} \quad (7.9)$$

onde \mathbf{F}^* tem o significado de uma matriz de flexibilidade:

$$\mathbf{F}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d}^* \quad (7.10)$$

Os desenvolvimentos que levam às Equações (7.4)-(7.10) e especialmente às expressões matriciais de \mathbf{U}^* e \mathbf{F}^* são explicados na próxima seção.

7.2.

Derivação do termo residual para o calculo iterativo

As equações (7.4)-(7.8) são o resultado dos desenvolvimentos a partir da Equação (7.3)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p - \sigma_{ij}^{res}) \delta u_{i,j}^d d\Omega &= \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i \delta u_i^d d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \delta u_i^d d\Omega \\ \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) \delta u_{i,j}^d d\Omega &= \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i \delta u_i^d d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \delta u_i^d d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{res} \delta u_{i,j}^d d\Omega \\ \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) \eta_j \delta u_i^d d\Gamma - \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j}^* + \sigma_{ij,j}^p) \delta u_i^d d\Omega &= \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i \delta u_i^d d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \delta u_i^d d\Omega + \int_{\Omega_{pl}} \sigma_{ij}^{res} \delta u_{i,j}^d d\Omega \\ \delta d_n H_{mn} p_m^* &= \delta d_n (\underline{p}_n - \underline{p}_n^p) + \int_{\Omega_{pl}} \sigma_{ij}^{res} \delta u_{i,j}^d d\Omega \\ \delta d_n H_{mn} p_m^* &= \delta d_n (p_n - p_n^p) + \delta p_m^* \int_{\Omega_{pl}} \sigma_{ij}^{res} u_{im,j}^* d\Omega \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde dois termos se anulam devido à condição de equilíbrio $\sigma_{ij,j}^p = b_i$ em Ω . Sublinhados e sublinhados duplos são usados para identificar os termos correspondentes ao longo das transformações. H_{mn} , como definido na Equação

(7.7) para a aproximação de tensões indicadas na Equação (7.2), é a mesma matriz potencial do método convencional dos elementos de contorno quando são usadas as soluções fundamentais de Kelvin. Nesse caso, o segundo termo sublinhado na equação acima mostra que $\sigma_{ij,j}^* = \sigma_{ijm,j}^* p_m^* = -\delta_{im} p_m^*$, onde δ_{im} é uma função delta generalizada, geral no domínio aberto. Para soluções fundamentais dadas pela função de tensão de Westergaard da Equação (4.1), $\sigma_{ij,j}^* = 0$ em Ω . Já que os parâmetros nodais de força interna p_m^* , referido às soluções fundamentais de Kelvin ou Westergaard, só se aplicam fora do domínio de interesse Ω , a expressão de H_{mn} na Equação (7.7) é justificada, com integrais singulares fortes ou fracas que são tratadas de forma adequada.

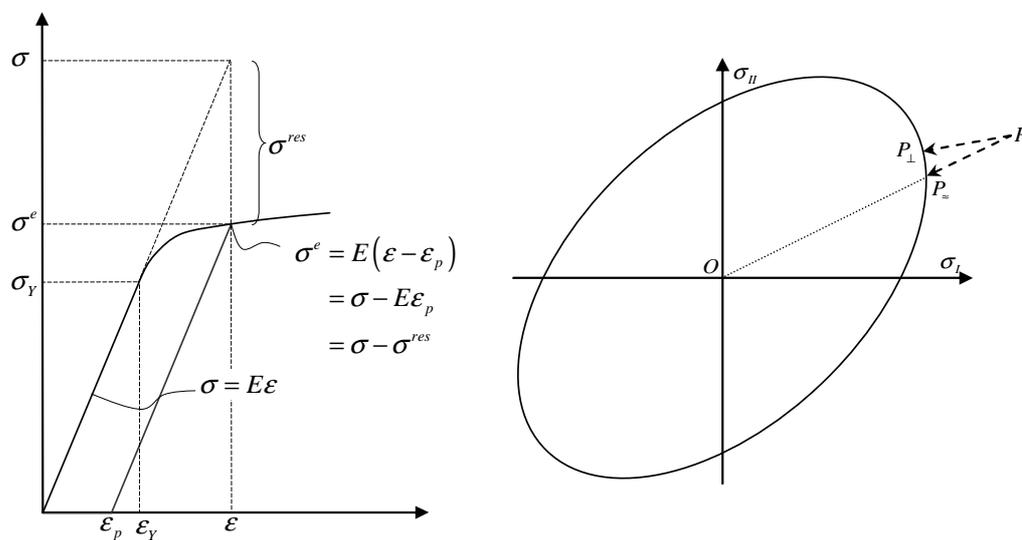


Figura 30. Curva tensão-deformação para a análise elasto-plástica em termos de tensões iniciais (esquerda); e superfície de escoamento em termos de tensões principais (σ_I, σ_{II}) com o estado de tensões representado pelo ponto $P(\sigma_I, \sigma_{II})$ (Dumont e Mamani, 2013).

Em formato matricial, a ultima linha da Equação (7.11) leva a

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \delta \mathbf{d}^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p) + \delta \mathbf{p}^{*T} \mathbf{d}^{*res} \quad (7.12)$$

O resultado final indicado na Equação (7.11) é obtido após uma transformação crucial, que tem justificativa variational e auxilia na teoria do método híbrido dos elementos de contorno (Dumont e Aguilar, 2011). Já que os deslocamentos δu_i^d não são dados no domínio, de acordo com a definição da Equação (7.1), deve-se assumir que dentro de uma faixa de erros numéricos de discretização

$$\delta u_{i,j}^d = \delta p_m^* u_{im,j}^* \quad \text{em } \Omega \quad (7.13)$$

contudo, δu_i^d corresponde a deslocamentos nodais $\delta \mathbf{d}$ que tomam parte nas seguintes transformações e pode ser levada a cabo no contexto do método de colocação, convencional dos elementos de contorno (Brebbia *et al*, 1984):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \delta \mathbf{d} = \mathbf{G} \delta \mathbf{t} &\Rightarrow \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{t} \Rightarrow \\ \mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \delta \mathbf{d} = \mathbf{L}^T \delta \mathbf{t} &\Rightarrow \mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{p} \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde $\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}$ é definido como um tipo de matriz de rigidez.

Finalmente, uma das equações básicas do método híbrido dos elementos de contorno,

$$\mathbf{H}^T \delta \mathbf{p}^* = \delta \mathbf{p} \quad (7.15)$$

que também é obtida como uma segunda variação da Equação (7.12), é combinada com a Equação (7.14) para chegar a

$$\delta \mathbf{p}^* = \mathbf{H}^{-T} (\mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}) \delta \mathbf{d} \quad (7.16)$$

Substituindo para $\delta \mathbf{p}^*$, como dado acima, na Equação (7.12), leva à Equação (7.4), com a matriz de deslocamentos.

$$\mathbf{U}^* = (\mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad (7.17)$$

A Equação (7.9), que é adequada para o processo iterativo proposto, é finalmente obtida com a definição da matriz de flexibilidade \mathbf{F}^* :

$$\mathbf{F}^* = (\mathbf{H} \mathbf{U}^*)^T = \mathbf{H} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{G}^T \quad (7.18)$$

Dependendo da implementação, mesmo que soluções fundamentais de Kelvin e de Westergaard sejam utilizadas para diferentes partes do contorno, as inversas indicadas devem ser avaliadas em termos de matrizes particionadas e, eventualmente recorrer aos conceitos de inversas generalizadas. Em cada iteração de um determinado passo o contorno da zona plástica deve ser obtido.

7.3.

Algoritmo de busca linear para a obtenção da fronteira plástica

Seja uma função $f(r)$ definida no intervalo $r = [r_1, r_2]$, onde é garantida uma solução para $f(r) = 0$. Uma primeira aproximação é o ponto de coordenada r_3 , o

qual é dado pela interseção da reta que une os pontos de coordenadas $[r_1, f(r_1)]$ e $[r_2, f(r_2)]$ com o eixo r . Matematicamente r_3 é dado por

$$r_3 = r_2 - \frac{f(r_2)(r_2 - r_1)}{f(r_2) - f(r_1)} \quad (7.19)$$

cuja interpretação geométrica é mostrada na parte esquerda da Figura 31.

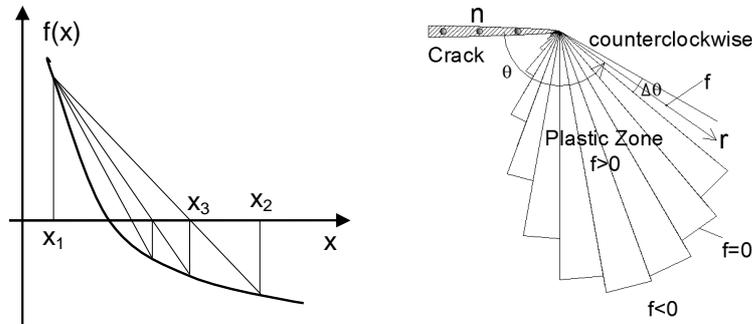


Figura 31. Busca linear (*Regula-Falsi*) e processo de discretização da zona plástica (Adaptado de Dumont e Mamani, 2013).

Dada a função

$$f(x, y) = \sigma_{eq}(x, y) - \sigma_y \quad (7.20)$$

em termos de uma tensão equivalente $\sigma_{eq}(x, y)$ (Von Mises, por exemplo) e a tensão de escoamento uniaxial σ_y , o algoritmo proposto para definir a fronteira plástica é o seguinte:

Passo 1. Definir os ns setores circulares com centro na ponta da trinca e abertura $\Delta\theta = 2\pi/ns$.

Loop para $n = 1..ns$ (Para cada setor circular)

Passo 2. A partir da Equação (7.20) obter a função de variável r

$$\bar{f}(r) = f\left(r \cos\left(\Delta\theta\left(n - \frac{1}{2}\right)\right), r \sin\left(\Delta\theta\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)\right).$$

Passo 3. Definir o intervalo $[r_1, r_2]$ de tal forma que $\bar{f}(r_1)\bar{f}(r_2) < 0$. Pode-se inicializar com $r_1 = 0$.

Loop para $k = 1..NumMaxIter$ (Busca linear)

Passo 4. Calcular r_3 pela Equação (7.19), e sua respectiva função $\bar{f}(x_3)$

Passo 5. Se $\bar{f}(r_1)\bar{f}(r_3) < 0$ então assignar $r_2 \leftarrow r_3$, caso contrario assignar $r_1 \leftarrow r_3$.

Passo 6. Se $Erro < Tolerancia$ salvar $r_{p(n)} = r_1$ e **fim loop** k , caso contrario retornar ao **Passo 4**.

Fim do loop n .

O contorno da zona plástica está delimitado pelos pontos $r_{p(n)}$ para $n=1..ns$.

Sendo seu equivalente em coordenadas cartesianas cuja origem coincide com a ponta da trinca

$$[x_n, y_n] = r_{p(n)} \left[\cos\left(\Delta\theta\left(n - \frac{1}{2}\right)\right), \sin\left(\Delta\theta\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right], \text{ para } n=1..ns. \quad (7.21)$$

7.4.

Solução iterativa do problema não linear

A Equação (7.9) é aplicada recursivamente no contexto do algoritmo seguinte

Passo 0. Dado o vetor de forças nodais equivalentes $\mathbf{p} - \mathbf{p}^p$, e a primeira estimativa do vetor residual de deslocamentos nodais equivalentes $\mathbf{d}_{(0)}^{*res}$ (que é igual a zero para o primeiro incremento de carga), definir $i = 0$ e avaliar

$$\mathbf{p}_{(0)}^* = \mathbf{H}^{-T} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p) + \mathbf{F}^{*-1} \mathbf{d}_{(0)}^{*res} \quad (7.22)$$

Passo 1. Para pontos radialmente distribuídos ao redor das pontas da trinca avaliar as tensões residuais $\sigma_{ij(i+1)}^{res}$ dadas a partir da Equação (7.2),

$$\sigma_{ij(i+1)}^e = \sigma_{ijm}^* p_{m(i)}^* + \sigma_{ij}^p - \sigma_{ij(i+1)}^{res} \quad (7.23)$$

de tal forma que $\sigma_{ij(i+1)}^e$ é no máximo igual à tensão de escoamento do material, de acordo com algum critério de escoamento também tendo-se em conta o eventual endurecimento do material, como ilustrado na Figura 30.

Passo 2. Avaliar a melhor estimativa do vetor residual de deslocamentos nodais equivalentes:

$$\mathbf{d}_{(i+1)}^{*res} = \int_{\Omega_{pl}} u_{in,j(i)}^* \sigma_{ij(i+1)}^{res} d\Omega \quad (7.24)$$

Passo 3. Avaliar a melhor estimativa do vetor residual de parâmetros nodais de tensão:

$$\mathbf{p}_{(i+1)}^* = \mathbf{H}^{-T} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^p) + \mathbf{F}^{*-1} \mathbf{d}_{(i+1)}^{*res} \quad (7.25)$$

Passo 4. Calcular o erro de convergência $\varepsilon = \frac{|\mathbf{p}_{(i+1)}^* - \mathbf{p}_{(i)}^*|}{|\mathbf{p}_{(i+1)}^*|}$

Se $\varepsilon \leq tolerance$, a convergência foi atingida. Parar o processo iterativo.

Caso contrário, se $i < \text{número máximo de iterações}$, alocar $i \leftarrow i+1$ e ir para o **Passo 1**. Caso contrário, interromper o processo com a mensagem de aviso que a convergência não foi alcançada.

O algoritmo apresentado acima poderia não convergir para valores altos de $\mathbf{p} - \mathbf{p}^p$, o qual corresponderia a zonas plásticas grandes, a estimativa inicial poderia estar bem longe da solução final. Neste caso, o indicado **Passo 0** realmente deve corresponder a um nível de carga anterior, para o qual as Equações (7.2) e (7.9) são satisfeitas como resultado de um ciclo de iteração anterior. A carga é então incrementada com $\Delta \mathbf{p} - \Delta \mathbf{p}^p$, e o algoritmo é aplicado mais uma vez, assim, sucessivamente até que o nível de carga desejado é alcançado.

A avaliação de $\sigma_{ij(i+1)}^{res}$ na Equação (7.23) para um ponto ao redor da ponta da trinca exige que a resposta elástica das tensões $\sigma_{ijm}^* p_{m(i)}^* + \sigma_{ij}^p$ e as correspondentes tensões equivalentes sejam primeiramente obtidas. O critério de Von Mises é utilizado, o esquema do lado esquerdo da Figura 30 representa uma tensão uniaxial equivalente σ , indicando que o ponto em análise está dentro da zona de plastificação. Dada a lei elasto-plástica do material, o ponto (ε, σ^e) da curva tensão-deformação e a tensão residual σ^{res} são obtidas. A avaliação subsequente de σ_{ij}^{res} pode ser levada a cabo através de uma interpolação linear de cada termo do tensor, para um ponto qualquer da zona plástica, como

$$\sigma_{ij}^{res} = \frac{\sigma^{res}}{\sigma} (\sigma_{ijm}^* p_m^* + \sigma_{ij}^p) \quad (7.26)$$

Isto corresponde a trazer todos os termos do tensor de tensão proporcionalmente à superfície de escoamento, tal como representado pelo ponto $P_{\underline{}}$ no gráfico do lado direito da Figura 30 (superfície de escoamento para estado plano de tensões e critério de Von Mises), para um ponto de tensão $P(\sigma_I, \sigma_{II})$ dado em termos de tensões principais, com o vetor $P - P_{\underline{}}$ interpretado como o termo residual. Este é o procedimento atualmente implementado. Uma alternativa, provavelmente mais adequada, consiste em trazer o ponto de tensão $P(\sigma_I, \sigma_{II})$

para P_{\perp} , tal como consta na Figura 30, de modo que $P - P_{\perp}$ é a menor distância de $P(\sigma_I, \sigma_{II})$ à superfície de escoamento (Simo e Taylor, 1985). Este segundo procedimento não é tão simples de implementar em comparação com a Equação (7.26), que deve ser testado em um futuro próximo. São esperados resultados com maior taxa de convergência especialmente para o estado plano de deformações, o qual tem uma superfície de escoamento mais alongada da superfície de escoamento do que no estado plano de tensões.

7.5. Avaliação numérica do termo residual

A avaliação numérica do vetor residual de deslocamentos nodais equivalentes \mathbf{d}^{*res} , como introduzido na Equação (7.5) e usado no algoritmo da Seção 7.4, é realizada no sistema polar de coordenadas ilustrado à direita da Figura 31, de acordo com o resumo do último parágrafo da Seção 7.4 para a avaliação de σ_{ij}^{res} . Para este propósito, o contorno da zona plástica ao redor de cada ponta de trinca deve ser primeiramente avaliado, utilizando o esquema de busca linear *Regula-falsi* mostrado na Seção 7.3, ao longo dos pontos nos sucessivos setores circulares do sistema local de coordenadas polares para comparar a tensão equivalente, determinado em função do critério de Von Mises, com o valor de escoamento do material.

A Figura 32 mostra o padrão de convergência típico do algoritmo para 3 de 36 setores circulares, numa investigação numérica do erro relativo da avaliação do comprimento radial da zona plástica, para o modo I, problema de estado plano de deformações de uma trinca reta no domínio aberto submetido a uma tensão uniaxial remota de $\sigma_{yy}^{\infty} = 50MPa$. A menos que indicado de outra forma, neste e nos exemplos posteriores, o comprimento da trinca será $2A = 0.02m$, o módulo de elasticidade $E = 210GPa$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, e a tensão de escoamento $\sigma_y = 235MPa$. O padrão de convergência observado, que é o mesmo, independentemente do número de elementos usados na discretização da trinca, pode ser considerado satisfatório.

A Figura 33 apresenta o erro de convergência na avaliação do vetor residual de deslocamentos equivalentes \mathbf{d}^{*res} , como apresentado na Equação (7.5), para um

número diferente de setores circulares (direção angular do lado direito da Figura 31), utilizando-se como valor alvo o resultado numérico com 64 setores. O problema é o mesmo do parágrafo anterior com oito pontos de Gauss na direção radial e um elemento de trinca no gráfico à esquerda e 16 elementos de trinca à direita. Uma análise semelhante de convergência (também para um e 16 elementos de trinca na discretização) é feita na Figura 34 para um número variável de pontos de Gauss na direção radial, utilizando como valor alvo o resultado com 32 pontos. São usados 16 elementos de trinca na discretização. A convergência da quadratura numérica na direção radial parece merecer uma melhora, dado que há um termo afetado por \sqrt{r} , que não pode ser tratado com precisão em termos de Gauss-Legendre. Uma vez que este termo pode ser avaliado analiticamente, esta é uma das mudanças numéricas de implementação para ser introduzida numa próxima oportunidade.



Figura 32. Estudo de convergência para a avaliação da zona plástica, em termos de *regula-falsi*, para três setores angulares, como mostrado na parte direita da Figura 31 (Dumont e Mamani, 2013).

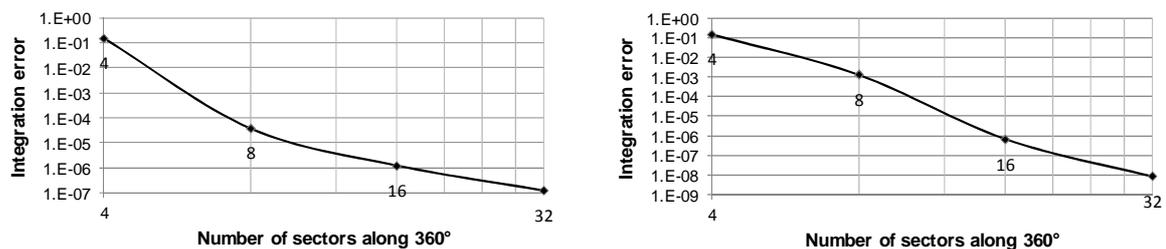


Figura 33. Convergência na avaliação do vetor residual de deslocamentos equivalentes \mathbf{d}^{*res} , como introduzido na Equação (7.5), para 1 (esquerda) e 16 elementos de trinca e um número crescente de setores (direção angular) (Dumont e Mamani, 2013).

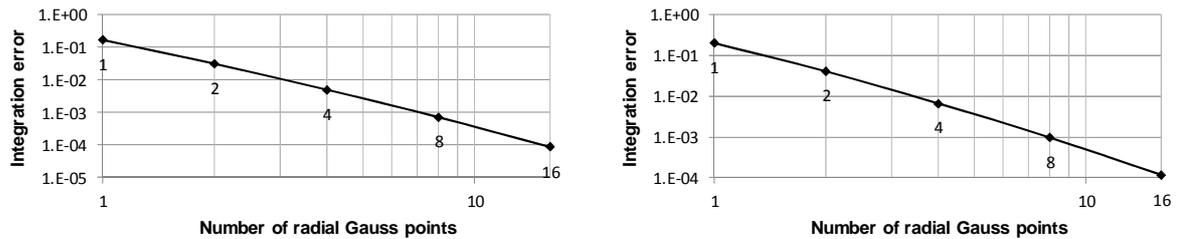


Figura 34. Estudos de convergência para a avaliação do vetor residual de deslocamentos equivalentes \mathbf{d}^{*res} , como introduzidos na Equação (7.5) para 1 (esquerda) e 16 elementos de trinca e diferentes números de pontos de Gauss na direção radial (Dumont e Mamani, 2013).

7.6.

Simulação confiável do campo de tensões ao redor da ponta da trinca

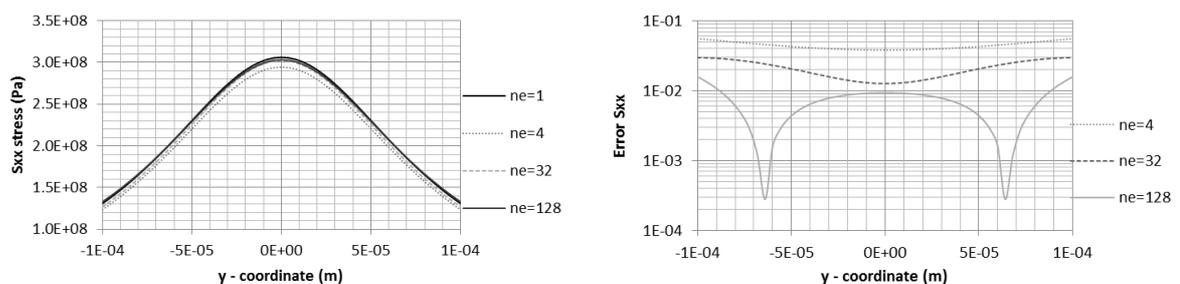
O uso das funções de tensão de Westergaard como soluções fundamentais já foi demonstrado, levando a resultados globais precisos para estruturas elásticas bidimensionais, para superposições de trincas elípticas retas (Lopes, 1998, 2002; Dumont e Lopes, 2003) ou, mais precisamente para trincas curvas, trincas semi-elípticas (Mamani, 2011; Dumont e Mamani, 2011), como descritos na Seção 4. As referências anteriores também demonstraram que os problemas de domínios limitados podem ser simulados pela combinação de funções de tensão de Westergaard para trincas e entalhes com soluções fundamentais de Kelvin para o caso geral e para os efeitos de campos distantes.

No entanto, a alta precisão ou representação realística do estado de tensões ao redor da ponta da trinca é ainda uma questão em aberto, uma vez que não foi convincentemente abordada na literatura técnica. Então, ao invés de tentar executar e apresentar resultados relacionados com geometrias e condições de carga complicadas, o que é quase simples de implementar no esquema proposto, é aconselhável aplicar estes desenvolvimentos para o problema mais simples na literatura, ou seja, o caso de uma simples trinca reta num domínio bidimensional aberto submetida a uma tensão constante uniaxial ou biaxial no campo distante. Neste caso, a solução proposta por Westergaard é exata para materiais elásticos homogêneos e isotrópicos, mas não para a simulação correta das zonas plásticas.

Os seguintes exemplos numéricos abordam inicialmente o estado elástico ao redor da ponta da trinca no contexto proposto por Dumont e Mamani (2011), ou seja, usando somente elementos de forma semi-elíptica, a fim de mostrar quão

complicado o problema realmente é. Posteriormente é investigada a formação da zona plástica, com resultados que podem ser avançados, mas ainda não conclusivos no sentido de que a convergência não pode ser garantida para uma tolerância de erro arbitrariamente pequena.

A Figura 35 mostra a partir do topo as tensões σ_{xx} , σ_{yy} e as tensões equivalentes de Von Mises σ ao longo do eixo vertical no intervalo $y = (-10^{-4} m, 10^{-4} m)$, localizada $10^{-4} m$ à direita da ponta da trinca, para a mesma trinca do problema apresentado na Seção 7.5, elasticamente analisadas para várias discretizações da trinca. O resultado com um elemento de trinca ($ne = 1$) é, para este problema simples, a solução analítica. À direita estão os erros correspondentes. Todos os valores são dados para 51 pontos distribuídos ao longo da linha vertical. Embora relevante na composição da tensão equivalente, a tensão de cisalhamento não é apresentada nos gráficos. Uma representação similar é mostrada na Figura 36, mas desta vez para a linha vertical $(-10^{-2} m, 10^{-2} m)$ 100 vezes maior, também localizado somente $10^{-4} m$ à direita da ponta da trinca, para as mesmas discretizações da trinca. Devido às diferentes escalas, o comportamento da tensão mostrado na Figura 35 não pode ser resolvido como parte dos gráficos da Figura 36. No entanto, ambas as representações mostram que não existe convergência monotônica do estado de tensões em relação à solução analítica, pois ocorrem algumas flutuações fortes. Elas são neste caso introduzidas artificialmente, devido às discretizações adotadas, que podem influenciar drasticamente no tamanho e na forma da zona plástica. Uma melhor estimativa do campo de tensões poderia ser obtida a partir do uso de elementos mistos, como mostrado na Seção 6.3, e cujo desenvolvimento na avaliação da zona plástica será apresentado num trabalho futuro.



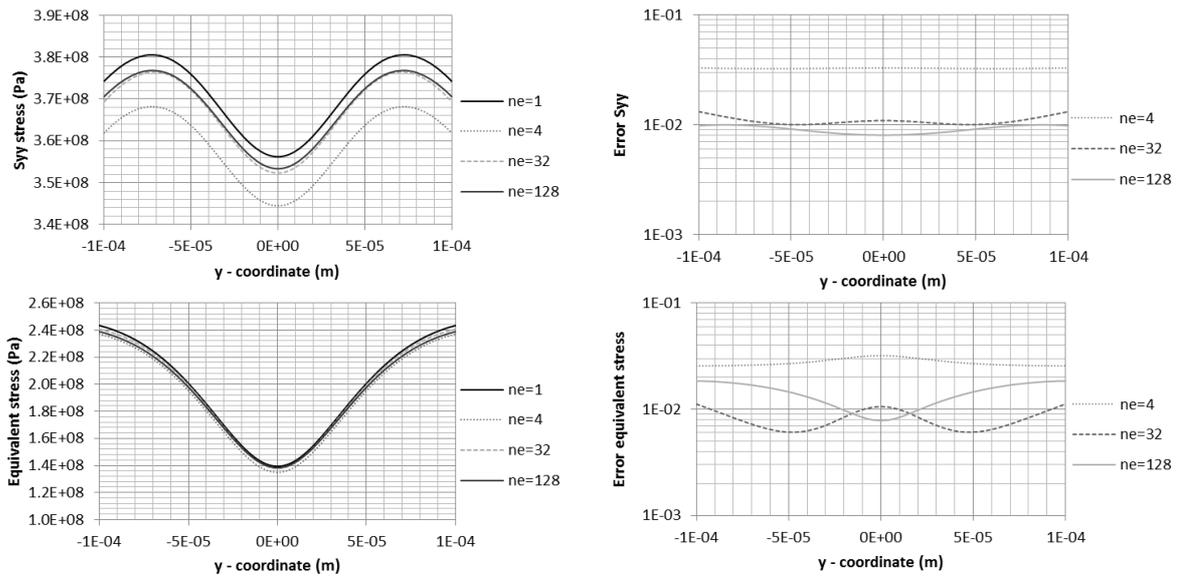


Figura 35. A partir do topo: tensões σ_{xx} , σ_{yy} e a tensão equivalente de Von Mises σ_{eq} (em MPa) ao longo do eixo vertical $y = (-10^{-4}m, 10^{-4}m)$ localizada a $x = 10^{-4}m$ à direita da ponta da trinca, para varias discretizações da trinca, com seus correspondentes erros na parte direita (Dumont e Mamani, 2013).

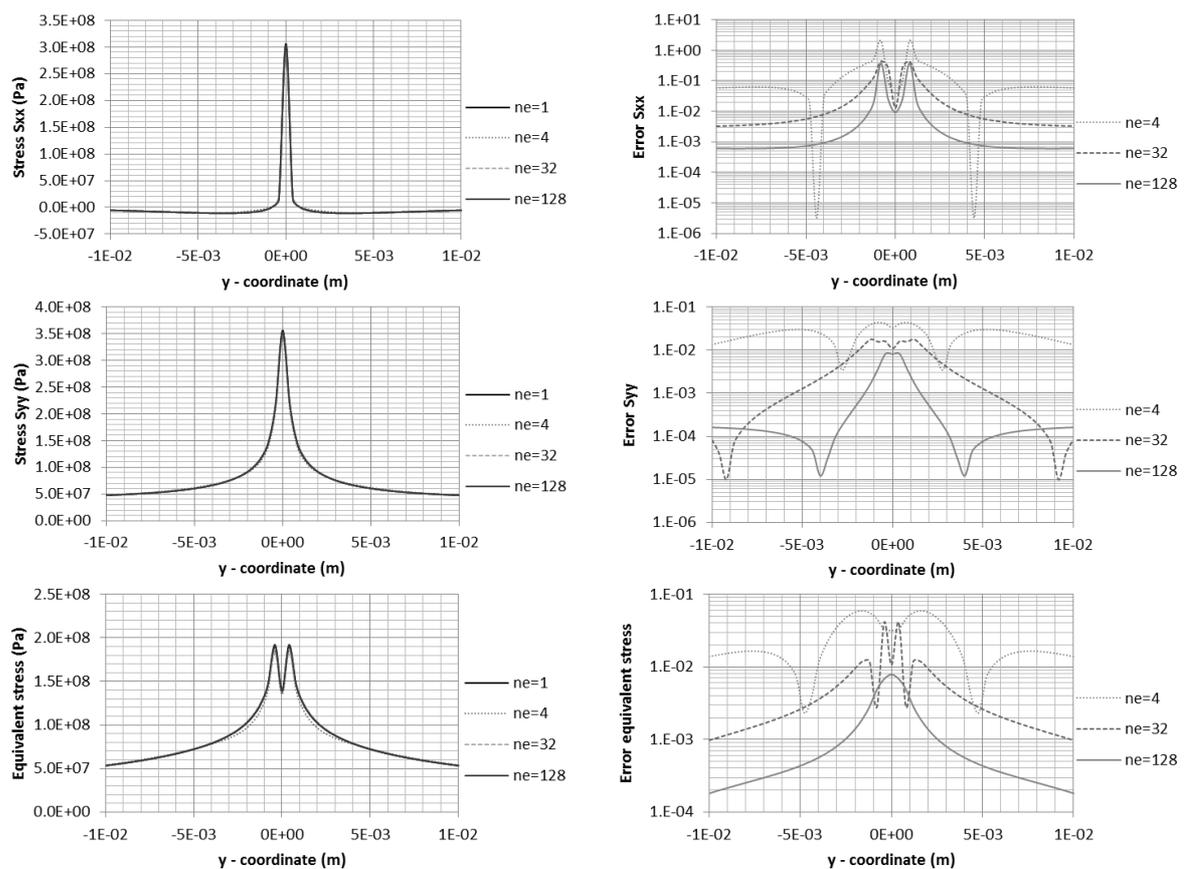


Figura 36. A mesma representação de tensões da Figura 35 dada uma reta vertical 100 vezes maior (Dumont e Mamani, 2013).

A Figura 37 mostra os contornos das zonas plásticas para o mesmo problema de trinca da Seção 7.5 obtida para estado plano de deformações (esquerda) e estados plano de tensões (direita) de uma análise puramente elástica (o primeiro passo do algoritmo da Seção 7.4). O contorno é feito de 32 segmentos angulares para o algoritmo de busca *regula-falsi* explicado na Seção 7.3. Para este problema simples, o resultado com $ne = 1$ elemento de trinca é a analítica. Como esperado, o contorno para o estado plano de deformações é menor do que para o estado plano de tensões, esta diferença é mais acentuada na direção local x . Os resultados com $ne > 1$ não mostram um padrão claro de convergência, embora alguma precisão possa ser obtida para $ne = 16$. Os resultados com um número maior de elementos de trinca são influenciados pelas singularidades locais dos elementos de trinca na vizinhança das pontas. Isto pode ser visto para $ne = 64$ e particularmente para $ne = 256$. Nesta última discretização, os dois pontos nodais mais próximos da ponta da trinca estão localizados a $x = -0.78125 \times 10^{-4} m$ e $x = -0.15625 \times 10^{-3} m$. Então, embora um número crescente de elementos de trinca leva a uma melhor representação do problema, para condições gerais de carregamento e geometria, a introdução de singularidades locais deterioraram o campo de tensões nas imediações das pontas dos elementos de trinca. Elementos de trinca com outras formas diferentes às semi-elípticas estão sendo testadas (ver Seção 4), com resultados satisfatórios tanto globais quanto locais, porém sem melhora significativa do processo iterativo e da convergência.

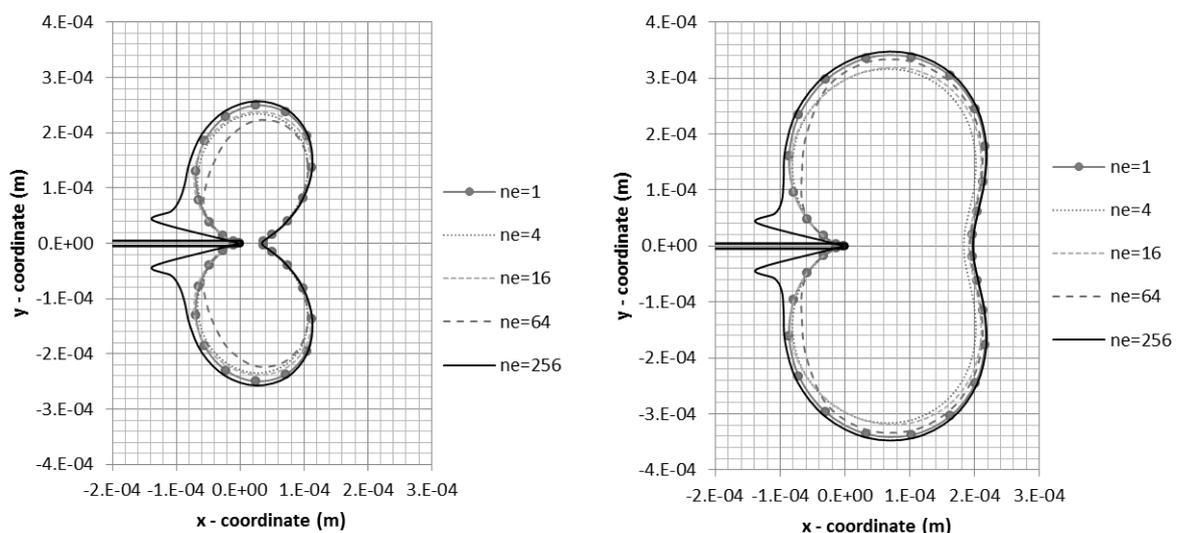


Figura 37. Contornos de zona plástica obtidos elasticamente para o estado plano de deformações (esquerda) e o estado plano de tensões (Dumont e Mamani, 2013).

7.7.

O problema não-linear: testes e problemas de convergência

A Figura 38 apresenta os contornos da zona plástica para o mesmo problema plano da Seção 7.5, discretizado com $ne=1$ elemento de trinca, submetido a uma tensão uniaxial remota $\sigma_{yy} = 0.1\sigma_Y$ aplicada numa única etapa (à esquerda), bem como em cinco etapas (direita), de acordo com o algoritmo da Seção 7.4, o que demonstra a total coerência de resultados dentro do erro de convergência. O menor contorno no lado esquerdo (para $iter = 0$) é a primeira avaliação elástica. Todos os outros contornos correspondem aos resultados obtidos após a convergência do algoritmo não linear (11 iterações necessárias para o contorno na esquerda, por exemplo).

A Figura 39 mostra os resultados de uma investigação semelhante ao anterior parágrafo, exceto que são utilizados $ne=16$ elementos de trinca e a tensão uniaxial remota é $\sigma_{yy} = 0.01\sigma_Y$. A razão pela qual foi aplicada uma menor carga é que a convergência não pode ser alcançada com o algoritmo formulado na Seção 7.4, onde a zona plástica é bem maior em comparação com o elemento de trinca. A coerência dos resultados está verificada.

A Figura 40 mostra os contornos da zona plástica para o mesmo problema plano de deformações da Seção 7.5, discretizado com vários elementos de trinca e submetidos a uma tensão uniaxial remota $\sigma_{yy} = 0.01\sigma_Y$, obtido por um material perfeitamente elasto-plástico (esquerda), assim como por um material com endurecimento linear de rigidez $E/5$ (direita). As zonas plásticas são maiores para um número maior de elementos de trinca. O contorno obtido apenas em termos de tensões elásticas, como discutido nos casos da Figura 37, também é indicada. Para este nível de carregamento pequeno, o contorno obtido elasticamente para $ne = 1$, que é o resultado exato, é dificilmente discernível do contorno plástico final obtido depois de apenas duas iterações.

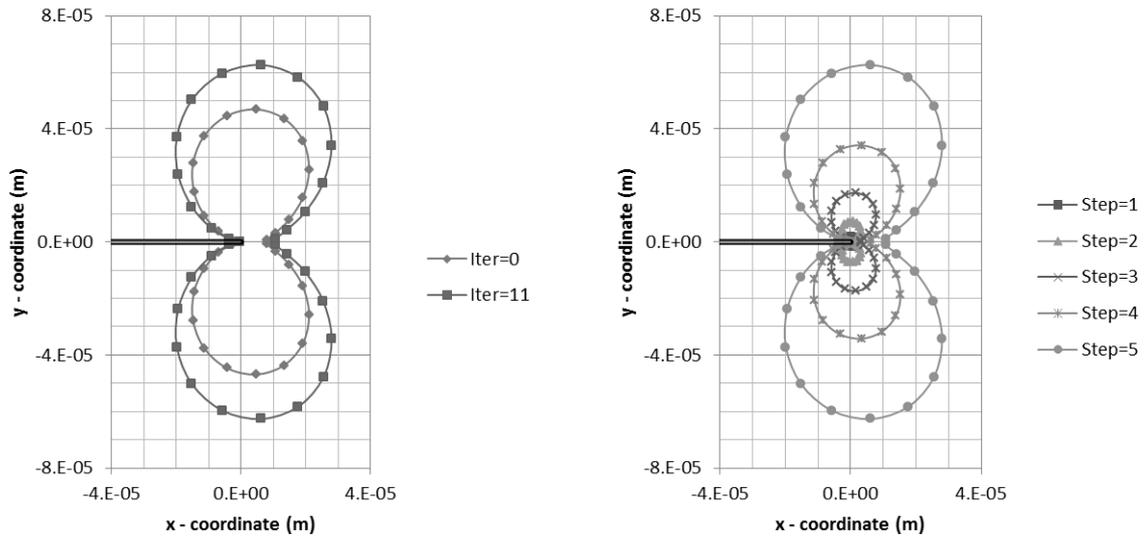


Figura 38. Contornos da zona plástica para o estado plano de deformações. Trinca discretizada com $ne = 1$, carregamento uniaxial remoto de $\sigma_{yy} = 0.1\sigma_y$, aplicado em um passo (esquerda) e em 5 passos (Dumont e Mamani, 2013).

O mesmo problema apresentado acima é também mostrado no lado esquerdo da Figura 41 para um material elasto-plástico com a curva tensão-deformação, quando $\sigma \geq \sigma_y$, adaptada a partir da relação de Ramberg-Osgood (Ramberg e Osgood, 1943), em termos de tensões e deformações equivalentes $\varepsilon = \left[1 + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right)^{n-1}\right] \sigma / E$, onde α e n são parâmetros do material a ser obtidos experimentalmente, além de E e σ_y . O valor usual para n é 5, adotado aqui. A curva representada pela equação acima não tem um ponto de escoamento σ_y claro. Em tal caso, o coeficiente α pode ser avaliado para resultar num deslocamento do escoamento de 0.2% da deformação: $\alpha \sigma_y / E = 0.002 \Rightarrow \alpha = 0.002 E / \sigma_y$. Uma vez que um limite elástico claro é necessário na presente aplicação, a relação de Ramberg-Osgood é adaptada como

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ for } \sigma \leq \sigma_y, \text{ and } \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 + \alpha \frac{\sigma_y}{\sigma} \left(\left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n - 1 \right) \right] \text{ for } \sigma \geq \sigma_y \quad (7.27)$$

pela subtração do efeito do escoamento na relação tensão-deformação para $\sigma \geq \sigma_y$. Isto é mostrado à direita da Figura 41. Os resultados são semelhantes aos mostrados na Figura 40.

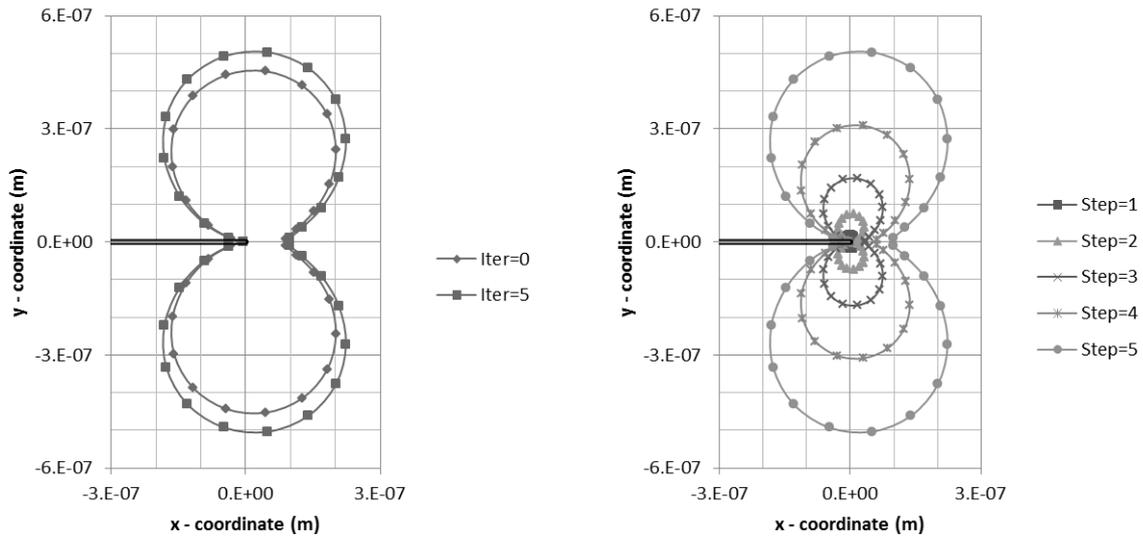


Figura 39. Contornos da zona plástica para o estado plano de deformações. Trinca discretizada com $ne = 16$, carregamento uniaxial remoto de $\sigma_{yy} = 0.01\sigma_y$, aplicado em um passo (esquerda) e em 5 passos (Dumont e Mamani, 2013).

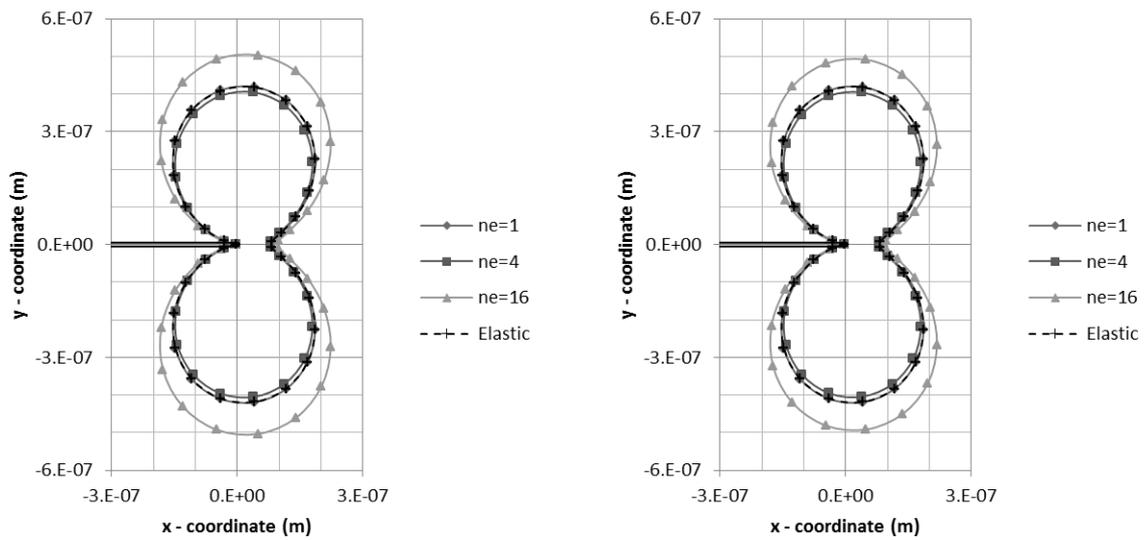


Figura 40. Contornos da zona plástica para o estado plano de deformações. Trinca discretizada com vários elementos, carregamento uniaxial remoto de $\sigma_{yy} = 0.01\sigma_y$, para um material elasto-plástico perfeito (esquerda) e para um material elasto-plástico bi linear com rigidez de endurecimento de $E/5$ (Dumont e Mamani, 2013).

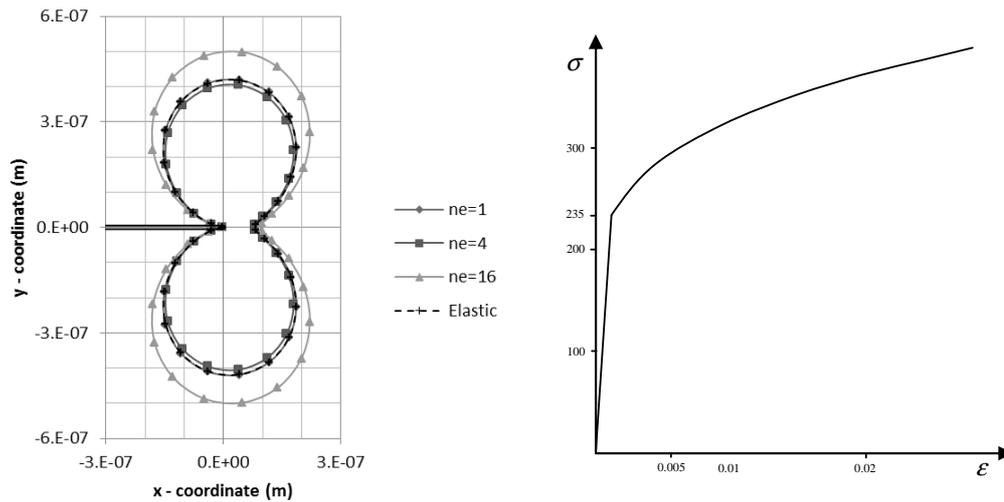


Figura 41. Contornos da zona plástica para o estado plano de deformações. Trinca discretizada com vários elementos de trinca, carregamento uniaxial remoto de $\sigma_{yy} = 0.01\sigma_y$ (esquerda), como obtida por um material elasto-plástico (direita) com uma curva tensão-deformação não-linear para $\sigma \geq \sigma_y$, dado de acordo com a relação de Ramberg-Osgood (tensões em MPa) (Dumont e Mamani, 2013).

A Figura 42 apresenta os contornos da zona plástica medidos ao longo dos eixos horizontal (esquerda) e vertical (direita) a partir da ponta da trinca, avaliados elasticamente (primeira iteração do algoritmo) para $ne = 16$ elementos de trinca, tanto para estado plano de deformações como estado plano de tensões, para a placa trincada introduzida na Seção 7.5, com a tensão uniaxial remota aplicada até 80% do limite elástico. O valor da zona plástica ao longo do eixo x progride rapidamente com o carregamento aplicado para o problema plano de tensão, tornando assim áreas de plásticação maiores do que no caso de deformações planas, como já foi visto na Figura 37.

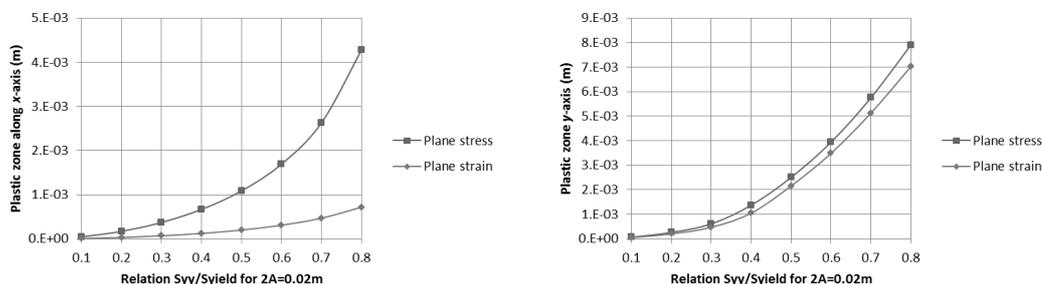


Figura 42. Zona plástica elasticamente calculada para vários níveis de carregamento remoto obtidos com $ne = 16$ elementos de trinca, medidos ao longo de $y = 0$ (esquerda) e $x = 0$ (direita) (Dumont e Mamani, 2013).

Gráficos semelhantes são mostrados na Figura 43 para simulações com apenas $ne = 1$ elementos de trinca e níveis de carga que aumentam só até 12% do

limite de elasticidade, no caso de deformações planas. Ambas as zonas plásticas elasticamente e plasticamente avaliadas (estes últimos são obtidos após a convergência do algoritmo da Seção 7.4) são dadas ao longo dos eixos horizontal e vertical, para comparação. Simulações com $ne=16$ elementos de trinca resultam em valores maiores (e mais precisos) da zona plástica, mas a convergência pode ser alcançada apenas para baixos níveis de carga. Pode-se concluir a partir dos resultados mostrados na Figura 43 bem como de outras simulações mais gerais que as atuais (isto é, plasticamente avaliadas) zonas plásticas evoluem muito rapidamente com o aumento dos níveis de carga, o que pode explicar a falta de convergência do algoritmo proposto quando a carga aplicada é alta. No entanto, é possível também que as tensões são superestimadas em pontos muito próximos das pontas da trinca, singularidades artificiais são introduzidas pelo modelo numérico, como mostrado na Figura 35, Figura 36 e Figura 37, já discutidos. Esta é uma questão em aberto, a ser investigada no futuro próximo. Algumas avaliações preliminares da zona plástica usando os elementos combinados da Seção 6.3 para discretizar a trinca foram feitas, embora apresentaram algumas melhoras do campo elástico de tensões não houve melhora significativa na convergência do processo iterativo.

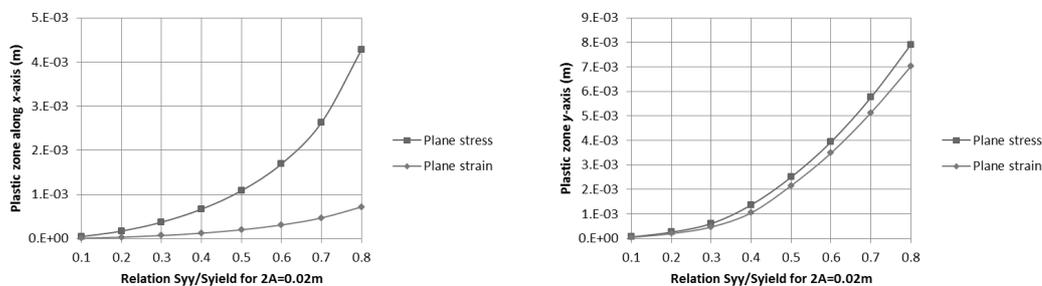


Figura 43. Zona plástica elasticamente e plasticamente calculada para vários níveis de carregamento remoto obtidos com $ne=1$ elementos de trinca, medidos ao longo de $y=0$ (esquerda) e $x=0$ (Dumont e Mamani, 2013).

7.8.

Considerações finais no cálculo da zona plástica

Os elementos de ponta da trinca implementados fornecem um meio simples e poderoso para a descrição do campo de tensões ao redor da ponta da trinca. Algumas melhorias tornaram-se obrigatórias a partir das investigações preliminares descritas no presente trabalho quanto em relação ao comportamento local de plastificação. As trincas semi-elípticas, que parecem eficientes para a

descrição do campo de tensões ao redor das pontas da trinca, devem ser combinadas com elementos de trinca de diferentes formas como mostrada na Seção 6.3, por exemplo, de modo que as singularidades artificiais de tensão possam ser evitadas ou minimizadas.

As integrações na direção radial ao longo dos setores angulares exigem a introdução de \sqrt{r} funções de peso que podem ser avaliadas analiticamente. Uma possível conclusão, é que, para as grandes zonas de plastificação, erros de arredondamento podem se originar a partir do fato de que a carga é incrementada, σ_{ij}^e na Equação (7.23) torna-se a diferença de dois termos muito grandes para $r \rightarrow 0$, enquanto que o termo residual \mathbf{d}^{*res} na Equação (7.24), que, por definição é o resultado de uma integral imprópria, é avaliada de forma imprecisa, o que impede a \mathbf{p}^* na Equação (7.25) convergir como as iterações sucessivas.

O procedimento iterativo proposto para a avaliação das zonas plásticas converge de forma satisfatória quando o contorno de plastificação é pequeno em comparação com o comprimento do elemento usado para representar a ponta da trinca, outra causa desta divergência poderia ser o fato de trazer todos os termos do tensor de tensões proporcionalmente à superfície de escoamento ao invés de trazer o ponto de tensão $P(\sigma_I, \sigma_{II})$ para P_{\perp} , tal como mostra a Figura 30, de modo que $P - P_{\perp}$ seja a menor distância de $P(\sigma_I, \sigma_{II})$ à superfície de escoamento (Simo e Taylor, 1985).

Uma técnica de linearização do problema não linear apresentado por Fernandes e Souza Neto (2013) poderia também ser estudado quando aplicado ao contexto deste trabalho. A solução é obtida a partir do operador tangente consistente aplicado a um problema não linear do método dos elementos de contorno.