

6

Formulação para Problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica

Para problemas de elasticidade, a construção de soluções fundamentais é menos intuitiva e mais complexa do que para problemas de potencial, uma das complicações é a ação combinada dos modos I e II. Para trincas curvas discretizadas somente com elementos semielípticos Dumont e Mamani (2011) verificaram a consistência da formulação, Mamani (2011) apresentou vários exemplos para validar a aplicação na mecânica da fratura. Com base nos conceitos abordados por Dumont e Mamani (2011) apresenta-se as expressões analíticas do campo de tensões e deslocamentos devido à superposição de efeitos de duas semitrincas opostas formando um elemento de trinca, contido num domínio bidimensional infinito e homogêneo.

6.1.

Expressões analíticas do campo de deslocamentos

Conhecida a função de tensão Φ_1 , que corresponde a uma trinca de forma prescrita (abertura para o modo I e deslizamento para o modo II), o campo de deslocamentos devido aos modos I e II de fratura é matricialmente expresso como (Dumont e Mamani, 2011)

$$\mathbf{u}_{1(0)} = \begin{Bmatrix} u_{1(0)}' & u_{1(0)}'' \\ v_{1(0)}' & v_{1(0)}'' \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} (1-2\nu) \operatorname{Re} \Phi_1 - \frac{y_1}{a_1} \operatorname{Im} \Phi_1' & 2(1-\nu) \operatorname{Im} \Phi_1 + \frac{y_1}{a_1} \operatorname{Re} \Phi_1' \\ 2(1-\nu) \operatorname{Im} \Phi_1 - \frac{y_1}{a_1} \operatorname{Re} \Phi_1' & -(1-2\nu) \operatorname{Re} \Phi_1 - \frac{y_1}{a_1} \operatorname{Im} \Phi_1' \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν o coeficiente de Poisson, a_1 o comprimento do eixo da semitrinca e y_1 a coordenada perpendicular ao eixo da trinca.

$\Phi_1' = \frac{\partial \Phi_1(Z_1)}{\partial Z_1}$ e $\Phi_1'' = \frac{\partial^2 \Phi_1(Z_1)}{\partial Z_1^2}$ são a primeira e segunda derivada da função

Φ_1 , respectivamente. O subscrito $(\cdot)_{(0)}$ quer dizer no sistema local de coordenadas, cuja abcissa coincide com o eixo da trinca.

Dumont e Mamani (2011) desenvolveram a expressão geral do campo de deslocamentos devido à superposição de efeitos de duas trincas semielípticas opostas de comprimentos a_1 e a_2 , e rotações θ_1 e θ_2 . A consistência matemática e a interpretação física também foram discutidas. A expressão proposta pelos autores (com sinal trocado no termo em parêntesis, por conveniência) é

$$\mathbf{u} = \left(\mathbf{T}_1^T \mathbf{u}_{1(0)} \mathbf{M}_1 + \mathbf{T}_2^T \mathbf{u}_{2(0)} \mathbf{M}_2 \right) \mathbf{p}^*, \quad (6.2)$$

onde os subscritos $(\cdot)_1$ e $(\cdot)_2$ estão relacionados às semitrincas 1 e 2, que compõem a trinca completa, conforme o modelo da Figura 7b. A matriz \mathbf{T}_1 que transforma as coordenadas do sistema global de coordenadas (x, y) ao sistema local de coordenadas (x_1, y_1) é dada

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \text{ ou } \mathbf{x}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{x}, \quad (6.3)$$

e a matriz \mathbf{M}_1 que transforma parâmetros nodais de um sistema global \mathbf{p}^* a um sistema local \mathbf{p}_1 de modo a garantir a compatibilidade de deslocamento na superposição de efeitos, é dada como

$$\begin{Bmatrix} p_1^I \\ p_1^{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \end{Bmatrix}, \text{ ou } \mathbf{p}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{p}^* \quad (6.4)$$

onde $\mathbf{p}_1 = \begin{Bmatrix} p_1^I \\ p_1^{II} \end{Bmatrix}$ é um vetor de parâmetros de força que contém as contribuições dos modo I e II, respectivamente, atuando simultaneamente na semitrinca 1. Para a semitrinca 2 basta substituir o subscrito $(\cdot)_1$ pelo subscrito $(\cdot)_2$ nas expressões acima.

O vetor de parâmetros de força $\mathbf{p}^* = \begin{Bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \end{Bmatrix}$ é o vetor de variáveis desconhecidas do problema (graus de liberdade) cujo significado físico resulta compreensível em comparação com as expressões iniciais propostas por Westergaard para os modos de fratura I e II (Mamani, 2011).

6.2. Expressões analíticas do campo de tensões

De forma similar à Seção 6.1, a partir da função de tensão Φ_1 e suas primeira e segunda derivadas é obtido o campo de tensões devido aos modos de fratura I e II (Dumont e Mamani, 2011)

$$\boldsymbol{\sigma}_{1(0)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx1(0)}^I & \sigma_{xx1(0)}^{II} \\ \sigma_{yy1(0)}^I & \sigma_{yy1(0)}^{II} \\ \tau_{xy1(0)}^I & \tau_{xy1(0)}^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \operatorname{Re} \Phi_1' - \frac{y_1}{a_1^2} \operatorname{Im} \Phi_1'' & \frac{2}{a_1} \operatorname{Im} \Phi_1' + \frac{y_1}{a_1^2} \operatorname{Re} \Phi_1'' \\ \frac{1}{a_1} \operatorname{Re} \Phi_1' + \frac{y_1}{a_1^2} \operatorname{Im} \Phi_1'' & -\frac{y_1}{a_1^2} \operatorname{Re} \Phi_1'' \\ -\frac{y_1}{a_1^2} \operatorname{Re} \Phi_1'' & \frac{1}{a_1} \operatorname{Re} \Phi_1' - \frac{y_1}{a_1^2} \operatorname{Im} \Phi_1'' \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

A expressão geral do campo de tensões que considera a superposição de efeitos de duas semitrincas opostas é

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{R}_1 \boldsymbol{\sigma}_{1(0)} \mathbf{M}_1 + \mathbf{R}_2 \boldsymbol{\sigma}_{2(0)} \mathbf{M}_2) \mathbf{p}^*, \quad (6.6)$$

onde \mathbf{R}_1 é a matriz que transforma o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}_{1(0)}$, orientados segundo o sistema local de coordenadas (eixo da trinca), ao campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}_{1(0)}$ orientados segundo o sistema global de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx_1} \\ \sigma_{yy_1} \\ \tau_{xy_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \sin^2 \theta_1 & -\sin 2\theta_1 \\ \sin^2 \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 / 2 & -\sin 2\theta_1 / 2 & \cos 2\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx1(0)}^I & \sigma_{xx1(0)}^{II} \\ \sigma_{yy1(0)}^I & \sigma_{yy1(0)}^{II} \\ \tau_{xy1(0)}^I & \tau_{xy1(0)}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^I \\ P_1^{II} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{R}_1 \boldsymbol{\sigma}_{1(0)} \mathbf{p}_1 \quad (6.7)$$

6.3. Avaliação numérica do campo de tensões para uma trinca curva geral

Seja uma trinca curva discretizada com $n+2$ pontos geométricos, numerados de 1 a $n+2$ e formando uma série de $n+1$ segmentos (campo) como ilustrado na Figura 20. A curva que representa a trinca é aproximada por n parâmetros nodais numerados de $\underline{1}$ a \underline{n} (fonte). Estes parâmetros nodais estão relacionados às forças de superfície dadas pelas funções complexas de Westergaard aplicadas como uma sucessão de elementos parcialmente superpostos.

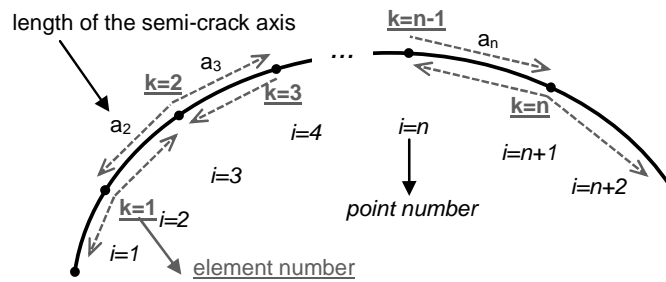


Figura 20. Ilustração de uma trinca discretizada com n parâmetros nodais (elementos), $n+1$ segmentos e $n+2$ pontos geométricos.

Para condições de contorno de Neumann, o problema é governado apenas pela Equação (2.8), onde a matriz \mathbf{H} é calculada pela integral da Equação (2.12), e \mathbf{p} é o vetor de forças nodais equivalentes. Após o vetor de parâmetros nodais \mathbf{p}^* ser avaliado, os campos de tensões e deslocamentos são facilmente avaliados mediante as Equações (2.4) e (2.5).

No primeiro exemplo é estudada a trinca da Figura 21a discretizada com elementos semi-elípticos, como proposto por Dumont e Lopes (2003) e generalizado por Dumont e Mamani (2011). A trinca reta de comprimento $2a=2$ está contida no domínio bidimensional infinito, isotrópico e contínuo, e é submetida a uma tensão normal remota $\sigma_{yy}^{\infty}=1$, porém somente o modo I é estudado. A trinca é discretizada com 4, 16, 64 e 256 elementos de forma elíptica, todos de igual comprimento. As funções de interpolação usadas para o cálculo da matriz \mathbf{H} , ou seja, u_{in} na Equação (2.12) são lineares. Deseja-se analisar o campo de tensões ao longo da linha tracejada da Figura 21a, que coincide com o eixo de coordenadas $x>0$, cuja origem está na ponta da trinca. A parte esquerda da Figura 22 mostra os resultados numéricos e analíticos, e a parte direita mostra os correspondentes erros numéricos calculados pela Equação (5.16). Os valores numéricos da tensão σ_{yy} são visualmente semelhantes aos valores analíticos, assim, melhores conclusões podem ser obtidas a partir da análise dos erros. Para um ponto $x=0.0001$ bastante próximo da ponta da trinca os erros entre as quatro discretizações são bem próximos, sendo o melhor resultado $\varepsilon \approx \pm 2.10\%$ para a trinca discretizada com 4 elementos. Para um ponto $x=0.01$, cem vezes mais distante que o ponto anterior, o erro com 4 elementos é próximo a $\pm 4.00\%$, já para a trinca discretizada com 256 elementos o erro $\varepsilon \approx \pm 0.40\%$ é menor, em termos gerais os resultados numéricos convergem à solução analítica somente quando o

ponto em análise é distante da ponta da trinca, porém existe uma natureza flutuante dos resultados numéricos em torno da solução analítica, pelo qual não é possível garantir a convergência de tensões num determinado ponto com o refinamento da discretização.

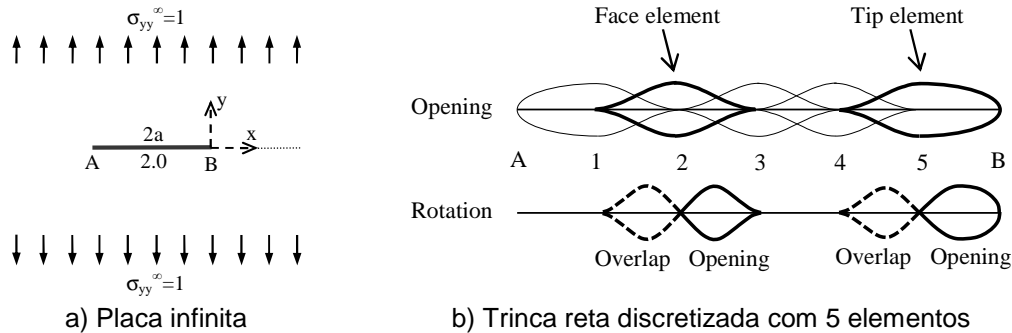


Figura 21. Trinca horizontal reta em um domínio infinito (Adaptado de Mamani e Dumont, 2015).

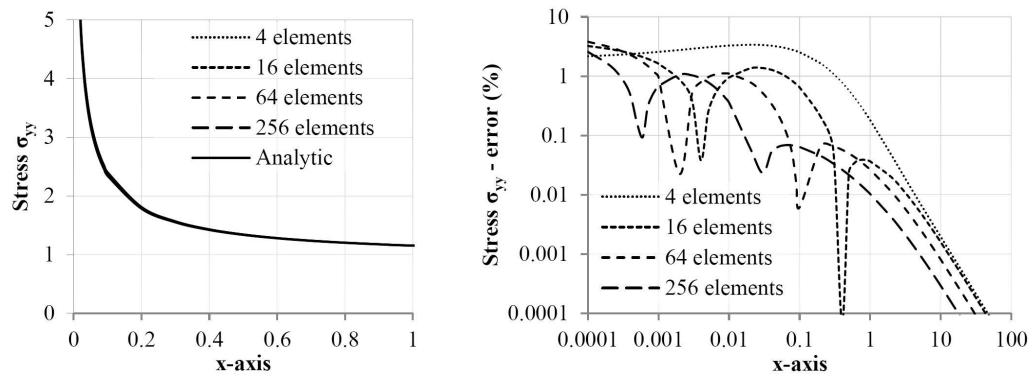


Figura 22. Campo de tensões para a trinca da Figura 21 discretizada com elementos de forma elíptica (Adaptado de Dumont e Lopes, 2002; Mamani, 2011).

O segundo exemplo, corresponde à mesma trinca da Figura 21a discretizada com elementos polinomiais para representar as faces da trinca e elementos mistos para representar as pontas da trinca, esta discretização é mostrada na parte superior da Figura 21b para uma trinca reta discretizada com 5 elementos, como exemplo. Os elementos 2 a 4 correspondem a elementos de face e os elementos 1 e 2 a elementos de ponta. As funções de interpolação usadas no cálculo da matriz \mathbf{H} , ou seja, u_{in} na Equação (2.12) têm a mesma forma da abertura u_{im}^* do correspondente elemento. Os resultados numéricos da tensão σ_{yy} plotados na parte esquerda da Figura 23 apresentam pequenas diferenças em relação à solução analítica. Uma análise similar ao exemplo anterior é levada a cabo: para um ponto de coordenada $x=0.0001$ o erro $\varepsilon \approx \pm 0.50\%$ com 64 elementos foi bem melhor

que todas as discretizações, inclusive a da trinca discretizada com 256 elementos ($\approx 4.50\%$). Para o ponto $x=0.01$ o menor erro $\varepsilon \approx 0.90\%$ foi para uma discretização com 16 elementos e o maior $\varepsilon \approx 8.20\%$ para uma discretização de 4 elementos. Apesar destes resultados não serem melhores que os do exemplo anterior, os resultados da trinca discretizada com elementos mistos parecem ter uma natureza menos oscilatória do que aqueles que foram obtidos usando somente elementos elípticos.

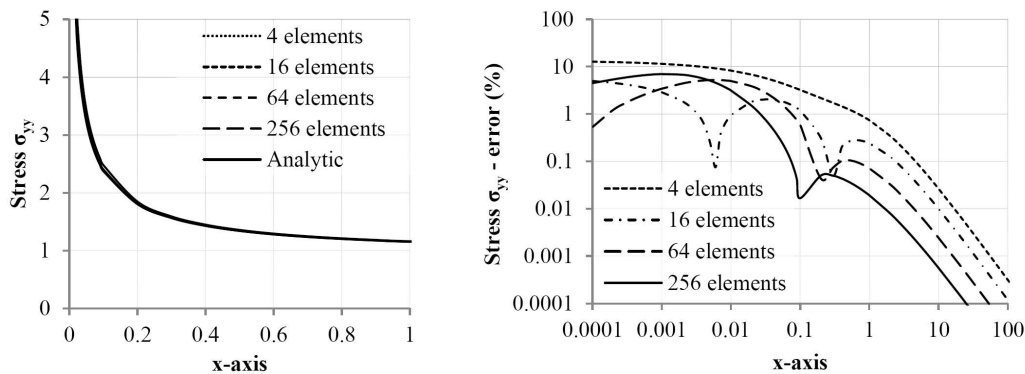


Figura 23. Campo de tensões para a trinca da Figura 21 discretizada com elementos combinados de abertura ou deslizamento (Mamani e Dumont, 2015).

O terceiro exemplo é semelhante ao segundo, aos elementos do exemplo anterior são superpostos elementos para considerar os efeitos da rotação relativa entre as faces da trinca, como exemplificado na parte inferior da Figura 21b. Em termos do modo I, estes elementos têm uma parte em abertura e outra em sobreposição, esta sobreposição existe somente na representação local, no comportamento global esta sobreposição é eliminada na soma de efeitos com elementos de abertura (parte superior da Figura 21b). Os resultados numéricos da Figura 24 são visualmente iguais ao analítico. Os erros para o ponto de coordenada $x=0.0001$ estão entre $\pm 4.60\%$ e $\pm 6.50\%$, os quais não apresentaram melhoras significativas em relação aos exemplos anteriores. Para o ponto com coordenada $x=0.01$ os erros tiveram um melhor comportamento, o erro com 4 elementos foi próximo a $\pm 2.70\%$ e o erro com 256 elementos foi menor a $\pm 0.07\%$. A melhor característica dos resultados usando-se elementos de abertura com rotação é que as flutuações foram radicalmente diminuídas, isto garante a convergência das tensões em pontos bem próximos da trinca.

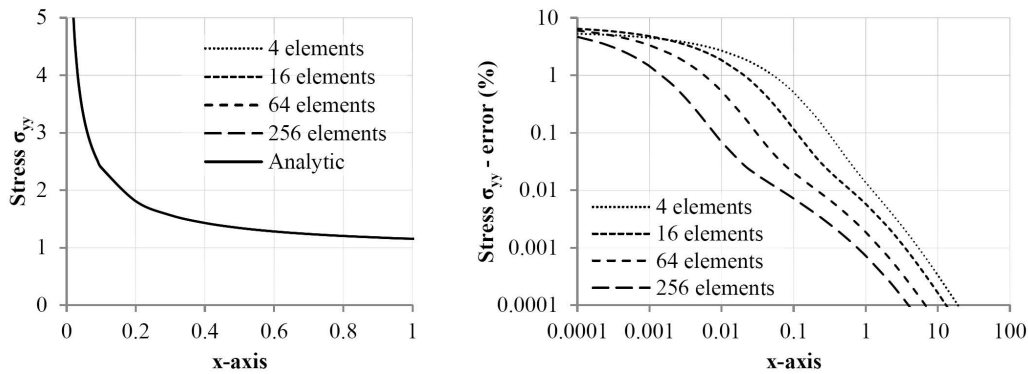


Figura 24. Campo de tensões para a trinca da Figura 21 discretizada com elementos combinados de abertura e rotação (Mamani e Dumont, 2015).

Os exemplos demonstraram que a trinca discretizada com elementos mistos com rotação conduz a um bom comportamento do campo de tensões, garantindo a convergência para pontos bem próximos à ponta da trinca.

6.4. Avaliação numérica da abertura da trinca

Nesta seção é apresentado o estudo da forma de abertura de uma trinca reta: uma primeira análise é feita usando-se o método híbrido dos elementos de contorno e uma segunda análise usando-se o método convencional dos elementos de contorno.

6.4.1. Abertura de trinca usando o método híbrido dos elementos do contorno

Para condições de contorno de Neumann, depois de calculado o vetor de parâmetros nodais \mathbf{p}^* na Equação (2.8) o cálculo do campo de deslocamentos é facilmente obtido mediante a Equação (2.5), a menos de uma constante de deslocamentos de corpo rígido. O problema apresentado é para o estado plano de deformações.

O primeiro exemplo é para a trinca da Figura 21a, desta vez com a coordenada $x=0$ deslocada para coincidir com o centro da trinca. Uma primeira avaliação é para a trinca reta discretizada com 16 elementos elípticos, na segunda avaliação numérica a trinca é discretizada com elemento mistos (polinomiais nos elementos das faces e semielípticas nos elementos das pontas), na terceira

avaliação além de serem considerados elementos mistos para representar a abertura da trinca são também considerados elementos para representar os efeitos da rotação relativa entre as faces da trinca. Os resultados são mostrados na Figura 25, onde os valores da abertura foram calculados para $\frac{2(1-\nu^2)}{E} = 1$, de modo a obter uma abertura unitária da solução analítica no centro da trinca, os valores das aberturas foram calculados ao longo de 201 pontos igualmente distribuídos no eixo da trinca. A parte esquerda da Figura 25 mostra a comparação dos resultados numéricos com o analítico e à direita seus respectivos erros calculados como

$$\varepsilon(\%) = \left| \frac{v_{num} - v_{ana}}{v_{ana(max)}} \right| \times 100\% \quad (6.8)$$

onde v_{num} e v_{ana} representam valores numéricos e analíticos, neste caso $v_{ana(max)} = 1$ é a abertura analítica no centro da trinca. Na parte central da trinca, os piores resultados numéricos foram dos elementos elípticos ($\varepsilon \approx \pm 10\%$) e os melhores dos elementos mistos com rotação ($\varepsilon \approx \pm 0.1\%$).

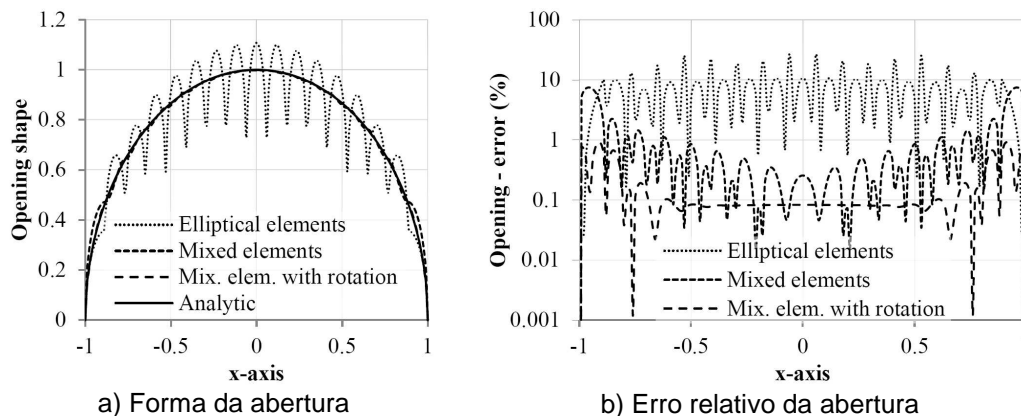


Figura 25. Abertura da trinca da Figura 21 usando vários elementos de discretização (Mamani e Dumont, 2015).

O segundo exemplo é o estudo da mesma trinca do exemplo anterior, agora discretizada com 4, 16 e 64 elementos mistos com rotação. Na Figura 26a pode-se observar que os resultados numéricos coincidem visualmente com os resultados analíticos, inclusive para a trinca discretizada com 4 elementos. Segundo a Figura 26b a trinca discretizada com maior quantidade de elementos (64) apresenta maior estabilidade (menor flutuação) do que a trinca discretizada com menor quantidade de elementos (4 e 16).

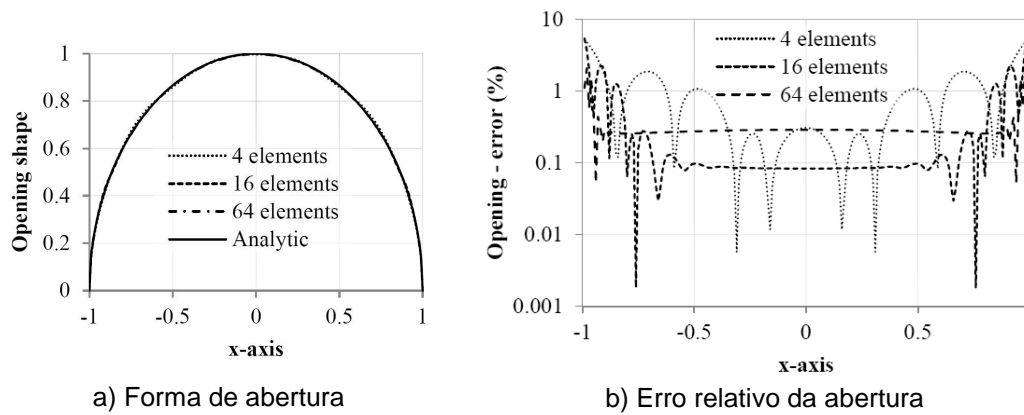


Figura 26. Abertura da trinca da Figura 21 para várias discretizações da trinca (Mamani e Dumont, 2015).

6.4.2.

Abertura de trinca usando o método convencional dos elementos de contorno

Uma formulação a partir do método dos resíduos ponderados conduz à expressão clássica do método dos elementos de contorno dada pela Equação (Brebbia *et al*, 1984)

$$H_{mn} d_n = G_{mn} t_n \quad \text{ou} \quad \mathbf{Hd} = \mathbf{Gt}, \quad (6.9)$$

onde \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais (nos nós 1 até 5 na parte direita da Figura 21, por exemplo) e \mathbf{t} são parâmetros nodais de intensidade de forças de superfície aplicados nos mesmos nós. A matriz de transformação cinemática \mathbf{H} é exatamente a mesma da Equação (2.8) e a matriz \mathbf{G} que realiza um tipo de transformação de flexibilidade é dada por

$$G_{ml} = \mathbf{G} = \int_{\Gamma} u_{im}^* t_{il} d\Gamma, \quad (6.10)$$

com deslocamentos u_{im}^* dados pelas funções de tensão de Westergaard e as funções de interpolação com suporte local t_{il} , que têm a mesma forma da abertura u_{im}^* .

O exemplo numérico estudado é a para a mesma trinca do segundo exemplo da Seção 6.4.1, porém agora resolvido pelo método convencional dos elementos de contorno. A Figura 27a mostra os resultados numéricos da abertura da trinca para discretizações de 4, 16 e 64 elementos igualmente espaçados e seus correspondentes erros são mostrados à direita. Embora os erros sejam um pouco

maiores do que no método híbrido dos elementos de contorno, no método convencional os erros apresentam maior estabilidade (menor flutuação).

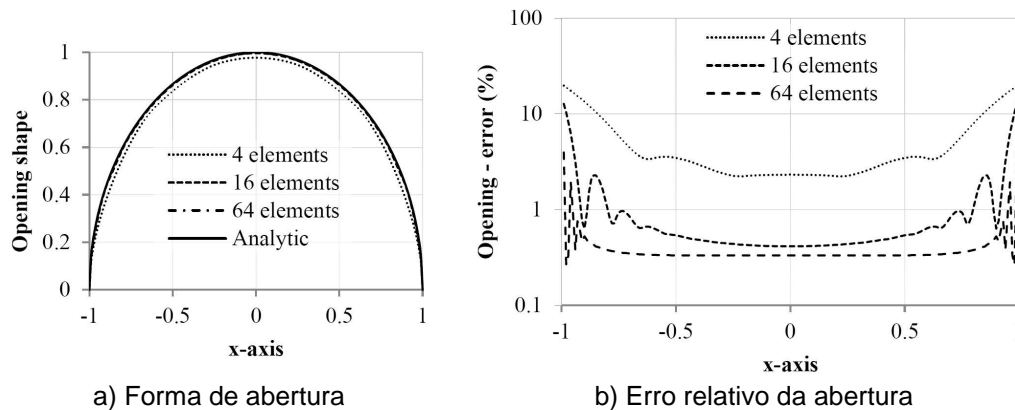


Figura 27. Deslocamentos de abertura da trinca reta da Figura 21a (Mamani e Dumont, 2015).

6.5. Fator de intensidade de tensão

Na mecânica da fratura linear elástica, o fator de intensidade de tensão é usado para estimar o campo de tensões próximo à ponta da trinca. O fator de intensidade de tensão (K) define a amplitude da singularidade na proximidade da ponta da trinca, isto é, tensões próximas à ponta da trinca aumentam proporcionalmente a K . Além disso, este fator define completamente as condições da ponta da trinca; se K é conhecido, é possível resolver todos os componentes de tensões, deformações e deslocamentos como uma função de r e θ . Este parâmetro K usado para a descrição das condições da ponta da trinca é um dos conceitos mais importantes na mecânica da fratura (Anderson, 1995).

Soluções fechadas para K têm sido definidas para um número determinado de configurações simples, para situações mais complexas ele pode ser estimado através de experimentos ou análises numéricas. *Point matching* e os métodos de energia são tradicionalmente usados para avaliar os parâmetros da mecânica da fratura a partir de análises numéricas. Os fatores de intensidade de tensão em termos de tensões são formalmente definidos como

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0) \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yx}(r, 0) \end{aligned} \quad (6.11)$$

O fator de intensidade de tensão pode ser calculado a uma determinada distância da ponta da trinca, e extrapolado para $r=0$. Alternativamente K pode ser estimado a partir de uma extrapolação da abertura da trinca:

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{2\mu}{\kappa+1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi/ru_y}(r, \pi) \\ K_{II} &= \frac{2\mu}{\kappa+1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi/ru_x}(r, \pi) \end{aligned} \quad (6.12)$$

A Equação (6.12) tende a ser mais precisa do que a Equação (6.11) devido ao fato de que os deslocamentos nodais podem ser obtidos com melhor precisão do que as tensões. No método clássico dos elementos finitos, esta abordagem de extrapolação precisa de um alto nível de refinamento da malha para obter um nível razoável de precisão. Por exemplo, para uma análise bidimensional com uma malha de 2000 graus de liberdade, o método de extrapolação gera tipicamente um erro em torno de $\pm 5\%$ para K_I (Anderson, 1995).

6.5.1.

Fator de intensidade de tensão em termos de \mathbf{p}^*

Os valores de K são diretamente obtidos a partir dos elementos do vetor \mathbf{p}^* (dado na Equação (2.8)) que correspondem às pontas da trinca. A expressão analítica de K_I como função de \mathbf{p}^* é obtida substituindo-se as expressões da Equação (2.4) na Equação (6.11) e avaliando-se para $r \rightarrow 0$, assim

$$K_{I(n)} = \frac{\sqrt{\pi a_{(n)}}}{2a_{(n)}} \left(p_{y(n)}^* + \frac{1}{3} p_{ry(n)}^* \right). \quad (6.13)$$

Para o modo misto, os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} num problema linear elástico bidimensional são dados pela Equação

$$\begin{Bmatrix} K_{I(n)} \\ K_{II(n)} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{\pi a_{(n)}}}{2a_{(n)}} \left(\begin{bmatrix} -\sin \theta_{(n)} & \cos \theta_{(n)} \\ \cos \theta_{(n)} & \sin \theta_{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{x(n)}^* \\ p_{y(n)}^* \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} p_{rx(n)}^* \\ p_{ry(n)}^* \end{Bmatrix} \right), \quad (6.14)$$

onde, $\begin{Bmatrix} p_{x(n)}^* \\ p_{y(n)}^* \end{Bmatrix}$ e $\begin{Bmatrix} p_{rx(n)}^* \\ p_{ry(n)}^* \end{Bmatrix}$ são incógnitas primárias do problema, relacionadas à

abertura (ou deslizamento) e rotação. $\begin{Bmatrix} p_{rx(n)}^* \\ p_{ry(n)}^* \end{Bmatrix} = 0$ é o caso particular onde as

rotações não são consideradas.

Como exemplo numérico, apresenta-se o estudo da mesma trinca da Figura 21a, cuja solução analítica do fator de intensidade de tensão para o modo I é $K_I = \sqrt{\pi}$. O estudo aqui apresentado é para a trinca reta discretizada com 1, 4, 16, 64 e 256 elementos. Os resultados são apresentados na Figura 28a, onde uma série de resultados corresponde à trinca discretizada com elementos de forma elíptica e a outra à trinca discretizada com elementos mistos com rotação. O fator de intensidade de tensão K_I para a trinca discretizada com um elemento corresponde à solução analítica. Os resultados numéricos para a trinca discretizada com 256 elementos foram melhores para os elementos elípticos ($\approx \pm 6\%$) em comparação com os resultados para elementos mistos com rotação ($\approx \pm 8\%$), porém não foi obtida uma regra de convergência em nenhum dos casos.

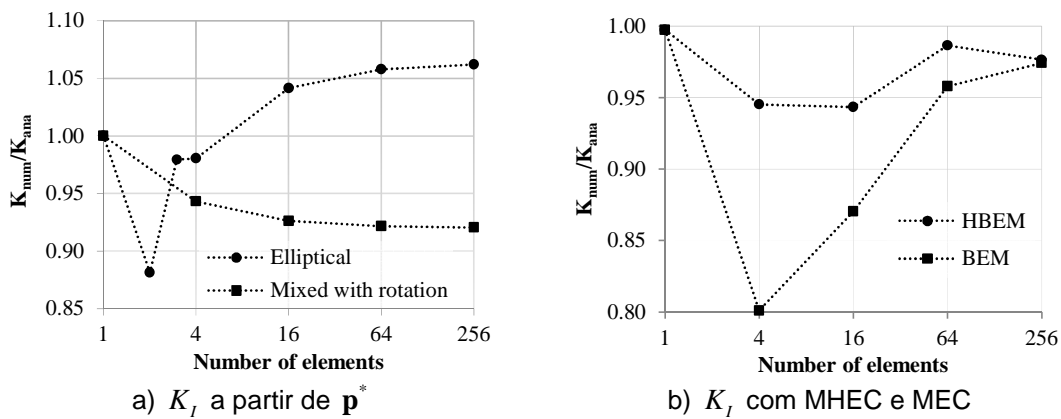


Figura 28. Fator de intensidade de tensão para a trinca da Figura 21, a partir dos parâmetros p^* e deslocamentos num ponto de coordenadas $x = -0.01$ (Mamani e Dumont, 2015).

6.5.2.

Fator de intensidade de tensão em termos da abertura da trinca

O valor numérico da abertura da trinca, pode ser usado para calcular o fator de intensidade de tensão a partir da Equação (6.12), quando a variável r é aproximada por $r = \varepsilon$, sendo ε um valor bem pequeno.

Como exemplo numérico apresenta-se a mesma trinca da Figura 21a cuja solução analítica para o modo I é $K_I = \sqrt{\pi}$, a trinca é discretizada com 1, 4, 16, 64 e 256 elementos mistos com rotação. O cálculo numérico do fator de intensidade é realizado pelo método híbrido e convencional dos elementos de contorno, cujos resultados são mostrados na Figura 28b. Os fatores de intensidade de tensão foram calculados a partir do ponto $r = \varepsilon = 0.01$ (sobre o eixo x). Os resultados melhoram à medida em que a discretização da trinca é aumentada, não foi obtido um padrão

de convergência, no entanto os melhores resultados foram obtidos usando o método híbrido dos elementos de contorno.

6.5.3.

Fator de intensidade de tensão em termos de tensões

A solução do campo de tensões num ponto em frente à ponta da trinca é usada para calcular o fator de intensidade de tensão, K é calculado a partir da Equação (6.11) quando a variável r é aproximada por $r = \varepsilon$, sendo ε um valor bem pequeno.

Como exemplo numérico apresenta-se a mesma trinca da Figura 21a cuja solução analítica para o modo I é $K_I = \sqrt{\pi}$, a trinca é discretizada com 1, 4, 16, 64 e 256 elementos mistos com rotação. O cálculo numérico do fator de intensidade K_I foi obtido em três pontos ($r = 0.1, 0.01$ e 0.001) cujos resultados são mostrados na Figura 29a. Não foi obtido um padrão de convergência, no entanto o melhor resultado é para $r = 0.01$, com erros menores que $\pm 1\%$ para discretizações de 64 e 256 elementos.

Outra estimativa do fator de intensidade de tensão poderia ser obtida calculando-se K_I a uma determinada distância da ponta da trinca, e extrapolado para $r = 0$.

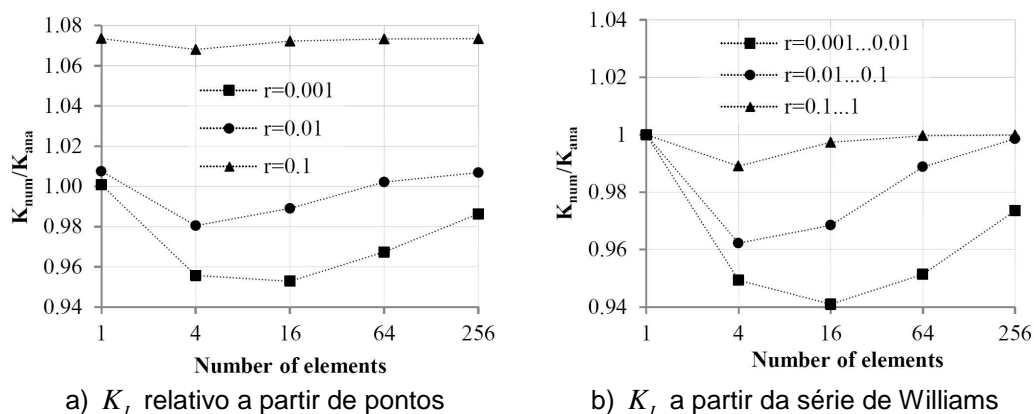


Figura 29. Fator de intensidade de tensão para a trinca da Figura 21, a partir de tensões em pontos e por comparação com a série de Williams (Mamani e Dumont, 2015).

6.5.4.

Fator de intensidade de tensão por comparação com a série de Williams

Os fatores de intensidade de tensão obtidos diretamente a partir dos parâmetros p^* e a partir das tensões e aberturas num ponto próximo à ponta da

trinca não garantem convergência, diante deste fato procurou-se uma alternativa para melhorar esses resultados. A solução para o cálculo numérico de K por comparação com a série de Williams foi inicialmente proposta neste contexto por Lopes (1998, 2002). A ideia proposta é calcular os n primeiros termos da série de Williams de forma que a curva correspondente se aproxime o máximo possível da curva obtida através do método numérico, esta aproximação é realizada utilizando-se o método dos mínimos quadrados e será explicada a seguir.

De acordo com o método dos mínimos quadrados, o vetor $\{c\}$ que contém os coeficientes dos n primeiros termos da série de Williams, deve ser tal que:

$$\left(\{c\}^T [\mathbf{T}]^T - \{t_n\}^T\right) \left([\mathbf{T}] \{c\} - \{t_n\}\right) = \min \quad (6.15)$$

onde

Matriz $[T]$.- Cujas linhas armazenam os n primeiros termos da série de Williams obtidos nos mesmos pontos utilizados para o cálculo das tensões através do programa computacional.

Vetor $\{c\}$.- Cujos elementos representam os coeficientes dos n primeiros termos da série de Williams.

Vetor $\{t_n\}$.- Que armazena as tensões calculadas através do programa computacional.

Derivando-se a Equação (6.15) em relação a $\{c\}$ e igualando-se a zero , chega-se a

$$\{c\} = \left([\mathbf{T}]^T [\mathbf{T}]\right)^{-1} \left([\mathbf{T}]^T \{t_n\}\right) \quad (6.16)$$

sendo determinados assim os coeficientes dos termos da série.

De acordo com a Equação (3.16), o coeficiente do primeiro termo da série de Williams está relacionado ao fator de intensidade de tensão, sendo os coeficientes dos outros termos da série importantes para a representação das tensões em pontos mais distantes da ponta da trinca.

O exemplo numérico é o mesmo da Figura 21a cuja solução analítica para o modo I é $K_I = \sqrt{\pi}$. Os resultados numéricos para a trinca discretizada com 1, 4, 16, 64 e 256 elementos mistos com rotação são mostrados na Figura 29b. Nos três casos apresentados foram calculados os 5 primeiros termos da série de Williams a partir das tensões calculadas em 10 pontos igualmente espaçados entre os limites

indicados na legenda da Figura 29b. Neste exemplo verificou-se que o fator de intensidade de tensão converge com a discretização, a convergência é mais rápida quando a faixa dos pontos onde as tensões são calculadas está mais longe da trinca, isto acontece somente para este exemplo em particular, pois não existe a influência de outros contornos no domínio em análise.