

5 Formulação para Problemas de Potencial

O principal objetivo do presente capítulo é validar a função de tensão do tipo Westergaard obtida para uma trinca com abertura polinomial (como mostrado na Figura 9a) quando usada como solução fundamental no método híbrido dos elementos de contorno.

É apresentado um problema com soluções analíticas conhecidas, para comparação com os resultados numéricos. O conteúdo deste capítulo não tem relação direta com a mecânica da fratura, pois os contornos avaliados não apresentam pontas. O que será apresentado tem valor didático no uso de funções de Westergaard como solução fundamental no método híbrido.

5.1. Construção da solução fundamental

A solução da equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ para o estado estacionário de transferência de calor em uma placa homogênea, de espessura constante t , com coeficiente de condutividade k , pode ser obtida em função de Φ_1 , pela seguinte expressão

$$u_1 = \frac{1}{k} \text{Im} \Phi_1 \quad (5.1)$$

com fluxos referenciados ao sistema global de coordenadas cartesianas (x, y)

$$\begin{aligned} q_{x_1} &= -k \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\text{Im}(T_1 \Phi_1') \\ q_{y_1} &= -k \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\text{Re}(T_1 \Phi_1') \end{aligned} \quad (5.2)$$

e o fluxo normal

$$q_n = -q_{x_1} n_x - q_{y_1} n_y \quad \text{ao longo de } \Gamma \quad (5.3)$$

onde n_x e n_y são as projeções do vetor normal unitário externo \vec{n} .

Considera-se que u_1 é a temperatura no ponto (x, y) da placa, q_{x_1} e q_{y_1} são fluxos de calor (taxa de transferência de calor por unidade de superfície do corpo) para um fluxo de calor total por unidade de espessura $Q/t=1$ que entra na placa.

O sistema cartesiano de coordenadas (x_1, y_1) é introduzido com o propósito de fornecer um tratamento formal do problema:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{x} \quad . \quad (5.4)$$

Em seguida, os fluxos da Equação (5.2) são expressos matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} q_{x_1} \\ q_{y_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{x_{1(0)}} \\ q_{y_{1(0)}} \end{Bmatrix}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{q}_{1(0)} \quad (5.5)$$

onde os subscritos $(\cdot)_{1(0)}$ indicam que os fluxos estão referenciados ao sistema cartesiano (x_1, y_1) , rotacionado de um ângulo θ_1 :

$$\begin{aligned} q_{x_{1(0)}} &= -k \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{a_1} \text{Im}(\Phi_1') \\ q_{y_{1(0)}} &= -k \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = -\frac{1}{a_1} \text{Re}(\Phi_1') \end{aligned} \quad (5.6)$$

Um elemento é formado por dois segmentos retos de comprimentos a_1 e a_2 rotacionados de um ângulo θ_1 e θ_2 , respectivamente, compondo linhas de saltos de potencial (que correspondem a linhas de descontinuidade de deslocamentos ou trincas no caso de elasticidade) ao longo do contorno Γ de um corpo de domínio Ω , com o segmento 2 antes do segmento 1, como mostrado na Figura 11a.

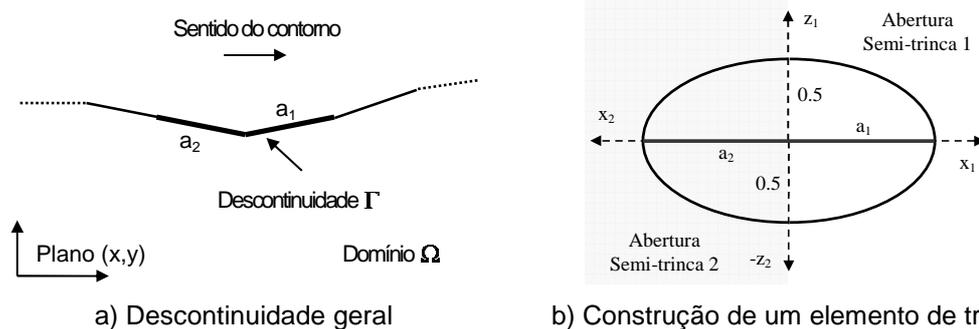


Figura 11. Construção de um elemento de descontinuidade a partir de duas semitrincas.

O caso mais simples é a superposição de duas semitrincas elípticas colineares de comprimentos $a_1 = a_2 = 1$ formando uma trinca elíptica, similar à proposta original de Westergaard (1939) e computacionalmente implementado por Dumont e Lopes (2003). A generalização para um elemento formado por duas

trincas semi-elípticas (não necessariamente colineares e/ou $a_1 \neq a_2$) foi tratada por Dumont e Mamani (2011). A Figura 11b mostra a superposição em termos de abertura de duas trincas semi-elípticas nos seus planos locais de coordenadas.

Como já foi discutido no capítulo anterior, o uso de elementos de forma elíptica tem alguns inconvenientes, o que motivou o desenvolvimento de outros tipos de elementos (ver Figura 9).

O efeito combinado do campo potencial devido à superposição das semitrincas 1 e 2 é dado por:

$$u = u_1 - u_2, \quad (5.7)$$

e a superposição de efeitos dos fluxos

$$q_x = q_{x1} - q_{x2} \text{ e } q_y = q_{y1} - q_{y2}. \quad (5.8)$$

As justificações matemáticas de singularidade na ponta e na origem do elemento são amplamente discutidas no item 10.2 do apêndice. Na maioria dos problemas da mecânica da fratura somente condições de contorno de Neumann são necessárias, porém o problema é resolvido apenas pela Equação (2.8), sendo necessária somente a matriz \mathbf{H} .

5.2. Integração da matriz \mathbf{H}

A expressão geral da matriz \mathbf{H} para problemas de potencial é

$$\mathbf{H} \equiv H_{ki} = - \int_{\Gamma} (q_x n_x + q_y n_y) N_i |J| d\xi \quad (5.9)$$

onde k é o nó onde a fonte de potencial é aplicada, ou seja, o nó em comum de dois segmentos de contorno adjacentes, $\overline{k^-k}$ na esquerda (o segmento 2, rotacionado de um ângulo θ_2) e $\overline{kk^+}$ na direita (o segmento 1, rotacionado de um ângulo θ_1), como ilustrado na Figura 12. O potencial aplicado varia linearmente no contorno, segundo a função de interpolação N_i , do nó i aos nós adjacentes na esquerda e na direita. Em seguida, o intervalo de integração Γ da matriz de coeficientes H_{ki} na Equação (5.9) compreende os dois segmentos de contorno que têm em comum o nó i (ver Figura 13). No caso particular de segmento de contorno reto, $|J|$ é o correspondente comprimento do elemento, para a variável natural do contorno $\xi \in [0,1]$.

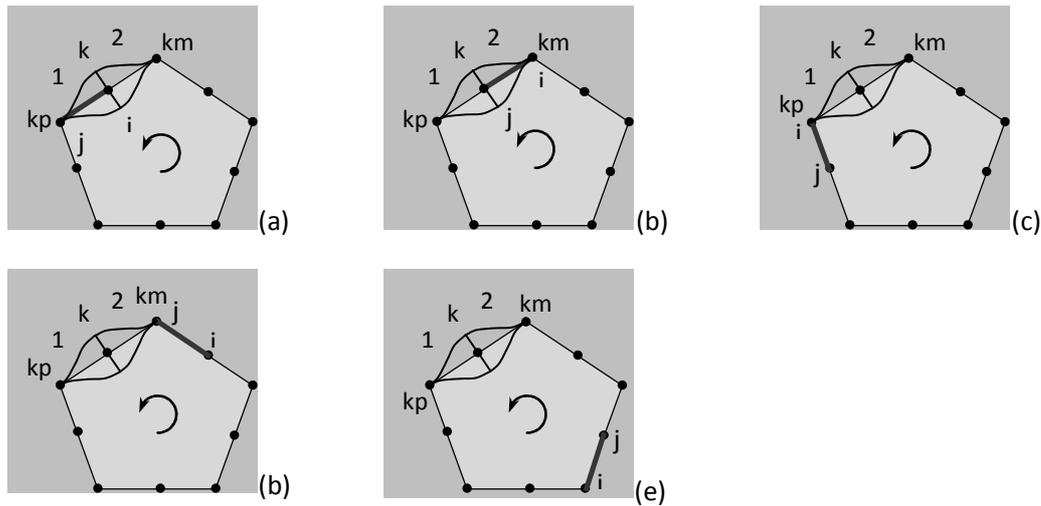


Figura 12. Ilustração dos cinco casos na avaliação numérica da matriz \mathbf{H} .

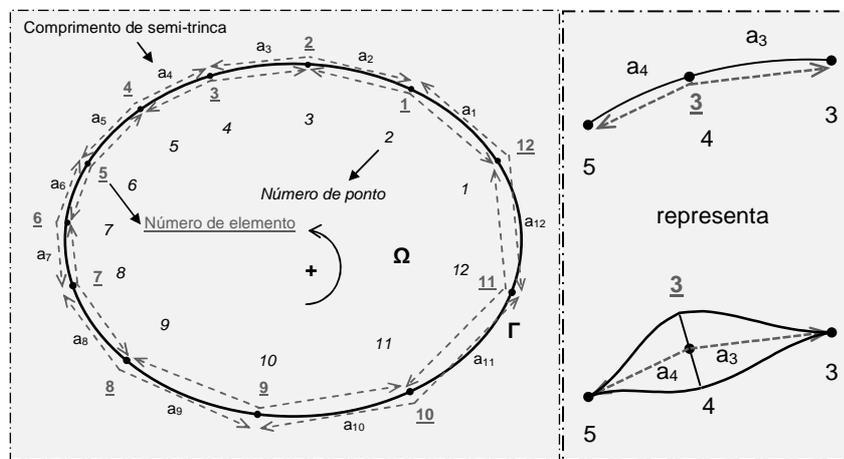


Figura 13. Ilustração de um corpo discretizado com 12 elementos de contorno lineares.

Deseja-se obter a matriz \mathbf{H} para um problema onde o modelo é discretizado com um número total de nós mn , que coincide com o número total de segmentos, como mostrado na Figura 13. A integração da matriz \mathbf{H} será avaliada em termos analíticos, cujas respectivas demonstrações são levadas a cabo na Seção 10.3. O algoritmo proposto é:

Loop Externo para os saltos de potencial $\rightarrow k$ variando de 1 a mn .

Determinar os nós adjacentes k^+ e k^- , definidos no sentido anti-horário. Em seguida, obter $\cos \theta_1$, $\sin \theta_1$, $\cos \theta_2$, $\sin \theta_2$.

Definir a matriz de constantes \mathbf{T} , cujos elementos são dados no capítulo 4

$$\mathbf{T} = [T_1 \quad -T_2] \quad (5.10)$$

Loop Interno para a integração dos segmentos -> i variando de 1 a nm .

Determinar os nós subseqüente j^+ e precedente j^- , a integração será avaliada ao longo dos segmentos \bar{ij}^+ e \bar{ij}^- .

Definir a matriz de constantes **A** e **C** cujos elementos são dados pela Equação (7.126)

$$\mathbf{A} = [A_1 \quad -A_2] \text{ and } \mathbf{C} = [C_1 \quad -C_2] \quad (5.11)$$

Em seguida, definir a matriz que contem expressões analíticas da integração ao longo dos segmentos adjacentes ao nó i (Seção 10.3)

$$Na[n,c], Nb[n,c], Nc[n,c] \text{ e } Nd[n,c] \quad (5.12)$$

Avaliar numericamente a matriz **h** de 2×2 na estrutura lógica *if*. Onde, $c = 1, 2$ se refere à semitrinca 1 ou 2, $n = 1, 2$ se refere às extremidades i ou j do segmento onde a integral é avaliada.

a) If $i = k$, caso (a) da Figura 12.

For n de 1 a 2 em um loop aninhado, definir

$$\mathbf{h}[n,1] = Na[n,1]$$

$$\mathbf{h}[n,2] = Nb[n,2]$$

End do loop com variável de controle n .

b) Else if $j = k$, caso (b) da Figura 12.

For n de 1 a 2 em um loop aninhado, definir

$$\mathbf{h}[n,1] = Nb[n,1]$$

$$\mathbf{h}[n,2] = Na[n,2]$$

End do loop com variável de controle n .

c) Else if $i = k^+$, caso (c) da Figura 12.

For n de 1 a 2 em um loop aninhado, definir

$$\mathbf{h}[n,1] = Nc[n,1]$$

$$\mathbf{h}[n,2] = Nd[n,2]$$

End do loop com variável de controle n .

d) Else if $j = k^-$, caso (d) da Figura 12.

For n de 1 a 2 em um loop aninhado, definir

$$\mathbf{h}[n,1] = Nd[n,1]$$

$$\mathbf{h}[n,2] = Nc[n,2]$$

End do loop com variável de controle n .

e) Else, caso (e) da Figura 12.

For n de 1 a 2 em um loop aninhado, definir

$$\mathbf{h}[n,1] = Nd[n,1]$$

$$\mathbf{h}[n,2] = Nd[n,2]$$

End do loop com variável de controle n .

End if (fim da estrutura lógica *if*)

Definir a matriz de projeções unitárias do segmento \bar{ij} , apresentado na Equação (5.3),

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Os coeficientes H_{coef} da matriz \mathbf{H} são obtidos no seguinte loop, para os nós i e j dados no vetor $\mathbf{i} \equiv [i, j]$.

Loop para os extremos i e j , com n variando de 1 a 2

$$H_{coef} = \left[\sum_{c=1}^2 \mathbf{T}[1] \text{Im}(\mathbf{h}[n, c]) + \mathbf{T}[2] \text{Re}(\mathbf{h}[n, c]) \right] \mathbf{n}^T \quad (5.14)$$

A matriz \mathbf{H} , cujos coeficientes podem já ter alguma contribuição da integração ao longo de algum segmento adjacente, é obtido de H_{coef} como

$$\mathbf{H}[k, \mathbf{i}[n]] = \mathbf{H}[k, \mathbf{i}[n]] + H_{coef} \quad (5.15)$$

Fim dos loops com variáveis de controle n, i, k .

Para condições de contorno de Neumann o problema é resolvido apenas a partir da Equação (2.8), onde podem ser necessários conceitos de inversa generalizada para na obtenção do vetor \mathbf{p}^* . Para demonstrar a consistência do algoritmo na próxima Seção é apresentado um exemplo, cujos resultados numéricos serão comparados com a solução analítica, com a solução fundamental de tipo logarítmica e com a solução de Westergaard de forma semielíptica (Dumont e Mamani, 2011).

5.3.

Campo de potenciais e gradientes em pontos internos

Uma fonte de potencial logarítmica $\Phi = \ln \sqrt{(x+10)^2 + (y-25)^2} / (2\pi)$ é aplicada no nó \mathbf{F} de um contínuo bidimensional infinito, como ilustrado na parte esquerda da Figura 14. Os gradientes nodais equivalentes são avaliados ao longo dos contornos representados pelas linhas cheias, criando assim um problema (para a equação de Laplace) de solução analítica simples e conhecida. O furo, as reentrâncias e as quinas formadas pelos contornos representam algumas dificuldades topológicas para a simulação numérica. O contorno é discretizado

com um total de 104 nós e a mesma quantidade de segmentos lineares, os quais estão igualmente espaçados entre as quinas numeradas, cujas coordenadas são dadas na parte direita da Figura 14. Uma série de 51 pontos ao longo da reta tracejada \overline{AB} gerada para a representação de alguns resultados numéricos no domínio. Por simplicidade, e por ser um problema acadêmico, não são especificadas as unidades de medida, podendo-se assumir qualquer sistema de unidades desde que haja coerência nas grandezas.

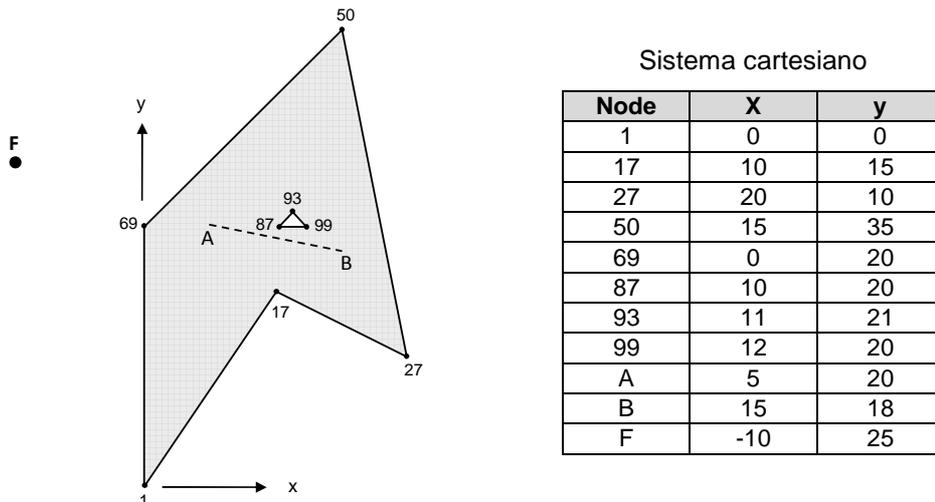


Figura 14. Recorte para a modelagem numérica de um corpo multiplamente conexo.

O problema mais simples que pode ser resolvido neste exemplo é para as condições de contorno de Neumann, onde o problema é governado apenas pela Equação (2.8). Embora a matriz \mathbf{H} dada pela Equação (5.9) seja uma matriz singular para um domínio limitado, os gradientes nodais equivalentes \mathbf{p} estão balanceados e o problema de álgebra linear admite apenas uma solução de \mathbf{p}^* , a ser obtida no contexto de matrizes inversas generalizadas (Dumont e Lopes, 2003; Mamani, 2011). Após \mathbf{p}^* ser calculado, gradientes e potenciais podem ser obtidos segundo as Equações (2.4) e (2.5).

A parte esquerda da Figura 15 mostra as soluções analítica (Analytic) e numérica (W. pol.) usando elementos de forma polinomial, obtidos em termos de potenciais ao longo do segmento reto \overline{AB} . Uma vez que o problema tem condições de contorno de Neumann, um potencial constante foi adicionado nos resultados numéricos a fim de que os valores numéricos e analíticos sejam próximos. Também foram feitas comparações com a solução fundamental de Kelvin (Kelvin) e com elementos semi-elípticos do tipo Westergaard (W. ell.).

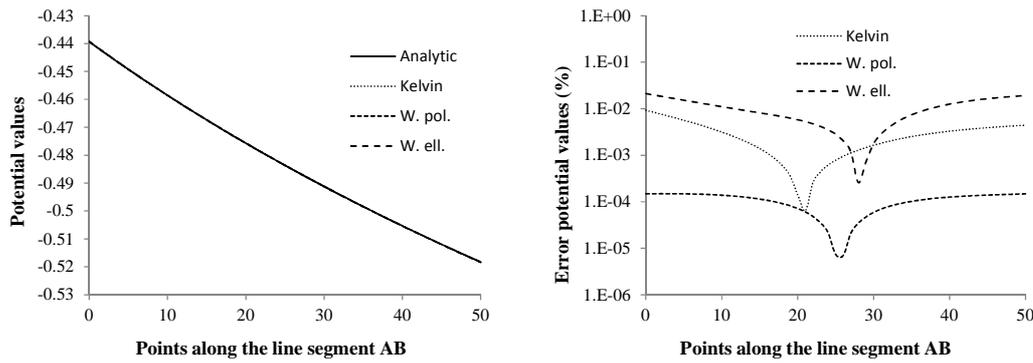


Figura 15. Potencial ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14.

As soluções numéricas mostradas na parte esquerda da Figura 15 estão praticamente superpostas com a solução analítica. Uma melhor interpretação de resultados pode ser obtida a partir dos erros numéricos calculados por

$$\varepsilon(\%) = \left| \frac{v_{num} - v_{ana}}{v_{ana}} \right| \times 100\% \quad (5.16)$$

onde v_{num} e v_{ana} representam valores numéricos e analíticos, respectivamente. Os erros calculados segundo a Equação (5.16) e mostrados na parte direita da Figura 15 demonstram que os melhores resultados são aqueles obtidos com as funções de tensão de forma polinomial, inclusive menores que a solução de Kelvin.

Valores dos gradientes q_x e q_y , e seus correspondentes erros são também mostrados na Figura 16 e Figura 17, respectivamente.

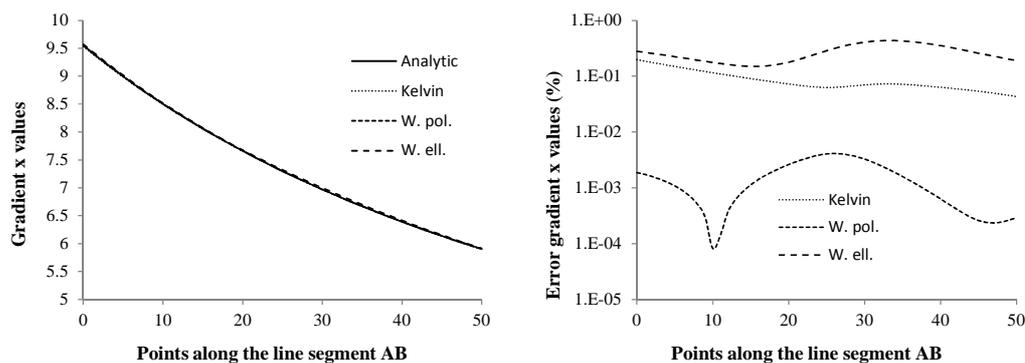


Figura 16. Gradientes em x ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14.

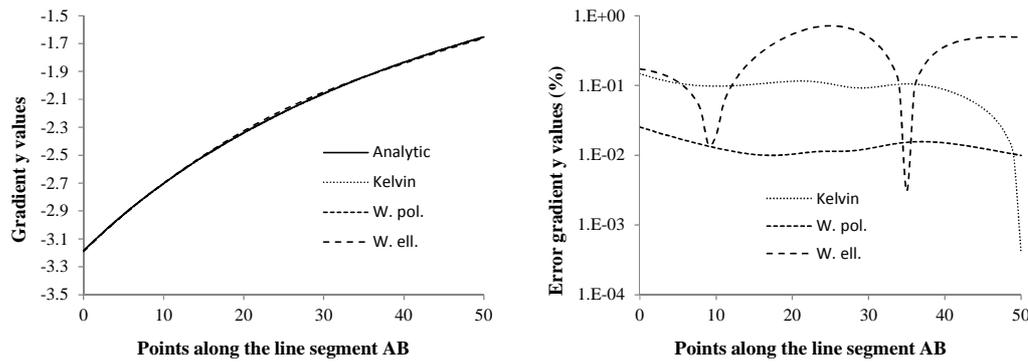


Figura 17. Gradientes em y ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14.

Os resultados em termos de gradientes apresentaram um padrão similar aos do potencial. Para o mesmo nível de discretização a solução com elementos polinomiais alcançou melhores resultados que usando elementos semi-elípticos e, inclusive, do que usando a solução fundamental logarítmica (Kelvin). Isto não necessariamente significa que a solução proposta é melhor que a simples solução logarítmica, a solução proposta não é tão geral quanto à solução logarítmica.

Um estudo de convergência é mostrado na Figura 18, para discretizações numéricas com número total de elementos de 30, 58, 114 e 170. As respectivas quinças estão representadas pelos nós da Figura 14 e dadas na Tabela 3.

| nó 1 | nó 17 | nó 27 | nó 50 | nó 69 | nó 89 | nó 93 | nó 99 | Nro. nós |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 1 | 5 | 8 | 14 | 19 | 24 | 26 | 28 | 30 |
| 1 | 9 | 14 | 26 | 36 | 45 | 49 | 53 | 58 |
| 1 | 17 | 27 | 50 | 69 | 87 | 95 | 103 | 114 |
| 1 | 25 | 40 | 74 | 103 | 130 | 142 | 154 | 170 |

Tabela 3. Número dos nós das esquinas das diferentes discretizações da Figura 14.

A Figura 18 mostra para cada simulação numérica realizada, a norma do erro Euclidiano de potenciais e gradientes avaliados segundo

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{51} (v_a[i] - v_n[i])^2}{\sum_{i=1}^{51} v_a[i]^2}} \quad (5.17)$$

onde $v_n[i]$ e $v_a[i]$ são os valores numérico e analítico obtidos em cada um dos 51 pontos ao longo da linha reta \overline{AB} . Os resultados na Figura 18 estão indicados para as soluções fundamentais de Kelvin (K), elemento elíptico de Westergaard (We) e elemento polinomial de Westergaard (Wp). Os resultados de Kelvin convergem mais rápido que os obtidos com os elementos de forma semi-elíptica do tipo Westergaard, porém mais lento que a solução de Westergaard com elementos

polinomiais, como era esperado. No entanto, um padrão de convergência é apresentado tanto para a formulação em termos de funções de Westergaard quanto para a solução de Kelvin.

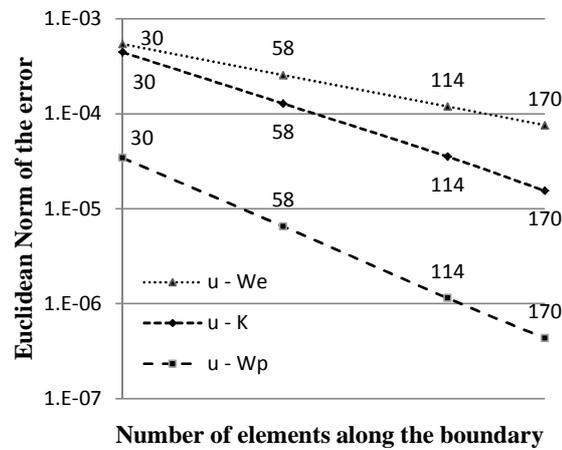


Figura 18. Estudo de convergência ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14 em termos de potenciais.

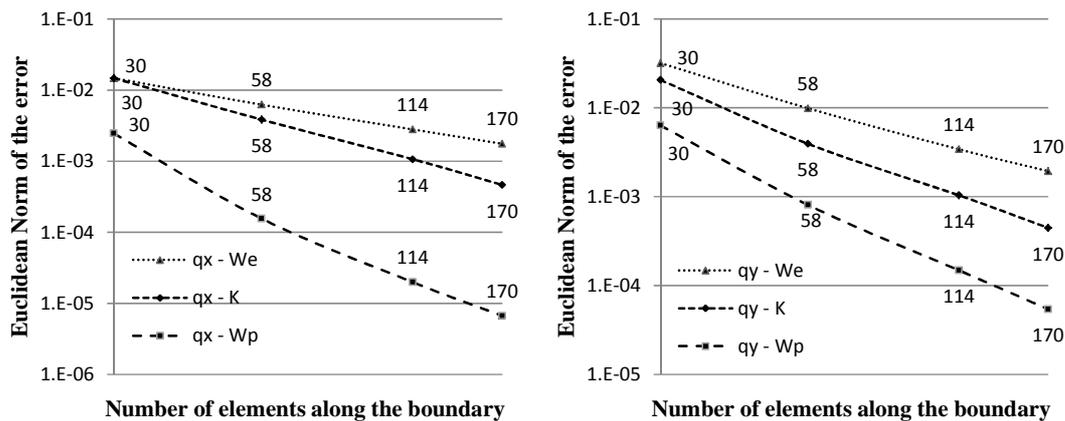


Figura 19. Estudo de convergência ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14 em termos dos gradientes.

Os resultados numéricos apresentados acima validam os desenvolvimentos teóricos. O objetivo final da pesquisa é a obtenção da formulação para a modelagem de trincas o qual é desenvolvido no próximo capítulo.