

## 4 Funções de Tensão de Westergaard Generalizadas

Dumont e Lopes (2003) foram os primeiros a apresentar as funções de tensão de Westergaard (após algumas modificações) como solução fundamental no método híbrido dos elementos de contorno. Considere-se uma trinca curva discretizada com, por exemplo, 7 pontos geométricos numerados de 0 a 6 e formando uma série de segmentos como ilustrado na Figura 6a. A curva que representa a trinca da Figura 6a pode ser aproximada por seis elementos lineares, três elementos quadráticos ou dois elementos cúbicos para representar o campo e cinco parâmetros nodais numerados de 1 a 5 para representar a fonte. Estes parâmetros nodais estão relacionados às forças de superfície dadas pelas funções complexas de Westergaard aplicadas como uma sucessão de elementos parcialmente superpostos. Desta forma pode-se aproximar qualquer configuração de abertura (modo I) ou deslizamento (modo II) de trinca pela superposição de descontinuidades elípticas relacionadas a funções de Westergaard. Para problemas de elasticidade, o elemento de trinca com abertura de forma elíptica representa o modo I e a trinca com deslizamento de forma elíptica entre suas faces representa o modo II.

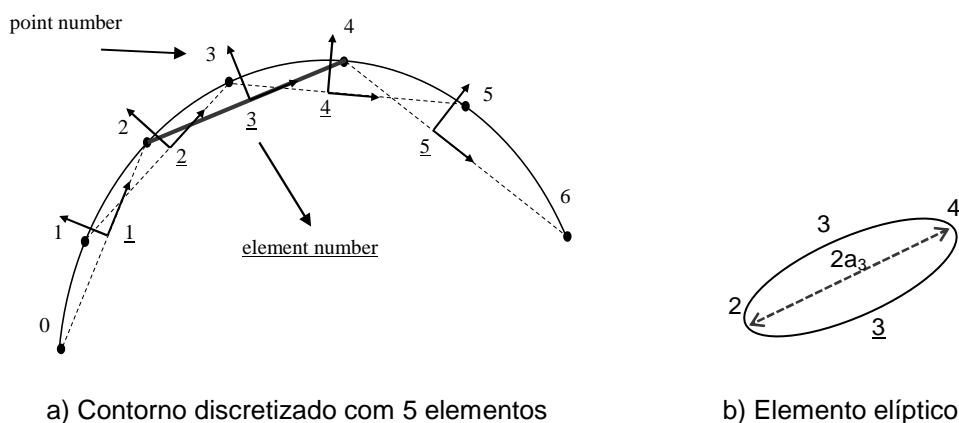


Figura 6. Uso de trincas de forma elíptica para simular contornos curvos (Adaptado de Dumont e Lopes, 2003).

A principal desvantagem da proposta de Dumont e Lopes é que uma trinca curva não é bem representada pela superposição de elipses. Por exemplo, o grau

de liberdade 3 é representado pela elipse  $\underline{3}$ , cujo eixo une somente os pontos 2 e 4. Esta aproximação não é a mais apropriada quando se quer representar contornos curvos, quinas e reentrâncias.

Tada *et al* (1993, 1994) propuseram um simples e eficiente método de desenvolver as funções de tensão de Westergaard para a análise de problemas de trincas com deslocamentos prescritos. Sua intervenção foi restrita à parte matemática na obtenção destas funções de tensão e à ilustração de varias formas de abertura de trincas, sempre em termos de expressões analíticas.

Baseados nos trabalhos apresentados acima, Dumont e Mamani (2011) propuseram uma formulação mais geral. Um contorno curvo qualquer (ver Figura 7a) é representado pela superposição de elementos compostos. Estes elementos são formados pela superposição de duas trincas semi-elípticas dispostas em sentidos opostos, como ilustrado na Figura 7b, não somente para uma melhor representação geométrica da trinca, mas também para simular furos, quinas e reentrâncias. O desenvolvimento matemático para problemas de potencial e de elasticidade, incluindo verificações de consistência e continuidade foi apresentado por Dumont e Mamani (2011). Exemplos numéricos que validam a formulação foram apresentados por Mamani (2011).

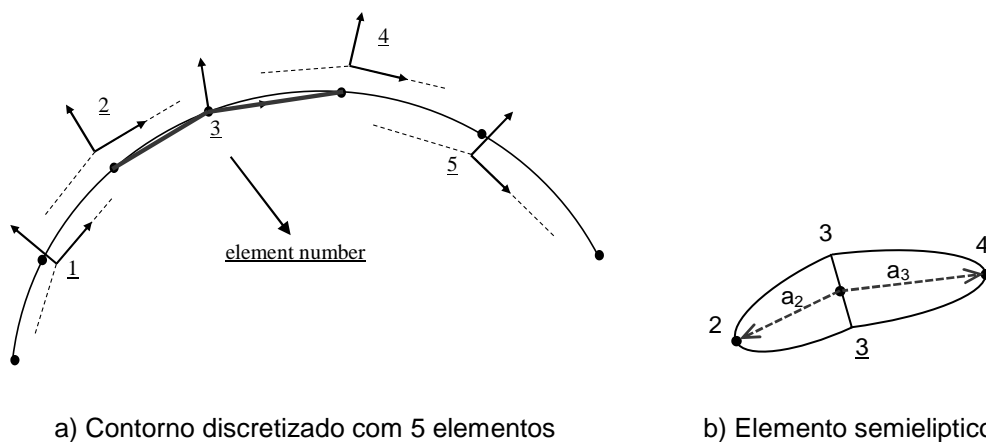
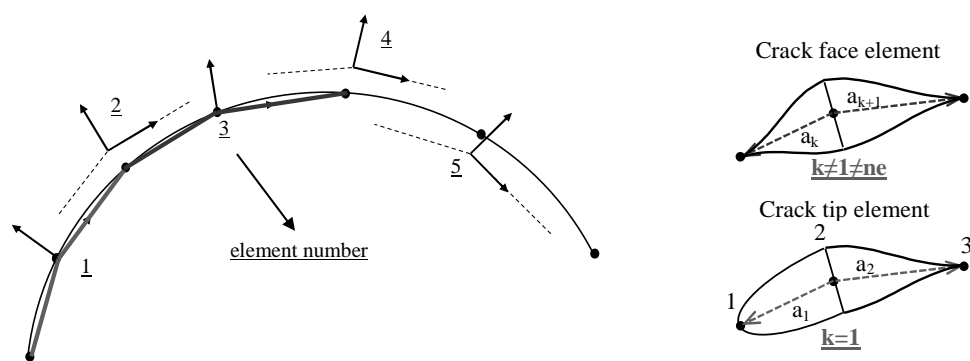


Figura 7. Uso de trincas semi-elípticas para simular contornos curvos (Adaptado de Mamani, 2011; Dumont e Mamani, 2011).

Dumont e Mamani (2013) refletiram sobre a boa representação da ponta da trinca por elementos de forma elíptica (ou semi-elíptica) e observaram a inclusão desnecessária de singularidades no campo de tensões próximo às faces da trinca, deteriorando inclusive o campo de tensões próximo à ponta da trinca. Deste modo, uma maior discretização leva a uma melhor representação global do problema,

porém deteriora o campo de tensões locais próximo à trinca. Contornos discretizados com elementos de forma diferente à elíptica têm sido implementados e testados por Dumont e Mamani (2011), com resultados globais satisfatórios, que aparentemente não justificavam investigações adicionais.

A proposta atual é restringir o uso das trincas de forma semi-elíptica somente aos elementos que representam as pontas da trinca em estudo (ver Figura 8) e para representar as faces são desenvolvidos elementos de trinca a partir de formas polinomiais (polinômios de Hermite) suaves. A principal vantagem da proposta é que as singularidades do tipo  $\sqrt{1/r}$  são introduzidas apenas na ponta da trinca.



a) Contorno discretizado com 5 elementos

b) Elementos de face e ponta

Figura 8. Uso de semitrincas elípticas e polinomiais para simular contornos curvos (Adaptado de Mamani e Dumont, 2015).

Os elementos mostrados na Figura 8b podem estar relacionados aos modos I de abertura ou II de deslizamento.

Uma solução mais elaborada e exata do problema é obtida acrescentando graus de liberdade que consideram rotação. Estes elementos de rotação são desenvolvidos para representar tanto as faces quanto as pontas da trinca. Estes elementos de rotação podem estar relacionados tanto ao modo I como ao modo II de fratura. A proposta de Dumont e Mamani (2011) continua válida para o caso particular da trinca discretizada apenas com um elemento. A Figura 9 mostra os quatro elementos a serem usados (em termos de abertura ou sobreposição) para representar um contorno curvo qualquer.

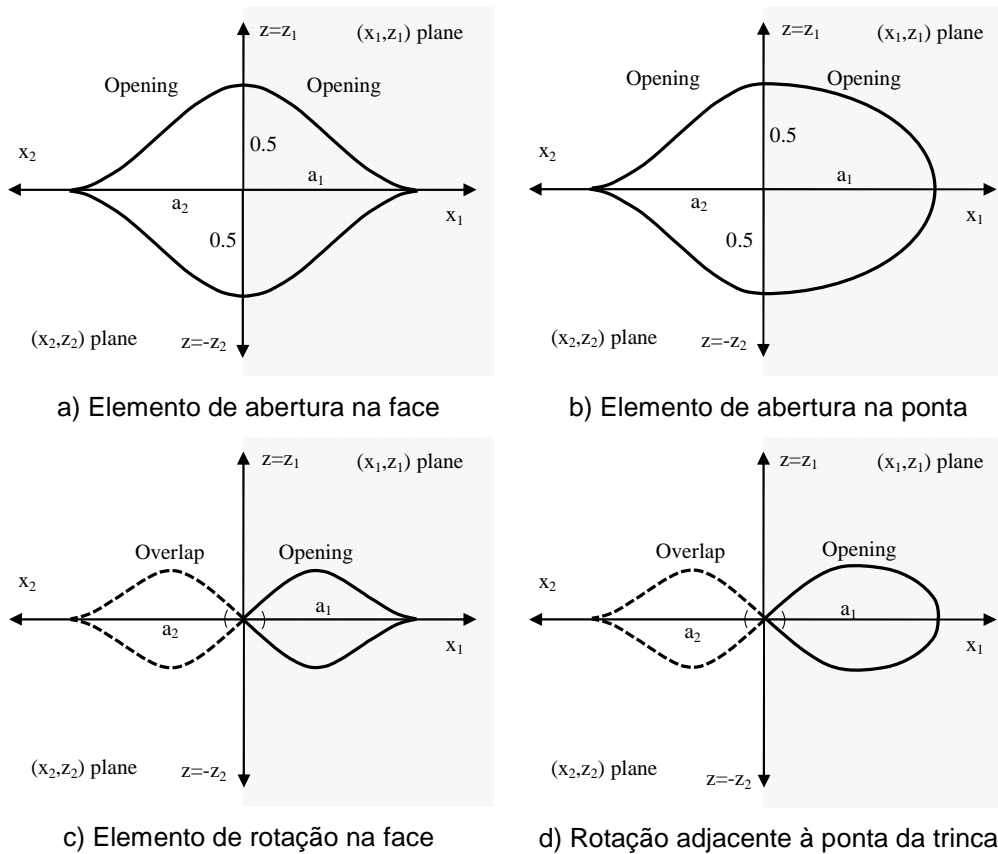


Figura 9. Elementos usados para discretizar uma trinca curva geral, em termos de abertura e sobreposição (Adaptado de Mamani e Dumont, 2015).

As seções apresentadas a seguir são restritas à obtenção matemática das funções de tensão envolvidas para a construção de soluções fundamentais tanto para problemas de potencial (capítulo 5) quanto para problemas de elasticidade (capítulo 6).

#### 4.1. Formulação de Tada, Ernst e Paris baseada em deslocamentos.

Tada, Ernst, e Paris (1993) mostraram que, para uma trinca com abertura prescrita da forma  $f(x)$  no intervalo  $[x_1, x_2]$  ao longo do eixo  $x$  e simétrica em torno deste eixo, no sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , pode-se definir a função potencial  $\Phi(z)$  em função do argumento complexo  $z = x + iy$ ,

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{z-x} dx \quad (4.1)$$

e a partir deste obter os campos de tensões e deslocamentos, como uma generalização da proposta inicial de Westergaard no contexto da mecânica da fratura. Muitas configurações de trincas e tensões foram investigadas por Tada *et*

al. O desenvolvimento clássico de Westergaard (1939) para uma trinca elíptica de comprimento  $2a$  é obtido escolhendo-se a função

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad (4.2)$$

e avaliando-se a integral da Equação (4.1) no intervalo  $[-a, a]$ .

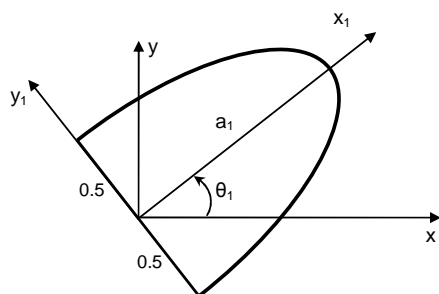
## 4.2.

### Funções de tensão para trincas de comprimento $a_1$ e rotação $\theta_1$ .

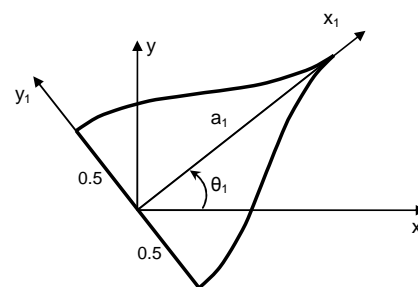
Dumont e Mamani (2011) desenvolveram uma solução simples: avaliaram a Equação (4.1) no intervalo  $[0,1]$ , obtendo assim a função de tensão para uma trinca de forma semi-elíptica. A rotação e normalização foram consideradas através da introdução de um termo complexo  $T_1(a_1, \theta_1)$ , de modo que a variável  $Z_1(z, T_1)$  da Equação (4.3) seja usada como argumento ao invés de  $z$  na Equação (4.1).

$$Z_1 = zT_1 \equiv \frac{z}{a_1} e^{-i\theta_1} \equiv \frac{1}{a_1} (x + iy)(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1) \equiv \frac{r}{a_1} e^{i(\theta - \theta_1)} \quad (4.3)$$

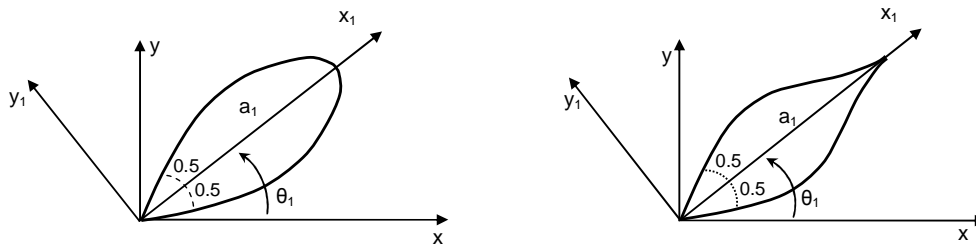
A função de tensão para uma trinca de forma semi-elíptica desenvolvida por Dumont e Mamani (2011) é resumida na Seção 4.3. Tomando como referência esse trabalho, na Seção 4.4 obtém-se a função de tensão para uma semitrinca de abertura polinomial, as Seções 4.5 e 4.6 mostram as funções de tensão usadas para considerar os efeitos da rotação entre as faces da trinca. Considerando a superposição de efeitos, estas quatro funções (ver Figura 10) servirão de base para formular elementos combinados (ver Figura 9) que serão usados na elaboração de soluções fundamentais tanto para problemas de potencial como para problemas de elasticidade.



a) Abertura elíptica na ponta da trinca



b) Abertura polinomial na face da trinca



c) Rotação adjacente à ponta da trinca

d) Rotação na face da trinca

Figura 10. Semitrinças de comprimento  $a_1$  e rotação  $\theta_1$  usadas para representar efeitos de abertura e rotação relativa (Adaptado de Mamani e Dumont, 2015).

### 4.3.

#### Semitrinca de abertura elíptica na ponta da trinca

Deseja-se obter a função de tensão para uma semitrinca de forma elíptica de comprimento  $a_1$  e rotação  $\theta_1$  em relação ao eixo de coordenadas  $x$  (Figura 10a). A função que descreve a forma da abertura (ou deslizamento) para o caso particular de  $a_1 = 1$  é dada pela Equação (4.4).

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ onde } f(0) = 1, f(1) = 0, f'(0) = 0 \text{ e } f'(1) = \text{undefined} \quad (4.4)$$

A correspondente expressão da Equação (4.1) para a função de forma da Equação (4.4) no intervalo  $[0,1]$ , sua primeira e segunda derivada são, respectivamente

$$\Phi(Z_1) = -\frac{\sqrt{1-Z_1^2}}{2\pi} \ln Z_1 + \frac{\sqrt{1-Z_1^2} \ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} - \frac{Z_1}{4} \quad (4.5)$$

$$\Phi'(Z_1) = \frac{Z_1}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} \ln Z_1 - \frac{Z_1 \ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} - \frac{1}{2\pi Z_1} - \frac{1}{4} \quad (4.6)$$

$$\Phi''(Z_1) = \frac{1}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} \ln Z_1 - \frac{\ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi Z_1^2(1-Z_1^2)}, \quad (4.7)$$

em função do argumento complexo  $Z_1$  dado pela Equação (4.3), que considera rotação e normalização.

### 4.4.

#### Semitrinca de abertura polinomial na face da trinca

A função de tensão para a semitrinca de forma polinomial (Figura 10b) é obtida definindo-se a função de forma

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \text{ onde } f(0) = 1, f(1) = 0, f'(0) = 0 \text{ e } f'(1) = 0 \quad (4.8)$$

A correspondente expressão da Equação (4.1) para a função de forma da Equação (4.8) avaliada no intervalo  $[0,1]$ , sua primeira e segunda derivada são, respectivamente:

$$\Phi(Z_1) = -\frac{(1-3Z_1^2+2Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1) + \frac{(1-3Z_1^2+2Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1-1) - \frac{(5+12Z_1-12Z_1^2)}{12\pi} \quad (4.9)$$

$$\Phi'_1(Z_1) = \frac{3Z_1(1-Z_1)}{\pi} \ln(Z_1) - \frac{3Z_1(1-Z_1)}{\pi} \ln(Z_1-1) - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{Z_1} + 3 - 6Z_1 \right) \quad (4.10)$$

$$\Phi''_1(Z_1) = \frac{3(1-2Z_1)}{\pi} \ln(Z_1) - \frac{3(1-2Z_1)}{\pi} \ln(Z_1-1) + \frac{1}{2\pi Z_1^2} + \frac{6}{\pi} \quad (4.11)$$

dado como argumento a variável complexa  $Z_1$ .

#### 4.5. Semitrinca de rotação na ponta da trinca

A função de tensão para a semitrinca de rotação mostrada na Figura 10c é obtida definindo-se inicialmente um comprimento  $a_1 = 1$  e escolhendo-se a função de forma

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}, \text{ onde } f(0) = 0, f(1) = 0, f'(0) = 1 \text{ e } f'(1) = \text{undefined}. \quad (4.12)$$

Nota-se que as propriedades desta função de forma na sua ponta são as mesmas que a semitrinca de abertura (deslizamento) elíptica apresentada na Seção 4.3. A expressão da Equação (4.1), para a função de forma da Equação (4.12), avaliada no intervalo  $[0,1]$ , sua primeira e segunda são, respectivamente.

$$\Phi(Z_1) = -\frac{Z_1\sqrt{1-Z_1^2}}{2\pi} \ln Z_1 + \frac{Z_1\sqrt{1-Z_1^2} \ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi} - \frac{Z_1}{2\pi} + \frac{1}{8} - \frac{Z_1^2}{4} \quad (4.13)$$

$$\Phi'(Z_1) = \frac{2Z_1^2-1}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} \ln Z_1 - \frac{(2Z_1^2-1)\ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} - \frac{1}{\pi} - \frac{Z_1}{2} \quad (4.14)$$

$$\Phi''(Z_1) = \frac{Z_1(2Z_1^2-3)}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} \ln Z_1 - \frac{Z_1(2Z_1^2-3)\ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} + \frac{-1-\pi Z_1+2Z_1^2+\pi Z_1^3}{2\pi Z_1(1-Z_1^2)} \quad (4.15)$$

dado como argumento a variável complexa  $Z_1$ .

#### 4.6. Semitrinca de rotação na face da trinca

A função de tensão para a semitrinca a ser usada para considerar a rotação relativa entre as faces da trinca (Figura 10d), para o caso  $a_1 = 1$  é obtida a partir da função de forma

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x, \text{ onde } f(0) = 0, f(1) = 0, f'(0) = 1 \text{ e } f'(1) = 0 \quad (4.16)$$

As propriedades desta função de forma na sua ponta são iguais às da semitrinca de abertura (deslizamento) polinomial apresentada na Seção 4.4. A Equação (4.1), considerando a Equação (4.8), avaliada no intervalo  $[0,1]$ , e suas respectivas derivadas são

$$\Phi(Z_1) = -\frac{(Z_1 - 2Z_1^2 + Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1) + \frac{(Z_1 - 2Z_1^2 + Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1 - 1) - \frac{1}{12\pi} (-2 + 9Z_1 - 6Z_1^2) \quad (4.17)$$

$$\Phi'(Z_1) = -\frac{(1 - 4Z_1 + 3Z_1^2)}{2\pi} \ln(Z_1) + \frac{(1 - 4Z_1 + 3Z_1^2)}{2\pi} \ln(Z_1 - 1) - \frac{1}{4\pi} (5 - 6Z_1) \quad (4.18)$$

$$\Phi''(Z_1) = -\frac{(-2 + 3Z_1)}{\pi} \ln(Z_1) + \frac{(-2 + 3Z_1)}{\pi} \ln(Z_1 - 1) - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{Z_1} + 6 \right) \quad (4.19)$$

dado como argumento a variável complexa  $Z_1$ .

#### 4.7. Singularidades das funções de tensão

As singularidades das funções de tensão  $\Phi$  e suas derivadas são resumidas na Tabela 2.

Função	ORIGEM (Z=0)			PONTA (Z=0)		
	$\Phi$	$\Phi' = \frac{d\Phi}{dZ}$	$\Phi'' = \frac{d\Phi'}{dZ}$	$\Phi$	$\Phi' = \frac{d\Phi}{dZ}$	$\Phi'' = \frac{d\Phi'}{dZ}$
Abertura elíptica	$\ln(r)$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r^2}$	$\sqrt{r}$	$\frac{1}{\sqrt{r}}$	$\frac{1}{\sqrt{r^3}}$
Abertura polinomial	$\ln(r)$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r^2}$	sem	sem	$\ln(r)$
Rotação elíptica	sem	$\ln(r)$	$\frac{1}{r}$	$\sqrt{r}$	$\frac{1}{\sqrt{r}}$	$\frac{1}{\sqrt{r^3}}$
Rotação polinomial	sem	$\ln(r)$	$\ln(r), \frac{1}{r}$	sem	sem	$\ln(r)$

Tabela 2. Resumo das singularidades das funções de tensão propostas.



Neste Capítulo foram desenvolvidas as expressões analíticas das funções de tensão. Estas funções serão usadas na construção das soluções fundamentais tanto para problemas de potencial quanto para problemas de elasticidade dos subsequentes Capítulos. Também foram mostradas as singularidades na origem e na ponta, estudos mais detalhados destas singularidades são apresentados na Seção 10.1.