

### 3 Mecânica da Fratura

A mecânica da fratura é a área da mecânica que estuda o comportamento de materiais e estruturas com presença de trincas, as quais diminuem sua resistência. A mecânica da fratura aplica as teorias da elasticidade e plasticidade na avaliação de tensões e deformações, aos defeitos cristalográficos microscópicos encontrados em materiais reais, a fim de prever a falha mecânica macroscópica dos corpos. No presente capítulo são abordados os conceitos básicos da mecânica da fratura linear-elástica e elasto-plástica, ambas independentes do tempo.

#### 3.1. Critério Energético de Griffith

Inglis (1913) calculou a concentração de tensões em uma placa contendo um furo elíptico. Baseado nesse trabalho e no fato que a resistência real à tração de um material é muito menor que a teórica, Griffith (1920) explicou a falha de materiais frágeis. Esta abordagem é conhecida como o Balanço Energético de Griffith e tem sido o ponto inicial para a mecânica da fratura moderna. Griffith realizou experimentos com vidro, e, segundo ele, em materiais idealmente frágeis a trinca se propagaria de maneira instável se a energia de deformação liberada quando a trinca avançasse de um comprimento infinitesimal fosse maior que a energia requerida para formar uma nova superfície de trinca.

Assume-se uma placa infinita contendo uma trinca horizontal reta de comprimento  $2a$  no estado plano de tensões. Para que esta trinca possa se propagar deve existir na placa energia potencial suficiente para ultrapassar a energia de superfície do material. A energia equilibrada de Griffith para um incremento de área  $dA$ , em condições de equilíbrio pode ser expressa na seguinte forma:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (3.1)$$

onde  $E$  é a energia total,  $\Pi$  é a energia potencial formada pela energia de deformação interna e pelas forças externas, e  $W_s$  é o trabalho necessário para criar novas superfícies. Partindo da abordagem de Inglis, Griffith propôs

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (3.2)$$

onde  $\gamma_s$  é a energia de superfície do material e  $\sigma_f$  é a tensão normal remota aplicada na trinca. Griffith obteve boa aproximação entre a Equação (3.2) e ensaios experimentais da resistência à fratura dos vidros, embora a equação de Griffith subestime a resistência à fratura dos materiais, pois a Equação (3.2) é válida somente para sólidos frágeis ideais. Irwin (1948) e Orowan (1948) independentemente modificaram a expressão de Griffith para considerar o efeito plástico nos materiais.

### 3.2. Campo de tensões próximo à trinca

Para um determinado número de configurações geométricas e de carga é possível obter expressões analíticas que descrevem o campo de tensões num domínio. Westergaard (1939), Irwin (1957), Sneddon (1946) e Williams (1957) foram os primeiros a publicar tais soluções para materiais isotrópicos com comportamento linear-elástico.

Seja um sistema polar de coordenadas com a origem coincidindo com a ponta da trinca (Figura 1a), a estimativa linear-elástica do campo de tensões próximo à ponta da trinca é dada por:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (3.3)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões,  $r$  e  $\theta$  são coordenadas do sistema polar (Figura 1a),  $k$  é uma constante cujo significado físico será definido na próxima Seção e  $f_{ij}$  é uma função unidimensional. Os termos de ordem superior dentro do operador de somatório dependem da geometria e são próximos a zero quando  $r \rightarrow 0$ .

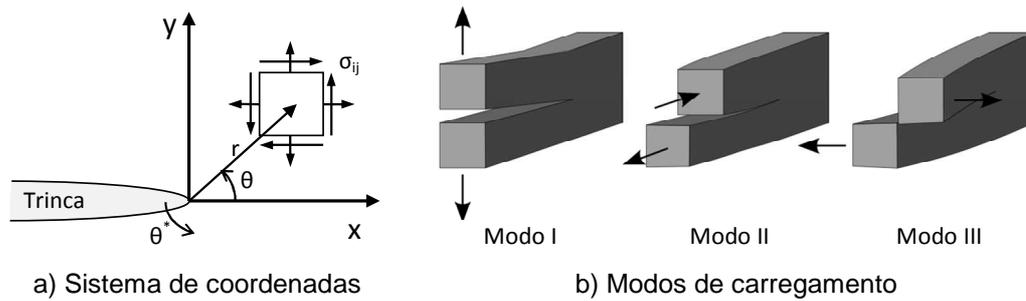


Figura 1. Sistema de coordenadas e modos de carregamento.

Existem três modos distintos de carregamento aos quais uma trinca pode ser submetida, como são mostrados na Figura 1b, estes são:

- Modo I de fratura: abertura (tensão de tração normal ao plano da trinca).
- Modo II de fratura: cisalhamento (tensão cortante agindo paralela ao plano da trinca e perpendicular à ponta da trinca).
- Modo III de fratura: cisalhamento perpendicular (tensão cortante agindo perpendicular ao plano e paralela à ponta da trinca).

### 3.3. Fator de Intensidade de Tensão

Para um material isotrópico linear-elástico, o campo de tensões num ponto  $(\theta, r)$  próximo à ponta da trinca ( $r \rightarrow 0$ ) pode ser aproximado em função de uma constante  $K_m$ , chamada fator de intensidade de tensão e definido como

$$\sigma_{ij}^m \approx \left( \frac{K_m}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}^m(\theta) \quad (3.4)$$

onde  $\sigma_{ij}^m$  é o tensor de tensões para o modo de carregamento  $m$  segundo a Figura 1b.

A constante  $K_m$  depende da geometria e da combinação do carregamento. Para problemas típicos da mecânica da fratura estas constantes estão disponíveis em tabelas, para problemas mais complexos são necessários experimentos e/ou testes numéricos. A Tabela 1 mostra os campos de tensões e deslocamentos próximos à ponta da trinca para os modos I e II.

	Modo I	Modo II
$\sigma_{xx}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
$\sigma_{yy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$

$\tau_{xy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
$u_x$	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
$u_y$	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

Tabela 1. Campo de tensões e deslocamentos para modos I e II (Anderson, 1995).

Na tabela 1,  $\mu$  é o módulo cortante e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.  $\kappa=3-4\nu$  para estado plano de deformações e  $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$  para estado plano de tensões.

### 3.4. Série de Williams

Paralelo aos estudos de Irwin (1957), Williams (1957) também demonstrou a natureza universal do campo de tensões próximo à ponta de uma trinca, (Anderson, 1995). Considerando a Figura 1a, que ilustra o sistema polar de coordenadas cuja origem situa-se na ponta da trinca, Williams propôs a função de tensão

$$\Phi = r^{\lambda+1} \left[ c_1 \sin(\lambda+1)\theta^* + c_2 \cos(\lambda+1)\theta^* + c_3 \sin(\lambda-1)\theta^* + c_4 \cos(\lambda-1)\theta^* \right], \quad \text{ou} \quad (3.5)$$

$$\Phi = r^{\lambda+1} F(\theta^*, \lambda)$$

onde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  são constantes. As funções de tensões de Airy são tais que:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.6)$$

sendo  $\Phi = \Phi(r, \theta)$ , a partir das quais as tensões são dadas

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad (3.7)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

Substituindo-se a Equação (3.5) na Equação (3.7), tem-se

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1} \left[ F''(\theta^*) + (\lambda+1)F(\theta^*) \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1} \left[ \lambda(\lambda+1)F(\theta^*) \right] \quad (3.8)$$

$$\tau_{r\theta} = r^{\lambda-1} \left[ -\lambda F'(\theta^*) \right]$$

onde  $F'(\theta^*)$  é a derivada de  $F$  em relação a  $\theta^*$ . Para o caso particular da ausência de forças de superfície nas faces da trinca tem-se

$$\sigma_{\theta\theta}(0) = \sigma_{\theta\theta}(2\pi) = \tau_{r\theta}(0) = \tau_{r\theta}(2\pi) = 0 \quad (3.9)$$

que implica em

$$F(0) = F(2\pi) = F'(0) = F'(2\pi) = 0 \quad (3.10)$$

Supondo-se o caso geral, em que as constantes da Equação (3.5) não são nulas, as condições de contorno descritas na Equação (3.10) são satisfeitas somente para

$$\sin(2\pi\lambda) = 0 \quad (3.11)$$

logo,

$$\lambda = \frac{n}{2}, \text{ onde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

Na Equação (3.5) nota-se a existência de quatro constantes, a priori indeterminadas, aplicando-se a Equação (3.10) podem-se eliminar duas constantes, obtendo-se assim a seguinte função de tensão:

$$\Phi = r^{\frac{n}{2}+1} \left\{ c_3 \left[ \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta^* - \frac{n-2}{n+2} \sin\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta^* \right] + c_4 \left[ \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta^* - \cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta^* \right] \right\} \quad (3.13)$$

Em problemas da mecânica da fratura é mais conveniente expressar a função de tensão em termos de  $\theta$  (ver Figura 1a). Substituindo  $\theta = \theta^* - \pi$  na Equação (3.13), obtém-se

$$\Phi = r^{\frac{3}{2}} \left[ s_1 \left( -\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3} \cos\frac{3\theta}{2} \right) + t_1 \left( -\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \right) \right] + s_2 r^2 [1 - \cos 2\theta] + \dots \quad (3.14)$$

onde  $s_i$  e  $t_i$  são constantes a serem definidas. Com isto as tensões da Equação (3.8) são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left\{ s_1 \left[ -5 \cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right] + t_1 \left[ -5 \sin\frac{\theta}{2} + 3 \sin\frac{3\theta}{2} \right] \right\} + 4s_2 \cos^2 \theta + \dots \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left\{ s_1 \left[ -3 \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \right] + t_1 \left[ -3 \sin\frac{\theta}{2} - 3 \sin\frac{3\theta}{2} \right] \right\} + 4s_2 \sin^2 \theta + \dots \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left\{ s_1 \left[ -\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \right] + t_1 \left[ \cos\frac{\theta}{2} + 3 \cos\frac{3\theta}{2} \right] \right\} - 2s_2 \sin 2\theta + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

As constantes  $s_1$  e  $t_1$  estão relacionadas aos modos I e II de fratura, mediante as expressões da Equação (3.16).

$$s_1 = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{e} \quad t_1 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.16)$$

Substituindo-se a Equação (3.16) na Equação (3.15) obtêm-se as expressões das tensões em função dos fatores de intensidade de tensão.

### 3.5. Funções de tensão de Westergaard

Westergaard (1939) mostrou que um limitado tipo de problemas pode ser resolvido introduzindo uma variável complexa  $z = x + iy$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ . Para um material isotrópico linear-elástico o campo de tensões no modo I de carregamento foi proposto em termos da função de tensão  $\phi_I$  como

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \Re(\phi_I) - y\Im(\phi'_I) \\ \sigma'_{yy} &= \Re(\phi_I) + y\Im(\phi'_I) \\ \tau'_{xy} &= -y\Re(\phi'_I) \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\Re()$  e  $\Im()$  são parte real e imaginária, respectivamente. Para uma trinca reta de comprimento  $2a$  submetida a um carregamento biaxial normal remoto (ver Figura 2a) Westergaard propôs a função de tensão:

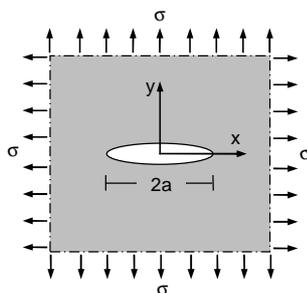
$$\phi_I(z) = \sigma \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (3.18)$$

Uma solução equivalente para o modo II pode ser obtida a partir de

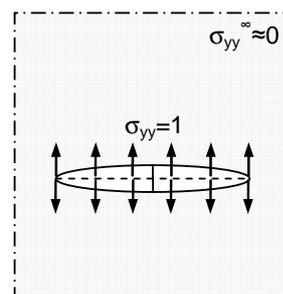
$$\begin{aligned} \sigma''_{xx} &= 2\Re(\phi_{II}) - y\Im(\phi'_{II}) \\ \sigma''_{yy} &= y\Im(\phi'_{II}) \\ \tau''_{xy} &= -\Im(\phi_{II}) - y\Re(\phi'_{II}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde

$$\phi_{II}(z) = -i\tau \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (3.20)$$



a) Placa de Westergaard



b) Placa de Westergaard modificada

Figura 2. Trinca horizontal numa placa infinita de espessura fina.

O modo III poderia também ser considerado a partir de expressões similares.

Do mesmo modo, é também possível obter os campos de deslocamentos para o modo I de fratura

$$\begin{aligned} u^I &= \frac{(1+\nu)}{E} [(1-2\nu)\Re(\phi^*_{I}) - y\Im(\phi_I)] \\ v^I &= \frac{(1+\nu)}{E} [2(1-\nu)\Im(\phi^*_{I}) - y\Re(\phi_I)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

e os campos de deslocamentos para o modo II de fratura

$$\begin{aligned} u^{II} &= \frac{(1+\nu)}{E} [2(1-\nu)\Re(\phi^*_{II}) - y\Im(\phi_{II})] \\ v^{II} &= \frac{(1+\nu)}{E} [(1-2\nu)\Im(\phi^*_{II}) - y\Re(\phi_{II})] \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $\phi^*_{I}$  é a integral da função de tensão  $\phi_I$ , ( $\phi^*_{I} = \int \phi_I dz$  ou  $\phi_I = d(\phi^*_{I})/dz$ ),  $\nu$  e  $E$  são os coeficientes de Poisson e elasticidade, respectivamente.

Dumont e Lopes (2003) propuseram uma pequena modificação ao campo de tensões da trinca da Figura 2a, adicionaram um termo constante de modo a obter uma força de superfície constante ao longo das faces da trinca e zera os valores em pontos longe da trinca, como mostrado na Figura 2b (para o campo de tensões  $\sigma_{yy}$ ). Com esta modificação as novas expressões para as funções de tensão das Equações (3.18) e (3.20) são dadas pelas Equações (3.23) e (3.24), onde o termo  $\sqrt{z^2}$  garante a ausência de saltos da variável complexa devido à mudança de quadrante do sistema local de coordenadas cartesianas.

$$\phi_I(z) = \sigma \left( \frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \quad (3.23)$$

$$\phi_{II}(z) = -i\tau \left( \frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \quad (3.24)$$

O sentido físico da Equação (3.23) que corresponde ao modo I de carregamento foi mostrado na Figura 2b, de forma similar poderia ser mostrado o sentido físico da Equação (3.24) que corresponde ao modo II de carregamento.

### 3.6. Integral J

A abordagem teórica da Integral  $J$  foi dada por Rice (1968), que mostrou que o valor da integral de energia ao longo de um contorno arbitrário  $\Gamma$  é o mesmo, independentemente do caminho que circunscribe a ponta da trinca.

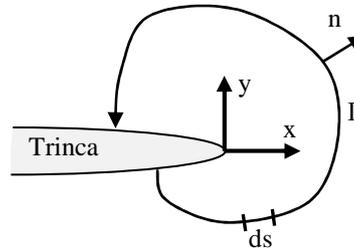


Figura 3. Contorno  $\Gamma$  ao redor da ponta da trinca.

Considere-se um corpo homogêneo linear ou não linear de material elástico, livre de forças de corpo e submetido a um campo de deformações bidimensionais (estado plano de deformações ou de tensões generalizado, ou anti-plano de deformações) de modo que todas as tensões  $\sigma_{ij}$  dependem somente de duas coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ . Considere-se o contorno arbitrário ao redor da ponta da trinca com caminho  $\Gamma$  em sentido anti-horário como ilustrado na Figura 3. O contorno  $\Gamma$  começa em um ponto qualquer da face inferior e termina na face superior da trinca. Define-se a densidade da energia de deformação  $W$  como

$$W = W(x, y) = W(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (3.25)$$

onde  $\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$  é o tensor de deformações infinitesimais. A integral  $J$  é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (3.26)$$

onde  $T$  é o vetor de forças de superfície normais ao longo de  $\Gamma$  ( $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ),  $u$  é o vetor de deslocamentos e  $ds$  é um elemento infinitesimal de comprimento de arco ao longo de  $\Gamma$ .

A integral  $J$  é a versão mais geral da taxa de liberação de energia  $G$ . Para o caso especial de um material linear elástico  $J = G$ . Também, pode-se relacionar a integral  $J$  com o fator de intensidade (Anderson, 1995) através da equação:

$$J = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.27)$$

para o modo  $I$  de carregamento.

### 3.7. Zona plástica

A análise linear-elástica prevê um campo de tensões infinitas na ponta da trinca. Isto não acontece em materiais reais, dado que as tensões próximas à ponta são finitas devido às deformações inelásticas do material, como plasticidade em metais (ou outro comportamento não linear, como *crazing* em polímeros) que levam a uma relaxação do campo de tensões ao redor da ponta da trinca.

#### 3.7.1. Superfícies de escoamento

Os critérios de escoamento de Von Mises e de Tresca são os mais usados para prever escoamento em metais. A condição de Von Mises prevê que o comportamento plástico se inicia quando a máxima energia de distorção de um material (segundo invariante deviatório de tensão  $J_2$ ) atinge um valor crítico  $k^2$ . Por outro lado, a condição de escoamento de Tresca prevê escoamento quando a máxima tensão de cisalhamento atinge um valor crítico. No sistema cartesiano de coordenadas, o critério de escoamento de Von Mises para o início do escoamento é dado pela relação

$$2\sigma_Y^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2), \quad (3.28)$$

Para o estado plano de tensões e deformações tem-se, respectivamente.

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = \sigma_z = 0 \quad (3.29)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\tau_{xy}^2}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.30)$$

onde  $\sigma_Y$  é a tensão uniaxial de escoamento,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $\sigma_{ij}, \tau_{ij}$  são os tensores de tensões normais e de cisalhamento, respectivamente. Para o caso uniaxial a Equação (3.28) se reduz a

$$\sigma_Y = \sigma_x \quad (3.31)$$

No capítulo 7 do presente trabalho são usados os materiais perfeitamente elasto-plásticos, materiais com encruamento linear (bi linear) e o material descrito pela equação de Ramberg-Osgood. A Figura 4 mostra as curvas tensão-deformação unidimensional para os três materiais.

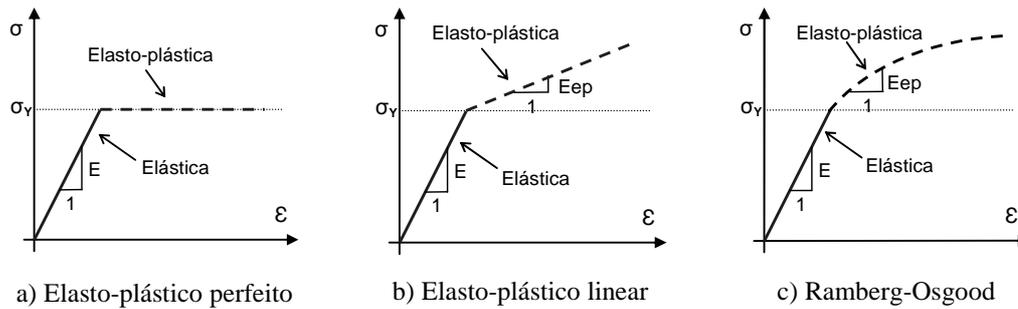


Figura 4. Curvas tensão-deformação, materiais elasto-plásticos.

As equações que descrevem cada um dos materiais da Figura 4 são

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ para } \sigma < \sigma_y, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_y}{E} \text{ para } \sigma = \sigma_y, \text{ Elasto-plástico perfeito} \quad (3.32)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ para } \sigma < \sigma_y, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_y}{E} + K\alpha \text{ para } \sigma \geq \sigma_y, \text{ Elasto-plástico linear} \quad (3.33)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ para } \sigma < \sigma_y, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \left( \frac{\sigma}{E} \right)^n \text{ para } \sigma \geq \sigma_y, \text{ Ramberg-Osgood} \quad (3.34)$$

### 3.7.2.

#### Métodos clássicos para o cálculo da zona plástica

Uma primeira aproximação da zona plástica é obtida usando uma análise linear-elástica. Contudo estes resultados são imprecisos e irreais devido à redistribuição de tensões necessárias para satisfazer o equilíbrio. Para pequenos deslocamentos é comum utilizar a análise linear-elástica com algumas correções simples. Já para escoamentos maiores, pode-se usar parâmetros adicionais de modo a considerar o comportamento não linear.

Os métodos de Irwin e da faixa de escoamento de Dugdale são aproximações clássicas da zona plástica. No método de Irwin uma estimativa de primeira ordem baseada numa análise linear elástica para  $\theta=0$  (Figura 5) é calculada mediante a expressão

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2, \text{ para estado plano de tensões, ou} \quad (3.35)$$

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 (1-2\nu)^2, \text{ para estado plano de deformações} \quad (3.36)$$

onde  $\sigma_{ys}$  é a tensão de escoamento uniaxial. Desconsiderando o encruamento, a distribuição de tensões para  $r \leq r_y$  é representada pela linha reta  $\sigma_{yy} = \sigma_{ys}$  (estado plano de tensões) na Figura 5a.

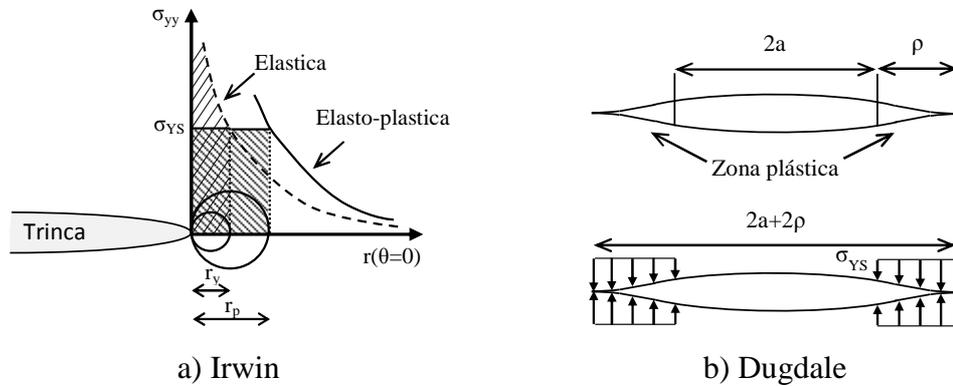


Figura 5. Estimativas da zona plástica ao longo da projeção do eixo da trinca.

Quando o material escoá, as tensões têm que se redistribuir de modo a satisfazer equilíbrio.

$$\int_0^{r_p} \sigma_{ys} dr = \int_0^{r_y} \sigma_{yy} dr, \text{ de onde } r_p = \frac{1}{\sigma_{ys}} \int_0^{r_y} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr \quad (3.37)$$

O simples balanço de forças conduz a uma estimativa de segunda ordem do tamanho da zona plástica  $r_p$ .

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2, \text{ para estado plano de tensões, ou} \quad (3.38)$$

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 (1-2\nu)^2, \text{ para estado plano de deformações} \quad (3.39)$$

note que  $r_p = 2r_y$ .

A faixa de escoamento proposta por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) assume uma longa e delgada faixa plástica na ponta da trinca considerando um material sem escoamento no estado plano de tensões (Figura 5b). As primeiras análises consideraram somente uma trinca reta em um meio infinito. A faixa plastificada é modelada assumindo uma trinca do mesmo comprimento da zona plástica, com tensão  $\sigma_{ys}$  aplicada a cada ponta da trinca (parte inferior da Figura 5b). Sendo a zona plástica proposta

$$\rho = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2, \text{ para estado plano de tensões, ou} \quad (3.40)$$

$$\rho = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 (1-2\nu)^2, \text{ para estado plano de deformações} \quad (3.41)$$

note a semelhança entre as Equações (3.40) e (3.41) com as Equações (3.38) e (3.39). Os desenvolvimentos de Irwin e Dugdale estimam zonas plásticas semelhantes.

As estimativas do tamanho da zona plástica até aqui apresentadas consideram somente o plano paralelo ao eixo da trinca ( $\theta = 0$ ). É possível obter uma estimativa de primeira ordem para a zona plástica ao longo de todos os ângulos aplicando um critério apropriado de escoamento nas equações da Tabela 1 ou na Equação (3.17), para o modo I.

Para um material de Von Mises obtêm-se as estimativas de primeira ordem para o modo I, com o raio  $r$  em função do ângulo  $\theta$  (Unger, 1995)

$$r_y(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ 1 + 3 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \text{ para estado plano de tensões, ou} \quad (3.42)$$

$$r_y(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ (1-2\nu)^2 + 3 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \text{ para estado plano de deformações} \quad (3.43)$$

Uma estimativa de segunda ordem, similar à de Irwin para o eixo da trinca [Equação (3.38) ou (3.39)], nesta vez considerando todos os ângulos pode ser obtida considerando a tensão de escoamento de Von Mises (Sousa, 2011).

A correção de Irwin, que atende a uma redistribuição de tensões por meio de um comprimento efetivo de trinca, é também simplista e não totalmente correta. Métodos numéricos como o método dos elementos finitos têm sido usados intensamente, contudo os custos computacionais são altos. Os métodos de elementos de contorno têm sido apresentados como uma ferramenta eficiente na avaliação do tamanho e forma da zona plástica.