

## 2

### Método Híbrido dos Elementos de Contorno

O método híbrido dos elementos de contorno (MHEC) foi apresentado em 1987, baseado no potencial de Hellinger-Reissner e como uma generalização do método híbrido dos elementos finitos de Pian [Pian (1964), Dumont (1989)]. A formulação do MHEC requer a avaliação de integrais somente ao longo do contorno e usa soluções fundamentais (Funções de Green) para interpolar campos no domínio. Por conseguinte, um corpo elástico de forma arbitrária pode ser tratado como um único macro-elemento finito com quantos graus de liberdade de contorno, conforme exigido pelo problema. Ao longo do tempo a formulação tem evoluído para muitas aplicações, incluindo problemas dependentes do tempo (Dumont e de Oliveira, 2001), mecânica da fratura (Dumont e Lopes, 2003; Dumont e Mamani, 2011), materiais não homogêneos (Dumont, Chaves e Paulino, 2004) e elasticidade gradiente (Dumont e Huamán, 2009).

#### 2.1.

##### Formulação do problema

Dado um corpo elástico submetido a forças de superfície  $\bar{t}_i$  na parte  $\Gamma_\sigma$  do contorno  $\Gamma$  e a deslocamentos  $\bar{u}_i$  na parte complementar  $\Gamma_u$ . Por simplicidade, não são incluídas forças de corpo [Dumont (2011)]. Tenta-se encontrar a melhor aproximação para as tensões e deslocamentos  $\sigma_{ij}$  e  $u_i$ , de tal modo que

$$\sigma_{\bar{i},\bar{j}} = 0 \text{ no domínio } \Omega, \quad (2.1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ ao longo de } \Gamma_u \text{ e } t_i = \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \text{ ao longo de } \Gamma_\sigma \quad (2.2)$$

onde  $n_j$  é o vetor unitário externo normal ao contorno. Notação indicial é usada.

#### 2.2.

##### Tensões e deslocamentos assumidos

São assumidos dois campos, um campo de deslocamentos e outro de tensões. [Pian (1964), Dumont (1989)]. O campo de deslocamentos é explicitamente aproximado ao longo do contorno por  $u_i^d$ , onde  $()^d$  significa

*deslocamentos pressupostos*, em termos de funções polinomiais  $u_m$  com suporte compacto e parâmetros de deslocamentos nodais  $\mathbf{d} = [d_m] \in \mathbb{R}^{n^d}$ , para  $n^d$  graus de liberdade de deslocamento do modelo discretizado. O campo independente de tensões  $\sigma_{ij}^s$ , onde  $()^s$  significa *tensões pressupostas*, é dado no domínio em termos de uma série de soluções fundamentais  $\sigma_{ijm}^*$  com suporte global, multiplicado por parâmetros de força  $\mathbf{p}^* = [p_m^*] \in \mathbb{R}^{n^*}$  aplicado nos mesmos pontos nodais  $m$  aos quais os deslocamentos nodais  $d_m$  estão ligados ( $n^* = n^d$ ). Deslocamentos  $u_i^s$  são obtidos a partir de  $\sigma_{ij}^s$ . Então,

$$u_i^d = u_{im} d_m \text{ em } \Gamma \text{ de modo que } u_i^d = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_u \text{ e} \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij}^s = \sigma_{ijm}^* p_m^* \text{ de modo que } \sigma_{jim,j}^* = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow u_i^s = u_{im}^* p_m^* + u_{is}^r C_{sm} p_m^* \text{ em } \Omega \quad (2.5)$$

onde  $u_{im}^*$  são soluções fundamentais em termos de deslocamentos correspondentes a  $\sigma_{ijm}^*$ . O deslocamento de corpo rígido é incluído em termos da função  $u_{is}^r$  multiplicada por uma constante  $C_{sm}$  em princípio arbitrária [Dumont (2003, 2011)].

### 2.3. Equações matriciais que governam o problema

O potencial de Hellinger-Reissner, baseado nos dois campos apresentados na Seção 2.2, como foi proposto por Pian (1964) e generalizado por Dumont (1989), conduz a duas equações matriciais que expressam equilíbrios nodais e relações de compatibilidade. Dumont (2011) mostrou que a simples, e ainda matematicamente consistente forma de definir estas equações é em termos de dois princípios de trabalhos virtuais independentes entre si, como são apresentados brevemente em seguida.

#### 2.3.1. Trabalho Virtual em termos de deslocamentos

Na ausência de forças de corpo, o equilíbrio na forma fraca é dado por

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^s \delta u_{i,j}^d d\Omega = \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i \delta u_i^d d\Gamma \quad (2.6)$$

para  $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ji}^s$ . Assumindo que  $\sigma_{ij}^s$  é dada pela Equação (2.4) e  $\delta u_i^d$  pela Equação (2.3), após integração por partes do primeiro termo da Equação (2.6) e aplicação do teorema de Green, obtém-se

$$\delta d_n \left[ \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* n_j u_m d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ijm,j}^* u_m d\Omega \right] p_m^* = \delta d_n \left[ \int_{\Gamma} t_i u_m d\Gamma \right] \quad (2.7)$$

Em seguida, para deslocamentos nodais arbitrários  $\delta d_n$  obtém-se a matriz de equações de equilíbrio

$$H_{mn} p_m^* = p_n \quad \text{or} \quad \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} \quad (2.8)$$

na qual  $\mathbf{H} = [H_{mn}] \in \mathbb{R}^{n^d \times n^s}$ , dado pelo primeiro termo em colchetes da Equação (2.7), é a mesma matriz potencial do método tradicional dos elementos de contorno [Brebbia, Telles, e Wrobel (1984)], e  $\mathbf{p} = [p_n] \in \mathbb{R}^{n^d}$ , dada pelo segundo termo em colchetes da Equação (2.7), são forças nodais equivalentes obtidos da mesma forma que no método dos elementos finitos. A integral de domínio da Equação (2.7) na verdade é omitida, desde que  $\sigma_{ijm}^*$  são soluções fundamentais, como na Equação (2.4).

### 2.3.2.

#### Trabalhos virtuais em termos de tensões

Por outro lado, o campo de deslocamentos  $u_i^d$ , explicitamente aproximado somente ao longo de  $\Gamma$  segundo a Equação (2.3) é tornado compatível com o campo de deslocamentos de domínio  $u_i^s$  em termos do seguinte princípio de trabalhos virtuais:

$$\int_{\Omega} (u_{i,j}^s - u_{i,j}^d) \delta \sigma_{ij}^s d\Omega = 0 \quad (2.9)$$

para um campo virtual de tensões  $\delta \sigma_{ij}^s$  que está em equilíbrio em  $\Omega$ , segundo a Equação (2.4). Aplicando integração por partes e o teorema de Green no termo à esquerda da Equação (2.9), chega-se a

$$\int_{\Gamma} (u_i^s - u_i^d) \delta \sigma_{ij}^* \eta_j d\Gamma - \int_{\Omega} (u_i^s - u_i^d) \delta \sigma_{ij,j}^* d\Omega = 0 \quad (2.10)$$

Esta equação conduz, após assumir que  $\delta \sigma_{ij}^s$  é aproximado segundo a Equação (2.4) e que  $u_i^d$  é dado pela Equação (2.3), a

$$F_{mn}^* p_n^* = H_{mn} d_n \quad \text{or} \quad \mathbf{F}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{H}$ , que também está na Equação (2.8), é conhecida como a matriz de transformação cinemática, e  $\mathbf{F}^* = [F_{mn}^*] \in \mathbb{R}^{n^d \times n^s}$  é a matriz simétrica de flexibilidade. O termo da integral de domínio da Equação (2.11) é omitido, segundo a Equação (2.4). As matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{F}^*$  podem ser definidas em forma compacta como

$$\left[ H_{mn} \quad F_{mn}^* \right] = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* n_j \langle u_{in} \quad u_{in}^* \rangle d\Gamma \quad (2.12)$$

## 2.4. Solução do problema

Resolvendo para  $\mathbf{p}^*$  nas Equações (2.8) e (2.11), chega-se no sistema de matrizes

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{*(-1)} \mathbf{H} \mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{*(-1)} \mathbf{H} \equiv \mathbf{K}$  é uma matriz de rigidez. A inversa  $\mathbf{F}^{*(-1)}$  tem que ser avaliada em termos de inversas generalizadas, pois  $\mathbf{F}^*$  é singular para um domínio finito  $\Omega$  (Dumont , 2011). Os resultados em pontos internos são expressos em termos das Equações (2.4) e (2.5) após a avaliação de  $\mathbf{p}^*$  na Equação (2.8) ou (2.11).

Para condições de contorno de Neumann, somente a Equação (2.8) é necessária, como é o caso da maioria dos problemas da mecânica da fratura propostos na literatura.

Esta Seção apresentou o contexto no qual as funções de Westergaard generalizadas das subseqüentes seções podem ser usadas e aplicadas.