

AIFANTIS, E. C. On the role of gradients on the localization of deformation and fracture. **International Journal of Engineering Science**, v. 30, p. 1279–1299, 1992.

AIFANTIS, E. C. Update on a class of gradient theories. **Mechanics of Materials**, v. 35, p. 259–280, 2003.

ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics: fundamentals and Applications**. 2. ed. New York: CRC Press, 1995.

BANKS, T. M.; GARLICK, A. The form of crack tip plastic zones. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 19, n. 3, p. 571-581, 1984.

BARENBLATT, G. I. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v. 7, p. 55-129, 1962.

BENRAHOU, K. H. et al. Estimation of the plastic zone by finite element method under mixed mode (I and II) loading. **Computational Materials Science**, v. 38, p. 595-601, 2007.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. F. C.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques-theory**, New York: Springer, 1984.

BROWN, W. F.; STRAWLEY, J. E. Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials. **ASTM International**, 1996.

CROUCH, S. L.; STARFIELD, A. M. **Boundary Element Methods in Solid Mechanics**. London: George Allen & Unwin, 1983.

DUGDALE, D. S. Yielding in steel sheets containing slits. **Journal of the mechanics and Physics of solids**, v. 8, p. 100-104, 1960.

DUMONT, N. A. The hybrid boundary element method: an alliance between mechanical consistency and simplicity. **Applied Mechanics Reviews**, v. 42, n. 11, p. S54-S63, 1989.

DUMONT, N. A. Variationally-based, hybrid boundary element methods. **Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences (CAMES)**, v. 10, pp. 407-430, 2003.

DUMONT, N. A. Dislocation-based hybrid boundary element method. Draft paper, 2008.

DUMONT, N. A. Elastoplastic Analysis with the Simplified Boundary Element Method. Draft paper, 2010.

DUMONT, N. A. The hybrid boundary element method – fundamentals. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011.

DUMONT, N. A.; CHAVES, R. A. P.; PAULINO, G. H. The hybrid boundary element method applied to problems of potential of functionally graded materials. **International Journal of Computational Engineering Science (IJCES)**, v. 5, p. 863-891, 2004.

DUMONT, N. A.; de OLIVEIRA, R. From frequency-dependent mass and stiffness matrices to the dynamic response of elastic systems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, n. 10-13, p. 1813-1830, 2011.

DUMONT, N. A.; AGUILAR, C. A. The best of two worlds: The expedite boundary element method. **Engineering Structures**, v. 43, p. 235–244, 2012.

DUMONT, N. A.; HUAMÁN, D. Hybrid finite/boundary element formulation for strain gradient elasticity problems. **Advances in Boundary Elements Techniques**, p. 295-300, 2009.

DUMONT, N. A.; LOPES, A. A. O. On the explicit evaluation of stress intensity factors in the hybrid boundary element method. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 26, p. 151-165, 2003.

DUMONT, N. A., MAMANI, E. Y. Simulation of plastic zone propagation around crack tips using generalized Westergaard stress functions: a variational approach, **Engineering Mechanics Institute International Conference**, Stanford, jun. 2015.

DUMONT, N. A., MAMANI, E. Y. A variational boundary element method based on generalized Westergaard stress functions, in *Solids Mechanics in Brazil*, **Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, p 143-157, 2011, ISBN 978-85-85769-46-8.

DUMONT, N. A., MAMANI, E. Y. Use of generalized Westergaard stress functions as fundamental solutions. **Advances in Boundary element Techniques**, p 170-175, 2011, ISBN 978-0-9547783-8-5.

DUMONT, N. A., MAMANI, E. Y. Generalized Westergaard Stress Functions as Fundamental Solutions, **Computer Modeling in Engineering & Sciences (CMES)**, v. 78, n. 2, p. 109-150, 2011, doi: 10.3970/cmcs.2011.078.109.

DUMONT, N. A., MAMANI, E. Y. Simulation of plastic zone propagation around crack tips using the hybrid boundary element method. Proceedings of the CILAMCE – **XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, Pirenópolis, Brasil, 2013, p. 20, 1 CD.

DUMONT, N. A., MAMANI, E. A variationally-based boundary element model for the simulation of plastic zone propagation around crack tips. **Book of Abstracts 4th Canadian conference on Nonlinear Solid Mechanics**, Montreal, Canada, p 143, 2013.

FERNANDES, G. R.; de SOUZA NETO, E. A. Self-consistent linearization of non-linear BEM formulations with quadratic convergence. **Computational Mechanics**, v. 52, n. 5, p. 1125-1139, 2013.

GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical transactions**, series A, v. 221, p 163-198, 1920.

HARMAIN, G. A.; PROVAN, J. W. Fatigue crack-tip plasticity revisited - The issue of shape addressed. **Theory and Application Fracture Mechanics**, v. 26, p. 63-79, 1997.

INGLIS, C. E. Stress in a plate due to the presence of crack and sharp corners. **Transactions of the Institute of Naval Architects**, v. 55, p. 219-241, 1913.

IRWIN, G. R. Fracture Dynamics. Fracturing of metals, **American Society for Metals**, Cleveland, v. 24, p. 161-364, 1948.

IRWIN, G. R. Analysis of Stress and Strain near the End of a Crack Traversing a Plate. **Journal of Applied Mechanics**, v. 24, p. 161-364, 1957.

IRWIN, G. R. Plastic zone near a crack and fracture toughness. **Sagamore Research Conference Proceedings**, v. 4, 196.

JING, P., KHRAISHI, T.; GORBATIKH, L. Closed-form solutions for the mode II crack tip plastic zone shape. **International Journal of Fracture**, v. 122, p. 137-142, 2003.

LOPES, A. A. O. **Aplicação do Método Híbrido dos Elementos de Contorno a Problemas da Mecânica Linear da Fratura**. 1998. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1998.

LOPES, A. A. O. **Determinação de Fatores de Intensidade de Tensão com o Método Híbrido dos Elementos de Contorno**. 2002. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

MAMANI, E. Y. **O Método Híbrido dos Elementos de Contorno com**

Base em Funções de Tensão de Westergaard Generalizadas. 2011. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2011.

MAMANI, E. Y., DUMONT, N. A. Use of improved Westergaard stress functions to adequately simulate the stress field around crack tips. **CILAMCE – XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, Rio de Janeiro, Brasil, 2015.

MAMANI, E. Y., DUMONT, N. A. Use of improved Westergaard stress functions for the adequate simulation of the stress field around crack tips including plastic zones, submitted. **International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences (ICCES 2015)**, Reno, Nevada, EUA, 2015.

MAPLE, version 15.01: **Technical Computing Software for Engineers**: Waterloo Maple Inc, 2011.

PIAN, T. H. H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution. **AIAA Journal**, v. 2, p. 1333-1336, 1964.

OROWAN, E. Fracture and Strength of solids. **Report on Progress in Physics**, v. 12, p. 185, 1948.

QIANG, H. F.; Lu, N.; Liu, H. J. Unified solutions of crack tip plastic zone under small scale yielding. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 35, p. 34-38, 1999.

RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R. Description of stress-strain curves by three parameters. Technical Note No. 902, **National Advisory Committee for Aeronautics**, Washington DC, 1943.

RICE, J. R. Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v. 35, p. 379-386, 1968.

RODRIGUEZ, H. Z. **Efeito da Tensão Nominal no Tamanho e Forma da Zona Plástica.** 2007. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2007.

SADD, M. H. **Elasticity Theory: Applications and Numerics.** USA: Elsevier, Burlington, 2005.

SNEDDON, I. N. The Distribution of Stress in the Neighborhood of a Crack in an Elastic Solid. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. A-187, p. 229-260, 1946.

SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 48, n. 1, p. 101-118, 1985.

SOUSA, R. A. **Estimativas de zonas plásticas à frente de pontas de trincas**, 2011. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2011.

SOUSA, R. A.; CASTRO, J. T. P.; LOPES, A. A. O.; MARTHA, L. F. On improved crack tip plastic zone estimates based on t-stress and on complete stress fields. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 36, n. 1, p. 25–38, 2013.

TADA, H.; ERNST, H.; PARIS, P. Westergaard stress functions for displacement-prescribed crack problems – I. **International Journal of Fracture**, v. 61, p. 39-53, 1993.

TADA, H.; ERNST, H.; PARIS, P. Westergaard stress functions for displacement-prescribed crack problems – II. **International Journal of Fracture**, v. 67, p. 151-167, 1994.

TADA, H.; ERNST, H.; PARIS, P. **The Stress Analysis of Cracks Handbook**. 3. ed. ASME Press, 2000.

TELLES, J. C. F.; CASTOR, G. S.; GUIMARAES, S. A numerical Green's function approach for boundary elements applied to fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, n. 19, p. 3259-3274, 1995.

UNGER, D. J. **Analytical Fracture Mechanics**. New York: Dover Publishers. Inc, 1995.

WESTERGAARD, H. M. Bearing Pressures and Cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v. 6, p. 49-53, 1939.

WILLIAM, M. L. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. **Journal of Applied Mechanics**, v. 24, p. 109-114, 1957.

XIN, G. et al. Analytic solutions to crack tip plastic zone under various loading conditions. **European Journal of Mechanics A/Solids**, v. 29 p. 738-745, 2010.

ZHANG, Y.; QIANG, H.; YANG, Y. Unified solutions to mixed mode crack tip under small scale yielding. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, v. 43, n. 2, p. 50-54, 2007.

10 Apêndice

10.1. Estudo do comportamento das funções de tensão na origem da trinca

10.1.1. Semitrinca de forma elíptica

O estudo das funções de tensão de forma semi-elíptica também foi tratado por Dumont e Mamani (2011).

As Equações (4.5) a (4.7) são reescritas aqui por conveniência

$$\Phi(Z_1) = -\frac{\sqrt{1-Z_1^2}}{2\pi} \ln Z_1 + \frac{\sqrt{1-Z_1^2} \ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} - \frac{Z_1}{4} \quad (7.28)$$

$$\Phi'(Z_1) = \frac{Z_1}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} \ln Z_1 - \frac{Z_1 \ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} - \frac{1}{2\pi Z_1} - \frac{1}{4} \quad (7.29)$$

$$\Phi''(Z_1) = \frac{1}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} \ln Z_1 - \frac{\ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi Z_1^2(1-Z_1^2)}, \quad (7.30)$$

Para o estudo de $Z_1 \rightarrow 0$, as Equações acima são convenientemente expressas como

$$\Phi(Z_1) = \Phi_{ln}(Z_1) \ln(Z_1) + \Phi_{reg}(Z_1) \quad (7.31)$$

$$\Phi'(Z_1) = \Phi'_{ln}(Z_1) \ln(Z_1) + \Phi'_{reg}(Z_1) \quad (7.32)$$

$$\Phi''(Z_1) = \Phi''_{ln}(Z_1) \ln(Z_1) + \Phi''_{reg}(Z_1) \quad (7.33)$$

onde as partes ln e reg são dadas por:

$$\Phi_{ln}(Z_1) = -\frac{\sqrt{1-Z_1^2}}{2\pi}, \quad \Phi_{reg}(Z_1) = -\frac{1-\sqrt{1-Z_1^2} \ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi} - \frac{Z_1}{4} \quad (7.34)$$

$$\Phi'_{ln}(Z_1) = \frac{Z_1}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}}, \quad \Phi'_{reg}(Z_1) = -\frac{Z_1 \ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} - \frac{1}{2\pi Z_1} - \frac{1}{4} \quad (7.35)$$

$$\Phi_{ln}''(Z_1) = \frac{1}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}}, \quad \Phi_{reg}''(Z_1) = -\frac{\ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi Z_1^2(1-Z_1^2)} \quad (7.36)$$

As Equações (7.31) a (7.33) necessitam de integrações especiais para avaliar a parte $\ln(Z_1)$. Os termos $1/Z_1$ na Equação (7.35) e $1/Z_1^2$ na Equação (7.36) são cancelados na superposição de efeitos de duas semitrincas em problemas tanto de potencial quanto de elasticidade.

Os termos principais da Equação (7.31) para $Z_1 = 0$ (isto é, termos que são diferentes de zero) são,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \left(-1 + \ln(2) - \ln(Z_1) + i\pi \operatorname{csgn} \left(\frac{i(1+\sqrt{1-Z_1^2})}{Z_1} \right) \right) \quad (7.37)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Phi_1 = -\frac{1}{2\pi} (\ln(r) + 1 - \ln(2a_1)) \quad (7.38)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi - \theta + \theta_1}{2\pi} \text{ for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \pi \\ \frac{-\pi - \theta + \theta_1}{2\pi} \text{ for } \theta_1 + \pi < \theta < \theta_1 + 2\pi \end{cases} \quad (7.39)$$

onde existe uma singularidade do tipo $\ln(r)$ em $\operatorname{Re}(\Phi_1)$ quando r tende a 0 e não existem singularidades em $\operatorname{Im}(\Phi_1)$.

Os termos principais da Equação (7.32) para $Z_1 = 0$ (isto é, termos que são diferentes de zero) são,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1' = -\frac{1}{2\pi Z_1} - \frac{1}{4} \quad (7.40)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Phi_1' = -\frac{\cos(\theta - \theta_1) a_1}{2\pi r} - \frac{1}{4} \quad (7.41)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Phi_1' = \frac{\sin(\theta - \theta_1) a_1}{2\pi r} \quad (7.42)$$

onde existem singularidades do tipo $1/r$ tanto em $\operatorname{Im}(\Phi_1')$ como em $\operatorname{Re}(\Phi_1')$.

Os termos principais da Equação (7.33) para $Z_1 = 0$ (isto é, termos que são diferentes de zero) são,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1'' = \frac{1}{2\pi Z_1^2} \quad (7.43)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Phi_1'' = \frac{\cos(2\theta - 2\theta_1) a_1^2}{2\pi r^2} \quad (7.44)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Phi_1'' = -\frac{\sin(2\theta - 2\theta_1) a_1^2}{2\pi r^2} \quad (7.45)$$

onde existem singularidades de $1/r^2$ tanto em $\operatorname{Im}(\Phi_1'')$ quanto em $\operatorname{Re}(\Phi_1'')$.

A maioria destas singularidades se cancelam com a superposição de efeitos de duas semitrincas opostas quando alguma interpretação física é dada (problemas de potencial ou elasticidade, por exemplo).

10.1.2. Semitrinca de forma polinomial

As Equações (4.9) a (4.11) são reescritas aqui por conveniência

$$\Phi(Z_1) = -\frac{(1-3Z_1^2+2Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1) + \frac{(1-3Z_1^2+2Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1-1) - \frac{(5+12Z_1-12Z_1^2)}{12\pi} \quad (7.46)$$

$$\Phi'_1(Z_1) = \frac{3Z_1(1-Z_1)}{\pi} \ln(Z_1) - \frac{3Z_1(1-Z_1)}{\pi} \ln(Z_1-1) - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{Z_1} + 3 - 6Z_1 \right) \quad (7.47)$$

$$\Phi''_1(Z_1) = \frac{3(1-2Z_1)}{\pi} \ln(Z_1) - \frac{3(1-2Z_1)}{\pi} \ln(Z_1-1) + \frac{1}{2\pi Z_1^2} + \frac{6}{\pi} \quad (7.48)$$

Para $Z_1 = 0$ as Equações acima são convenientemente expressas como

$$\Phi(Z_1) = \Phi_{\ln}(Z_1) \ln \xi + \Phi_{reg}(Z_1) \quad (7.49)$$

$$\Phi'(Z_1) = \Phi'_{\ln}(Z_1) \ln \xi + \Phi'_{reg}(Z_1) \quad (7.50)$$

$$\Phi''(Z_1) = \Phi''_{\ln}(Z_1) \ln \xi + \Phi''_{reg}(Z_1) \quad (7.51)$$

onde a parte \ln e reg estão dadas por:

$$\Phi_{\ln}(Z_1) = -\frac{(1-3Z_1^2+2Z_1^3)}{2\pi}, \quad \Phi_{reg}(Z_1) = \frac{(1-3Z_1^2+2Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1-1) - \frac{(5+12Z_1-12Z_1^2)}{12\pi} \quad (7.52)$$

$$\Phi'_{\ln}(Z_1) = \frac{3Z_1(1-Z_1)}{\pi}, \quad \Phi'_{reg}(Z_1) = -\frac{3Z_1(1-Z_1)}{\pi} \ln(Z_1-1) - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{Z_1} + 3 - 6Z_1 \right) \quad (7.53)$$

$$\Phi''_{\ln}(Z_1) = \frac{3(1-2Z_1)}{\pi}, \quad \Phi''_{reg}(Z_1) = -\frac{3(1-2Z_1)}{\pi} \ln(Z_1-1) + \frac{1}{2\pi Z_1^2} + \frac{6}{\pi} \quad (7.54)$$

As Equações (7.49) a (7.51) necessitam de integrações especiais para avaliar a parte $\ln Z_1$. Os termos $1/Z_1$ na parte regular da Equação (7.53) e $1/Z_1^2$ na parte

regular da Equação (7.54) se cancelam quando duas semitrincas são superpostas em problemas de potencial e elasticidade.

Os termos principais de Φ_1 para $Z_1 = 0$ são

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \Phi_1 = -\frac{1}{12\pi} \left(5 + 6\ln(Z_1) + 6i\pi \operatorname{csgn} \left(i - \frac{i}{Z_1} \right) \right) \quad (7.55)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Phi_1 = -\frac{1}{12\pi} (5 + 6\ln(r) - 6\ln(a_1)) \quad (7.56)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi - \theta + \theta_1}{2\pi} & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \pi \\ \frac{-\pi - \theta + \theta_1}{2\pi} & \text{for } \theta_1 + \pi < \theta < \theta_1 + 2\pi \end{cases} \quad (7.57)$$

não existem singularidades em $\operatorname{Im}(\Phi_1)$ entretanto existe uma singularidade $\ln(r)$ em $\operatorname{Re}(\Phi_1)$.

Os termos principais de Φ'_1 para $Z_1 = 0$ são

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \Phi'_1 = -\frac{1}{2\pi Z_1} - \frac{3}{2\pi} \quad (7.58)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Phi'_1 = -\frac{\cos(\theta - \theta_1) a_1}{2\pi r} - \frac{3}{2\pi} \quad (7.59)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Phi'_1 = \frac{\sin(\theta - \theta_1) a_1}{2\pi r} \quad (7.60)$$

existem singularidades do tipo $1/r$ tanto em $\operatorname{Im}(\Phi_1)$ quanto em $\operatorname{Re}(\Phi_1)$.

Os termos principais de Φ''_1 para $Z_1 = 0$ são

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \Phi''_1 = \frac{1}{2\pi Z_1^2} + \frac{3\ln(Z_1)}{\pi} + 3i \operatorname{csgn} \left(i - \frac{i}{Z_1} \right) + \frac{6}{\pi} \quad (7.61)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Phi''_1 = \frac{\cos(2\theta - 2\theta_1) a_1^2}{2\pi r^2} + \frac{3(2 + \ln(r) - \ln(a))}{\pi} \quad (7.62)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Phi''_1 = \begin{cases} \frac{\sin(2\theta - 2\theta_1) a_1^2}{2\pi r^2} - \frac{3(\pi - \theta + \theta_1)}{\pi} & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \pi \\ \frac{\sin(2\theta - 2\theta_1) a_1^2}{2\pi r^2} - \frac{3(-\pi - \theta + \theta_1)}{\pi} & \text{for } \theta_1 + \pi < \theta < \theta_1 + 2\pi \end{cases} \quad (7.63)$$

há singularidades do tipo $1/r^2$ e $\ln(r)$ em $\operatorname{Re}(\Phi_1)$ e $1/r^2$ em $\operatorname{Im}(\Phi_1)$.

Algumas singularidades desaparecem com a superposição de duas semitrincas opostas quando uma interpretação física é dada.

10.1.3. Semitrinca de rotação adjacente à ponta da trinca

As Equações (4.13) a (4.15) são reescritas aqui por conveniência

$$\Phi(Z_1) = -\frac{Z_1\sqrt{1-Z_1^2}}{2\pi} \ln Z_1 + \frac{Z_1\sqrt{1-Z_1^2} \ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi} - \frac{Z_1}{2\pi} + \frac{1}{8} - \frac{Z_1^2}{4} \quad (7.64)$$

$$\Phi'(Z_1) = \frac{2Z_1^2-1}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} \ln Z_1 - \frac{(2Z_1^2-1)\ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} - \frac{1}{\pi} - \frac{Z_1}{2} \quad (7.65)$$

$$\Phi''(Z_1) = \frac{Z_1(2Z_1^2-3)}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} \ln Z_1 - \frac{Z_1(2Z_1^2-3)\ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} + \frac{-1-\pi Z_1+2Z_1^2+\pi Z_1^3}{2\pi Z_1(1-Z_1^2)} \quad (7.66)$$

Para o estudo de $Z_1 \rightarrow 0$, as Equações acima são convenientemente expressas como

$$\Phi(Z_1) = a_1 \Phi_{ln}(Z_1) \ln(Z_1) + a_1 \Phi_{reg}(Z_1) \quad (7.67)$$

$$\Phi'(Z_1) = a_1 \Phi'_{ln}(Z_1) \ln(Z_1) + a_1 \Phi'_{reg}(Z_1) \quad (7.68)$$

$$\Phi''(Z_1) = a_1 \Phi''_{ln}(Z_1) \ln(Z_1) + a_1 \Phi''_{reg}(Z_1) \quad (7.69)$$

onde as funções de tensão são multiplicadas por a_1 para garantir que o ângulo de abertura seja sempre unitário, as partes ln e reg são dadas por:

$$\Phi_{ln}(Z_1) = -\frac{Z_1\sqrt{1-Z_1^2}}{2\pi}, \quad \Phi_{reg}(Z_1) = -\frac{Z_1 - Z_1\sqrt{1-Z_1^2} \ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi} + \frac{1}{8} - \frac{Z_1^2}{4} \quad (7.70)$$

$$\Phi'_{ln}(Z_1) = \frac{2Z_1^2-1}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}}, \quad \Phi'_{reg}(Z_1) = -\frac{(2Z_1^2-1)\ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi\sqrt{1-Z_1^2}} - \frac{1}{\pi} - \frac{Z_1}{2} \quad (7.71)$$

$$\Phi''_{ln}(Z_1) = \frac{Z_1(2Z_1^2-3)}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}}, \quad \Phi''_{reg}(Z_1) = -\frac{Z_1(2Z_1^2-3)\ln(-1-\sqrt{1-Z_1^2})}{2\pi(1-Z_1^2)^{3/2}} + \frac{-1-\pi Z_1+2Z_1^2+\pi Z_1^3}{2\pi Z_1(1-Z_1^2)} \quad (7.72)$$

as Equações (7.67) a (7.69) induzem a integrações especiais para avaliar a parte $\ln(Z_1)$.

Os termos principais de Φ_1 para $Z_1 = 0$ são

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1 = \frac{a_1}{8} \quad (7.73)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Phi_1 = \frac{a_1}{8} \quad (7.74)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Phi_1 = 0 \quad (7.75)$$

neste caso não existem singularidades.

Os termos principais de Φ'_1 para $Z_1 = 0$ são

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \Phi'_1 = a_1 \left(\frac{\ln(2)}{2\pi} - \frac{\ln(Z_1)}{2\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} ic \operatorname{sgn} \left(\frac{i + i\sqrt{1-Z_1^2}}{Z_1} \right) \right) \quad (7.76)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Phi'_1 = -\frac{a_1}{2\pi} (2 + \ln(r) - \ln(2a_1)) \quad (7.77)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Phi'_1 = \begin{cases} \frac{a_1(\pi - \theta + \theta_1)}{2\pi} & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \pi \\ \frac{a_1(-\pi - \theta + \theta_1)}{2\pi} & \text{for } \theta_1 + \pi < \theta < \theta_1 + 2\pi \end{cases} \quad (7.78)$$

existe uma singularidade $\ln(r)$ em $\operatorname{Re}(\Phi'_1)$.

Os termos principais de Φ''_1 para $Z_1 = 0$ são

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \Phi''_1 = -\frac{a_1}{2\pi Z_1} \quad (7.79)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Re} \Phi''_1 = -\frac{\cos(\theta - \theta_1) a_1^2}{2\pi r} \quad (7.80)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \operatorname{Im} \Phi''_1 = \frac{\sin(\theta - \theta_1) a_1^2}{2\pi r} \quad (7.81)$$

existem singularidades de $1/r$ tanto em $\operatorname{Im}(\Phi''_1)$ quanto em $\operatorname{Re}(\Phi''_1)$.

A maioria destas singularidades se cancelam com a superposição de efeitos de duas semitrinças opostas quando alguma interpretação física é dada (problemas de potencial ou elasticidade, por exemplo).

10.1.4. Semitrinça de rotação na face da trinca

As Equações (4.17) a (4.19) são reescritas aqui por conveniência

$$\Phi(Z_1) = -\frac{(Z_1 - 2Z_1^2 + Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1) + \frac{(Z_1 - 2Z_1^2 + Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1 - 1) - \frac{1}{12\pi} (-2 + 9Z_1 - 6Z_1^2) \quad (7.82)$$

$$\Phi'(Z_1) = -\frac{(1 - 4Z_1 + 3Z_1^2)}{2\pi} \ln(Z_1) + \frac{(1 - 4Z_1 + 3Z_1^2)}{2\pi} \ln(Z_1 - 1) - \frac{1}{4\pi} (5 - 6Z_1) \quad (7.83)$$

$$\Phi''(Z_1) = -\frac{(-2+3Z_1)}{\pi} \ln(Z_1) + \frac{(-2+3Z_1)}{\pi} \ln(Z_1-1) - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{Z_1} + 6 \right) \quad (7.84)$$

Para o estudo de $Z_1 \rightarrow 0$, as Equações acima são convenientemente expressas como

$$\Phi(Z_1) = a_1 \Phi_{\ln}(Z_1) \ln(Z_1) + a_1 \Phi_{\text{reg}}(Z_1) \quad (7.85)$$

$$\Phi'(Z_1) = a_1 \Phi'_{\ln}(Z_1) \ln(Z_1) + a_1 \Phi'_{\text{reg}}(Z_1) \quad (7.86)$$

$$\Phi''(Z_1) = a_1 \Phi''_{\ln}(Z_1) \ln(Z_1) + a_1 \Phi''_{\text{reg}}(Z_1) \quad (7.87)$$

onde as partes \ln e reg são dadas por:

$$\Phi_{\ln}(Z_1) = -\frac{(Z_1 - 2Z_1^2 + Z_1^3)}{2\pi}, \quad \Phi_{\text{reg}}(Z_1) = \frac{(Z_1 - 2Z_1^2 + Z_1^3)}{2\pi} \ln(Z_1 - 1) - \frac{1}{12\pi} (-2 + 9Z_1 - 6Z_1^2) \quad (7.88)$$

$$\Phi'_{\ln}(Z_1) = -\frac{(1-4Z_1+3Z_1^2)}{2\pi}, \quad \Phi'_{\text{reg}}(Z_1) = \frac{(1-4Z_1+3Z_1^2)}{2\pi} \ln(Z_1-1) - \frac{1}{4\pi} (5-6Z_1) \quad (7.89)$$

$$\Phi''_{\ln}(Z_1) = -\frac{(-2+3Z_1)}{\pi}, \quad \Phi''_{\text{reg}}(Z_1) = \frac{(-2+3Z_1)}{\pi} \ln(Z_1-1) - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{Z_1} + 6 \right) \quad (7.90)$$

As Equações (7.85) a (7.87) induzem a integrações especiais para avaliar a parte $\ln(Z_1)$.

Os termos principais de Φ_1 para $Z_1 = 0$ são

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_1 = \frac{a_1}{6\pi} \quad (7.91)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \text{Re} \Phi_1 = \frac{a_1}{6\pi} \quad (7.92)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \text{Im} \Phi_1 = 0 \quad (7.93)$$

neste caso não existem singularidades.

Os termos principais de Φ'_1 para $Z_1 = 0$ são

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \Phi'_1 = -\frac{a_1 \ln(Z_1)}{2\pi} - \frac{5a_1}{4\pi} - \frac{1}{2} i a_1 c \text{sgn} \left(i - \frac{i}{Z_1} \right) \quad (7.94)$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 0} \text{Re} \Phi'_1 = -\frac{a_1 (\ln(r) - \ln(a_1))}{2\pi} - \frac{5a_1}{4\pi} \quad (7.95)$$

$$\lim_{z_1 \rightarrow 0} \text{Im } \Phi'_1 = \begin{cases} \frac{a_1(\pi - \theta + \theta_1)}{2\pi} & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \pi \\ \frac{a_1(-\pi - \theta + \theta_1)}{2\pi} & \text{for } \theta_1 + \pi < \theta < \theta_1 + 2\pi \end{cases} \quad (7.96)$$

existe uma singularidade $\ln(r)$ em $\text{Re}(\Phi'_1)$.

Os termos principais de Φ''_1 para $Z_1 = 0$ são

$$\lim_{z_1 \rightarrow 0} \Phi''_1 = -\frac{a_1}{2\pi Z_1} + \frac{2a_1 \ln(Z_1)}{\pi} + 2ia_1 c \text{sgn}\left(i - \frac{i}{Z_1}\right) + \frac{3a_1}{\pi} \quad (7.97)$$

$$\lim_{z_1 \rightarrow 0} \text{Re } \Phi''_1 = -\frac{\cos(\theta - \theta_1) a_1^2}{2\pi r} + \frac{2a_1(\ln(r) - \ln(a_1))}{\pi} + \frac{3a_1}{\pi} \quad (7.98)$$

$$\lim_{z_1 \rightarrow 0} \text{Im } \Phi''_1 = \begin{cases} \frac{\sin(\theta - \theta_1) a_1^2}{2\pi r} - \frac{4a_1(\pi - \theta + \theta_1)}{2\pi} & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \pi \\ \frac{\sin(\theta - \theta_1) a_1^2}{2\pi r} - \frac{4a_1(-\pi - \theta + \theta_1)}{2\pi} & \text{for } \theta_1 + \pi < \theta < \theta_1 + 2\pi \end{cases} \quad (7.99)$$

existem singularidades de $1/r$ e \ln em $\text{Re}(\Phi''_1)$ e $1/r$ em $\text{Im}(\Phi''_1)$.

A maioria destas singularidades se cancelam com a superposição de efeitos de duas semitrincas opostas, quando alguma interpretação física é dada (problemas de potencial ou elasticidade, por exemplo).

10.2. Estudo de singularidades em problemas de potencial

Como foi mostrado no capítulo 4, uma semitrinca apresenta singularidades tanto na origem quanto na ponta. Na origem, estas singularidades desaparecem com a superposição de efeitos de duas semitrincas. Nesta Seção é apresentada a abordagem matemática deste fenômeno.

10.2.1. Superposição de duas semitrincas elípticas.

A superposição de efeitos de duas trincas semi-elípticas como mostrada na Figura 11b em termos de deslocamentos foi proposta por Dumont e Mamani (2011) e aqui resumida brevemente.

10.2.1.1. Valores de potencial para r tendendo a 0

Segundo as Equações (5.1), (5.7) e (7.39) para a combinação de efeitos do potencial tem-se

$$\lim_{r \rightarrow 0} u \equiv \frac{1}{k} \lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{k} \begin{cases} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } 0 \leq \theta < \theta_1 \\ 1 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } \theta_2 < \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (7.100)$$

isto é o mesmo que a expressão

$$\lim_{r \rightarrow 0} u \equiv \frac{1}{k} \lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{k} \begin{cases} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for a point outside } \Omega \\ 1 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for a point inside } \Omega \end{cases} \quad (7.101)$$

A diferença do valor $\lim_{r \rightarrow 0} u$ de um ponto dentro com outro fora do domínio é

$\frac{1}{k}$, com $0 < \lim_{r \rightarrow 0} u < \frac{1}{k}$. Não existe singularidade no potencial.

10.2.1.2. Fluxo normal para r tendendo a 0

A superposição de efeitos de duas semitrincas de abertura elíptica é

$$\lim_{r \rightarrow 0} (T_1 \Phi'_1 - T_2 \Phi'_2) = -\frac{e^{-i\theta_1}}{4a_1} + \frac{e^{-i\theta_2}}{4a_2} = -\frac{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1}{4a_1} + \frac{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2}{4a_2} \quad (7.102)$$

a que é finita e não depende do ângulo θ ao redor do ponto $r = 0$. O campo de gradientes é dado por

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_x &= -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(T_1 \Phi'_1 - T_2 \Phi'_2) = -\frac{\sin \theta_1}{4a_1} + \frac{\sin \theta_2}{4a_2} \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_y &= -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Re}(T_1 \Phi'_1 - T_2 \Phi'_2) = \frac{\cos \theta_1}{4a_1} - \frac{\cos \theta_2}{4a_2} \end{aligned} \quad (7.103)$$

Considerando $n_x = \sin \theta_1$ e $n_y = -\cos \theta_1$, e substituindo a Equação (7.103) na

Equação (5.3) o fluxo normal ao contorno Γ no ponto $r \rightarrow 0$ é

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} &= \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_1} - q_y n_{y_1}) = \frac{1}{4a_1} - \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{4a_2} \quad \text{ao longo do contorno 1} \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} &= \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_2} - q_y n_{y_2}) = \frac{1}{4a_2} - \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{4a_1} \quad \text{ao longo do contorno 2} \end{aligned} \quad (7.104)$$

Note que existe um salto do fluxo normal no limite entre os dois contornos. Se $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, isto é, os segmentos 1 e 2 são colineares, ambos limites resultam em $\lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} = \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} = \frac{1}{4a_1} + \frac{1}{4a_2}$, o que significa que não existe mais salto. Se além de serem colineares, têm comprimentos iguais ($a_1 = a_2$), q_n é constante ao longo de todo o contorno e a integração de q_n ao longo dos dois segmentos resulta numa fonte unitária, $Q/t=1$.

10.2.2. Superposição de duas semitrincas polinomiais

São apresentadas expressões devido à superposição de efeitos de duas semitrincas polinomiais como mostrado na Figura 9a em termos de deslocamentos. Este elemento é usado para a representação dos elementos da face na discretização de um contorno curvo geral.

10.2.2.1. Valores de potencial para r tendendo a 0.

Segundo a Equação (5.1), (5.7) e (7.57) para um efeito combinado de potenciais

$$\lim_{r \rightarrow 0} u \equiv \frac{1}{k} \lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{k} \begin{cases} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } 0 \leq \theta < \theta_1 \\ 1 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } \theta_2 < \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (7.105)$$

isto é o mesmo que a seguinte expressão

$$\lim_{r \rightarrow 0} u \equiv \frac{1}{k} \lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{k} \begin{cases} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for a point outside } \Omega \\ 1 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for a point inside } \Omega \end{cases} \quad (7.106)$$

A diferença entre os valores de $\lim_{r \rightarrow 0} u$ entre um ponto dentro e outro fora do domínio é $\frac{1}{k}$, com $0 < \lim_{r \rightarrow 0} u < \frac{1}{k}$. Não existe singularidade no potencial.

10.2.2.2. Fluxo normal para r tendendo a 0

A superposição de efeitos de duas semitrincas de abertura polinomial é

$$\lim_{r \rightarrow 0} (T_1 \Phi'_1 - T_2 \Phi'_2) = -\frac{3e^{-i\theta_1}}{2\pi a_1} + \frac{3e^{-i\theta_2}}{2\pi a_2} = -\frac{3(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)}{2\pi a_1} + \frac{3(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{2\pi a_2} \quad (7.107)$$

a que é finita e não depende do ângulo θ ao longo do ponto $r=0$. O campo de gradientes é dado por

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_x &= -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(T_1 \Phi'_1 - T_2 \Phi'_2) = -\frac{3 \sin \theta_1}{2\pi a_1} + \frac{3 \sin \theta_2}{2\pi a_2} \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_y &= -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Re}(T_1 \Phi'_1 - T_2 \Phi'_2) = \frac{3 \cos \theta_1}{2\pi a_1} - \frac{3 \cos \theta_2}{2\pi a_2} \end{aligned} \quad (7.108)$$

Considerando $n_x = \sin \theta_1$ e $n_y = -\cos \theta_1$, substituindo a Equação (7.103) na Equação (5.3) o fluxo normal ao contorno Γ para $r \rightarrow 0$ é

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} &= \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_1} - q_y n_{y_1}) = \frac{3}{2\pi a_1} - \frac{3 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi a_2} \quad \text{ao longo do contorno 1} \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} &= \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_2} - q_y n_{y_2}) = \frac{3}{2\pi a_2} - \frac{3 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi a_1} \quad \text{ao longo do contorno 2} \end{aligned} \quad (7.109)$$

Note que existe um salto do fluxo normal no limite entre os dois contornos. Se $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, isto é, os segmentos 1 e 2 são colineares, ambos limites resultam

$$\text{em } \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} = \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} = \frac{3}{2\pi a_1} + \frac{3}{2\pi a_2}, \text{ o que significa que não existe mais salto.}$$

10.2.3.

Superposição de semitrinca elíptica com semitrinca polinomial

Estuda-se a superposição de efeitos de uma trinca semi-elíptica com outra semitrinca polinomial como mostrado na Figura 9b em termos de deslocamentos. O elemento em estudo é ideal para representar a ponta da trinca.

10.2.3.1. Valores de potencial para r tendendo a 0.

Segundo a Equação (5.1), (5.7), (7.39) e (7.57) para uma combinação de efeitos do potencial

$$\lim_{r \rightarrow 0} u \equiv \frac{1}{k} \lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{k} \begin{cases} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } 0 \leq \theta < \theta_1 \\ 1 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for } \theta_2 < \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (7.110)$$

isto é o mesmo que a expressão

$$\lim_{r \rightarrow 0} u \equiv \frac{1}{k} \lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{k} \begin{cases} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for a point outside } \Omega \\ 1 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} & \text{for a point inside } \Omega \end{cases} \quad (7.111)$$

A diferença do valor de $\lim_{r \rightarrow 0} u$ entre um ponto dentro com outro fora do domínio é $\frac{1}{k}$, com $0 < \lim_{r \rightarrow 0} u < \frac{1}{k}$.

10.2.3.2. Fluxo normal para r tendendo a 0

A superposição de efeitos de um semitrinca de abertura elíptica com outra polinomial é

$$\lim_{r \rightarrow 0} (T_1 \Phi'_1 - T_2 \Phi'_2) = -\frac{e^{-i\theta_1}}{4a_1} + \frac{3e^{-i\theta_2}}{2\pi a_2} = -\frac{(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)}{4a_1} + \frac{3(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{2\pi a_2} \quad (7.112)$$

a que é finita e não depende do ângulo θ ao redor do ponto $r = 0$. O campo de gradientes é dado por

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_x &= -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(T_1 \Phi'_1 - T_2 \Phi'_2) = -\frac{\sin \theta_1}{4a_1} + \frac{3 \sin \theta_2}{2\pi a_2} \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_y &= -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Re}(T_1 \Phi'_1 - T_2 \Phi'_2) = \frac{\cos \theta_1}{4a_1} - \frac{3 \cos \theta_2}{2\pi a_2} \end{aligned} \quad (7.113)$$

Considerando $n_x = \sin \theta_1$ e $n_y = -\cos \theta_1$, e substituindo a Equação (7.103) na Equação (5.3) o fluxo normal ao contorno Γ no ponto $r \rightarrow 0$ é

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} &= \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_1} - q_y n_{y_1}) = \frac{1}{4a_1} - \frac{3 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi a_2} \quad \text{ao longo do contorno 1} \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} &= \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_2} - q_y n_{y_2}) = \frac{3}{2\pi a_2} - \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{4a_1} \quad \text{ao longo do contorno 2} \end{aligned} \quad (7.114)$$

Note que existe um salto do fluxo normal no limite entre os dois contornos. Se $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, isto é, os segmentos 1 e 2 são colineares, ambos limites resultam

$$\text{em } \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} = \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} = \frac{1}{4a_1} + \frac{3}{2\pi a_2}, \text{ o que significa que não existe mais salto.}$$

10.2.4.

Combinação de Semitrincas formando um elemento de rotação para as faces

Estuda-se a superposição de efeitos de duas semitrincas de rotação como mostrado na Figura 9c em termos de deslocamentos. O elemento em estudo é ideal para considerar as rotações relativas nas faces da trinca.

10.2.4.1. Valores de potencial para r tendendo a 0

Na origem, o potencial obtido a partir da Equações (5.1), (5.7) e (7.93) é nulo, porém finito.

10.2.4.2. Fluxo normal para r tendendo a 0

A superposição de efeitos de duas semitrincas de rotação fornece

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} (T_1 \Phi'_1 + T_2 \Phi'_2) = & \\ \frac{(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)}{4\pi} & \left(- (2 \ln(r) - 2 \ln(a_1) + 5) + 2i(\pm \pi - (\theta - \theta_1)) \right) \\ & + \frac{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{4\pi} \left(- (2 \ln(r) - 2 \ln(a_2) + 5) + 2i(\pm \pi - (\theta - \theta_2)) \right) \end{aligned} \quad (7.115)$$

de onde o campo de gradientes é calculado

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_x = -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(T_1 \Phi'_1 + T_2 \Phi'_2) = & \\ \frac{1}{4\pi} & \left[(-2 \ln(r) + 2 \ln(a_1) - 5) \sin \theta_1 - 2(\pm \pi_1 - (\theta - \theta_1)) \cos \theta_1 \right] \\ & + \frac{1}{4\pi} \left[(-2 \ln(r) + 2 \ln(a_2) - 5) \sin \theta_2 - 2(\pm \pi_2 - (\theta - \theta_2)) \cos \theta_2 \right] \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_y = -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Re}(T_1 \Phi'_1 + T_2 \Phi'_2) = & \\ \frac{1}{4\pi} & \left[-(-2 \ln(r) + 2 \ln(a_1) - 5) \cos \theta_1 - 2(\pm \pi_1 - (\theta - \theta_1)) \sin \theta_1 \right] \\ & + \frac{1}{4\pi} \left[-(-2 \ln(r) + 2 \ln(a_2) - 5) \cos \theta_2 - 2(\pm \pi_2 - (\theta - \theta_2)) \sin \theta_2 \right] \end{aligned} \quad (7.116)$$

considerando $n_x = \sin \theta_1$ e $n_y = -\cos \theta_1$ para o segmento 1 e $n_x = -\sin \theta_2$ e $n_y = \cos \theta_2$ para o segmento 2, o fluxo normal no contorno Γ é

$$\lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} = \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_1} - q_y n_{y_1}) = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} (2 \ln(r) + 5)(1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)) \\ -2(\ln(a_1) + \ln(a_2) \cos(\theta_2 - \theta_1)) \\ -2(\pm\pi_2 - (\theta - \theta_2)) \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} \text{ ao longo do contorno 1}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} = \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_2} - q_y n_{y_2}) = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} -(2 \ln(r) + 5)(1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)) \\ 2(\ln(a_2) + \ln(a_1) \cos(\theta_2 - \theta_1)) \\ -2(\pm\pi_1 - (\theta - \theta_1)) \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} \text{ ao longo do contorno 2}$$

(7.117)

Para o caso geral o fluxo normal depende de r e θ . Para o caso particular de $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ as equações acima se reduzem a

$$\lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} = \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_1} - q_y n_{y_1}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(a_1/a_2) \text{ ao longo do contorno 1}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} = \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_2} - q_y n_{y_2}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(a_1/a_2) \text{ ao longo do contorno 2}$$

(7.118)

que são valores finitos que não dependem de r e θ .

10.2.5.

Combinação de Semitrincas formando um elemento de rotação para as pontas

Estuda-se a superposição de efeitos de duas semitrincas de rotação como mostrado na Figura 9d em termos de deslocamentos. O elemento é ideal para considerar as rotações relativas das faces próximas às pontas da trinca.

10.2.5.1. Valores de potencial para r tendendo a 0

Na origem, o potencial obtido a partir das Equações (5.1), (5.7), (7.75) e (7.93) é nulo, porém finito.

10.2.5.2. Fluxo normal para r tendendo a 0

A superposição de efeitos de duas semitrincas de rotação é

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} (T_1 \Phi'_1 + T_2 \Phi'_2) = & \\ \frac{(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)}{4\pi} & \left(-(2 \ln(r) - 2 \ln(a_1)) + 2i(\pm_1 \pi - (\theta - \theta_1)) \right) \\ + \frac{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{4\pi} & \left(-(2 \ln(r) - 2 \ln(a_2) + 5) + 2i(\pm_2 \pi - (\theta - \theta_2)) \right) \end{aligned} \quad (7.119)$$

de onde o campo de gradientes é calculado

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_x = -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Im}(T_1 \Phi'_1 + T_2 \Phi'_2) = & \\ \frac{1}{4\pi} \left[(-2 \ln(r) + 2 \ln(a_1)) \sin \theta_1 - 2(\pm_1 \pi - (\theta - \theta_1)) \cos \theta_1 \right] & \\ + \frac{1}{4\pi} \left[(-2 \ln(r) + 2 \ln(a_2) - 5) \sin \theta_2 - 2(\pm_2 \pi - (\theta - \theta_2)) \cos \theta_2 \right] & \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_y = -\lim_{r \rightarrow 0} \text{Re}(T_1 \Phi'_1 + T_2 \Phi'_2) = & \\ \frac{1}{4\pi} \left[-(-2 \ln(r) + 2 \ln(a_1)) \cos \theta_1 - 2(\pm_1 \pi - (\theta - \theta_1)) \sin \theta_1 \right] & \\ + \frac{1}{4\pi} \left[-(-2 \ln(r) + 2 \ln(a_2) - 5) \cos \theta_2 - 2(\pm_2 \pi - (\theta - \theta_2)) \sin \theta_2 \right] & \end{aligned} \quad (7.120)$$

Considerando $n_x = \sin \theta_1$ e $n_y = -\cos \theta_1$ para o segmento 1 e $n_x = -\sin \theta_2$ e $n_y = \cos \theta_2$ para o segmento 2, o fluxo normal no contorno Γ é

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} = \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_1} - q_y n_{y_1}) = \frac{1}{4\pi} & \left[\begin{array}{l} (2 \ln(r) + 5)(1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)) \\ -2(\ln(a_1) + \ln(a_2) \cos(\theta_2 - \theta_1)) \\ -2(\pm_2 \pi - (\theta - \theta_2)) \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{array} \right] \text{ ao longo do contorno 1} \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} = \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_2} - q_y n_{y_2}) = \frac{1}{4\pi} & \left[\begin{array}{l} -(2 \ln(r) + 5)(1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)) \\ 2(\ln(a_2) + \ln(a_1) \cos(\theta_2 - \theta_1)) \\ -2(\pm_1 \pi - (\theta - \theta_1)) \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{array} \right] \text{ ao longo do contorno 2} \end{aligned} \quad (7.121)$$

Para o caso geral o fluxo normal depende de r e θ . Para o caso particular de $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ as equações acima se reduzem a

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_1} = \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_1} - q_y n_{y_1}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(a_1/a_2) \text{ ao longo do contorno 1} & \\ \lim_{r \rightarrow 0} q_{n_2} = \lim_{r \rightarrow 0} (-q_x n_{x_2} - q_y n_{y_2}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(a_1/a_2) \text{ ao longo do contorno 2} & \end{aligned} \quad (7.122)$$

que são valores finitos que não dependem de r e θ .

10.3.

Expressões analíticas para a integração da matriz H em problemas de potencial quando elementos de forma polinomial são usados

Para elementos de interpolação linear, n_x , n_y e $|J|$ são constantes, assim a Equação (5.9) pode ser convenientemente reescrita como

$$\mathbf{H} \equiv H_{ki} = -n_x |J| \int_{\Gamma} q_{x_k} N_i d\xi - n_y |J| \int_{\Gamma} q_{y_k} N_i d\xi \quad (7.123)$$

onde é usada uma função de interpolação linear $N_i = [1 - \xi \quad \xi]$, com $\xi \in [0,1]$. q_{x_i} e q_{y_i} são dadas pela Equação (5.2) e reescritas aqui por conveniência

$$\begin{aligned} q_{x_i} &= -k \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\text{Im}(T_1 \Phi_1') \\ q_{y_i} &= -k \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\text{Re}(T_1 \Phi_1') \end{aligned} \quad (7.124)$$

A função de tensão $\Phi_1'(Z_1)$ é dada em termos de um argumento complexo Z_1 , e T_1 é uma constante complexa. Tanto Z_1 como T_1 são definidas na Equação (4.3). Um forma alternativa do argumento complexo Z_1 é

$$Z_1(\xi) = A_1 + C_1 \xi \quad (7.125)$$

onde ξ é uma coordenada paramétrica $\xi \in [0,1]$, A_1 e C_1 são constantes complexas dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= aT_1 = (x_a + iy_a)T_1 = \frac{r_a e^{i(\theta_a - \theta_1)}}{a_1} \\ B_1 &= bT_1 = (x_b + iy_b)T_1 = \frac{r_b e^{i(\theta_b - \theta_1)}}{a_1} \\ C_1 &= AB_1 = B_1 - A_1 = (x_b + iy_b)T_1 - (x_a + iy_a)T_1 = (x_{ab} + iy_{ab})T_1 = \frac{r_{ab} e^{i(\theta_{ab} - \theta_1)}}{a_1} \end{aligned} \quad (7.126)$$

A Equação (7.123) pode ser rescrita por conveniência como

$$\mathbf{H} \equiv H_{ki} = n_x |J| \text{Im} \left(T_1 \int_{\Gamma} \bar{\Phi}_1'(\xi) N_i(\xi) d\xi \right) + n_y |J| \text{Re} \left(T_2 \int_{\Gamma} \bar{\Phi}_1'(\xi) N_i(\xi) d\xi \right) \quad (7.127)$$

onde $\bar{\Phi}_1'(Z_1)$ é a mesma expressão da Equação (4.10) sem o termo singular $1/Z_1$ como mostrado na Equação (7.128). É possível evitar este termo singular devido a este termo se cancelar com a superposição de duas semitrincas opostas como demonstrado no item 10.2.

$$\bar{\Phi}_1'(Z_1) = \Phi_1'(Z_1) + \frac{1}{2\pi Z_1} \quad (7.128)$$

O problema se reduz ao cálculo das integrais

$$\int_0^1 \bar{\Phi}'_1(\xi)(1-\xi)d\xi$$

$$\int_0^1 \bar{\Phi}'_1(\xi)(\xi)d\xi \quad (7.129)$$

Existem quatro diferentes casos a ser levados em conta na integração da Equação (7.129), como ilustrado na Figura 44.

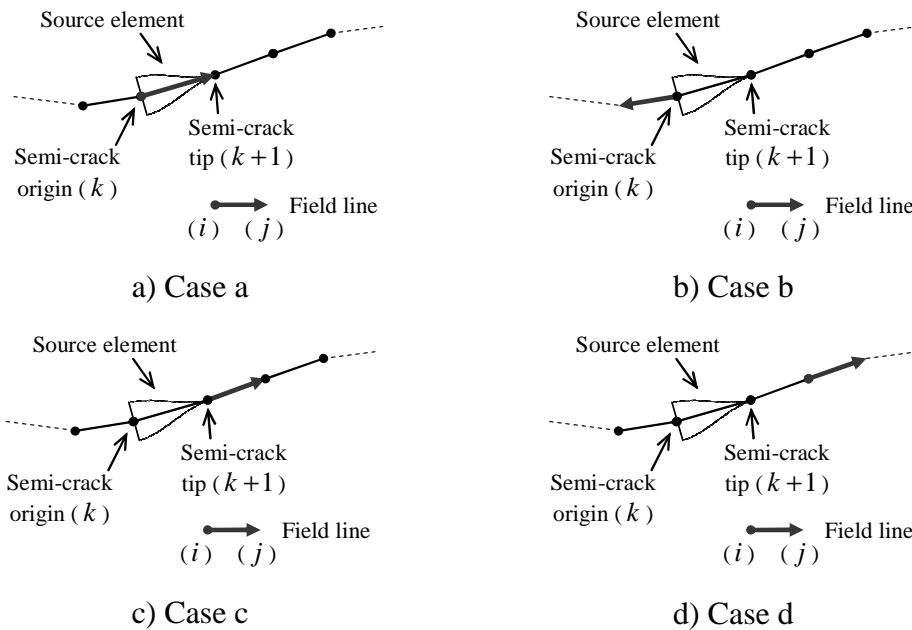


Figura 44. Casos de integração da Matriz \mathbf{H} em problemas de potencial.

O valor principal da função complexa $\ln(z)$ com $z = re^{i\theta}$ é

$$\ln(z) = \ln(r) + i(\theta), \text{ quando } 0 \leq \theta_{ab} < 2\pi \quad (7.130)$$

onde a parte real e imaginária são, respectivamente.

$$\text{Re}(\ln(z)) = \ln(r)$$

$$\text{Im}(\ln(z)) = \theta \quad (7.131)$$

Uma forma prática de obter θ computacionalmente é

$$\theta = 2\pi \text{frac} \left(\frac{\arctan(dy/dx)}{2\pi} + 1 \right) \quad (7.132)$$

O desenvolvimento analítico para cada um dos casos foi usando o programa computacional MapleTM (2011).

10.3.1.

Caso a – O segmento de integração coincide com a o eixo da semitrinca

A integração da Equação (7.129) para o caso da Figura 44a. resulta em

$$Na[1,1] = \int_0^1 \bar{\Phi}'_1(\xi)(1-\xi)d\xi = -\frac{3}{8\pi} - i\frac{1}{4} \quad (7.133)$$

$$Na[2,1] = \int_0^1 \bar{\Phi}'_1(\xi)(\xi)d\xi = \frac{3}{8\pi} - i\frac{1}{4} \quad (7.134)$$

Os resultados das integrais acima são armazenados em uma matriz $Na[n,1]$, onde o índice $n=1,2$ corresponde à função de interpolação $(1-\xi)$ ou (ξ) , e 1 corresponde à semitrinca 1. As Equações (7.133) e (7.134) para a semitrinca 2 têm a mesma expressão se $\bar{\Phi}'_2$ é substituída por $\bar{\Phi}'_1$ na equação acima e armazenada na matriz $Nc1[n,2]$.

10.3.2.

Caso b – A origem do segmento de integração coincide com a origem da semitrinca

A integração da Equação (7.129) para o caso mostrado na Figura 44b é

$$Nb[1,1] = \int_0^1 \bar{\Phi}'_1(C_1\xi)(1-\xi)d\xi = \frac{C_1(2C_1^2 - 3C_1 - 2) - 2C_1^3(C_1 - 2)\ln(C_1) + 2(C_1^4 - 2C_1^3 + 2C_1 - 1)\ln(C_1 - 1) - 2i\pi(2C_1 - 1)\text{signum}(0, \text{Im}(C_1), 1)}{8\pi C_1^2}$$

$$Nb[2,1] = \int_0^1 \bar{\Phi}'_1(C_1\xi)(\xi)d\xi = \frac{C_1(6C_1^2 - 5C_1 + 2) - 2C_1^3(3C_1 - 4)\ln(C_1) + 2(3C_1^4 - 4C_1^3 + 1)\ln(C_1 - 1) - 2i\pi\text{signum}(0, \text{Im}(C_1), 1)}{8\pi C_1^2}$$

(7.135)

onde a função $\text{sign}(x)$ é definida por

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (7.136)$$

10.3.3.

Caso c – A origem do segmento de integração coincide com a ponta da semitrinca

A integração da Equação (7.129) para o caso mostrado na Figura 44c é

$$\begin{aligned}
Nc[1,1] &= \int_0^1 \bar{\Phi}'_1(1+C_1\xi)(1-\xi)d\xi = \\
&\frac{C_1(2C_1^2+3C_1-2)+2C_1^3(C_1+2)\ln(C_1)-2(C_1^4+2C_1^3-2C_1-1)\ln(C_1+1)}{8\pi C_1^2} \\
Nc[2,1] &= \int_0^1 \bar{\Phi}'_1(1+C_1\xi)(\xi)d\xi = \\
&\frac{C_1(6C_1^2+5C_1+2)+2C_1^3(3C_1+4)\ln(C_1)-2(3C_1^4+4C_1^3+1)\ln(C_1+1)}{8\pi C_1^2}
\end{aligned} \tag{7.137}$$

onde o problema é resolvido considerando o valor principal de $\ln(C_1)$ como mostrado na Equação (7.130).

10.3.4. Caso d – Caso geral

O cálculo da integral da Equação (7.129) para o caso geral mostrado na Figura 44d está em andamento, pois ainda não foi demonstrada a generalidade quando existe mudança de quadrante, no entanto, alternativamente pode se calcular a solução numérica pela quadratura de Gauss Legendre dado que não existem singularidades envolvidas.

$$\begin{aligned}
Nd[1,1] &= \int_0^1 \bar{\Phi}'_1(A_1+C_1\xi)(1-\xi)d\xi \equiv \sum_{i_g=1}^{n_g} \bar{\Phi}'_1(A_1+C_1\xi_g[i_g])(1-\xi_g)w_g[i_g] \\
Nd[2,1] &= \int_0^1 \bar{\Phi}'_1(A_1+C_1\xi)(1-\xi)d\xi \equiv \sum_{i_g=1}^{n_g} \bar{\Phi}'_1(A_1+C_1\xi_g[i_g])(\xi_g)w_g[i_g]
\end{aligned} \tag{7.138}$$

Foram desenvolvidas as soluções analíticas para uma semitrinca 1, para a semitrinca 2, o procedimento é similar, substituindo o subscrito $(.)_1$ pelo subscrito $(.)_2$. Todos os resultados são armazenados nas matrizes $Na[i,c]$, $Nb[i,c]$, $Nc[i,c]$ e $Nd[i,c]$ onde $i=1,2$ é relacionado à função de forma $N_i=[1-\xi,\xi]$ e $c=1,2$ é relacionado à semitrinca 1 ou 2.