



Elvis Yuri Mamani Vargas

**Modelagem de trincas com o uso de funções
de tensão de Westergaard generalizadas no
método híbrido dos elementos de contorno**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Doutor pelo Programa de
Pós-graduação em Engenharia Civil do
Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Setembro de 2015



Elvis Yuri Mamani Vargas

**Modelagem de trincas com o uso de funções
de tensão de Westergaard generalizadas no
método híbrido dos elementos de contorno**

Tese apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-
graduação em Engenharia Civil do Departamento
de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da
PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora
abaixo assinada

Prof. Ney Augusto Dumont

Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Alexandre Antonio de Oliveira Lopes

Petrosoft Design

Prof. Jose Claudio de Faria Telles

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Leandro Palermo Junior

Universidade de Campinas

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de setembro de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

Elvis Yuri Mamani Vargas

Graduou-se em Engenharia Civil na *UNSAAC (Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco – Perú)* em 2005. Em 2011 obteve o grau de mestre no curso de Mestrado em Engenharia Civil na PUC–Rio na área de Estruturas. Atualmente atua na linha de pesquisa do método híbrido dos elementos de contorno.

Ficha Catalográfica

Mamani Vargas, Elvis Yuri

Modelagem de trincas com o uso de funções de tensão de Westergaard generalizadas no método híbrido dos elementos de contorno / Elvis Yuri Mamani Vargas; orientador: Ney Augusto Dumont. – 2015.

119 f. ; il. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2015.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil - Teses. 2. Elementos de contorno. 3. Métodos híbridos. 4. Mecânica da fratura. 5. Funções de tensão de Westergaard. 6. Fator de intensidade de tensão. 7. Zona plástica. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Para meus pais Rosa e Vidal, pelo amor, apoio e estímulo.
Para minha irmã Chris pela compreensão e confiança.
Ao Peru, pelo legado das culturas antigas.

Agradecimentos

Ao Deus por ter me concedido a vida.

À CAPES, ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao meu professor Ney Dumont pela orientação, confiança e amizade. Ao meu professor Alexandre Lopes pelas importantes contribuições e palavras de apoio.

Aos professores da PUC-Rio, pelos ensinamentos transmitidos nos estudos de pós-graduação. Aos professores da UNSAAC no Peru, pelos ensinamentos do fascinante mundo da engenharia. A todos aqueles educadores que foram parte de minha formação tanto pessoal como profissional.

Aos meus pais e irmãos pela educação, atenção e carinho. À Melissa por ter me acompanhado nas etapas mais decisivas deste trabalho. A todos os familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

Aos amigos de infância, juventude e a todos aqueles cuja amizade resistiu ao tempo.

Aos amigos das peladas, da dança, do parque da cidade, das salas 610 e 617 na favelinha, aos *cusqueños*, peruanos, colombianos, bolivianos, equatorianos e tantos outros amigos ganhos no Brasil pelo apoio, paciência e compreensão que tornaram esta jornada mais agradável.

Ao Brasil e a sua gente que sempre me fez sentir em casa.

Resumo

Mamani Vargas, Elvis Yuri; Dumont, Ney Augusto (orientador). **Modelagem de trincas com o uso de funções de tensão de Westergaard generalizadas no método híbrido dos elementos de contorno.** Rio de Janeiro, 2015. 119p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Apresenta-se uma formulação do método híbrido dos elementos de contorno para a análise de problemas planos de potencial e de elasticidade que, apesar de completamente geral para domínios finitos, é mais apropriada a aplicações de mecânica da fratura. A formulação exige integrações apenas ao longo do contorno e usa como soluções fundamentais, para interpolar campos no domínio, funções generalizadas do tipo Westergaard, inspiradas numa proposta feita por Tada *et al.* em 1993. Os conceitos de elementos de contorno são semelhantes aos conceitos apresentados por Crouch e Starfield em 1983, mas em um contexto variacional que permite interpretações mecânicas das equações matriciais resultantes. Problemas de topologia geral podem ser modelados, como ilustrado para domínios infinitos ou multiplamente conexos. A formulação é diretamente aplicável à solução de problemas de placas com entalhes ou trincas curvas internas ou de bordo, pois permite a descrição adequada de altos gradientes de tensão, sendo uma ferramenta simples para a avaliação de fatores de intensidade de tensão. Além disso, é possível determinar, num processo iterativo, a zona plástica ao redor da ponta de uma trinca. Esta tese tem foco no desenvolvimento matemático da formulação para problemas de potencial e de elasticidade. Vários exemplos numéricos de validação são apresentados.

Palavras-chave

Elementos de contorno; métodos híbridos; mecânica da fratura; funções de tensão de Westergaard; fator de intensidade de tensão; zona plástica.

Abstract

Mamani Vargas, Elvis Yuri; Dumont, Ney Augusto (Advisor). **Crack modeling using generalized Westergaard stress functions in the hybrid boundary element method.** Rio de Janeiro, 2015. 119p. DSc. Thesis - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A particular implementation of the hybrid boundary element method is presented for the two dimensional analysis of potential and elasticity problems, which, although general in concept, is suited for fracture mechanics applications. The formulation requires integrations only along the boundary and uses fundamental solutions to interpolate fields in the domain. Generalized Westergaard stress functions, as proposed by Tada *et al* in 1993, are used as the problem's fundamental solutions. The proposed formulation leads to displacement-based concepts that resemble those presented by Crouch and Starfield, although in a variational framework that leads to matrix equations with sound mechanical meanings. Problems of general topology, such as in the case of unbounded and multiply-connected domains, may be modeled. The formulation, which is directly applicable to notches and generally curved, internal or external cracks, is especially suited for the description of the stress field in the vicinity of crack tips and is an easy means of evaluating stress intensity factors. The plastic phenomenon is taken into account around the crack tip through an iterative process. This thesis focuses on the mathematical fundamentals of the formulation of potential and elasticity problems. Several validating numerical examples are presented.

Keywords

Boundary elements; hybrid methods; fracture mechanics; Westergaard stress functions; stress intensity factors; plastic zone.

Sumário

1	Introdução	21
2	Método Híbrido dos Elementos de Contorno	23
2.1.	Formulação do problema	23
2.2.	Tensões e deslocamentos assumidos	23
2.3.	Equações matriciais que governam o problema	24
2.4.	Solução do problema	26
3	Mecânica da Fratura	27
3.1.	Critério Energético de Griffith	27
3.2.	Campo de tensões próximo à trinca	28
3.3.	Fator de Intensidade de Tensão	29
3.4.	Série de Williams	30
3.5.	Funções de tensão de Westergaard	32
3.6.	Integral J	34
3.7.	Zona plástica	35
4	Funções de Tensão de Westergaard Generalizadas	39
4.1.	Formulação de Tada, Ernst e Paris baseada em deslocamentos.	42
4.2.	Funções de tensão para trincas de comprimento a_1 e rotação θ_1 .	43
4.3.	Semitrinca de abertura elíptica na ponta da trinca	44
4.4.	Semitrinca de abertura polinomial na face da trinca	44
4.5.	Semitrinca de rotação na ponta da trinca	45
4.6.	Semitrinca de rotação na face da trinca	46
4.7.	Singularidades das funções de tensão	46
5	Formulação para Problemas de Potencial	48
5.1.	Construção da solução fundamental	48
5.2.	Integração da matriz H	50
5.3.	Campo de potenciais e gradientes em pontos internos	53

6	Formulação para Problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica	58
6.1.	Expressões analíticas do campo de deslocamentos	58
6.2.	Expressões analíticas do campo de tensões	60
6.3.	Avaliação numérica do campo de tensões para uma trinca curva geral	60
6.4.	Avaliação numérica da abertura da trinca	64
6.5.	Fator de intensidade de tensão	67
7	Formulação para a Simulação da Zona Plástica	73
7.1.	Equações básicas	73
7.2.	Derivação do termo residual para o calculo iterativo	75
7.3.	Algoritmo de busca linear para a obtenção da fronteira plástica	77
7.4.	Solução iterativa do problema não linear	79
7.5.	Avaliação numérica do termo residual	81
7.6.	Simulação confiável do campo de tensões ao redor da ponta da trinca	83
7.7.	O problema não-linear: testes e problemas de convergência	87
7.8.	Considerações finais no cálculo da zona plástica	91
8	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	93
8.1.	Conclusões	93
8.2.	Sugestões para trabalhos futuros	94
9	Referências Bibliográficas	96
10	Apêndice	101
10.1.	Estudo do comportamento das funções de tensão na origem da trinca	101
10.2.	Estudo de singularidades em problemas de potencial	108
10.3.	Expressões analíticas para a integração da matriz H em problemas de potencial quando elementos de forma polinomial são usados	116

Lista de figuras

Figura 1. Sistema de coordenadas e modos de carregamento.	29
Figura 2. Trinca horizontal numa placa infinita de espessura fina.	32
Figura 3. Contorno Γ ao redor da ponta da trinca.	34
Figura 4. Curvas tensão-deformação, materiais elasto-plásticos.	36
Figura 5. Estimativas da zona plástica ao longo da projeção do eixo da trinca.	37
Figura 6. Uso de trincas de forma elíptica para simular contornos curvos (Adaptado de Dumont e Lopes, 2003).	39
Figura 7. Uso de trincas semi-elípticas para simular contornos curvos (Adaptado de Mamani, 2011; Dumont e Mamani, 2011).	40
Figura 8. Uso de semitrincas elípticas e polinomiais para simular contornos curvos (Adaptado de Mamani e Dumont, 2015).	41
Figura 9. Elementos usados para discretizar uma trinca curva geral, em termos de abertura e sobreposição (Adaptado de Mamani e Dumont, 2015).	42
Figura 10. Semitrincas de comprimento a_1 e rotação θ_1 usadas para representar efeitos de abertura e rotação relativa (Adaptado de Mamani e Dumont, 2015).	44
Figura 11. Construção de um elemento de descontinuidade a partir de duas semitrincas.	49
Figura 12. Ilustração dos cinco casos na avaliação numérica da matriz \mathbf{H} .	51
Figura 13. Ilustração de um corpo discretizado com 12 elementos de contorno lineares.	51
Figura 14. Recorte para a modelagem numérica de um corpo multiplamente conexo.	54
Figura 15. Potencial ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14.	55
Figura 16. Gradientes em x ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14.	55
Figura 17. Gradientes em y ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14.	56

Figura 18. Estudo de convergência ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14 em termos de potenciais.	57
Figura 19. Estudo de convergência ao longo da reta \overline{AB} da Figura 14 em termos dos gradientes.	57
Figura 20. Ilustração de uma trinca discretizada com n parâmetros nodais (elementos), $n+1$ segmentos e $n+2$ pontos geométricos.	61
Figura 21. Trinca horizontal reta em um domínio infinito (Adaptado de Mamani e Dumont, 2015).	62
Figura 22. Campo de tensões para a trinca da Figura 21 discretizada com elementos de forma elíptica (Adaptado de Dumont e Lopes, 2002; Mamani, 2011).	62
Figura 23. Campo de tensões para a trinca da Figura 21 discretizada com elementos combinados de abertura ou deslizamento (Mamani e Dumont, 2015).	63
Figura 24. Campo de tensões para a trinca da Figura 21 discretizada com elementos combinados de abertura e rotação (Mamani e Dumont, 2015).	64
Figura 25. Abertura da trinca da Figura 21 usando vários elementos de discretização (Mamani e Dumont, 2015).	65
Figura 26. Abertura da trinca da Figura 21 para várias discretizações da trinca (Mamani e Dumont, 2015).	66
Figura 27. Deslocamentos de abertura da trinca reta da Figura 21a (Mamani e Dumont, 2015).	67
Figura 28. Fator de intensidade de tensão para a trinca da Figura 21, a partir dos parâmetros \mathbf{p}^* e deslocamentos num ponto de coordenadas $x = -0.01$ (Mamani e Dumont, 2015).	69
Figura 29. Fator de intensidade de tensão para a trinca da Figura 21, a partir de tensões em pontos e por comparação com a série de Williams (Mamani e Dumont, 2015).	70
Figura 30. Curva tensão-deformação para a análise elasto-plástica em termos de tensões iniciais (esquerda); e superfície de escoamento em termos de tensões principais (σ_I, σ_{II}) com o estado de tensões representado pelo ponto $P(\sigma_I, \sigma_{II})$ (Dumont e Mamani, 2013).	76

- Figura 31. Busca linear (*Regula-Falsi*) e processo de discretização da zona plástica (Adaptado de Dumont e Mamani, 2013). 78
- Figura 32. Estudo de convergência para a avaliação da zona plástica, em termos de *regula-falsi*, para três setores angulares, como mostrado na parte direita da Figura 31 (Dumont e Mamani, 2013). 82
- Figura 33. Convergência na avaliação do vetor residual de deslocamentos equivalentes \mathbf{d}^{*res} , como introduzido na Equação (7.5), para 1 (esquerda) e 16 elementos de trinca e um número crescente de setores (direção angular) (Dumont e Mamani, 2013). 82
- Figura 34. Estudos de convergência para a avaliação do vetor residual de deslocamentos equivalentes \mathbf{d}^{*res} , como introduzidos na Equação (7.5) para 1 (esquerda) e 16 elementos de trinca e diferentes números de pontos de Gauss na direção radial (Dumont e Mamani, 2013). 83
- Figura 35. A partir do topo: tensões σ_{xx} , σ_{yy} e a tensão equivalente de Von Mises σ_{eq} (em MPa) ao longo do eixo vertical $y = (-10^{-4} m, 10^{-4} m)$ localizada a $x = 10^{-4} m$ à direita da ponta da trinca, para varias discretizações da trinca, com seus correspondentes erros na parte direita (Dumont e Mamani, 2013). 85
- Figura 36. A mesma representação de tensões da Figura 35 dada uma reta vertical 100 vezes maior (Dumont e Mamani, 2013). 85
- Figura 37. Contornos de zona plástica obtidos elasticamente para o estado plano de deformações (esquerda) e o estado plano de tensões (Dumont e Mamani, 2013). 86
- Figura 38. Contornos da zona plástica para o estado plano de deformações. Trinca discretizada com $ne = 1$, carregamento uniaxial remoto de $\sigma_{yy} = 0.1\sigma_Y$, aplicado em um passo (esquerda) e em 5 passos (Dumont e Mamani, 2013). 88
- Figura 39. Contornos da zona plástica para o estado plano de deformações. Trinca discretizada com $ne = 16$, carregamento uniaxial remoto de $\sigma_{yy} = 0.01\sigma_Y$, aplicado em um passo (esquerda) e em 5 passos (Dumont e Mamani, 2013). 89

- Figura 40. Contornos da zona plástica para o estado plano de deformações. Trinca discretizada com vários elementos, carregamento uniaxial remoto de $\sigma_{yy} = 0.01\sigma_Y$, para um material elasto-plástico perfeito (esquerda) e para um material elasto-plástico bi linear com rigidez de endurecimento de $E/5$ (Dumont e Mamani, 2013). 89
- Figura 41. Contornos da zona plástica para o estado plano de deformações. Trinca discretizada com vários elementos de trinca, carregamento uniaxial remoto de $\sigma_{yy} = 0.01\sigma_Y$ (esquerda), como obtida por um material elasto-plástico (direita) com uma curva tensão-deformação não-linear para $\sigma \geq \sigma_Y$, dado de acordo com a relação de Ramberg-Osgood (tensões em *MPa*) (Dumont e Mamani, 2013). 90
- Figura 42. Zona plástica elasticamente calculada para vários níveis de carregamento remoto obtidos com $ne = 16$ elementos de trinca, medidos ao longo de $y = 0$ (esquerda) e $x = 0$ (direita) (Dumont e Mamani, 2013). 90
- Figura 43. Zona plástica elasticamente e plasticamente calculada para vários níveis de carregamento remoto obtidos com $ne = 1$ elementos de trinca, medidos ao longo de $y = 0$ (esquerda) e $x = 0$ (Dumont e Mamani, 2013). 91
- Figura 44. Casos de integração da Matriz **H** em problemas de potencial. 117

Lista de tabelas

Tabela 1. Campo de tensões e deslocamentos para modos I e II (Anderson, 1995).	30
Tabela 2. Resumo das singularidades das funções de tensão propostas.	46
Tabela 3. Numero dos nós das esquinas das diferentes discretizações da Figura 14.	56

Lista de símbolos

Caracteres latinos:

A	Comprimento do semieixo de uma trinca reta, ponto extremo da elipse
a	Comprimento do semieixo de um elemento de trinca
a_c	Comprimento crítico da trinca
a_1	Comprimento do semieixo do primeiro elemento de trinca
a_{n+1}	Comprimento do semieixo do último elemento de trinca
B	Ponto extremo da elipse
b	Comprimento do entalhe elíptico
$b_k, \{\mathbf{b}\}$	Deslocamentos do sistema interno equivalentes ao campo de deslocamentos referentes às forças de massa
C_{ij}	Constantes arbitrárias do campo de deslocamentos referentes à solução fundamental
C_{ijkl}	Tensor da relação constitutiva
$d_j, \{\mathbf{d}\}$	Deslocamentos nodais do sistema externo
$d_k^*, \{\mathbf{d}^*\}$	Deslocamentos nodais equivalentes do sistema interno
E	Módulo de Young, módulo de elasticidade
$E_{kl}, [\mathbf{E}]$	Projetor ortogonal
f_{ij}	Função adimensional de θ
$F(\theta^*, \lambda)$	Função adimensional de θ^* e λ
$\bar{F}_i, \{\bar{\mathbf{F}}\}$	Forças de massa prescritas
$F_{kl}, [\mathbf{F}]$	Matriz de flexibilidade do sistema interno
G	Taxa de liberação de energia de deformação
G_c	Taxa crítica de liberação de energia de deformação
$H_{kl}, [\mathbf{H}]$	Matriz de incidência cinemática
i	Constante complexa
J	Integral J

K	Fator de intensidade de tensão
$K_{I,II,III}$	Fator de intensidade de tensão relacionados aos modos I, II e III de fratura
K_t	Fator de concentração de tensões
$K_{kl}, [\mathbf{K}]$	Matriz de rigidez do sistema externo
k	Constante de potencial
N_L	Funções de interpolação
$p_i, \{\mathbf{p}\}$	Forças nodais equivalentes
$p_i^*, \{\mathbf{p}^*\}$	Forças singulares
$p_{ij}^*, \{\mathbf{p}^*\}$	Função de transformação de forças referente à solução fundamental
$q_i, \{\mathbf{q}\}$	Fluxo
R	Raio do círculo
r	Módulo do vetor posição (raio)
$t_k, \{\mathbf{t}\}$	Forças nodais do sistema externo, equivalentes às forças de massa
$T_i, \{\mathbf{T}\}$	Forças de superfície
$\bar{T}_i, \{\bar{\mathbf{T}}\}$	Forças de superfície prescritas
$T_i^*, \{\mathbf{T}^*\}$	Forças de superfície referentes à solução fundamental
$u^{I,II}$	Deslocamentos segundo o eixo x de coordenadas devido aos modos I e II de trincamento
$u_i, \{\mathbf{u}\}$	Deslocamentos, potenciais
$\bar{u}_i, \{\bar{\mathbf{u}}\}$	Deslocamentos prescritos, potenciais prescritos
$u_i^*, \{\mathbf{u}^*\}$	Deslocamentos referentes à solução fundamental
$u_i^{*n}, \{\mathbf{u}^{*n}\}$	Deslocamentos totais referentes às forças de massa
$u_i^{*p}, \{\mathbf{u}^{*p}\}$	Deslocamentos referentes à solução particular da equação de equilíbrio
$u_{ij}, [\mathbf{u}]$	Funções de interpolação de deslocamentos
$u_{ij}^*, [\mathbf{u}^*]$	Função de transformação de deslocamentos referente à solução fundamental

$U_0(\varepsilon_{ij})$	Densidade de energia interna de deformação
$U_0^c(\sigma_{ij})$	Densidade de energia interna na forma complementar
$U_0^{c*}(\sigma_{ij})$	Densidade de energia interna na forma complementar, referente ao sistema interno
$V_{kl}, [\mathbf{V}]$	Matriz cujas colunas formam a base das forças singulares que correspondem a forças nodais equivalentes nulas
\mathbf{v}	Espaço nulo
$v^{I,II}$	Deslocamentos segundo o eixo x de coordenadas devido aos modos I e II de trincamento
\mathbf{v}_0	Espaço nulo decorrente da ortogonalidade a deslocamentos de corpo rígido
\mathbf{v}_1	Espaços nulos adicionais provenientes de cada par de nós com a mesma coordenada
w	Comprimento da placa
W	Energia de deformação
$W_{kl}, [\mathbf{W}]$	Matriz cujas colunas formam a base dos deslocamentos de corpo rígido
$x_i, \{\mathbf{x}\}$	Coordenadas cartesianas

Caracteres gregos:

Δ	Trabalho não recuperável associado à deformação permanente na ponta da trinca
Δ_{ij}	Delta de Dirac
Φ	Funções de tensão de Airy
$\Phi_{I,II}$	Função de tensão de Westergaard (modificada ou generalizada) para os modos I e II de trincamento
$\Phi'_{I,II}$	Derivada da função de tensão de Westergaard (modificada ou generalizada) para os modos I e II de trincamento
$\Phi''_{I,II}$	Segunda derivada da função de tensão de Westergaard para os modos I e II de trincamento
Γ	Contorno do corpo elástico, contorno arbitrário em torno da ponta da trinca

Γ_J	Região do contorno relacionado à Integral J
Γ_u	Região do contorno onde se têm deslocamentos ou potenciais prescritos
Γ_σ	Região do contorno onde se têm forças ou gradientes prescritos
Γ^*	Contorno referente à solução fundamental
Γ_0	Região do contorno correspondente à parte externa da superfície esférica
$\bar{\Gamma}_0$	Região do contorno contida na superfície esférica
Π	Energia potencial total
Π_g	Forma generalizada da energia potencial total
Π_R	Potencial de Hellinger-Heissner
Ω	Domínio do corpo elástico
Ω^*	Domínio referente à solução fundamental
Ω_0	Região onde a força singular é aplicada
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ϵ_{ij}	Deformações
γ	Trabalho necessário para formar uma nova superfície de trinca
η_j	Cossenos diretores de um elemento de superfície
λ_{ij}, λ_i	Multiplicadores de Lagrange
μ	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coeficiente de Poisson
π	Constante
θ	Ângulo do sistema de coordenadas polares
θ_i	Ângulo de rotação da trinca i em relação ao eixo positivo de x
ρ	Raio de curvatura
σ	Tensão normal
σ^∞	Tensão normal aplicada no meio infinito
σ_c	Tensão crítica a partir da qual o crescimento da trinca é instável

σ_n	Tensão normal nominal
σ_{ij}	Tensões normais, tensões
$\sigma_{ij}^{I,II}$	Tensões normais, tensões devido aos modo I e II de trincamento
σ_{ij}^*	Tensões referentes à solução fundamental
σ_{ij}^{*n}	Tensões totais referentes às forças de massa
σ_{ij}^{*p}	Tensões referentes à solução particular da equação de equilíbrio
τ	Tensão cisalhante aplicada
τ^∞	Tensão cisalhante aplicada no meio infinito
τ_{ij}	Tensões cisalhantes
$\tau_{ij}^{I,II}$	Tensões cisalhantes devido aos modos I e I de trincamento
ξ, η	Coordenadas paramétricas
$\Im()$	Parte imaginária de um número complexo
$\Re()$	Parte real de um número complexo

Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser a vitoriosa.

Albert Einstein