Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Elvis Yuri Mamani Vargas

Modelagem de trincas com o uso de funções de tensão de Westergaard generalizadas no método híbrido dos elementos de contorno

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Setembro de 2015

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Elvis Yuri Mamani Vargas

Modelagem de trincas com o uso de funções de tensão de Westergaard generalizadas no método híbrido dos elementos de contorno

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada

Prof. Ney Augusto Dumont
Orientador
Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva
Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Alexandre Antonio de Oliveira Lopes
Petrosoft Design

Prof. Jose Claudio de Faria Telles
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Leandro Palermo Junior
Universidade de Campinas

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de setembro de 2015

Elvis Yuri Mamani Vargas

Graduou-se em Engenharia Civil na *UNSAAC (Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco – Perú)* em 2005. Em 2011 obteve o grau de mestre no curso de Mestrado em Engenharia Civil na PUC–Rio na área de Estruturas. Atualmente atua na linha de pesquisa do método híbrido dos elementos de contorno.

Ficha Catalográfica

Mamani Vargas, Elvis Yuri

Modelagem de trincas com o uso de funções de tensão de Westergaard generalizadas no método híbrido dos elementos de contorno / Elvis Yuri Mamani Vargas; orientador: Ney Augusto Dumont. – 2015.

119 f. ; il. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2015.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil - Teses. 2. Elementos de contorno. 3. Métodos híbridos. 4. Mecânica da fratura. 5. Funções de tensão de Westergaard. 6. Fator de intensidade de tensão. 7. Zona plástica. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Para meus pais Rosa e Vidal, pelo amor, apoio e estímulo.
Para minha irmã Chris pela compreensão e confiança.
Ao Peru, pelo legado das culturas antigas.

Agradecimentos

Ao Deus por ter me concedido a vida.

À CAPES, ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao meu professor Ney Dumont pela orientação, confiança e amizade. Ao meu professor Alexandre Lopes pelas importantes contribuições e palavras de apoio.

Aos professores da PUC-Rio, pelos ensinamentos transmitidos nos estudo de pós-graduação. Aos professores da UNSAAC no Peru, pelos ensinamentos do fascinante mundo da engenharia. A todos aqueles educadores que foram parte de minha formação tanto pessoal como profissional.

Aos meus pais e irmãos pela educação, atenção e carinho. À Melissa por ter me acompanhado nas etapas mais decisivas deste trabalho. A todos os familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

Aos amigos de infância, juventude e a todos aqueles cuja amizade resistiu ao tempo.

Aos amigos das peladas, da dança, do parque da cidade, das salas 610 e 617 na favelinha, aos *cusqueños*, peruanos, colombianos, bolivianos, equatorianos e tantos outros amigos ganhados no Brasil pelo apoio, paciência e compreensão que tornaram esta jornada mais agradável.

Ao Brasil e a sua gente que sempre me fez sentir em casa.

Resumo

Mamani Vargas, Elvis Yuri; Dumont, Ney Augusto (orientador). **Modelagem de trincas com o uso de funções de tensão de Westergaard generalizadas no método híbrido dos elementos de contorno.** Rio de Janeiro, 2015. 119p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Apresenta-se uma formulação do método híbrido dos elementos de contorno para a análise de problemas planos de potencial e de elasticidade que, apesar de completamente geral para domínios finitos, é mais apropriada a aplicações de mecânica da fratura. A formulação exige integrações apenas ao longo do contorno e usa como soluções fundamentais, para interpolar campos no domínio, funções generalizadas do tipo Westergaard, inspiradas numa proposta feita por Tada *et al*. em 1993. Os conceitos de elementos de contorno são semelhantes aos conceitos apresentados por Crouch e Starfield em 1983, mas em um contexto variacional que permite interpretações mecânicas das equações matriciais resultantes. Problemas de topologia geral podem ser modelados, como ilustrado para domínios infinitos ou multiplamente conexos. A formulação é diretamente aplicável à solução de problemas de placas com entalhes ou trincas curvas internas ou de bordo, pois permite a descrição adequada de altos gradientes de tensão, sendo uma ferramenta simples para a avaliação de fatores de intensidade de tensão. Além disso, é possível determinar, num processo iterativo, a zona plástica ao redor da ponta de uma trinca. Esta tese tem foco no desenvolvimento matemático da formulação para problemas de potencial e de elasticidade. Vários exemplos numéricos de validação são apresentados.

Palavras-chave

Elementos de contorno; métodos híbridos; mecânica da fratura; funções de tensão de Westergaard; fator de intensidade de tensão; zona plástica.

Abstract

Mamani Vargas, Elvis Yuri; Dumont, Ney Augusto (Advisor). **Crack modeling using generalized Westergaard stress functions in the hybrid boundary element method.** Rio de Janeiro, 2015. 119p. DSc. Thesis - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A particular implementation of the hybrid boundary element method is presented for the two dimensional analysis of potential and elasticity problems, which, although general in concept, is suited for fracture mechanics applications. The formulation requires integrations only along the boundary and uses fundamental solutions to interpolate fields in the domain. Generalized Westergaard stress functions, as proposed by Tada *et al* in 1993, are used as the problem's fundamental solutions. The proposed formulation leads to displacement-based concepts that resemble those presented by Crouch and Starfield, although in a variational framework that leads to matrix equations with sound mechanical meanings. Problems of general topology, such as in the case of unbounded and multiply-connected domains, may be modeled. The formulation, which is directly applicable to notches and generally curved, internal or external cracks, is especially suited for the description of the stress field in the vicinity of crack tips and is an easy means of evaluating stress intensity factors. The plastic phenomenon is taken into account around the crack tip through an iterative process. This thesis focuses on the mathematical fundamentals of the formulation of potential and elasticity problems. Several validating numerical examples are presented.

Keywords

Boundary elements; hybrid methods; fracture mechanics; Westergaard stress functions; stress intensity factors; plastic zone.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de símbolos

Caracteres latinos:

A	Comprimento do semieixo de uma trinca reta, ponto extremo da elipse
a	Comprimento do semieixo de um elemento de trinca
a_c	Comprimento crítico da trinca
a_1	Comprimento do semieixo do primeiro elemento de trinca
a_{n+1}	Comprimento do semieixo do ultimo elemento de trinca
B	Ponto extremo da elipse
b	Comprimento do entalhe elíptico
b_k , $\{\mathbf{b}\}$	Deslocamentos do sistema interno equivalentes ao campo de deslocamentos referentes às forças de massa
C_{ij}	Constantes arbitrárias do campo de deslocamentos referentes à solução fundamental
C_{ijkl}	Tensor da relação constitutiva
d_j , $\{\mathbf{d}\}$	Deslocamentos nodais do sistema externo
d_k^* , $\{\mathbf{d^*}\}$	Deslocamentos nodais equivalentes do sistema interno
E	Módulo de Young, módulo de elasticidade
E_{kl} , $[\mathbf{E}]$	Projetor ortogonal
f_{ij}	Função adimensional de θ
$F(\theta^*,\lambda)$	Função adimensional de θ^* e λ
$\bar{F}_i$, $\{\bar{F}\}$	Forças de massa prescritas
F_{kl} , $[\mathbf{F}]$	Matriz de flexibilidade do sistema interno
G	Taxa de liberação de energia de deformação
G_c	Taxa crítica de liberação de energia de deformação
H_{kl} , $[\mathbf{H}]$	Matriz de incidência cinemática
i	Constante complexa
J	Integral J

K	Fator de intensidade de tensão
$K_{I,II,III}$	Fator de intensidade de tensão relacionados aos modos I, II e III de fratura
K_t	Fator de concentração de tensões
K_{kl} , **[K]**	Matriz de rigidez do sistema externo
k	Constante de potencial
N_L	Funções de interpolação
p_i , **{p}**	Forças nodais equivalentes
p_i^* , **{p*}**	Forças singulares
p_{ij}^* , **{p*}**	Função de transformação de forças referente à solução fundamental
q_i , **{q}**	Fluxo
R	Raio do circulo
r	Módulo do vetor posição (raio)
t_k , **{t}**	Forças nodais do sistema externo, equivalentes às forças de massa
T_i , **{T}**	Forças de superfície
$\bar{T}_i$, $\{\bar{\mathbf{T}}\}$	Forças de superfície prescritas
T_i^* , **{T*}**	Forças de superfície referentes à solução fundamental
$u^{I,II}$	Deslocamentos segundo o eixo x de coordenadas devido aos modos I e II de trincamento
u_i , **{u}**	Deslocamentos, potenciais
$\bar{u}_i$, $\{\bar{\mathbf{u}}\}$	Deslocamentos prescritos, potenciais prescritos
u_i^* , **{u*}**	Deslocamentos referentes à solução fundamental
u_i^{*n} , $\{\mathbf{u}^{*\mathbf{n}}\}$	Deslocamentos totais referentes às forças de massa
u_i^{*p} , $\{\mathbf{u}^{*\mathbf{p}}\}$	Deslocamentos referentes à solução particular da equação de equilíbrio
u_{ij} , **[u]**	Funções de interpolação de deslocamentos
u_{ij}^* , **[u*]**	Função de transformação de deslocamentos referente à solução fundamental

$U_0(\varepsilon_{ij})$	Densidade de energia interna de deformação
$U_0^c(\sigma_{ij})$	Densidade de energia interna na forma complementar
$U_0^{c*}(\sigma_{ij})$	Densidade de energia interna na forma complementar, referente ao sistema interno
V_{kl} , $\mathbf{[V]}$	Matriz cujas colunas formam a base das forças singulares que correspondem a forças nodais equivalentes nulas
$\mathbf{v}$	Espaço nulo
$v^{I,II}$	Deslocamentos segundo o eixo x de coordenadas devido aos modos I e II de trincamento
$\mathbf{v_0}$	Espaço nulo decorrente da ortogonalidade a deslocamentos de corpo rígido
$\mathbf{v_1}$	Espaços nulos adicionais provenientes de cada par de nós com a mesma coordenada
w	Comprimento da placa
W	Energia de deformação
W_{kl} **, [W]**	Matriz cujas colunas formam a base dos deslocamentos de corpo rígido
x_i , $\mathbf{\{x\}}$	Coordenadas cartesianas

Caracteres gregos:

Δ	Trabalho não recuperável associado à deformação permanente na ponta da trinca
$\mathbf{\Delta_{ij}}$	Delta de Dirac
$\underline{\Phi}$	Funções de tensão de Airy
$\Phi_{I,II}$	Função de tensão de Westergaard (modificada ou generalizada) para os modos I e II de trincamento
$\Phi'_{I,II}$	Derivada da função de tensão de Westergaard (modificada ou generalizada) para os modos I e II de trincamento
$\Phi''_{I,II}$	Segunda derivada da função de tensão de Westergaard para os modos I e II de trincamento
Γ	Contorno do corpo elástico, contorno arbitrário em torno da ponta da trinca

Γ_J	Região do contorno relacionado à Integral J
Γ_u	Região do contorno onde se têm deslocamentos ou potenciais prescritos
Γ_σ	Região do contorno onde se têm forças ou gradientes prescritos
Γ^*	Contorno referente à solução fundamental
Γ_0	Região do contorno correspondente à parte externa da superfície esférica
$\bar{\Gamma}_0$	Região do contorno contida na superfície esférica
Π	Energia potencial total
Π_g	Forma generalizada da energia potencial total
Π_R	Potencial de Hellinger-Heissner
Ω	Domínio do corpo elástico
Ω^*	Domínio referente à solução fundamental
Ω_0	Região onde a força singular é aplicada
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ε_{ij}	Deformações
γ	Trabalho necessário para formar uma nova superfície de trinca
η_j	Cossenos diretores de um elemento de superfície
$\boldsymbol{\lambda}_{ij}$, $\boldsymbol{\lambda}_i$	Multiplicadores de Lagrange
μ	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coeficiente de Poisson
π	Constante
θ	Ângulo do sistema de coordenadas polares
θ_i	Ângulo de rotação da trinca i em relação ao eixo positivo de x
ρ	Raio de curvatura
σ	Tensão normal
σ^∞	Tensão normal aplicada no meio infinito
σ_c	Tensão crítica a partir da qual o crescimento da trinca é instável

σ_n	Tensão normal nominal
σ_{ij}	Tensões normais, tensões
$\sigma_{ij}^{I,II}$	Tensões normais, tensões devido aos modo I e II de trincamento
σ_{ij}^{*}	Tensões referentes à solução fundamental
σ_{ij}^{*n}	Tensões totais referentes às forças de massa
σ_{ij}^{*p}	Tensões referentes à solução particular da equação de equilíbrio
τ	Tensão cisalhante aplicada
τ^{∞}	Tensão cisalhante aplicada no meio infinito
τ_{ij}	Tensões cisalhantes
$\tau_{ij}^{I,II}$	Tensões cisalhantes devido aos modos I e I de trincamento
ξ, η	Coordenadas paramétricas
$\Im(\ )$	Parte imaginária de um número complexo
$\Re(\ )$	Parte real de um número complexo

Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser a vitoriosa.

Albert Einstein