3.0
Modelo Proposto do Projeto de Redes Logísticas

3.1
Formulação do Modelo

Ajustando a função objetivo (16) do modelo proposto por Miranda e Garrido (2004) à nomenclatura proposta por Cordeau, Pasin e Solomon (2006), tem-se a seguinte formulação da função objetivo:

$$TH \cdot \sum_{f \in F} \sum_{w \in W} \left(CPI_w^f \cdot Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{LT_w^f} \cdot DPAD_w^f + CPI_w^f \cdot \frac{Q_w^f}{2} \right) +$$
$$TH \cdot \sum_{f \in F} \sum_{w \in W} \left(\sum_{c \in C} \left(CPI_w^f + \frac{CP_w^f}{Q_w^f} \right) \cdot d_c^f \cdot Y_{wc}^f \right) \qquad (24)$$

Na função objetivo (24), d_c^f representa a demanda média mensal do produto f no cliente c, CP_w^f é o custo fixo de obtenção (ou aquisição) do pedido, IC_w^f o custo de manter uma unidade do produto f no armazém w durante um mês, $Z_{1-\alpha}$ é o valor de z na tabela normal padrão, LT_w^f é o lead-time do produto f a partir de w, $DPAD_w^f$ é o desvio padrão da demanda do produto f em w e Q_w^f é o tamanho do lote econômico no armazém w em relação ao produto f.

O parâmetro TH em (24) representa o fator de atualização monetária utilizado no modelo proposto por Miranda e Garrido (2004), onde:

$$TH = \frac{1}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right) \qquad (25),$$

sendo i a taxa do custo de capital e n o período total da modelagem da rede logística (Gonzalez, 2004). Este trabalho, a taxa que representa o custo de oportunidade em estoques é a taxa Selic, que no caso é de 12,75% ao ano[1], que

[1] Banco Central do Brasil <HTTP://www.bcb.gov.br> Acesso em 13 de fevereiro de 2009.

convertida para uma taxa equivalente mensal fica em 1,005% ao mês (Juer, 1985, p.43). Fazendo n = 12 e substituindo a taxa mensal (i = 0,01005) na equação (25), obtém-se o parâmetro TH = 11,25.

Fazendo uma alusão a equação (17), temos que

$$Q_w^f = \sqrt{\frac{2 \cdot CP_w^f \cdot D_w^f}{IC_w^f}} \qquad (26),$$

onde D_w^f representa a demanda do armazém w pelo produto f. *S*ubstituindo-a em (24) e fazendo os ajustes teremos a função referente aos custos de estoques do modelo proposto.

$$TH \cdot \sum_{f\in F}\sum_{w\in W}\sum_{c\in C}\left(CPI_w^f \cdot d_c^f \cdot Y_{wc}^f\right) +$$
$$TH \cdot \sum_{f\in F}\sum_{w\in W}\left((2D_w^f)^{1/2} \cdot (CP_w^f \cdot IC_w^f)^{1/2} + \left(IC_w^f\right) .Z_{1-\alpha} \cdot (LT_w^f)^{1/2} \cdot (DPAD_w^f) \right) \qquad (27)$$

Adicionando os custos (27) à formulação proposta por Cordeau, Pasin e Solomon (2006), além das restrições (20) e (21) modificadas para a nova nomenclatura, teremos a seguinte formulação para o modelo aqui proposto.

Minimizar:

$$\sum_{o\in O}\left[c_o U_o + \sum_{d\in D}\sum_{m\in M_{od}} c_{od}^m Z_{od}^m\right] + \sum_{k\in K}\sum_{o\in O^k}\left[c_o^k V_o^k + \sum_{d\in D^k}\left[c_{od}^k Y_{od}^k + \sum_{m\in M_{od}^k} c_{od}^{km} X_{od}^{km}\right]\right] +$$
$$TH \cdot \sum_{f\in F}\sum_{w\in W}\sum_{c\in C}\left(CPI_w^f \cdot d_c^f \cdot Y_{wc}^f\right) +$$
$$TH \cdot \sum_{f\in F}\sum_{w\in W}\left((2D_w^f)^{1/2} \cdot (CP_w^f \cdot IC_w^f)^{1/2} + \left(IC_w^f\right) .Z_{1-\alpha} \cdot (LT_w^f)^{1/2} \cdot (DPAD_w^f) \right) \qquad (28)$$

Sujeito a:

Restrições (2) – (13)

$$\frac{1}{n}\sum_{c}\sum_{m} X_{wc}^{fm} - D_w^f = 0 \qquad f \in F, w\in W \qquad (29)$$

$$\left(\sum_{c\in C} v_c^f \cdot Y_{wc}^f\right)^{1/2} = DPAD_w^f \qquad f \in F, w\in W \qquad (30)$$

$$\sum_{c\in C} d_c^f \cdot Y_{wc}^f = D_w^f \qquad f \in F, w\in W \qquad (31)$$

$$D_w^f \in Z \qquad f \in F, c \in C \tag{32}$$

$$DPAD_w^f \geq 0 \qquad f \in F, c \in C \tag{33}$$

Algumas melhorias podem ser sugeridas na formulação acima. A primeira é a possibilidade de o modelo gerar resultados a partir das classificações diferentes dos produtos. Isto pode ser obtido incluindo na modelagem a especificação do termo $Z_{1-\alpha}$ que será substituído por $Z_{w_{1-\alpha}}^f$, que representa o nível de serviço associado ao produto *f*, conforme sua classificação ABC no armazém *w*.

Uma segunda melhoria é a redução do número de variáveis que podem ser obtidas pela substituição das equações (29), (30) e (31) na penúltima e na última parcela da expressão (28), eliminando-se assim as variáveis D_w^f (quantidade demandada do produto *f* em cada armazém *f*), $DPAD_w^f$ (desvio padrão da demanda do produto *f* em cada armazém) e o parâmetro d_c^f do modelo. Com isso, eliminamos quatro restrições, entre elas a restrição não-linear (30) do problema. Portanto chega-se a formulação final do modelo aqui proposto:

Minimizar

$$\sum_{o \in O}\left[c_o U_o + \sum_{d \in D}\sum_{m \in M_{od}} c_{od}^m Z_{od}^m\right] + \sum_{k \in K}\sum_{o \in O^k}\left[c_o^k V_o^k + \sum_{d \in D^k}\left[c_{od}^k Y_{od}^k + \sum_{m \in M_{od}^k} c_{od}^{km} X_{od}^{km}\right]\right] +$$

$$TH \cdot \sum_{f \in F}\sum_{w \in W}\left(CPI_w^f \cdot \frac{1}{n}\sum_{c \in C}\sum_{m \in M} X_{wc}^{fm}\right) + \tag{34}$$

$$TH \cdot \sum_{f \in F}\sum_{w \in W}\left(\left(2 * CP_w^f \cdot IC_w^f * \frac{1}{n}\sum_{c \in C}\sum_{m \in M} X_{wc}^{fm}\right)^{1/2} + \left(IC_w^f\right) . Z_{w_{1-\alpha}}^f \cdot (LT_w^f)^{1/2} \cdot \left(\sum_{c \in C} v_c^f \cdot Y_{wc}^f\right)^{1/2}\right)$$

Sujeito a:

restrições (2) – (13)

$$\sum_{w \in W} U_w \leq N_1 \tag{35}$$

$$\sum_{p \in P} U_p \leq N_2 \tag{36}$$

$$\sum_{w \in W} Y_{wc}^f = 1 \qquad f \in F, c \in C \tag{37}$$

A função objetivo (34) é a soma de todos os custos fixos e variáveis relacionados à localização, movimentação dos produtos, bem como os relacionados aos estoques dos armazéns potencias da rede logística. Para complementar a modelagem com a incorporação de decisão de estoques, é adicionada mais três restrições. As restrições (35) e (36) limitam o número de plantas e armazéns abertos na cadeia de suprimentos por meio dos parâmetros a serem definidos N_1 e N_2, enquanto que a restrição (37) garante o fornecimento único dos produtos que fluem entre os CDs e os clientes, ou seja, os clientes só podem ser abastecidos de um produto específico por um único CD.

A nomenclatura do modelo acima é idêntica a usada no modelo proposto por Cordeau, Pasin e Solomon (2006), apresentada na Tabela 3. Os novos parâmetros são descritos na Tabela 5.

Uma situação especial ocorre quando a ocupação dos itens nos armazéns é dada em termo de SKU (Stock Keeping Unit) e ainda, dependendo do produto ele pode ser comercializado em quantidade fechada ou de forma individual. Neste caso, o modelo usaria o parâmetro u_o^k para converter em SKU os itens que só podem ser vendidos em SKU, como, por exemplo, em caixas com vinte unidades. Isto acaba refletindo no espaço de ocupação dos meios de transporte, pois em vez de representar os itens somente de forma individual, temos que representar também aqueles produtos que são vendidos em *SKU*. No modelo proposto esse fator de equivalência é representado pelo parâmetro g^{km} que é usado na restrição (8), que considera o fluxo individual de produtos. Para permitir que a partir do armazém os itens sejam armazenados em SKU e com uma medida de ocupação nos meios de transportes ofertados (volume, peso e etc.), é necessário modificar a restrição (8) somente para o fluxo entre os armazéns e os clientes atendidos (38), introduzindo uma nova restrição ao modelo proposto.

$$\sum_{f \in F} u_w^f \cdot g^{fm} \cdot X_{wc}^{fm} - g_{wc}^m Z_{wc}^m \leq 0 \qquad w \in W; c \in C; m \in M_{wc} \qquad (38)$$

O modelo proposto neste trabalho diferencia-se do proposto por Miranda e Garrido (2004) em três aspectos:

1. A demanda média dos clientes é mensal, sendo necessário converter o tempo de ressuprimento (lead-time) para a mesma unidade de tempo;

2. O parâmetro RC_i, que na formulação original[2] significa o custo de transporte da planta para o armazém, foi substituído pelo parâmetro CPI_w^f, que é o custo de manuseio do produto f no armazém w.

Tabela 5 – Notação dos parâmetros do modelo proposto

PARÂMETROS	
CPI_w^f	Custo de manuseio do produto f no CD w (por item)
CP_w^f	Custo Fixo de Obtenção (do pedido)
IC_w^f	Custo de manutenção de estoques (em função do valor do produto em estoque)
v_c^f	Variância da demanda do produto f no cliente c durante o período considerado
$Z_{w_{1-\alpha}}^f$	Valor de Z na tabela normal padrão do produto f alocado no armazém w
d_c^f	Demanda média (anual, mensal, etc...) do cliente c pelo produto f

3.2
Algoritmo de Resolução

Segundo Ballou (2001) *apud* Croxton e Zinn (2005), a carência de problemas que tratam de redes logísticas com custos de localização atrelados simultaneamente a custos de transportes e de estoques deve-se ao uso da programação linear inteira mista, a qual pré-supõe uma relação linear entre os custos, quando na realidade a relação entre o número de armazéns e estoques é não linear. Uma aproximação linear por partes tem sido considerada para atenuar este problema. Entretanto, o tratamento tem convergido para uma função discreta. Esta aproximação tem um pequeno impacto no tamanho do problema comparado a modelagem por uma função linear por partes porque requer poucas restrições e variáveis.

Além desta abordagem, existem formas mais específicas de resolver problemas de programação não linear inteira mista (MINLP). Tais procedimentos incluem o método de decomposição geral de Benders proposto por Geoffrion e Graves (1974), ou o método branch-and-bound com relaxamento contínuo da integralidade do MINLP, transformando-o em subproblemas de programação não linear (NLP) com solução encontrada através de cada nó da árvore enumerada (Li

[2] Ibid

e Sun, 2006). Outro método muito utilizado é separar a não linearidade do modelo inteiro misto a fim de que o problema primal possa ser relativamente e facilmente reduzido a um subproblema que possa ser resolvido por um método de solução conhecido.

Com relação às diferentes metodologias de resolução de problemas de redes logísticas, deve-se enfatizar o trabalho de Melo, Nickel e Saldanha (2006), que catalogou as publicações nos últimos dez anos e consolidou os tipos de metodologia de resolução para os problemas intitulados de projeto de redes de cadeias de suprimento conforme a abordagem utilizada. Os autores dividiram as metodologias em quatro categorias agrupadas em duas classes. A primeira classe representa os softwares com propostas generalistas (comerciais ou não). Neste caso a categoria *Resolução Geral, Solução Exata* refere-se ao uso de softwares de programação matemática para resolver problemas que convergem para o valor ótimo ou a solução é obtida dentro de um intervalo pré-definido refletindo a aceitação do tomador de decisão. Cordeau et al. (2006) *apud* Melo, Nickel e Saldanha da Gama (2008) consideram que para manter a margem de erro em 1%, o esforço (tempo computacional) em aplicações reais tendem a ficar inviáveis, justificando o uso de outras metodologias. Neste caso é interessante usar as metodologias da categoria *Resolução Geral, Solução Heurística*.

A classe dedicada especialmente aos algoritmos desenvolvidos para problemas específicos estão divididos em duas categorias. *Algoritmo Específico, Solução Exata* que englobam técnicas específicas como branch-and-bound, geração de colunas e métodos de decomposição. Dentre estes métodos, os algoritmos branch-and-bound têm sido combinados com relaxação Lagrangeana ou procedimentos heurísticos para obter os limites inferiores e superiores. Na última categoria, *Algoritmos Específicos, Solução Heurística*, constam os métodos de relaxação Lagrangeana e de programação linear baseadas em heurísticas e metaheurísticas, que estão entre as técnicas mais populares. Essa categoria é mais recomendada a problemas que possuem um grande número de variáveis discretas, e que ocorrem com freqüência em problemas de decisões estratégicas, onde são comparativamente mais complexos e realísticos. Por isso é aconselhado que sejam resolvidos por meio de métodos heurísticos. A participação das categorias descritas anteriormente em relação aos trabalhos publicados, segundo Melo, Nickel e Saldanha (2006), bem como outros trabalhos[3] referenciados, podem ser visualizados na figura 7.

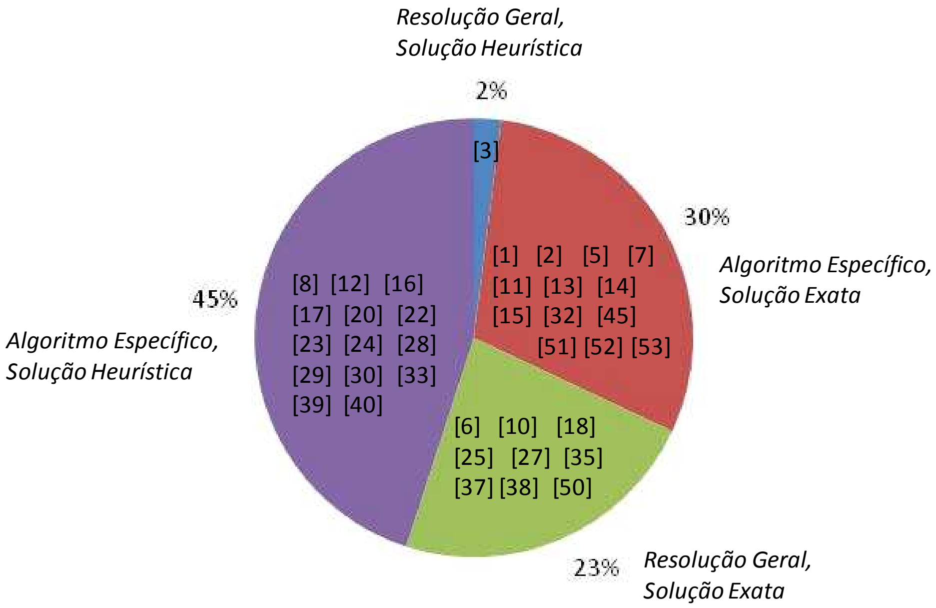

Figura 7 – Metodologias para resolver problemas de projeto de redes logísticas. FONTE: Adaptado de Melo, Nickel e Saldanha, p. 20, 2006.

Neste trabalho, foi considerado os problemas MINLP como pertencentes a classe descrita a seguir pelo problema (P) e as metodologias da categoria *Algoritmos Específicos, Solução Exata*.

$$(P)\quad \begin{aligned} &\min\ f(x) + c^T y \\ &g_i(x) + b_i^T y \leq 0\ ,\ i = 1, \ldots, q, \\ &x \in X \subseteq R_+^n\ ,\ y \in Y \subseteq Z^m . \end{aligned}$$

Em geral essas metodologias resolvem o problema original através da resolução de uma seqüência de subproblemas mais simples. As estratégias básicas para derivar subproblemas podem ser sintetizadas da seguinte forma.

- Relaxando a restrição de integralidade em y resulta em um subproblema de programação não linear de variáveis contínuas (x,y), que proporciona um limite inferior para o MINLP;

- Fixando um valor para a variável inteira y resulta em um subproblema *NLP* de variável contínua x, que proporciona um limite superior para o MINLP;

---

[3] ANEXO 1

- Construindo estimativas inferiores lineares de *f(x)’* e $g_i(x)$’ em certos pontos conhecidos resulta em um programa linear inteiro misto e convexo, que proporciona um limite inferior para o MINLP.

Dentre os algoritmos baseados nas estratégias de resolução acima, estão o método branch-and-bound, o método de decomposição generalizada de Benders (GDB), e o algoritmo “Outer-Approximation” (OA).

Em linhas gerais, o método branch-and-bound para o problema (*P*) é similar ao branch-and-bound aplicado a problemas de programação linear inteira mista (MILP). Ocorre um processo enumerativo implícito, que sistematicamente descarta os pontos não promissores que não atingem o ótimo local para o problema (*P*). Relaxando a integralidade da variável inteira *y* e impondo um limite inferior (*LB*) e superior (*UB*) para cada ramificação são gerados subproblemas do tipo *NLP*. A solução viável de cada nó obtido é memorizada, e aquela que atingir o valor mínimo na função objetivo do problema (*P*) será a solução ótima do mesmo.

O método de decomposição generalizada de Benders, Geoffrion (1972), *apud* Duran e Grossmann (1986), possui os mesmos procedimentos matemáticos do “Outer-Approximation” (OA) a ser apresentado na próxima seção. A principal diferença está em como o OA define o programa mestre. Enquanto o algoritmo OA usa a informação do ótimo primal dos subproblemas para gerar o programa mestre linear inteiro misto, a decomposição generalizada de Benders (GDB) usa a informação do ótimo dual, tal que o programa mestre corresponde inicialmente a um programa linear inteiro, que segundo Biegler e Grossmann (2004) é pobremente restringido. Uma discussão mais detalhada entre o algoritmo OA e a GDB pode ser lido em Duran (1984) *apud* Duran e Grossmann (1986).

Comparando o desempenho destes três métodos, pode-se averiguar um desempenho superior do método “Outer-Approximation” em relação aos outros como descrito por Duran e Grossmann (1986). Os algoritmos foram testados para diferentes formulações matemáticas, onde foram analisados alguns indicadores, como tempo de processamento, número de subproblemas de programação não linear (NLP) e linear inteiro misto (Programa Mestre) e o número de nós necessários para encontrar a solução ótima. Para se ter uma idéia, o algoritmo OA achou a solução ótima sempre em um número de iterações substancialmente menor do que o GDB (rendimento em torno de 60% menor do que o GDB), embora o esforço para resolver cada programa mestre relaxado no algoritmo OA requer um esforço computacional maior do que o programa mestre no GDB. O tempo de computação total (resolução dos subproblemas não-lineares e do programa Mestre) foi comparado nos dois métodos. Isto ocorreu porque o número de subproblemas NLP gerados é inferior aos dos outros métodos. Isto levou a uma economia do tempo total de computação em termos gerais de 40% em média com relação ao GDB e 74% em média em relação ao branch-and-bound.

Como exemplo de comparação, é apresentado o problema E_1 e a Tabela 6 com os indicadores de desempenho dos três métodos supracitados (Duran e Grossmann, pp. 324 e 334, 1986).

Seja E_1 formulado como:

$$(E_1)\quad \begin{aligned}
&\text{minimizar } z = 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 10x_1 - 7x_6 - 18\ln(x_2+1) - 19.2\ln(x_1 - x_2 + 1) + 10\\
&s.a.\quad 0{,}8\ln(x_2+1) + 0{,}96\ln(x_1 - x_2 + 1) - 0{,}8x_6 \geq 0\\
&x_2 - x_1 \leq 0\\
&x_2 - Uy_1 \leq 0\\
&x_1 - x_2 - Uy_2 \leq 0\\
&\ln(x_2+1) + 1{,}2\ln(x_1 - x_2 + 1) - x_6 - Uy_3 \leq 0\\
&y_1 + y_2 \leq 0\\
&y_j \in \{0{,}1\} \text{ para } y = 1{,}2{,}3;\ a \leq x \leq b,\ x = (x_1 : j = 1{,}2{,}6) \in R^2\\
&a = (0{,}0{,}0),\ b = (2{,}2{,}1),\ U = 2
\end{aligned}$$

Faça $y^0 = (1{,}0{,}1)$ (valor inicial de y).

A solução ótima $y^* = (0{,}1{,}0),\ x^* = (x^1, x^2, x^6) = (1{,}30097,\ 0,\ 1),\ z^* = 6{,}00972.$

Tabela 6 – Comparações entre metodologias para o exemplo numérico E_1

	Branch e bound (depth first)	Decomposição Generalizada de Benders	Outer-Approximation Algorithm
Iterações	8*	4	2
Tempo de CPU (seg)			
Subproblemas NLP	21,2	7,7	3,9
Problemas Master		4,9	4,3
Total	21,2	12,6	8,2
Iteração econtrada a solução ótima	7*	3	1

Fonte: Duran e Grossmann, pp. 324 e 334, 1986. * Número de nós enumerados.

Um dos métodos que se enquadram nas estratégias descritas para o problema (*P*) na seção anterior é a metodologia de solução proposta por Duran e Grossmann (1986) chamada "Outer-Approximation Algorithm", que consiste em resolver uma seqüência alternada finita de subproblemas de programação não-linear e versões relaxadas de um programa mestre linear inteiro misto. A linearidade das variáveis inteiras e a convexidade das funções não-lineares envolvendo variáveis contínuas são os principais requisitos para a obtenção da solução ótima global. Para a garantia de sua convergência, o algoritmo segue as seguintes etapas:

Etapa 1. O modelo é resolvido como um problema de programação não linear com todas as variáveis inteiras relaxadas como variáveis contínuas entre seus limites estabelecidos.

Etapa 2. A linearização é realizada em torno da solução ótima do subproblema definido anteriormente e restrições são adicionadas às restrições lineares presentes. Este novo modelo linear é chamado de Modelo MIP Mestre.

Etapa 3. O Modelo MIP Mestre é resolvido como um problema de programação linear inteiro misto, utilizando, no caso o método branch-and-bound.

Etapa 4. A parte inteira da solução ótima é temporariamente fixada, e o modelo MINLP original com as variáveis inteiras fixadas é resolvido como um submodelo não linear.

Etapa 5. Uma linearização em torno da solução ótima é construída e novas restrições lineares são adicionadas ao programa MIP mestre. Para prevenir a ciclagem, uma ou mais restrições são adicionadas para encerrar previamente a solução inteira do modelo mestre.

O processo continua até que o limite inferior encontrado através da resolução do problema mestre seja maior ou igual ao limite superior encontrado pela resolução do problema não linear relaxado.

Os passos do algoritmo "Outer-Approximation", assim como sua aplicação em um exemplo numérico estão descritos no ANEXO 2.