Projeto de Graduação

DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA
ELÉTRICA

29/06/2016

ESTIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO NEUTRA AO RISCO A PARTIR DE DADOS DE MERCADO

Rodrigo de Carvalho Amatruda Haddad Caleiro

www.ele.puc-rio.br

Projeto de Graduação

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

ESTIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO NEUTRA AO RISCO A PARTIR DE DADOS DE MERCADO

Aluno(s): Rodrigo de C. A. H. Caleiro

Orientador(es): Álvaro Veiga

Co-orientador(es): Manoel Pereira

Trabalho apresentado com requisito parcial à conclusão do curso de Engenharia Elétrica na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais pelo apoio incondicional e por me incentivar a estudar e buscar sempre o melhor, a vida inteira.

Gostaria de agradecer também a Professora Ana Pavani pelo seu eterno empenho em tornar o estudo da engenharia elétrica melhor e mais abrangente, e também os meus orientadores Álvaro Veiga e Manoel Pereira por me mostrarem esse tema que tanto me ensinou.

Resumo

Esse trabalho tem o objetivo de calcular os preços teóricos para os derivativos negociados no mercado financeiro brasileiro utilizando a transformada de Esscher empírica.

Para verificar a eficácia do método, foram utilizados dados reais de mercado para apreçar opções sobre o índice Ibovespa e opções sobre ações preferenciais da Petrobras. Além disso, os preços teóricos foram comparados com os preços calculados pela equação de Black e Scholes, referência mundial na precificação de opções, e com preços de opções obtidos na bolsa de mercadorias e futuros brasileira, a BM&F Bovespa.

Como motivação para o trabalho é apresentado uma pequena explicação sobre opções financeiras e como elas são extremamente úteis tanto para grandes indústrias como para empresas de gestão de recursos.

Palavras-chave: Opções; Finanças; Transformada de Esscher Empírica;

Estimation of Risk Neutral Distribution with Real Market Data

Abstract

This work introduces a way to calculate theoretical prices for derivatives that are negociated in the Brazilian Financial Market using an empirical version of the Esscher transform.

In order to verify the efficacy of the method, real market data were used to value options over the Ibovespa Index and the Petrobras preferential stock. Moreover, the prices obtained with the Esscher model were compared with theoretical prices calculated with the Black & Scholes equation, the world famous derivative pricing formula, and with real options price obtained in the Brazilian futures market BMF&Bovespa.

As motivation, the work introduces how financial options work and how they are extremely useful for asset management firms as well as industries.

Keywords: Options; Finance; Empirical Esscher transform;

Sumário

1. Introdução – Opções

Opções são derivativos financeiros amplamente utilizados por empresas para fins de *hedge* (proteção contra movimentos de mercado) e por especuladores para adquirir exposição a certo ativo. Por serem ativos não lineares, seu apreçamento envolve um pagamento chamado de "prêmio" na data inicial do contrato. Esse prêmio é pago pelo *adquirente* da opção que tem o direito de exercer a mesma se for favorável a ele. O *lançador* da opção (e recebedor do prêmio) fica "*vendido*" no ativo e tem a obrigação de executar a vontade da sua contraparte no contrato.

Os dois tipos de opções financeiras mais utilizadas são as de Compra (*Calls*) e as de Venda (*Puts*). As opções de compra dão ao seu comprador o direito de comprar certo ativo (ativo subjacente da opção) por um preço pré-definido em um período de tempo especificado pelo contrato. Seguindo a mesma lógica, uma opção de venda dá ao seu comprador o direito de vender o ativo subjacente para a sua contraparte. Quanto ao estilo da opção, ela pode ser Europeia, se o seu exercício for só na data de vencimento ou Americana se ela permitir exercício em qualquer momento antes do vencimento.

Dessa forma, no vencimento, o *pay-off* de uma opção de compra pode ser escrito como $max(S_T - K, 0)$ enquanto para uma opção de venda $max(K - S_T, 0)$.

O preço de uma opção é função de seis variáveis:

I – O preço do ativo subjacente (*S*)

II – O preço de exercício da opção ou *strike*.

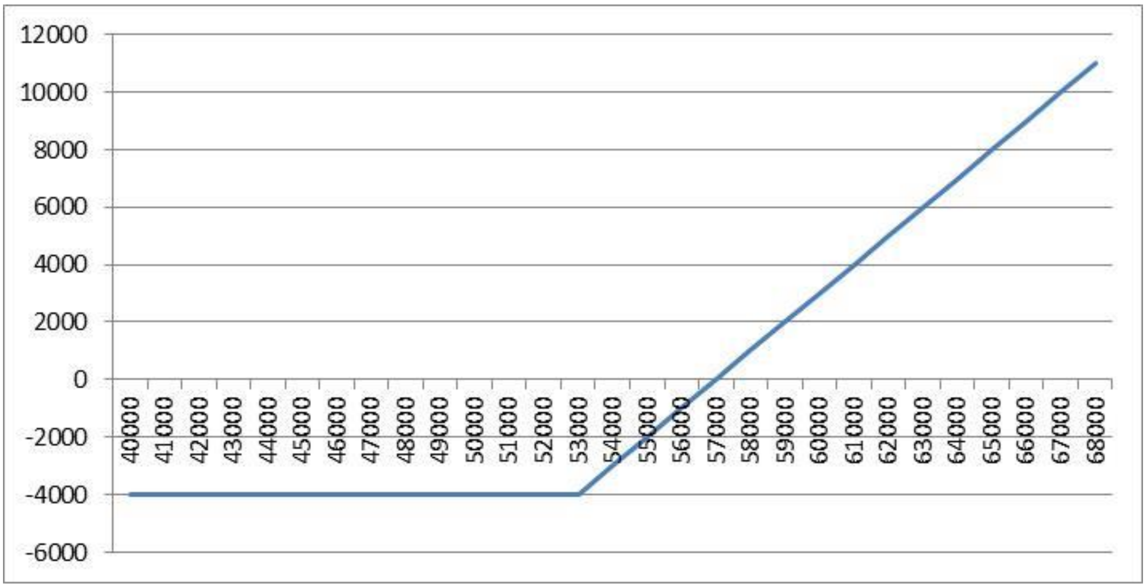
III – O tempo até a data de vencimento.

IV – A taxa de juros livre de risco.

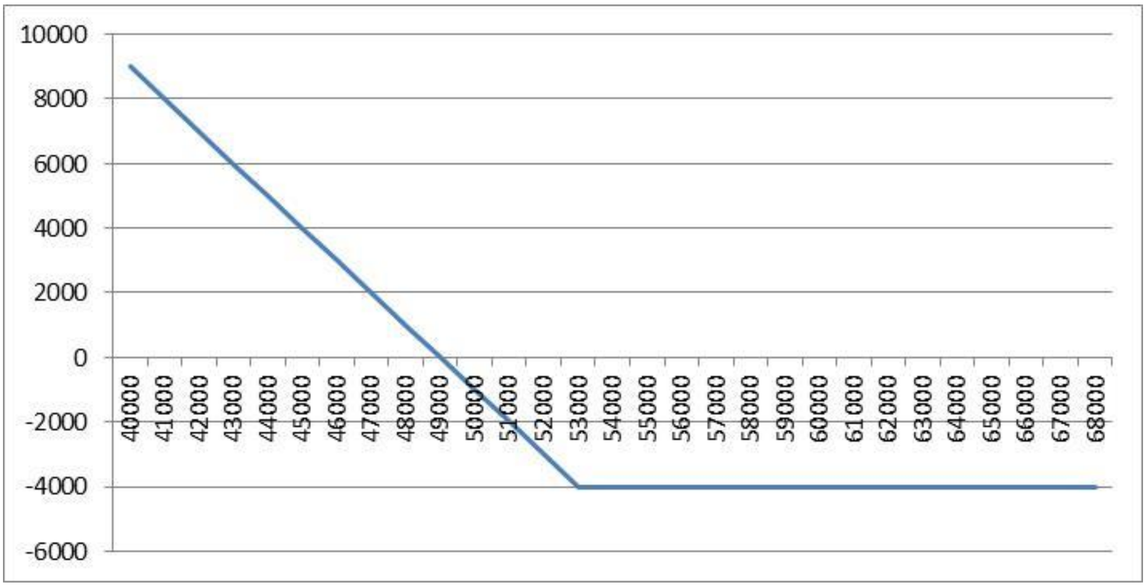
V – A volatilidade do preço do ativo subjacente.

VI –O pagamento de dividendos durante a vida da opção.

Para ilustrar, abaixo estão dois gráficos de Perdas e Lucros, conhecido como *Pay-Off* ou P&L (eixo Y) de uma Call e uma Put de Ibovespa com Strike de 53000. A cotação do ativo subjacente da opção, o Ibovespa, está no eixo X. Os gráficos representam o ganho do investidor no dia do vencimento do contrato. Pode-se ver também que o premio pago por essa opção é de R$4000.



Pay-Off de uma Call



Pay-Off de uma Put

Seguindo as terminologias do Mercado, uma *Call* com preço atual S_0 > K está na área de potencial exercício, ou seja, está no dinheiro” (*In the Money)*. Uma opção com S_0 = K está no dinheiro (*At the Money)*, enquanto uma opção de compra com S_0 < K está fora do dinheiro (*Out of the Money)*. O inverso é válido para as *Puts*.

Seguindo essa terminologia de exercício, podemos então classificar as opções em *Moneyness*, ou seja, quão no dinheiro a opção está. Definimos *Moneyness* como S_0/K.

2. Transformada de Esscher Empírica

Em linhas gerais, a transformada de Esscher provoca uma deformação em uma distribuição de probabilidade proporcional ao valor de seu parâmetro. Ou seja, a partir da distribuição histórica dos preços do ativo subjacente, sob a expectativa dos agentes do mercado, o parâmetro de Esscher irá provocar uma deformação na distribuição histórica para torná-la neutra ao risco. Assim, essa ultima pode ser utilizada para o apreçamento da opção.

O apreçamento neutro ao risco parte do pressuposto de que os participantes de mercado são indiferentes ao risco, o que permite descontar qualquer ativo pela taxa livre de risco, ou taxa básica da economia. Esta característica destoa do mundo real onde os *players* exigem um retorno maior do que essa taxa, o chamado prêmio pelo risco do ativo.

Para uma opção de compra, podemos calcular o valor justo de seu prêmio, como apresentada na referência [2], pela seguinte fórmula:

$$C(S,T) = e^{-rT}\left(\sum_{j=1}^{n}(S_T - K)^{+}\frac{e^{y_j\theta}}{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j\theta}}\right) \qquad \text{[Eq 1]}$$

Onde S_T é a cotação do ativo subjacente na data de vencimento, K é o *strike*, r é a taxa livre de risco e Té o prazo da opção. O fator $\frac{e^{y_j\theta}}{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j\theta}}$ representa a probabilidade neutra ao risco onde θ é o parametro de Esscher e y_j representa um retorno possível do ativo subjacente em um cenário j dentre um total de n possíveis cenários.

Para encontrar o parâmetro Esscher, devemos resolver a equação que garante que os preços sejam um processo Martingal, proposta no artigo referência [2]:

$$\theta^{*} = \arg_{\theta}\left\{S_0 = e^{-rT}\sum_{j=1}^{N} S_T \frac{e^{y_j\theta}}{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j\theta}}\right\}. \qquad \text{[Eq2]}$$

Um processo estocástico é considerado Martingal quando ele não apresenta tendências de crescimento ou de queda e a sua melhor previsão para o futuro é o seu valor atual, $S_0 = E^{Q}\left[e^{-rt}S_T\right]$. No apreçamento neutro ao risco, as probabilidades neutras ao risco são escolhidas de forma que os preços descontados sejam um Martingal. Caso reescreva a equação 2 usando $S_{T,j} = S_0 e^{y_j}$, temos:

$$\theta^{*} = \arg_{\theta}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j(\theta+1)}}{\sum_{j=1}^{n} e^{y_j\theta}} = e^{r(T-t)}\right\}. \qquad \text{[Eq 3]}$$

Em suma, podemos obter o parâmetro de Esscher teórico utilizando as equações 2 ou 3 e calcular o prêmio de uma opção de compra utilizando a equação 1.

Ao aplicar a Transformada Empírica de Esscher (EET) simplesmente nos transferimos do mundo real para o mundo em que os participantes são indiferentes ao risco.

3. Metodologia

a. Ativos Escolhidos:

Foram escolhidos para o teste do modelo dois ativos com opções negociadas no mercado financeiro. O primeiro foi o Ibovespa, o índice de ações da Bolsa de Valores de São Paulo. O índice é composto por ações de 59 empresas e pode ser visto como um indicador macroeconômico da conjuntura do país. O segundo ativo escolhido foi a ação preferencial da Petrobras, a PETR4. O motivo dessa escolha se dá pelo fato de que as opções de PETR4 são as de maior liquidez do mercado.

b. Construção do Modelo:

Foi construída uma base de dados no SQL com cotações do ativo subjacente, prêmios de opções negociadas e taxas de juros diárias para diferentes vencimentos. A simulação do modelo foi montada em Python. Partindo da hipótese de que qualquer retorno histórico possa se repetir no futuro, foi utilizado o método *Bootstrap* para descrever a trajetória do ativo subjacente. Esse método consiste numa amostragem com reposição sobre a distribuição histórica dos retornos. Para uma melhor convergência foram criados 50.000 cenários onde cada um representa um possível caminho para o subjacente.

Para descontar o premio da opção foi utilizada como taxa de juros livre de risco a taxa de Depósitos Interfinanceiros (DI) calculado diariamente para a data de vencimento da opção e obtida a partir da curva de juros interpolada dos contratos DI futuro negociados na BMF.

O parâmetro Esscher foi calculado pelo método da Bisseção usando a Equação 3. Com esse valor, foi obtido o preço de uma opção com *strike* K a partir da Equação 1. Esse preço obtido com a transformada de Esscher foi salvo em uma tabela no SQL, para posterior comparação.

Utilizando o resultado encontrado no *paper* referência [2], o *Bootstrap* foi substituído pelo Movimento Geométrico Browniano. Ao utilizar esse processo estocástico junto da transformada de Esscher obteve-se o preço pelo Modelo de *Black & Scholes*.

4. Resultados

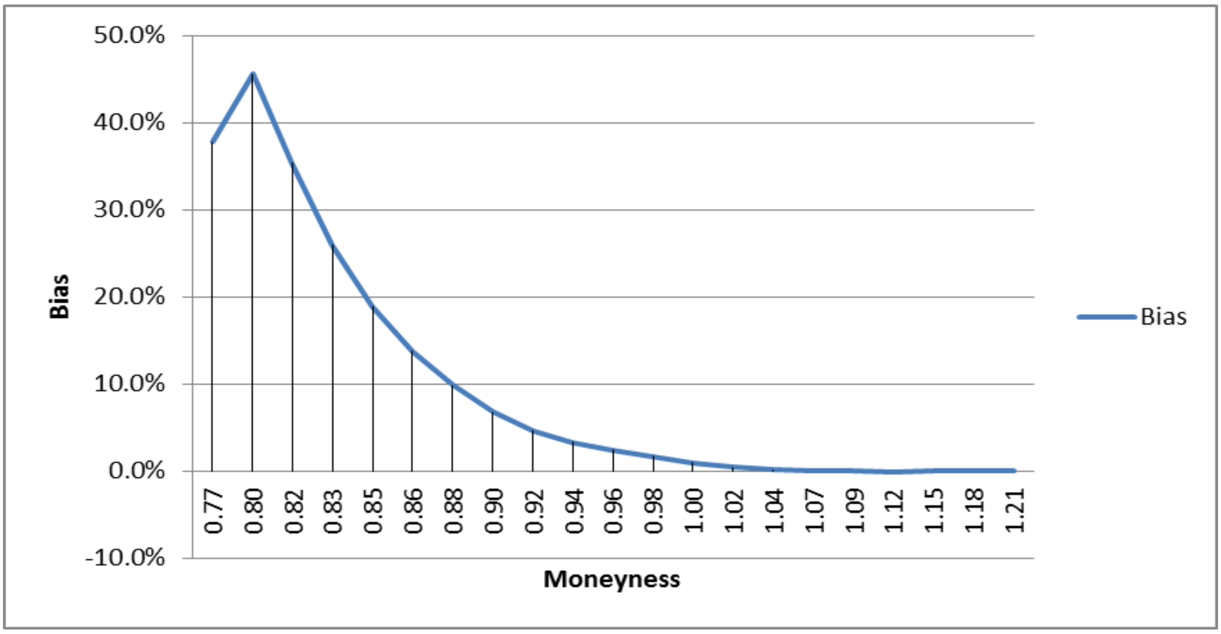
a. O modelo de Black & Scholes e o EET

Como demonstrado na referência [2], o modelo de *Black & Scholes* (BS) pode ser obtido a partir da transformada de Esscher se for utilizado um Movimento Geométrico Browniano (MGB) para descrever os possíveis caminhos do preço do ativo subjacente. O MGB é um processo estocástico que possui um *drift* μ e uma taxa de variância constante da forma:

$$dr = \mu\, dt + \sigma\, dz$$

Onde z é um processo de Wiener com valor esperado igual a zero e variância igual a 1, e r é o retorno do ativo subjacente.

No gráfico abaixo, com valores referentes a um vencimento em 30 dias, é mostrada a diferença percentual entre o modelo de BS e o EET calculado com o *bootstrap*. Podemos ver que a diferença tende a valores próximos de zero para uma *Moneyness* maior que 0.94. E, em geral, o Prêmio calculado pelo Esscher é maior que o calculado pelo Black e Scholes.



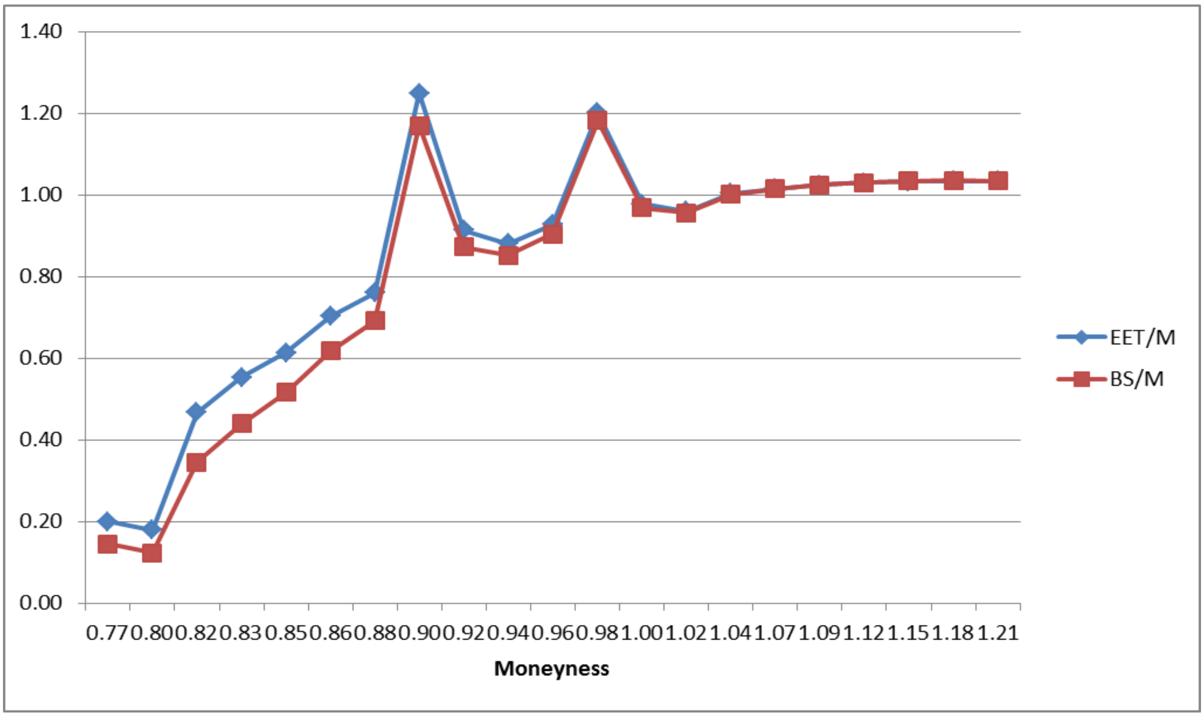
Diferença percentual entre o BS e o EET (Bias) x Moneyness

Na tabela abaixo podemos ver como essa diferença varia de acordo com o prazo:

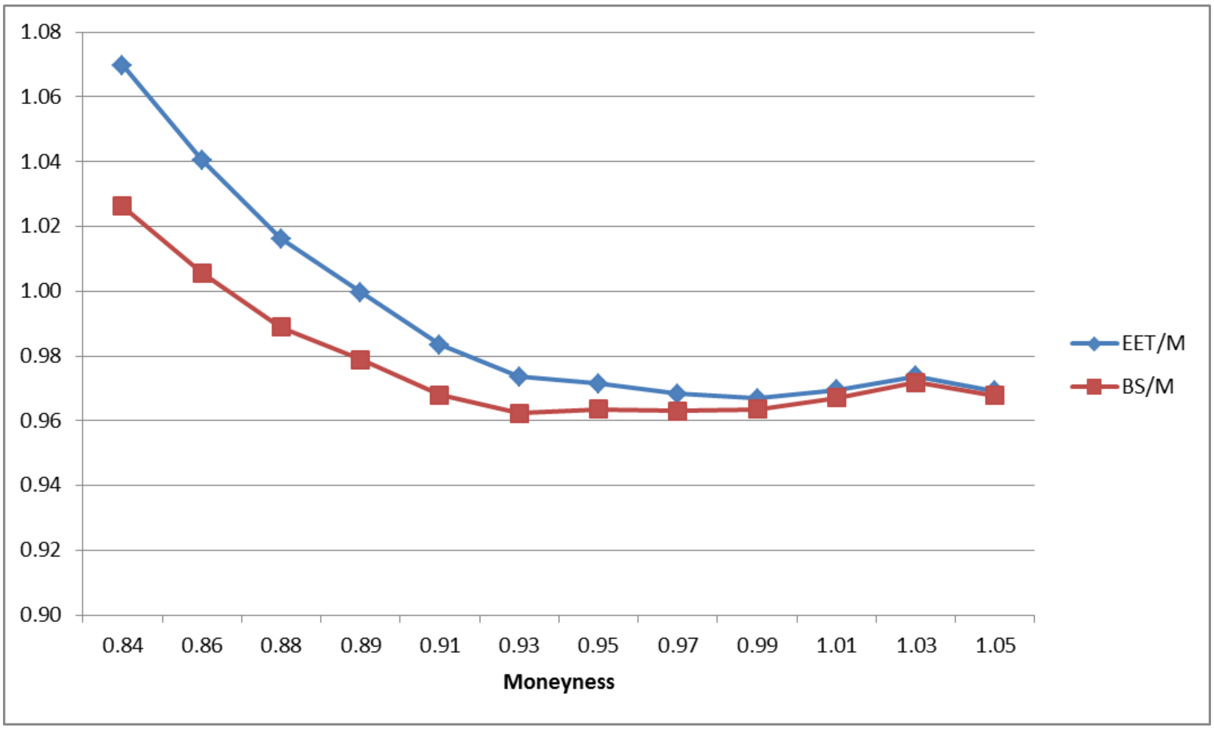
	Time to Expiration (days)		
Moneyness	**30**	**90**	**120**
Deep-out-of-the-money (0.90)	6.749%	1.5979%	1.441%
Out-of-the-money (0.97)	1.693%	0.5486%	0.605%
At-the-money (1.00)	0.937%	0.2593%	0.475%
In-the-money (1.03)	0.186%	0.1964%	0.229%
Deep-in-the-money (1.125)	-0.030%	0.0395%	0.091%

b. Opções de Ibovespa:

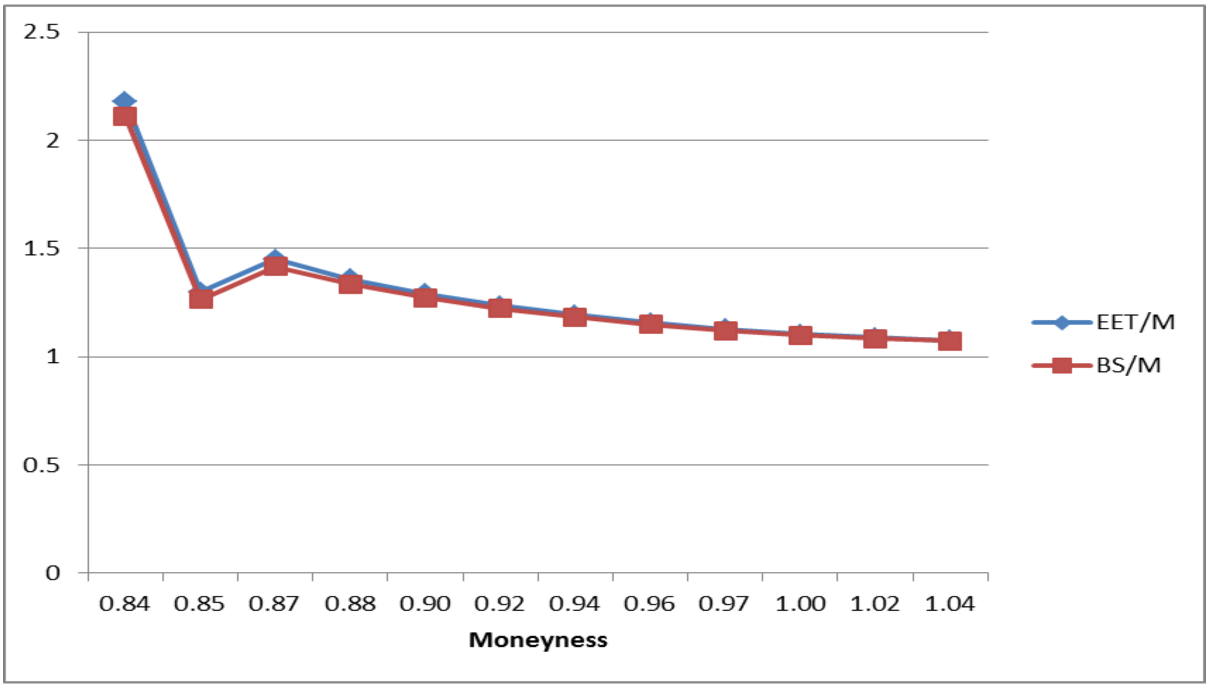
Compara-se a seguir com o mercado os preços obtidos pelos dois modelos, *Black & Scholes* (BS) e Esscher Empírico (EET), para diferentes maturidades:



Diferença entre EET e BS para maturidade em 30 dias



Diferença entre EET e BS para maturidade em 90 dias

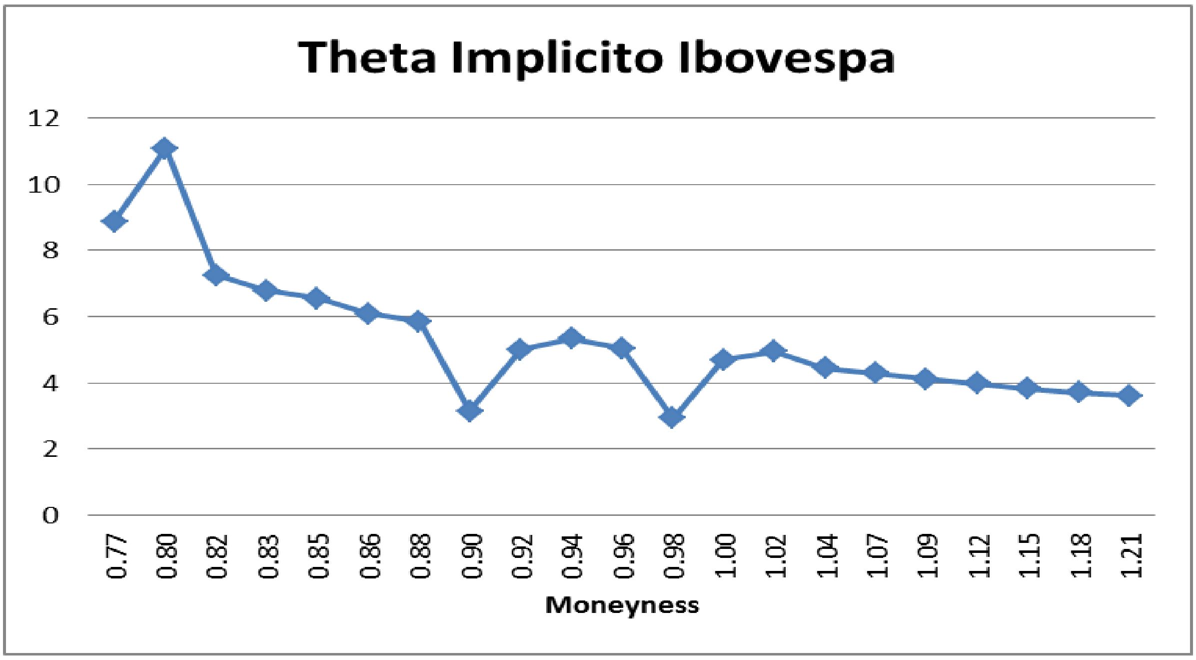


Diferença entre EET e BS para maturidade em 120 dias

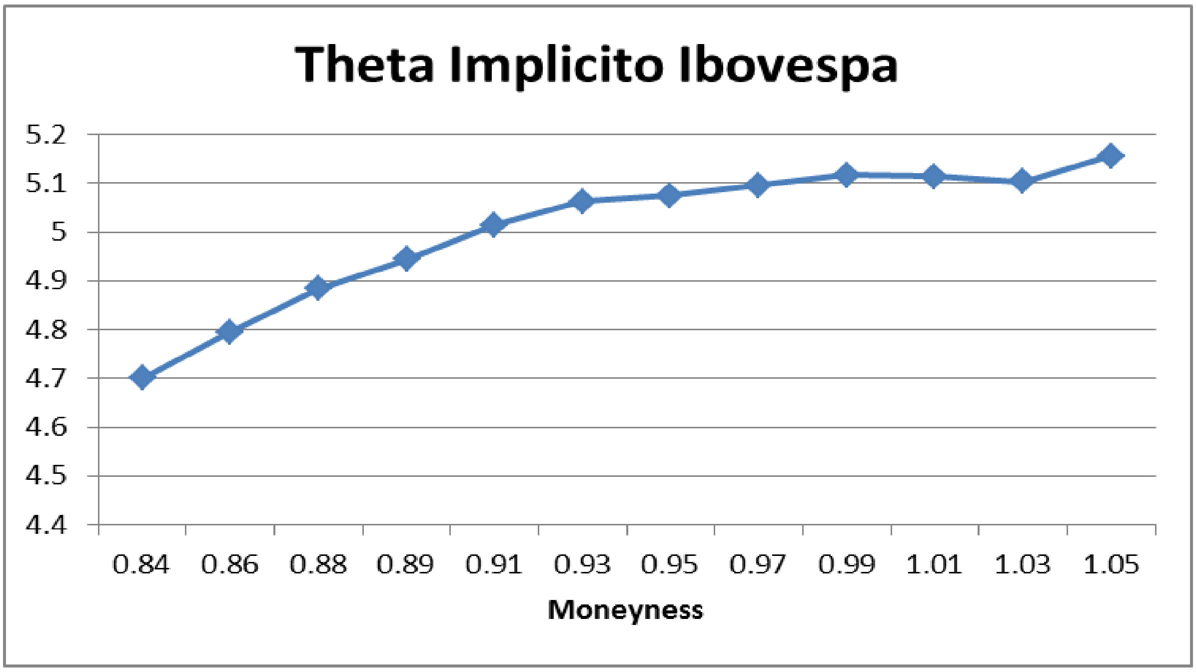
É possível observar a convergência existente entre os prêmios com um aumento de *Moneyness.* Porém, essa convergência não é 100% certa. Ela pode não acontecer em cenários de liquidez baixa, como podemos ver no gráfico que mostra a comparação entre os preços de opções com maturidade em 90 dias.

Além dessa convergência em *Moneyness,* podemos observar também como o prêmio calculado pelo EET se mostra maior do que o calculado pelo BS.

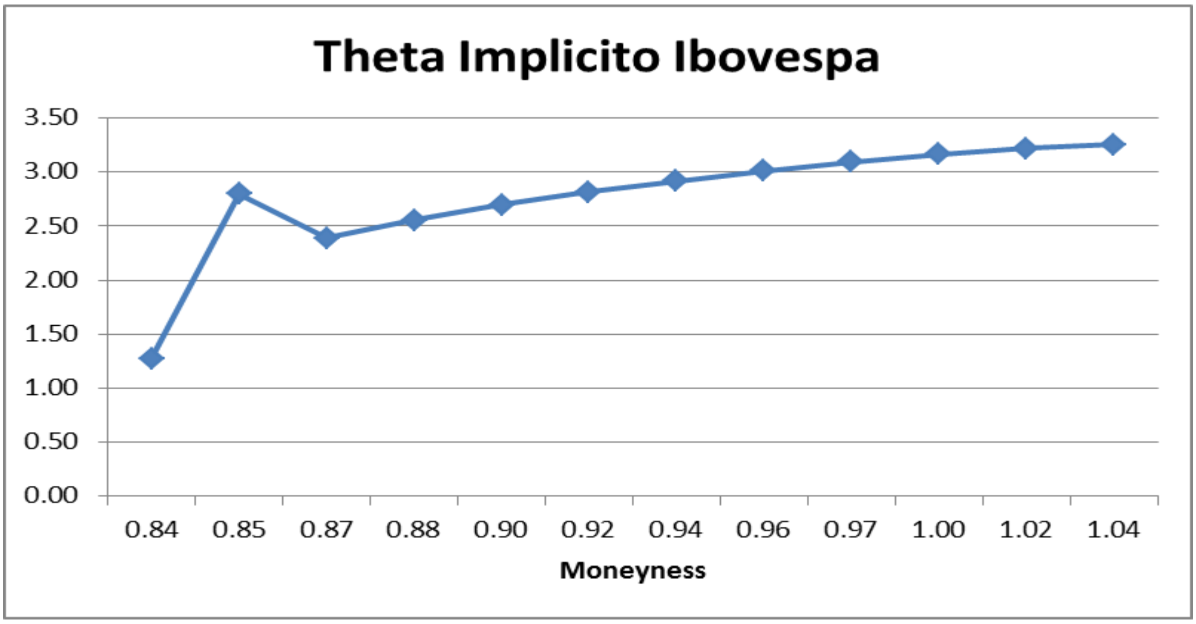
Essa diferença existente entre os preços teóricos e o mercado é dada, em grande parte, pela volatilidade implícita nos preços (BS) e pelo theta implícito (EET) não serem constantes com relação ao *moneyness*. Sendo assim, podemos calcular o parâmetro Esscher implícito utilizando o método da Bisseção na Eq 1 porém substituindo C(S,T) pelo preço da opção no mercado. Dessa forma obtêm-se os seguintes resultados:



Theta Implícito para maturidade em 30 dias



Theta Implícito para maturidade em 90 dias



Theta Implícito para maturidade em 120 dias

Como forma de ilustração, demonstra-se abaixo uma tabela com os preços calculados pelos dois modelos (EET e BS), o preço de mercado por opção e o theta implícito da mesma:

Como forma de ilustração, são apresentadas a seguir algumas tabelas com preços de mercado de opções de Ibovespa e preços calculados com os modelos:

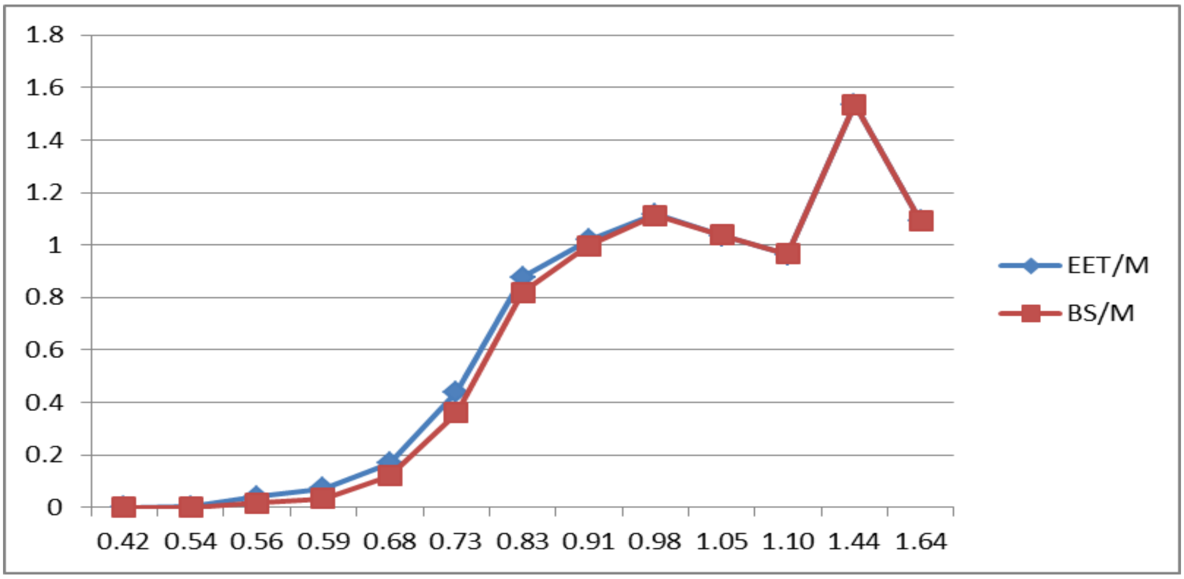
	Preços de Mercado		
Strike	**T = 30**	**T = 90**	**T = 120**
55000	47.5	704	1309
54000	69	900.5	1616.5
53000	105.5	1138	1966
52000	153.5	1417	2356
51000	231	1750.5	2793
50000	222.5	2132.5	3282
49000	470	2556	3813
48000	732.5	3042	4391
47000	1015.5	3584.5	5006
46000	1105	4172	5660
Ativo Subjacente	44893.5	46393.3	47772.1

	Preços EET		
Strike	**T = 30**	**T = 90**	**T = 120**
55000	22.2	753.1	1897.5
54000	38.2	937.0	2197.7
53000	64.7	1156.5	2534.6
52000	107.8	1416.5	2912.7
51000	175.4	1721.5	3332.1
50000	277.8	2076.2	3794.3
49000	429.0	2483.2	4300.4
48000	645.1	2945.6	4850.6
47000	940.9	3466.0	5443.4
46000	1327.6	4045.1	6078.3
Ativo Subjacente	44893.5	46393.3	47772.1

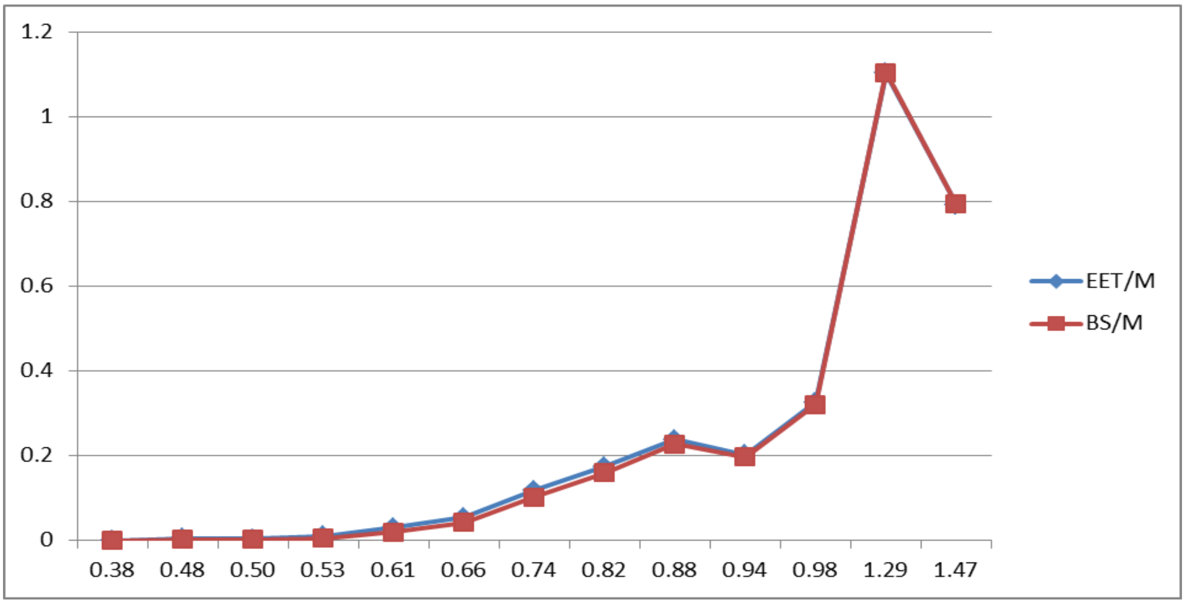
	Preços BS		
Strike	**T = 30**	**T = 90**	**T = 120**
55000	16.4	722.5	1855.2
54000	30.3	905.5	2158.1
53000	54.5	1125.4	2498.6
52000	94.8	1386.9	2878.8
51000	159.7	1694.4	3300.7
50000	260.2	2051.9	3765.7
49000	410.0	2462.8	4274.5
48000	624.2	2929.6	4827.6
47000	918.3	3453.5	5424.6
46000	1305.5	4034.6	6064.4
Ativo Subjacente	44893.5	46393.3	47772.1

c. Opções de PETR4:

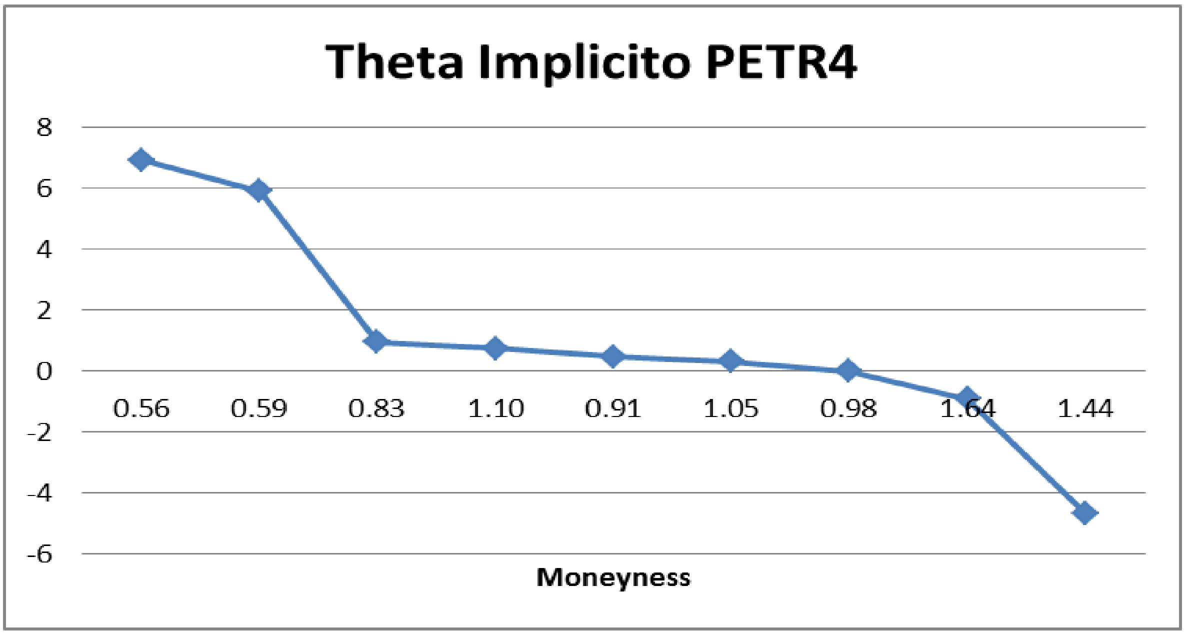
Para as opções de PETR4 seguiram-se as mesmas comparações, porém com vencimentos em 15 e 30 dias:



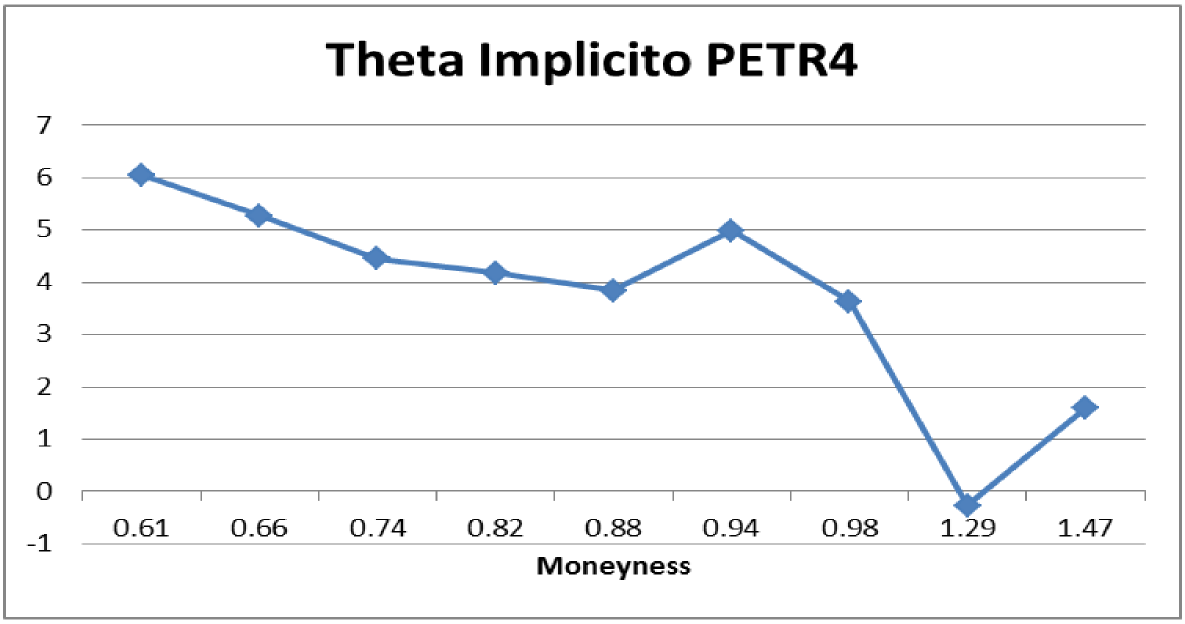
Diferença entre os preços dos métodos EET e BS e os preços de mercado para maturidade em 15 dias



Diferença entre os preços dos métodos EET e BS e os preços de mercado para maturidade em 30 dias



Theta Implícito para maturidade em 15 dias



Theta Implícito para maturidade em 30 dias

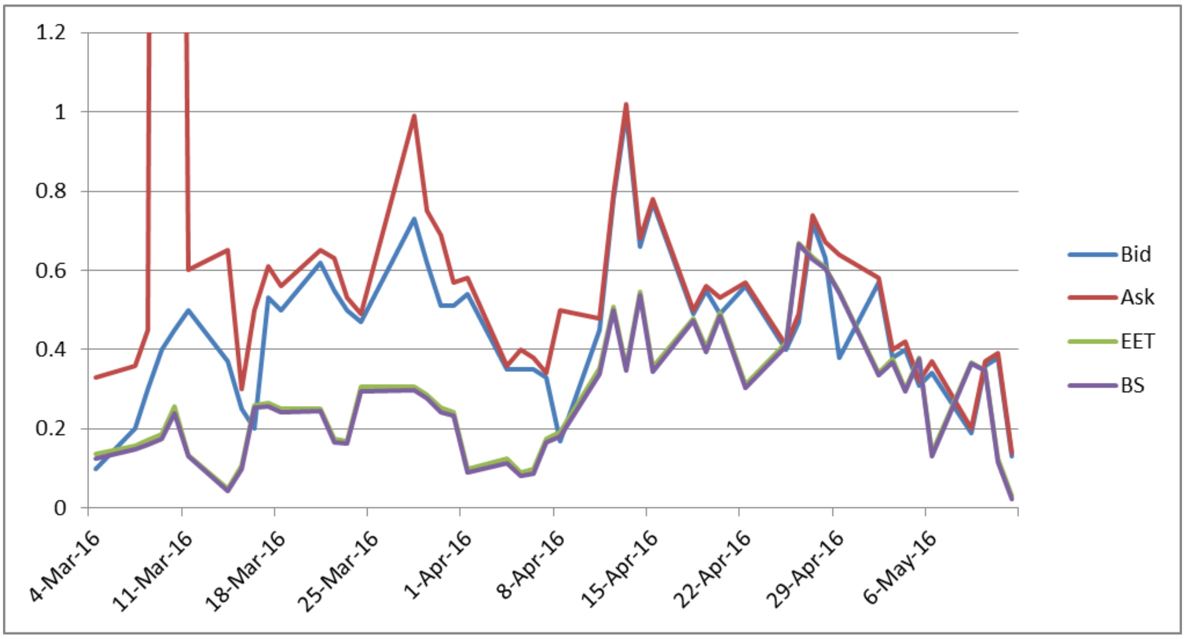
Como podemos ver os preços teóricos também diferiram dos preços de mercado, como esperado, dada a volatilidade implícita das opções. Mas, podemos ver nessas comparações de PETR4 uma distância menor entre os modelos BS e EET. O theta implícito também possui valores menores para opções no dinheiro, como esperado, dado que como as opções de PETR4 possuem maior liquidez, o *spread* cobrado entre o *bid* e o *ask* é menor do que nas opções de Ibovespa.

d. Comparação da curva de *bid* e *ask* com o EET:

Para analisar a liquidez de um ativo, quando se trata de opções, basta analisar o *spread* entre o *Bid* e o *Ask* no mercado. O *Bid* é menor preço atual em que um investidor estaria disposto a pagar por um determinado ativo, enquanto o *Ask* é o menor preço atual que um investidor estaria disposto a vender esse determinado ativo. O preço justo de mercado é portando o *Mid*, ou a média, entre o *Bid* e o *Ask*.

Para opções com pouca liquidez, existem grandes bancos ou instituições financeiras que atuam como *Market Makers,* que, para prover liquidez ao mercado, colocam ordens tanto de venda quanto de compra de um mesmo ativo. Porém, dependendo da liquidez desse ativo, o *Market Maker* pode "cobrar" um determinado *spread* maior ou menor do investidor. Como o preço justo de mercado é a média entre o *Bid* e o *Ask,* pode-se perceber que quanto maior a liquidez de um ativo, menores distorções existirão na sua marcação e preços mais próximos são obtidos com os modelos de apreçamento.

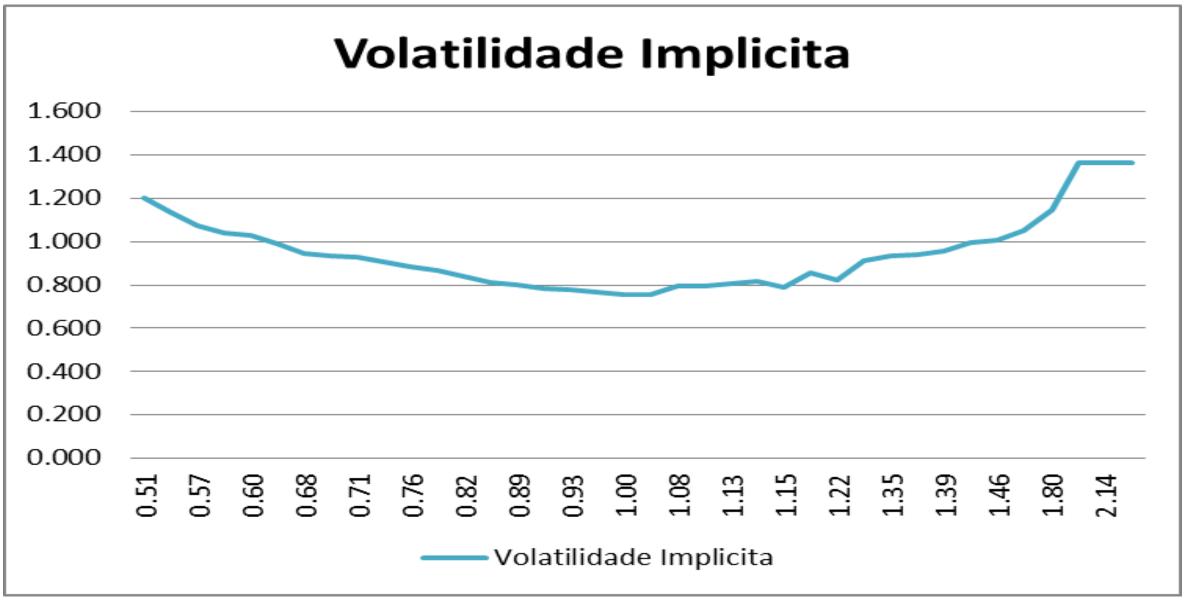
Assim, utilizando uma série temporal de Bid e Ask para uma *Call* de strike 10.25 de PETR4 e comparando junto o EET com o BS é bastante interessante estudar o gráfico abaixo:



A partir dele, pode-se começar a pensar em alguma decisão de investimento. É claro que boas decisões de investimento não possuem apenas logica numérica, mas também fundamentalista. Porém, olhando a série acima, podemos avaliar que o Mercado está precificando uma volatilidade, e, portanto, um preço, maior do que o calculado pelo EET e BS teórico. Dessa forma poderíamos olhar a curva de *Bid* (menor preço em que um investidor está disposto a comprar a opção de alguém) e observar como ela estava andando acima dos modelos calculados. Assim, uma decisão possível a ser tomada seria vender a opção e lucrar o seu premio no vencimento, ou apenas vender a opção nos picos da curva de *Bid*, comprando a mesma no posterior decréscimo de seu valor.

e. Sorriso da Volatilidade:

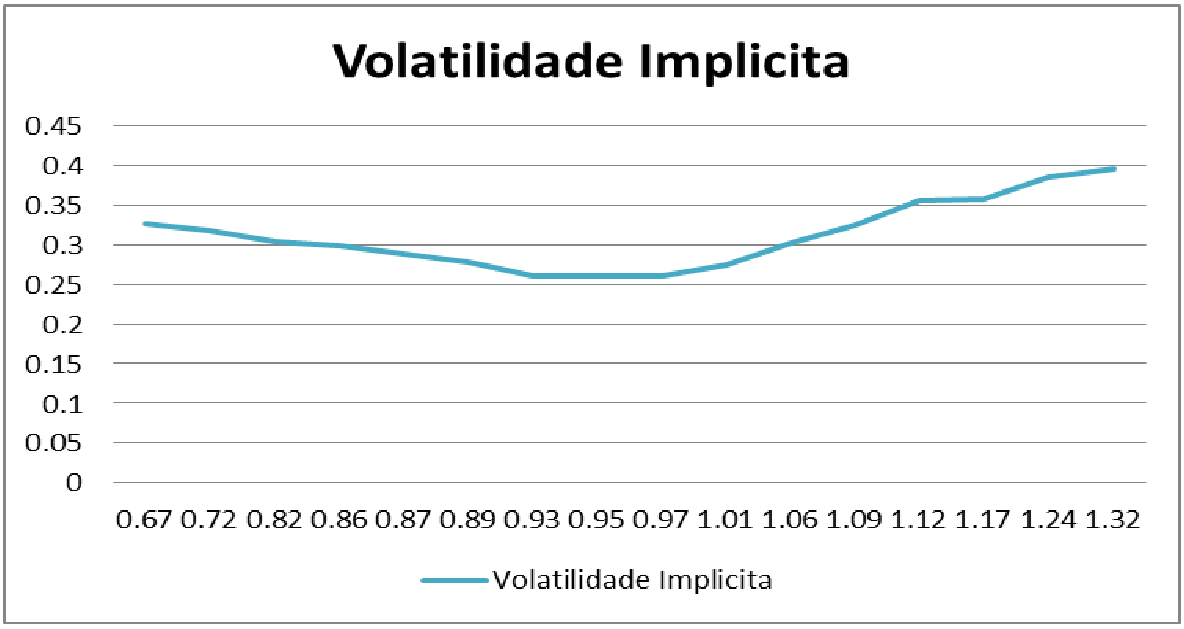
Podemos analisar a chamada curva "*Smile* da volatilidade" com as opções no dinheiro demostrando maior volatilidade do que as opções fora do dinheiro, e as opções com *Moneyness* próximo de 1 possuindo volatilidade menor do que todas as outras:



Volatilidade Implicita de opções de compra de Petr4 para vencimento em 30 dias

Como mostrado acima, a volatilidade precificada pelo Mercado nessas opções de compra da empresa Petrobras estão extremamente grandes, com valores excedendo 100%. Isso é interessante de se ver, pois durante essa época, o Brasil passava por uma de suas maiores crises politicas e econômicas e a Petrobras como empresa estatal estava no meio do maior escândalo de corrupção no país. Com todos esses eventos acontecendo de maneira simultânea, a ação da empresa (logo suas opções) passou a ser vitima de uma imensa incerteza, resultados da má gestão do Governo, acionista controlador da empresa.

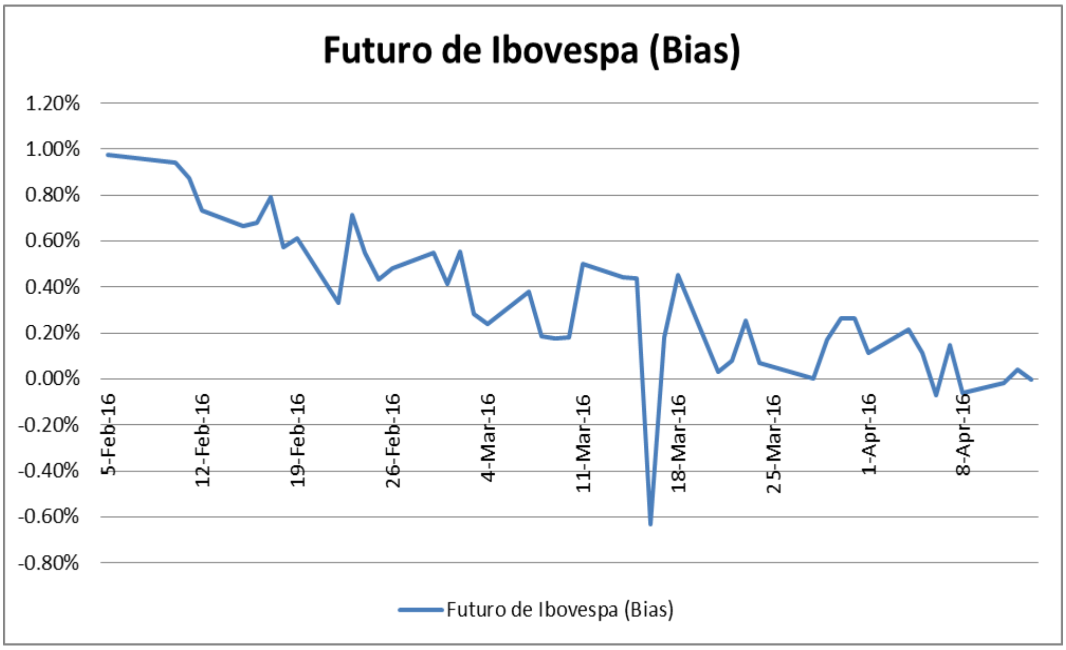
Como forma de demonstrar o estresse precificado pelo Mercado nessas opções devido à conjuntura político-econômica do país, podemos analisar o gráfico abaixo, que mostra a volatilidade implícita das opções de compra de Petrobras no mês de Outubro do ano de 2012 e observar uma drástica redução de volatilidade:



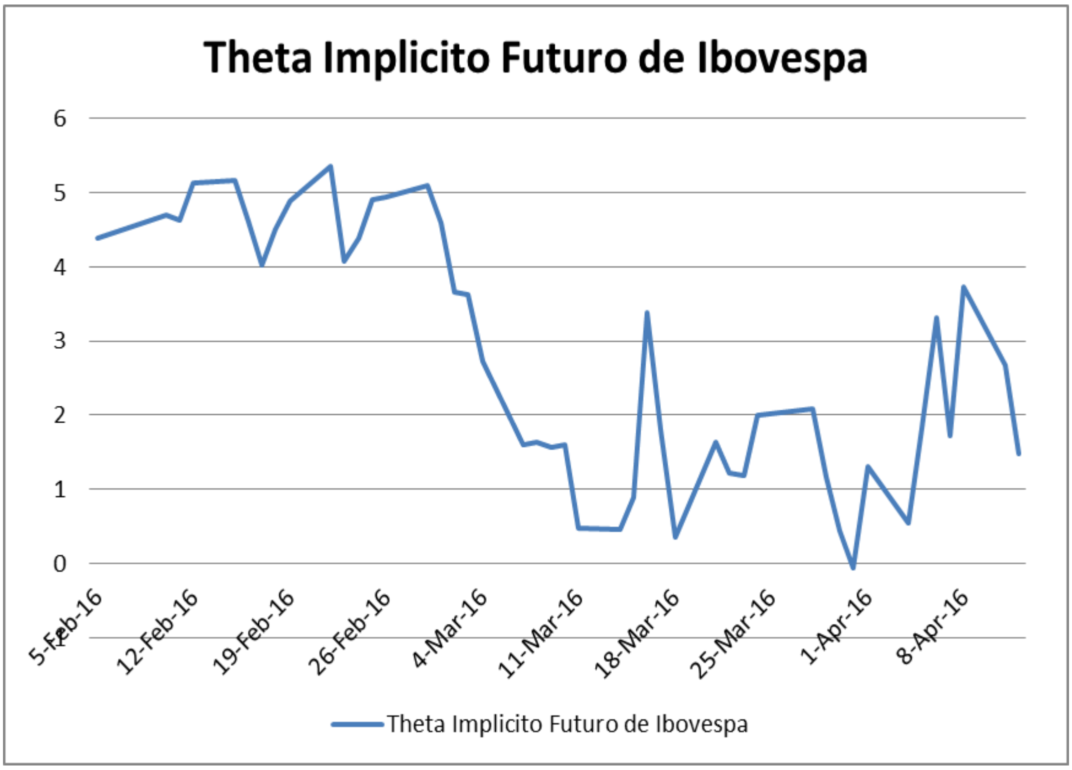
Volatilidade Implicita de opções de compra de Petr4 para vencimento em 30 dias

f. Futuro de Ibovespa

Com o EET podemos precificar qualquer derivativo, por exemplo, o Futuro de Ibovespa, negociado também na BM&F Bovespa. Basta utilizar a mesma equação [1] com K = 0. Para comparação foi criada a série temporal abaixo, onde é mostrada a diferença entre o preço do EET e o preço do Ibovespa Futuro observado no mercado.



O correspondente parâmetro de Esscher (theta) implícito para o futuro de Ibovespa pode ser visto na série temporal abaixo:



6. Conclusões

Conclui-se com esse trabalho que a Transformada de Esscher Empírica é um poderoso método para apreçar derivativos. Ele utiliza distribuições não paramétricas, diferente da equação de Black & Scholes que admite que os retornos são normais, e consegue assim um preço geralmente mais próximo do Mercado. Porém, é interessante fazer um estudo mais aprofundado do parâmetro Theta para se entender melhor como utilizá-lo no apreçamento neutro a risco para uma maior aproximação dos preços de Mercado.

7. Referências

[1] Options, Futures, and Other Derivatives - John C. Hull
[2] Estimation of Risk Neutral probability from Empirical Esscher Tranform –Pereira, M.;Veiga, A.
[3] Black, F.; Scholes M. (1973): The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81:637–659.
[4] Probabilidade e Estatistica na Engenharia –Hines, Montgomery, Goldsman, Borror
[5] Web site BM&F Bovespa
[6] Bloomberg LP
[7] Website http://quant-econ.net/ - Thomas J. Sargent; John Stachurski